

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 31/10/2025

Sappiamo che il **GRADIENTE** associa a una funzione un campo vettoriale:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ apso, } f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \sim \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right): A \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Invece la **DIVERGENZA** associa a un campo vettoriale una funzione:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ apso, } F = (F_1, \dots, F_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ campo vettoriale}$$

$$\sim \operatorname{div} F: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\text{si denota anche } \operatorname{div} F = \nabla \cdot F, \text{ esprimendo la forma } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right))$$

Infini, il **ROTORE** è definito in $\mathbb{R}^3$, e associa a un campo un campo:

$$A \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ apso, } F = (F_1, F_2, F_3): A \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo vett.}$$

$$\sim \operatorname{rot} F: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$(\text{si denota anche } \operatorname{rot} F = \nabla \times F).$$

Possiamo ora enunciare il primo fondamentale teorema classico di integrali dei campi vettoriali.

Teo. (TEOREMA DELLA DIVERGENZA, o DI GAUSS)

Siano $W \subseteq \mathbb{R}^n$ apso, $A \subseteq W$ apso.

t.c. $\bar{A} \subseteq W$ sia chiuso e limitato.

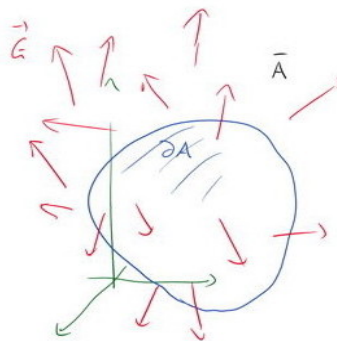
Sia $G: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vett. e

tale che $(\operatorname{supp} G) \cap \bar{A}$ sia compatto

Allora il flusso totale di G

uscite da ∂A è pari all'integrale di volume su A della divergenza di G :

$$\Phi_{\partial A}(G) = \int_A (\nabla \cdot G) d\lambda_n$$



sempre
vettori
del campo
quasi
a compatto

Questo teorema giustifica i risultati dell'ex. precedente per G_1 e L :

$$G_1 = (x, -y, 0) \quad \Phi_{\partial L}(G_1) = \Phi_S(G_1) + \Phi_{S_x}(G_1) + \Phi_{S_y}(G_1) + \Phi_{S_z}(G_1) = 0$$

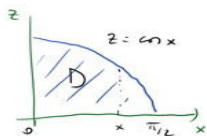
$$\operatorname{div} G_1 = 1 + (-1) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L \operatorname{div} G_1 dx dy dz = 0 \quad (\text{OK})$$

$$G_i(x, y, z) \text{ si può calcolare } \Phi_{\partial L}(G_i) = \Phi_S(G_i) = \frac{\pi(\pi-2)}{2}$$

$$\text{div } G_2 = 1+1+0 = 2 \Rightarrow \int_L \text{div } G_2 \, dx \, dy \, dz = \int_L 2 \, dx \, dy \, dz = 2 \text{Vol}(L).$$

$$\text{dopo per Gauss} \text{ due errori } \frac{\pi(\pi-2)}{2} = 2 \text{Vol}(L) \text{ cioè } \text{Vol}(L) = \frac{\pi(\pi-2)}{4}.$$

Vero? Vediamo.



$$\begin{aligned} \text{Guidiamo: } \text{Vol}(L) &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x \, dx \, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} x \, dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi(\pi-2)}{4} \end{aligned}$$

(OK!)

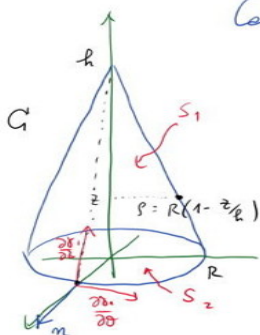
Se nel Teorema della divergenza $\Phi_{\partial L}(G) = \int_L (\nabla \cdot G) \, dV_n$

viene scelto un campo G t.c. $\nabla \cdot G \equiv 1$, a dx

troviamo $\text{Vol}_n(L)$: dopo il Teorema da un metodo alternativo

per il calcolo dei volumi. (Es. $G = \frac{1}{n}(x_1, \dots, x_n)$; $G(x, y, z) = \frac{1}{2}(x, y, 0)$)

Ex.



Calcolare il volume del cono G usando il T. Gauss.

Per simmetria cilindrica scegliamo $G = \frac{1}{2}(x, y, 0)$

Campo orizzontale $\Rightarrow \Phi_{S_2}(G) = 0$

$G = (0, 0, z)$

$S_1: \gamma(\theta, z) = (R(1-z/R) \cos \theta, R(1-z/R) \sin \theta, z)$

Normali alla S_1 a γ : uscite (vedi figure)

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1}(G) &= + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R(1-z/R) \cos \theta & -R(1-z/R) \sin \theta & -R/R \cos \theta \\ \frac{1}{2}R(1-z/R) \sin \theta & R(1-z/R) \cos \theta & -R/R \sin \theta \\ \frac{1}{2}R(1-z/R) & 0 & 1 \end{pmatrix} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h R^2/2 (1-z/R)^2 dz = 2\pi \cdot R^2/2 \left(-\frac{1}{3}(1-z/R)^3 \right) \Big|_0^h = \pi R^2 \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{\pi R^2 h}{3} \end{aligned}$$

Un'altra scelta (meno opportuna) più come ad esempio il campo $\tilde{G}$ a vettore radiale dal punto centrale dell'altezza: $\tilde{G}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z - h/2)$

$$\Phi_{S_1}(\tilde{G}) = + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3}R(1-z/R) \cos \theta & -R(1-z/R) \sin \theta & -R/R \cos \theta \\ \frac{1}{3}R(1-z/R) \sin \theta & R(1-z/R) \cos \theta & -R/R \sin \theta \\ \frac{1}{3}R(1-z/R) & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \dots = \frac{\pi R^2 h}{6}$$

Per S_2 : $\gamma(x, y) = (x, y, 0)$ con $(x, y) \in \bigcirc_R$ (normali alla S_2 : $\vec{n} = \vec{e}_3$ ovunque!)

$$\Phi_{S_2}(\tilde{G}) = - \int_{\bigcirc_R} \det \begin{pmatrix} x/3 & 1 & 0 \\ y/3 & 0 & 1 \\ -R/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \, dy = \frac{1}{6} \int_{\bigcirc_R} 1 \, dx \, dy = \frac{\pi R^2 h}{6}$$

$$\text{Dopo } \Phi_{\partial L}(\tilde{G}) = \Phi_{S_1}(\tilde{G}) + \Phi_{S_2}(\tilde{G}) = 2 \cdot \frac{\pi R^2 h}{6} = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad (\text{OK})$$

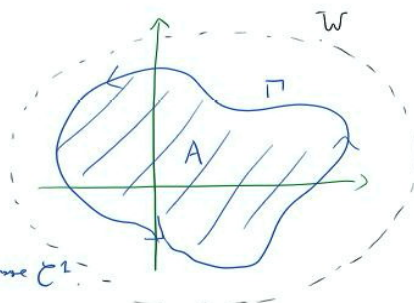
La versione del Teorema delle divergenze nel caso del piano ($n=2$) si chiama **Formula di GREEN**:

Tr. (Formula di GREEN)

Sia W apso di $\mathbb{R}^2$, Γ un circuito in W che sia il bord regolare di un apso A .

Sia dato un campo $(f, g) : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 .

Allora la circuitazione del campo (f, g) lungo Γ è pari all'integrale di area su A delle funzioni $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$:



$$\oint_{\Gamma} (f, g) \cdot (dx, dy) = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Dim. Nel T. divergenze scegliamo $G = (g, -f)$. Si ha $\nabla \cdot G = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$, e il flusso uscente di G da $\Gamma = \partial A$ è proprio uguale

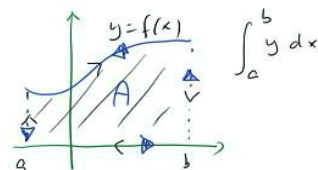
alle circuitazioni di (f, g) lungo Γ : infatti, se $\alpha : [a, b] \rightarrow W$ parametrizza Γ in modo coerente all'orientazione anti-oraria, allora

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma}(G) &= + \int_a^b \det \begin{pmatrix} g(\alpha(t)) & \alpha_1'(t) \\ -f(\alpha(t)) & \alpha_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b (f(\alpha(t)) \alpha_1'(t) + g(\alpha(t)) \alpha_2'(t)) dt \\ &= \oint_{\Gamma} (f, g) \cdot (dx, dy) \quad // \end{aligned}$$

Anche in questo caso, scegliendo (f, g) di modo che $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 1$,

si trova Area(A). Ad esempio, $(f, g) = (0, x)$, $(-y, 0)$, $(-y/2, x/2) \dots$

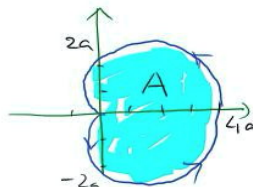
$$\text{Area}(A) = \oint_{\partial A} x dy = - \oint_{\partial A} y dx$$



Queste formule sono particolarmente utili quando la regione A è

descritta che quelle contenute all'interno di un cerchio
 dato in forma parametrica.

Ex. Calcolare l'area contenuta all'interno delle cardioidi $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$
 (Già calcolata: veniva $6\pi a^2$)



$$\gamma(\theta) = (2a(1 + \cos\theta) \cos\theta, 2a(1 + \cos\theta) \sin\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$Area(A) = \oint_{\partial A} x dy = \int_0^{2\pi} x(\theta) \cdot y'(\theta) d\theta =$$

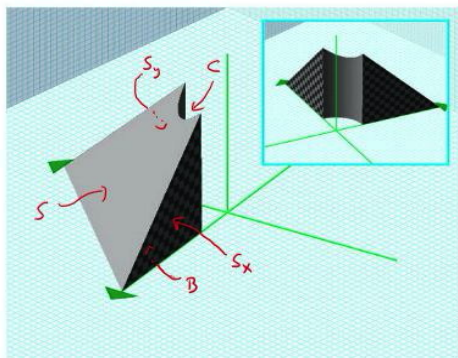
$$= \int_0^{2\pi} 2a(1 + \cos\theta) \cos\theta \cdot 2a(\cos\theta + \sin^2\theta) d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 2\cos^3\theta - \cos\theta + 2\cos^4\theta - \cos^2\theta) d\theta = 8a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 8a^2 \left(\left[\sin\theta \cos^3\theta \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin\theta (-3\sin\theta \cos^3\theta) d\theta \right)$$

$$= 24a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = 6a^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2 \quad (ok)$$

Ex. I punti (3.b-c) dell'esame scritto del 29/8/2016.



$$E = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1, x^2+y^2 \geq 1\}$$

(b) Verificare il T. Gauss
 su E e il campo $F = (1, -1, 0)$.

(c) Calcolare l'area della base
 usando la formula di Green.

(b) F costante $\Rightarrow \nabla F = 0$. Dunque andrò a verificare che il flusso totale
 di F uscente da ∂E è nullo.

F orizzontale $\Rightarrow \Phi_B(F) = 0$

$$\Phi_{S_x}(F) = \int_{\Delta_{S_x}} (1, -1, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = - \int_{\Delta_{S_x}} 1 dy dz = -Area(S_x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Phi_{S_y}(F) = \int_{\Delta_{S_y}} (1, -1, 0) \cdot (0, -1, 0) dx dz = Area(S_y) = \frac{1}{2}$$

$$C \text{ (sup. cilindrica)} : \gamma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, z \leq 1-x-y = 1-\cos\theta-\sin\theta$$

(normali 216 e 614 uscite dal cilindro e dopo ENTRARE IN E)

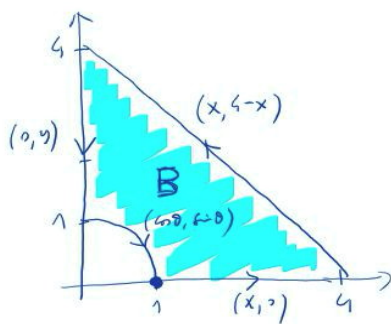
$$\begin{aligned}\phi_c(F) &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4-\cos\theta-\sin\theta} \det \begin{pmatrix} 1 & -\sin\theta & 0 \\ -1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4-\cos\theta-\sin\theta} (\cos\theta - \sin\theta) dz \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \sin\theta) (4 - \cos\theta - \sin\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} (4(\cos\theta - \sin\theta) - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[4(\sin\theta + \cos\theta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 0 \quad (\text{come prevedibile geometricamente...})\end{aligned}$$

Per S , considerazioni geometriche ($F \parallel S$) mi suggeriscono che $\phi_S(F)$ sarà nullo...

$S: \gamma(x,y) = (x, y, 4-x-y)$ con $(x,y) \in$  (manuale alternativo: uscente da E)

$$\phi_S(F) = + \int_{\triangle} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx dy = 0. \quad \text{Dunque Gauss è verificato (flusso totale uscente è nullo).}$$

(c)



Area (geom. elementare): $\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \pi = 8 - \pi/4$

Con Green calcolerò la circolazione del campo $(0, x)$ lungo il bordo percorso in senso antiorario.

Partiamo ad esempio dal punto $(1,0)$

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} x dy &= \int_1^4 (0, x) \cdot (1, 0) dx + \int_0^4 (0, x) \cdot (1, -1) dx \\ &+ \int_0^1 (0, 0) \cdot (0, 1) dy + \int_{\pi/2}^0 (0, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta\end{aligned}$$

$$\int_0^4 x dx + \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + \left[\frac{\theta + \sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/2}^0 = 8 - \pi/4$$

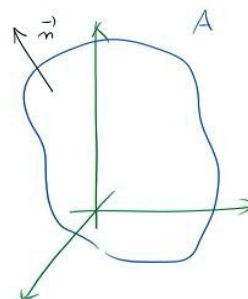
Altre conseguenze utili del T. divergenze (praticante una sua versione vettoriale)

Teor. (Teorema del Green)

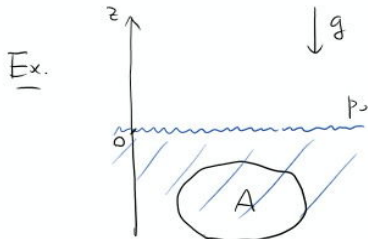
Sia W apr. di $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq W$ un apr. t.c. $\bar{A} \subseteq W$ sia unita e bordata. Dato un campo scalare $u: W \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ t.c.

$\bar{A}$ non suppo sia compatto, allora vale

$$\int_{\partial A} u(x) \vec{n}(x) dx = \int_A \nabla u d\lambda_n$$



Dim. Applico il T. divergenza a tutti i campi $\vec{G}_j = u(x) \vec{e}_j$:
 nasce che $\int_{\partial A} u(x) \vec{n}_j(x) dA = \int_A \frac{\partial u}{\partial x_j} dA$:
 basta moltiplicare ambos i membri per il vettore $\vec{e}_j$
 e poi sommare per $j = 1, \dots, n$. //



QUALE FORZA AGISCE SUL CORPO A
 PER IL SOLO FATTO DI ESSERE IMMERSO
 IN UN FLUIDO DI DENSITA' ρ (kg/m^3)?

Però in $p(z) = p_0 - \rho g z$ ← caso lineare
 e la proprietà

Forza: $-\int_{\partial A} p(z) \vec{n} dA$ $(0,0,-\rho g) = -\rho g \vec{e}_3$

Per il T. Gauss: Forza = $-\int_A \nabla p(z) dx dy dz = (\rho g \int_A 1 dx dy dz) \cdot \vec{e}_3$
 $= \rho g \cdot \text{Vol}(A) \cdot \vec{e}_3$ (PRINCIPIO DI ARCHIMEDE)

Terminiamo con la ^(detto anche TEOREMA DEL ROTORE) **FORMULA DI KELVIN-STOKES**, che generalizza le formule di Green al caso di superfici in $\mathbb{R}^3$.

Teo. (FORMULA DI KELVIN-STOKES, o TEOREMA DEL ROTORE)

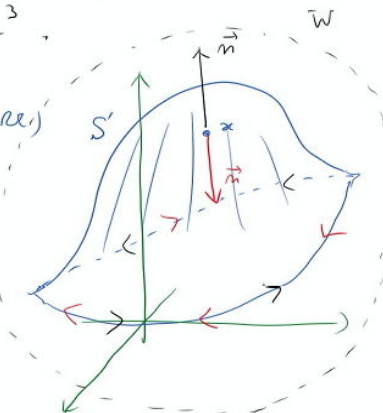
Sia W apso. di $\mathbb{R}^3$, e sia S una superficie bordata orientata compatta.

Sia poi $F: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$.

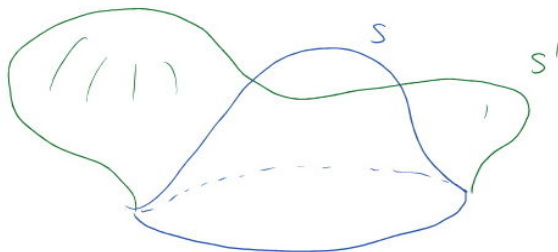
Allora

$$\oint_{+\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_S (\nabla \times \vec{F})$$

(Si intende con $+\partial S$ che l'orientazione di ∂S deve essere coerente con quella scelta per S , vedi figura)

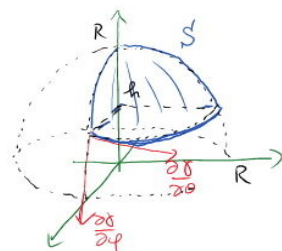


Una conseguenza immediata del T. Rotore è che S può essere sostituita, nel calcolo del flusso del rotore $\oint_S (\nabla \times \vec{F})$, da una QUALUNQUE ALTRA SUPERFICIE S' che abbia ∂S come bordo: il risultato non cambierebbe, sarà sempre la CIRCONFERENZA $\oint_{+\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x}$.



(Le dim. non le diamo a lezione, si trova sempre nelle note: l'idea è di usare una parametrizzazione di S per ricondurre a un apso. di $\mathbb{R}^2$, e lì applicare Green.)

Ex. Verificare la formula di Kelvin-Stokes per il comp.
 $F = (1, 0, x^2)$ e la porzione di calotta
 sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq h\}$ contenuta nel I° ottante.

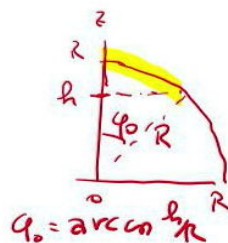


$$F = (1, 0, x^2)$$

$$\gamma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (normale all'orizzonte ENTRANTE)

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = (0, -2x, 0)$$



$$\oint_S (\nabla \times F) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\varphi_0} \det \begin{pmatrix} 0 & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi \\ -2R \cos \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & -R \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\varphi_0} 2R \cos \theta \sin \varphi \cdot R^2 \sin \theta \sin^2 \varphi d\varphi = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin^3 \varphi d\varphi$$

$$= 2R^3 \cdot \left(-\frac{\cos 2\theta}{4} \right)_0^{\pi/2} \cdot \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)_0^{\varphi_0} = 2R^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{3} \frac{h^3}{R^3} - 1 \right) \right)$$

$$= R^3 \left(\frac{h^3}{3R^3} - \frac{h}{R} + \frac{2}{3} \right) = \frac{h^3 - 2R^2 h + 2R^3}{3}$$

Calcoliamo ora la circolazione di F
 lungo il bordo di S (giorno in senso orario (indotto dall'orientamento di S , che ha la normale entrante).

$$\oint_{\partial S} F \cdot d\vec{x} = \int_{\varphi_0}^0 (1, 0, R^2 \sin^2 \varphi) \cdot (R \cos \varphi, 0, -R \sin \varphi) d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\varphi_0} (1, 0, 0) \cdot (0, R \cos \varphi, -R \sin \varphi) d\varphi +$$

$$+ \int_{\pi/2}^0 (1, 0, R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi_0) \cdot (-R \sin \theta \sin \varphi_0, R \cos \theta \sin \varphi_0, 0) d\theta$$

$$= \int_{\varphi_0}^0 (R \cos \varphi - R^3 \sin^3 \varphi) d\varphi + 0 + \int_{\pi/2}^0 (-R \sin \theta \sin \varphi_0) d\theta$$

$$\left(R \sin \varphi - R^3 \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right) \Big|_{\varphi_0}^0 - R \sin \varphi_0 \cdot (-\cos \varphi) \Big|_{\pi/2}^0$$

$$= -R^3 \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(R \sin \varphi_0 - R^3 \left(-\frac{h}{R} + \frac{h^3}{3R^3} \right) \right) - R \sin \varphi_0 \cdot (-1)$$

$$= \frac{2}{3} R^3 - h R^2 + \frac{h^3}{3}, \text{ come prima.}$$

Dunque la formula di Kelvin-Stokes risulta verificata.