

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

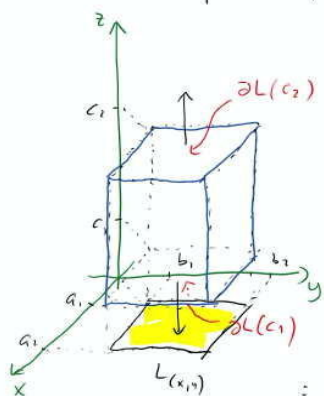
Corrado Marastoni

Lezione di martedì 04/11/2025

Diamo le dimostrazioni del Teorema di Gauss (T. Divergenza)

in due casi in cui il dominio compatto è in $\mathbb{R}^3$ e di forma semplice.

(1) Domini parallelepipedi: $L = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$.



$$G = (G_1, G_2, G_3).$$

$$\Phi_{\partial L(c_1) \cup \partial L(c_2)}(G) = \int_{\partial L(c_2)} (G \cdot \overset{e_3}{n}) d\sigma + \int_{\partial L(c_1)} (G \cdot \overset{-e_3}{n}) d\sigma$$

$$= \int_{L(x,y)} G_3(x,y,c_2) dx dy - \int_{L(x,y)} G_3(x,y,c_1) dx dy$$

$$= \int_{L(x,y)} (G_3(x,y,c_2) - G_3(x,y,c_1)) dx dy$$

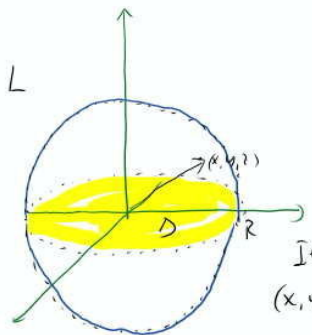
$$= \int_{L(x,y)} \left(\int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z) dz \right) dx dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_L \frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z) dx dy dz$$

Dai conti analoghi per le altre coppie di facce relative

$$\int_L \frac{\partial G_1}{\partial x} dx dy dz \text{ e } \int_L \frac{\partial G_2}{\partial y} dx dy dz; \text{ sommando membro a membro}$$

le tre uguaglianze si ottiene il T. Gauss.

(2) Domini: palla di raggio R (possiamo pensare, e meno di una traduzione - che è un diffeomorfismo! - che il centro sia $O(0,0,0)$)



$$G = (G_1, G_2, G_3) = G' + G'' + G'''$$

$$\text{ovv } G' = (G_1, 0, 0), G'' = (0, G_2, 0), G''' = (0, 0, G_3)$$

Insomma calcolando il flusso uscente di G'''

$$\text{da } \partial L = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Il vettore normale uscente a ∂L nel punto

$$(x,y,z) \in \partial L \text{ è } \vec{n} = \frac{1}{R}(x,y,z) = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right).$$

Parametrizziamo separatamente gli emisferi sup. e inf. $\partial L^\pm$ con

$$\gamma(x,y) = (x,y, \pm z_{x,y}) \text{ ove } z_{x,y} = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ e } (x,y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\Phi_{\partial L}(G''') = \Phi_{\partial L^+}(G''') + \Phi_{\partial L^-}(G''') = \int_{\partial L^+} G''' \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\partial L^-} G''' \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$= \int_D \frac{R}{|z_{x,y}|} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D G_3(x, y, z_{x,y}) \cdot \frac{z_{x,y}}{R} \cdot \frac{R}{z_{x,y}} dx dy + \int_D G_3(x, y, -z_{x,y}) \cdot \frac{z_{x,y}}{R} \cdot \frac{R}{(-z_{x,y})} dx dy \\
&= \int_D (G_3(x, y, z_{x,y}) - G_3(x, y, -z_{x,y})) dx dy \\
&= \int_D \left(\int_{-z_{x,y}}^{z_{x,y}} \frac{\partial G_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy \stackrel{\text{Teorema}}{=} \int_L \frac{\partial G_3}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz
\end{aligned}$$

Facciamo gli analoghi conti per G' e G'' e dunque, si ottiene il T. Gauss. //

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (25/01/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome _____ Matr. _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

- Sia Γ l'insieme di livello di $g(x, y, z) = (xz^2 - y, 2z - \log(y - x))$ che contiene il punto $A(1, 2, 0)$.
 - Mostrare che Γ è una varietà regolare all'intorno di A (di che dimensione?), e determinarne una parametrizzazione locale e lo spazio tangente affine in A .
 - Dire rispetto a quale coordinata il punto A è stazionario in Γ , determinandone la natura.
 - Quali insiemi di livello di g sono varietà regolari? Di che dimensione? E quelli di g_1 ? E di g_2 ?
- Dire se $f(x, y) = \frac{x}{x-y}$ è integrabile sugli insiemi $A = \{(x, y) : 0 < 2y < x \leq 1\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2, x > 0, y > 0\}$ o $C = \{x \geq 1, -\frac{1}{x^2} < y \leq 0\}$, se si calcolando l'integrale.
 - La *cicloide* è la curva piana disegnata da una matita fissata sul bordo di un disco che, partendo con la matita in $(0, 0)$, rotola senza strisciare per un giro sull'asse x . Descriverla parametricamente (il raggio del disco sia R), e calcolare area e baricentro della zona tra essa e l'asse x .
- Si consideri il cono avente vertice a quota $2h$ sull'asse z e base il quarto di ellisse nel primo quadrante del piano (x, y) di semiassi a e b , e sia D il solido ottenuto troncando il cono a quota h . Siano poi L la porzione di superficie esterna di D non piana, e B quella sul piano (y, z) .
 - Calcolare il volume di D .
 - Verificare la formula di Stokes per B e per il campo $F = (z - x, y, 0)$.
 - Calcolare il flusso di F uscente da L col teorema di Gauss; e, se possibile, anche direttamente.
 - Impostare il calcolo dell'area di L , e terminarlo nel caso in cui $a = b$.

(1. a.) Funzioni $g(x, y, z) = (xz^2 - y, 2z - \log(y - x))$ $A(1, 2, 0)$
 Domini di g : $\{(x, y, z) : y > x\}$
 $J_g = \begin{pmatrix} z^2 & -1 & 2xz \\ \frac{1}{y-x} & -\frac{1}{y-x} & 2 \end{pmatrix}$ $J_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
 $\text{rk } J_g(A) = 2 \text{ (max)} \Rightarrow g \text{ immersione in } A \Rightarrow \Gamma \text{ curva regolare all'intorno di } A$
 $\Gamma = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = g(A) = (-2, 0)\} = \{xz^2 - y = -2, 2z - \log(y - x) = 0\}$
 Retta T affine a Γ in A : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Param. di Γ sono $A: J_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Possono esistere soluzioni $(x(z), y(z))$ o $(y(x), z(x))$

ma non $(x(y), z(y))$. Ad es., $(x(z), y(z))$

$$(x(0), y(0)) = (1, 2), \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Senza, derivando le equazioni risp. z :

$$\begin{cases} \dot{x} z^2 + x \cdot 2z - \dot{y} = 0 \\ 2 - \frac{\dot{y} - \dot{x}}{y-x} = 0 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} 0 + 0 - \dot{y}(0) = 0 \\ 2 - \frac{\dot{y}(0) - \dot{x}(0)}{2-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = -2 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Calcolo subito $\ddot{x}(0), \ddot{y}(0)$.

$$\begin{cases} \ddot{x} z^2 + \dot{x} \cdot 2z + \dot{x} \cdot 2z + 2x - \ddot{y} = 0 \\ - \frac{(\ddot{y} - \ddot{x})(y-x) - (\dot{y} - \dot{x})^2}{(y-x)^2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \dots \begin{cases} \ddot{x}(0) = -2 \\ \ddot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

(1.b) Condizion. aff. A si stabilisce risp. a $f(x, y, z) = x$:

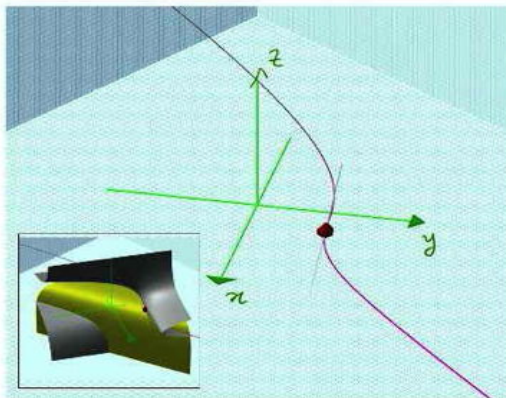
$$\text{rk} \begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1(A) \\ \nabla g_2(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f=x \\ \leftarrow g_1=y \\ \leftarrow g_2=z \end{matrix} < 3.$$

L'unico minimo di $J_g(A)$ singolare e' quello risp. x e z

$\Rightarrow A$ e' stazionaria su Γ risp. alle coordinate y .

(E' evidente anch. dal fatto che, in $y(z)$, si aveva $\dot{y}(0) = 0$).

Ed anche $\ddot{y}(0) = 2 > 0 \Rightarrow A$ pts di min. loc. stazion. f e y su Γ .



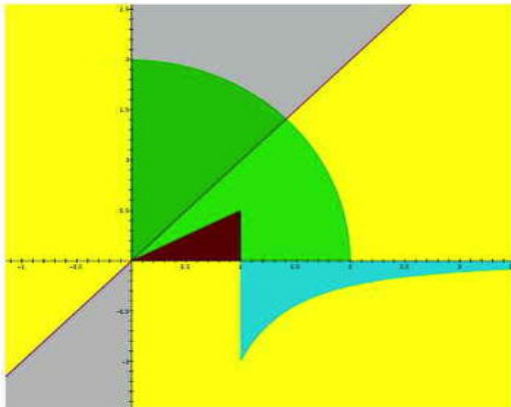
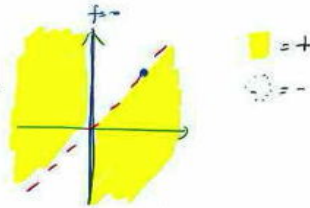
Dal disegno si intuisce che il punto A ($0, 1, 0$) e' un punto di minimo relativo strettamente locale coordinato y sulla curva Γ : in effetti a prime viste sembra una sella, ma guardando un po' meglio si nota invece che e' di minimo locale per la y (qui a destra e' schizzato un ingrandimento della figura).

(1.c) $J_g = \begin{pmatrix} z^2 & -1 & 2xz \\ \frac{1}{y-x} & -\frac{1}{y-x} & 2 \end{pmatrix}$. $\text{rk } J_g < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ \frac{xz}{y-x} = 1 \end{cases}$

$z=1 \Rightarrow x=y-x \Rightarrow y=2x$ Punti $(\alpha, 2\alpha, 1)$; $g(\alpha, 2\alpha, 1) = (-\alpha, 2 - \ln \alpha)$
 con $\alpha > 0$

$z=-1 \Rightarrow -x=y-x \Rightarrow y=0$ Punti $(\beta, 0, -1)$; $g(\beta, 0, -1) = (\beta, -2 - \ln(-\beta))$
 con $\beta < 0$

(2.a) $f(x,y) = \frac{x}{x-y} \quad f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad U =$



Per il triangolo con A, ottenere due $f > 0$, per T+F basta calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede.

$$\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x-y} dy dx = \int_0^1 x \left(-\ln(x-y) \right) \Big|_{y=0}^{y=x/2} dx = \int_0^1 x \left(-\ln \frac{x}{2} + \ln x \right) dx = \int_0^1 x \ln \frac{x}{x/2} dx = \frac{1}{2} \ln 2 \quad (f \in L^1(A))$$

Intorno B (verde): su esso la funzione $f(x,y) = \frac{x}{x-y}$ non ha segno costante.

Vediamo cosa accade su $B^\pm$: infatti $f \in L^1(B) \iff \begin{cases} f \in L^1(B^+) \\ f \in L^1(B^-) \end{cases}$

e se si vale $\int_B f = \int_{B^+} f + \int_{B^-} f$

Vantaggi di ragionare su $B^\pm$: lì per T+F si può calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede.

$$\int_{B^+} \frac{x}{x-y} dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^R \frac{\rho \cos \theta}{\rho \cos \theta - \rho \sin \theta} \rho d\rho = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} d\theta \sim \frac{1}{\pi/4 - \theta} \sim \frac{1}{\pi/4 - \theta} \text{ non integrabile!}$$

che però diverge $\rightarrow +\infty$ ($\frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \sim \frac{1}{\pi/4 - \theta} \sim \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\pi/4 - \theta)} \sim \frac{1}{\pi/4 - \theta}$ non integrabile)

Dunque $f \notin L^1(B^+) \Rightarrow f \notin L^1(B)$.

Vediamo ora per $C = \{ x > 1, -\frac{1}{x^2} \leq y \leq 0 \}$ (azzurro). IL CINTRO

Ma su C la funzione è > 0 . Dunque F-T calcoliamo un int. iterato.

$$\int_1^{+\infty} dx \int_{-1/x^2}^0 \frac{x}{x-y} dy = \int_1^{+\infty} x \left(-\ln(x-y) \right) \Big|_{y=-1/x^2}^{y=0} dx = \int_1^{+\infty} x \left(-\ln x + \ln \left(x + \frac{1}{x^2} \right) \right) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) dx \quad \text{dopo la funzione è } \sim x \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} \text{ integrabile!}$$

Dunque $f \in L^1(C)$. Calcoliamo: $\int_1^{+\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-3/x^4}{1 + 1/x^3} dx$

$$= \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{3}{2} \int \frac{x}{x^3+1} dx \quad \text{e la f si scompone}$$

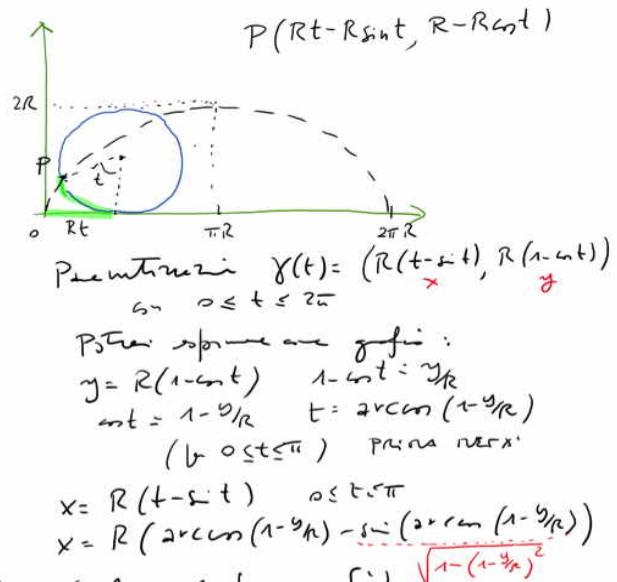
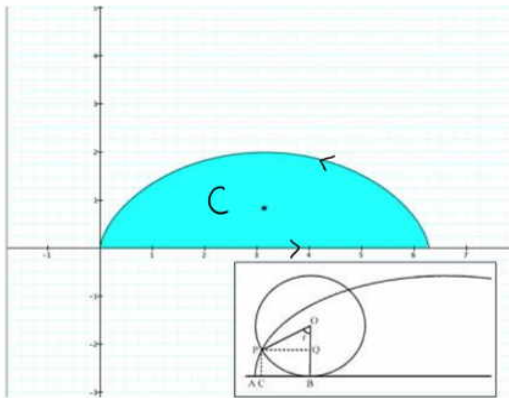
$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dots$$

Alle fine delle nostre le funzione

$$\frac{1}{2} \left(x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) + \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$$

che calcolate tra $x=1$ e $+\infty$ da' $\frac{1}{2} \left(0 + 0 + \sqrt{3} \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \ln \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

(2.b) Cicloide



Dopo si può esprimere in forma grafica (almeno le prime metà) ma è piuttosto complicato, e poi anche di più per calcolare la primitiva!

Meglio usare la formula di Green: $\text{Area}(C) = - \oint_C y dx =$

$$= - \int_0^{2\pi} R(1-\cos t) \cdot R(1-\cos t) dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos t + \cos^2 t) dt = R^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t + \sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi R^2$$

$x_{\text{cm}} = \pi$ per simmetria materiale.

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{3\pi R^2} \int_C y dx dy$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{3\pi R^2} \int_{\partial C} y^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{6\pi R^2} \int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2 \cdot R(1-\cos t) dt = +\frac{1}{6\pi} R \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt$$

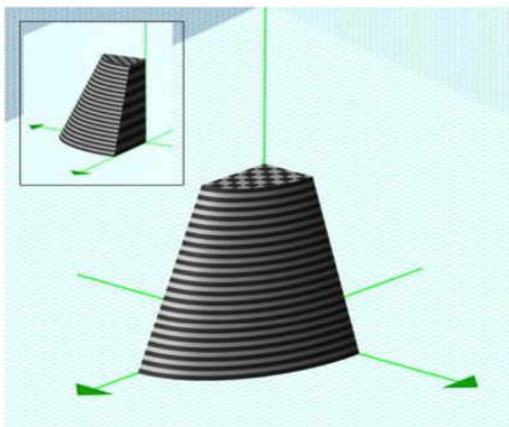
... = $\frac{5}{6} R$

Green:

$$\oint_C f dx + g dy = \iint_C \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Ad es.: $f = -\frac{1}{2} y^2, g = 0$

(3.a)



Lo vediamo in vari modi.

(1) z-fette. Per $0 \leq z \leq h$, la z-fetta è il quoziente d'ellissi di semiassi $(1-\frac{z}{2h})a$ e $(1-\frac{z}{2h})b$ di area $\frac{1}{4}\pi (1-\frac{z}{2h})^2 ab$ dunque

$$Vol(D) = \int_0^h \frac{1}{4}\pi (1-\frac{z}{2h})^2 ab dz = \frac{\pi ab}{4} \int_0^h (1-\frac{z}{2h})^2 dz$$

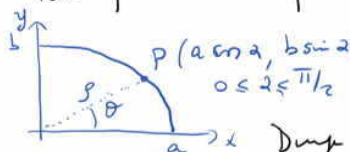
$$= \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{(1-\frac{z}{2h})^3}{3} \right) \Big|_0^h = \dots = \frac{7\pi}{96} abh.$$

(2) Generatrice elicoidale: differenza di volumi di cui

$$\frac{1}{3} \cdot 2h \cdot \frac{\pi ab}{4} - \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\pi \frac{a}{2} \frac{b}{2}}{4} = \frac{7\pi}{96} abh$$

(3) Ripartizione del caso circolare $(x, y, z) = \phi(u, v, w) = (au, bv, w)$
 Jacobiano: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = ab$ dunque $\text{Vol}(D) = \int_D dx dy dz = \int \phi^*(D)$
 (ma $\phi^{-1}(D)$ è il triangolo di cui la base $\square^1$) $= ab \left(\frac{1}{3} \cdot 2b \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} b \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{7\pi}{48} ab$

(4) Parametrizzazione globale di D. La scelta z come uno dei tre parametri naturali, il problema è quello di parametrizzare la base maggiorata in modo opportuno.

 $p(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ $0 \leq \alpha \leq \pi/2$
 $\frac{b \sin \alpha}{a \cos \alpha} = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta}$ $\tan \alpha = \frac{b}{a} \tan \theta$
 Le curve ellittiche γ param. da $\gamma(\alpha) = (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$
 Dunque l'ellisse (area) è param. da $\gamma(s, \alpha) = (sa \cos \alpha, sb \sin \alpha)$
 ove $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

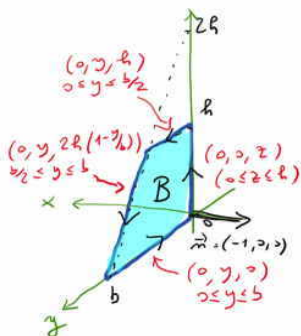
Dunque il mio corpo D è parametrizzato da
 $\gamma(s, \alpha, z) = (sa(1-z/2l) \cos \alpha, sb(1-z/2l) \sin \alpha, z)$ con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$
 $0 \leq s \leq 1$
 $0 \leq z \leq l$
 Nella condizione (s, α, z) il corpo D è diverso il parallelepipedo $[0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, l]$.

$\text{Vol}(D) = \int_D 1 dx dy dz = \int_D \odot ds d\alpha dz$, ove $\odot$ è il modulo del det. del cambio di base.

$$\begin{pmatrix} a(1-z/2l) \cos \alpha & -sa(1-z/2l) \sin \alpha & -\frac{sa}{2l} \cos \alpha \\ b(1-z/2l) \sin \alpha & +sb(1-z/2l) \cos \alpha & -\frac{sb}{2l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\det| = s(1-z/2l)^2 ab$$

$$\text{Dunque } \text{Vol}(D) = \int_0^1 ds \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^l s(1-z/2l)^2 ab dz = \frac{\pi ab}{2} \left(\frac{s^2}{2} \right)_0^1 \cdot \left(\frac{(1-z/2l)^3}{3 \cdot (-1/2l)} \right)_0^l = \frac{7\pi}{48} \pi ab l$$

(3.b)



$$F = (z-x, y, 0)$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ z-x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

$$\oint_B (\nabla \times F) = \int_B (0, 1, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = 0$$

D'altra parte

$$\oint_{\partial B} F \cdot dx = \int_0^h (z, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) dz + \int_0^{b/2} (h, y, 0) \cdot (0, 1, 0) dy + \int_{b/2}^0 (2h(1-y/b), y, 0) \cdot (0, 1, -2h/b) dy + \int_b^0 (0, y, 0) \cdot (0, 1, 0) dy$$

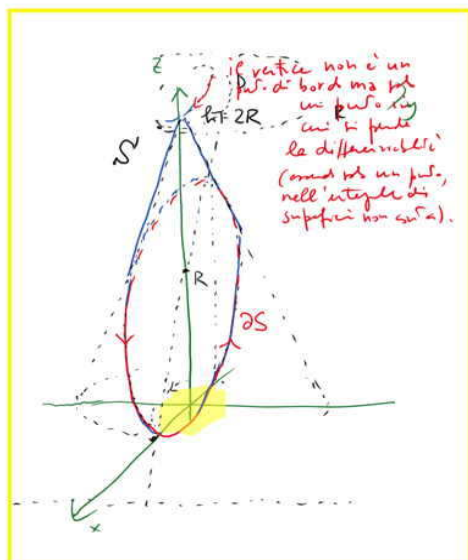
$$= \int_0^{b/2} y dy + \int_{b/2}^b y dy - \int_0^b y dy = 0 \quad (\text{OK})$$

Qui di seguito le soluzioni di (3.c) e (3.d).

(c) Poiché il campo F ha divergenza nulla, il teorema di Gauss dice che il flusso totale di F uscente dalla superficie esterna ∂D è nullo. D'altra parte, F è un campo orizzontale (l'ultima componente è nulla) e dunque i suoi flussi attraverso le porzioni orizzontali (basi sopra e sotto) di ∂D sono nulli; e sul piano (x, z) esso è parallelo all'asse x (le ultime due componenti sono nulle) e dunque è nullo anche il suo flusso attraverso la porzione di ∂D su tale piano. In sostanza, Gauss dice che il flusso di F uscente da L è l'opposto del flusso di F uscente da B , che è di facile calcolo: $\int_B (z, y, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -\int_B z dy dz = -\int_0^h dz \int_0^{b(1-\frac{z}{2h})} z dy = -b \int_0^h z(1-\frac{z}{2h}) dz = -b(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h})_0^h = -\frac{1}{3}bh^2$. Pertanto il flusso di F uscente da L vale $\frac{1}{3}bh^2$. • Col conto diretto, L si può parametrizzare usando la parametrizzazione γ di D bloccata su $s = 1$, ovvero $((1-\frac{z}{2h})a \cos \psi, (1-\frac{z}{2h})b \sin \psi, z)$ con $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq h$, e il flusso di F uscente da L viene $+\int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} z - (1-\frac{z}{2h})a \cos \psi & -(1-\frac{z}{2h})a \sin \psi & -\frac{1}{2h}a \cos \psi \\ (1-\frac{z}{2h})b \sin \psi & (1-\frac{z}{2h})b \cos \psi & -\frac{1}{2h}b \sin \psi \end{pmatrix} d\psi = b \int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z(1-\frac{z}{2h}) \cos \psi - (1-\frac{z}{2h})^2 a \cos 2\psi) dz = b \int_0^h (1-\frac{z}{2h})(z \sin \psi - \frac{1}{2}a(1-\frac{z}{2h}) \sin 2\psi) \Big|_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} dz = b \int_0^h z(1-\frac{z}{2h}) dz$, che come prima dà $\frac{1}{3}bh^2$.

(d) La parametrizzazione di L dà a conti fatti un elemento d'area $d\sigma = (1-\frac{z}{2h})\sqrt{\frac{a^2b^2}{4h^2} + a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} d\psi dz$, e l'area di L ne risulta $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, h]} d\sigma$. • Nel caso $a = b$ l'integrale diventa $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, h]} (1-\frac{z}{2h})\sqrt{\frac{a^4}{4h^2} + a^2} d\psi dz$, e il suo calcolo dà $a\sqrt{1+\frac{a^2}{4h^2}} \int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\frac{z}{2h}) d\psi = \frac{\pi}{2}a\sqrt{1+\frac{a^2}{4h^2}} \int_0^h (1-\frac{z}{2h}) dz = \frac{\pi}{2}a\sqrt{1+\frac{a^2}{4h^2}}(z-\frac{z^2}{4h})_0^h = \frac{3\pi}{8}ah\sqrt{1+\frac{a^2}{4h^2}}$ (risultato che — lo si verifichi — coincide con quello che otterremmo con la geometria elementare del cono circolare).

Proponiamo anche di affrontare i seguenti tre esercizi



Ex.1

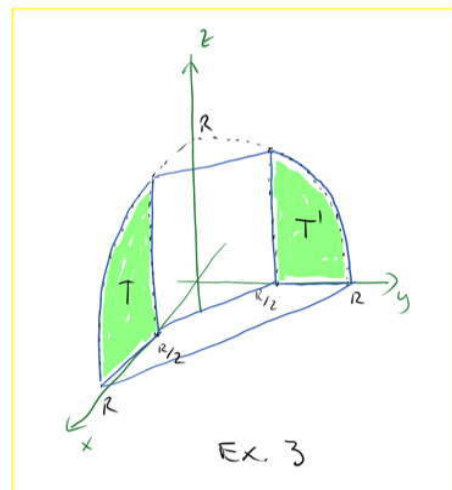
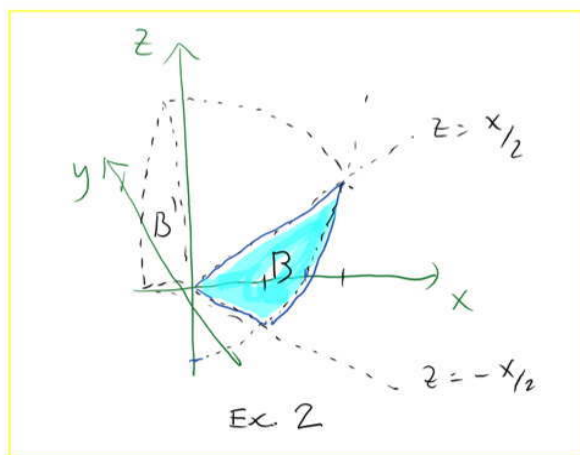
Consideriamo la porzione della sup. conica S di raggio R e altezza $h=2R$ che sta sopra il piano $z=R-x$.

Verifichiamo le formule di Kelvin - Stokes (T. Rotore) per S e per $F = (y, -x, z)$.

Ex 2 Nel piano (x, z) disegnare $B = \{ z \geq \frac{x^2}{2a}, |z| \leq \frac{x}{2} \}$ (per $a > 0$).

[Ex. 3
F. G. G.
Es. 2.]

- Area e baricentro di B , e volume del solido D ottenuto ruotando B di angolo $\pi/2$ attorno all'asse z .
- Sia $S = \partial D$, e sia S' la parte di S ottenuta ruotando l'arco di parabola di ∂B .
Calcolare il flusso di $F = (x-z, y, 0)$ attraverso S', B, S' ;
se si vuole, calcolare anche i flussi attraverso le altre porzioni di S .
- Calcolare le circunferenze di F lungo ∂B e $\partial S'$, in due modi.
- Estremi assoluti di $f(x, y, z) = \sqrt{3}(x-z) + y$ sul compatto D .



Ex 3 (Esame scritto del 20/2/2012)

Nel piano (x, z) disegnare $T = \{ (x, z) : \frac{1}{2}R \leq x \leq R, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq R^2 \}$,
per $R > 0$. Detto T' l'analoga figura sul piano (y, z) ,
sia E il solido ottenuto unendo con segmenti i punti corrispondenti di T e T' .

- Disegnare E , parametrizzare opportunamente e calcolare il volume.
Verificare poi il T. Gauss per E e il campo $F = (x, y, -1)$.
- Calcolare l'area delle porzioni curve S' di ∂E nell'ottante $x, y, z \geq 0$. Verificare il T. Rotore (formule di K-S) per S' e per il campo $H = (0, x, -z)$.

Riformulazioni DEGLI ESERCIZI 12-3

Ex. 1

Visto che la superficie di sinistra è simmetrica cilindrica, conviene parametrizzare S con grafico $z(x, y)$: $\frac{z}{h} + \frac{x}{R} = 1 \leadsto \frac{z}{h} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} = 1 \xrightarrow{(h=2R)} \frac{z}{2} + \sqrt{x^2 + y^2} = R$

dunque $z(x, y) = 2(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, su $(x, y) \in D = ?$

$$\begin{cases} z = 2(R - \sqrt{x^2 + y^2}) & \leadsto 2(R - \sqrt{x^2 + y^2}) = R - x & \leadsto 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + R \\ z = R - x & \leadsto 4x^2 + 4y^2 = x^2 + R^2 + 2Rx & 3x^2 + 4y^2 - 2Rx - R^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(3x^2 - 2Rx + \frac{R^2}{3}\right) - \frac{R^2}{3} + 4y^2 - R^2 = 0 \quad \frac{(x - R/3)^2}{(2R/3)^2} + \frac{y^2}{(R/\sqrt{3})^2} = 1$$

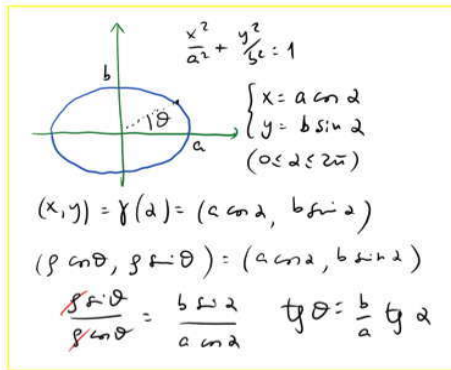
Dunque $D = \left\{ \frac{(x - R/3)^2}{(2R/3)^2} + \frac{y^2}{(R/\sqrt{3})^2} \leq 1 \right\}$ (ellisse di centro $(R/3, 0)$ e semiasse
risp. $2R/3$ e $R/\sqrt{3}$).

$$F = (y, -x, z) \leadsto \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = (0, 0, -2)$$

$$\Phi_S(\nabla \times F) = \int_D \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} dx dy \quad \left(\begin{array}{l} \gamma(x, y) = (x, y, 2(R - \sqrt{x^2 + y^2})) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \end{array} \right)$$

$$= -2 \int_D dx dy = -2 \text{Area}(D) = -2 \pi \cdot \frac{2R}{3} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} = -\frac{4\pi R^2}{3\sqrt{3}}$$

Però da verificare che tale valore sia anche uguale a $\oint_{\partial S} F \cdot dx$, ove ∂S è l'ellisse orientata in verso



Parametrizzo l'ellisse ∂D con

$$\left(\frac{R}{3} + \frac{2R}{3} \cos \alpha, 0 + \frac{R}{\sqrt{3}} \sin \alpha \right):$$

(l'ordine è quello giusto, antiorario);

ne segue che ∂S è parametrizzato da

$$\gamma(\alpha) = \left(\frac{R}{3} + \frac{2R}{3} \cos \alpha, \frac{R}{\sqrt{3}} \sin \alpha, R - \left(\frac{R}{3} + \frac{2R}{3} \cos \alpha \right) \right)$$

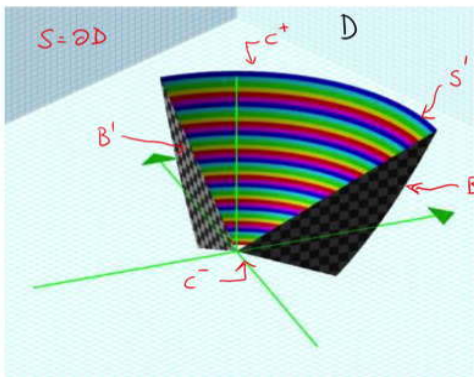
$$\text{con } 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$P.S.S. = \oint_{\partial S} F \cdot dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \sin \alpha, -\frac{R}{3} - \frac{2R}{3} \cos \alpha, R - \left(\frac{R}{3} + \frac{2R}{3} \cos \alpha \right) \right) \cdot \left(-\frac{2R}{3} \sin \alpha, \frac{R}{\sqrt{3}} \cos \alpha, \frac{2R}{3} \sin \alpha \right) d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2R^2}{3\sqrt{3}} \sin^2 \alpha - \frac{2R^2}{3\sqrt{3}} \cos^2 \alpha + 0 \right) d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2R^2}{3\sqrt{3}} \right) d\alpha = -\frac{2R^2}{3\sqrt{3}} \cdot 2\pi = -\frac{4\pi R^2}{3\sqrt{3}} \quad (\text{ok!})$$

Gli altri
 addizionali danno
 zero, quando sono
 integrati da 0 a 2π .

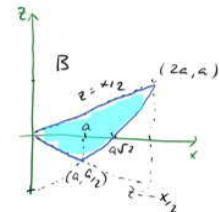
Ex 2



Area di B:

$$\int_0^a dx \int_{-x/2}^{x/2} dz + \int_a^{2a} dx \int_{x/2-a}^{x/2} dz = \dots$$

$$= \frac{13}{12} a^2$$



Baricentro di B

$$x_G = \frac{1}{\text{Area } B} \left(\int_0^a x dx \int_{-x/2}^{x/2} dz + \int_a^{2a} x dx \int_{x/2-a}^{x/2} dz \right)$$

$$= \dots = \frac{27}{26} a$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Area } B} \left(\int_0^a dx \int_{-x/2}^{x/2} z dz + \int_a^{2a} dx \int_{x/2-a}^{x/2} z dz \right) = \dots = \frac{11}{63} a$$

$$\text{Vol}(D) = (\text{Guldin}) \frac{\pi}{2} \cdot \text{Area}(B) \cdot x_G = \frac{9\pi}{16} a^3$$

(b) T. Gauss: $\Phi_S(x-z, y, 0) = \int_D 2 dx dy dz = 2 \text{Vol}(D) = \frac{9\pi}{8} a^3$

• Sul piano $y=0$ (quello di B) il campo è $(x-z, 0, 0)$, parallelo all'asse x (dipende da B) $\Rightarrow \Phi_B(F) = 0$

• Per la S' $\Phi_{S'}(F)$. Param. S' : $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho^2}{2a} - a)$

$$(a \leq \rho \leq 2a, 0 \leq \theta \leq \pi/2).$$

Orientazione invertita!

$$\begin{aligned}
 \Phi_{S_1}(F) &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} \rho \cos \theta - (\frac{\rho^2}{2a} - a) \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \frac{\rho^2}{a} - \rho \cos \theta \end{pmatrix} d\rho \\
 &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^{2a} \frac{\rho}{a} (\rho^2 \cos^2 \theta - \rho \cos \theta (\frac{\rho^2}{2a} - a) + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho \\
 &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^{2a} \frac{\rho}{a} (\rho^2 - \rho \cos \theta (\frac{\rho^2}{2a} - a)) d\rho \\
 &= - \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{10a} \cos \theta + \frac{\rho^3}{3} \cos \theta \right) \Big|_a^{2a} d\theta \\
 &= - \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left((4a^4 - \frac{16}{5}a^4 \cos \theta + \frac{8}{3}a^4 \cos \theta) - (\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{10} \cos \theta + \frac{a^3}{3} \cos \theta) \right) d\theta \\
 &= - a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{15}{4} - \frac{23}{30} \cos \theta \right) d\theta = - a^3 \left(\frac{15}{4} \theta - \frac{23}{30} \sin \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = - \left(\frac{15}{8} \pi - \frac{23}{30} \right) a^3
 \end{aligned}$$

Altre porzioni di superficie:

- B' è piana, dunque parametrizzata da $(0, y, z)$ con orientazione opposta:

$$\Phi_{B'}(F) = - \int_{B'} \det \begin{pmatrix} -z & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dy dz = - \int_{B'} z dy dz = \text{Area}(B) \cdot z_a = \frac{13}{12} a^2 \cdot \frac{11}{65} a = \frac{11}{60} a^3$$

- C^+ (cappuccio superiore, generato dalle vortici del segm. $(x, x/2)$ con $0 \leq x \leq 2a$)
 È parametrizzata da $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho^2}{2})$ con $0 \leq \rho \leq 2a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
 Orientazione è quella giusta (uscita da D).

$$\begin{aligned}
 \Phi_{C^+}(F) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a} \det \begin{pmatrix} \rho \cos \theta - \frac{\rho^2}{2} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix} d\rho \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a} (\rho^2 \cos^2 \theta - \frac{\rho^2}{2} \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3} (1 - \frac{1}{2} \cos \theta) \right) \Big|_0^{2a} d\theta = - \frac{4a^3}{3} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = - \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

- C^- (cappuccio inferiore, generato dalle vortici del segm. $(x, -x/2)$ con $0 \leq x \leq a$)
 È parametrizzata da $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -\frac{\rho^2}{2})$ con $0 \leq \rho \leq a$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
 Orientazione invertita

$$\begin{aligned}
 \Phi_{C^-}(F) &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} \rho \cos \theta + \frac{\rho^2}{2} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & -\frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix} d\rho \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (\rho^2 \cos^2 \theta + \frac{\rho^2}{2} \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3} (1 + \frac{1}{2} \cos \theta) \right) \Big|_0^a d\theta = - \frac{a^3}{6} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = - \frac{a^3}{6} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Notare che $\Phi_B(F) + \Phi_{B'}(F) + \Phi_{S'}(F) + \Phi_{C^+}(F) + \Phi_{C^-}(F) \stackrel{g_{11}}{=} \frac{9\pi}{8} a^3 = \Phi_S(F)$,
come previsto dal T. Gauss.

(c) Calcoli di $F = (x-z, y, 0)$ lungo ∂B e $\partial S'$ in due modi.

Primo modo: al Teorema del rotore.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-z & y & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

$$\oint_{\partial B} F \cdot dx = \Phi_B(\nabla \times F) = \int_B (0, -1, 0) \cdot (0, -1, 0) dy dz = \text{Area}(B) = \frac{13}{12} a^2.$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S'} F \cdot dx &= \Phi_{S'}(\nabla \times F) = - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -1 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & \rho/a & 0 \end{pmatrix} d\rho \\ &= - \int_0^{\pi/2} d\theta \int_a^{2a} \rho^2/a \sin\theta d\rho = [\cos\theta]_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3a} \right)_a^{2a} = -\frac{7}{3} a^2 \end{aligned}$$

Secondo modo: al calcolo diretto.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} F \cdot dx &= \int_0^a (x - (-\frac{x}{2}), 0, 0) \cdot (1, 0, -\frac{1}{2}) dx + \int_a^{2a} (x - (\frac{x^2}{2a} - a), 0, 0) \cdot (1, 0, \frac{x}{a}) dx \\ &\quad - \int_0^{2a} (x - \frac{x}{2}, 0, 0) \cdot (1, 0, \frac{1}{2}) dx = \int_0^a \frac{3x}{2} dx + \int_a^{2a} (x + a - \frac{x^2}{2a}) dx - \int_0^{2a} \frac{x}{2} dx \\ &= \left(\frac{3x^2}{4} \right)_0^a + \left(\frac{x^2}{2} + ax - \frac{x^3}{6a} \right)_a^{2a} - \left(\frac{x^2}{4} \right)_0^{2a} = \frac{3a^2}{4} + \frac{8}{3} a^2 - \frac{4}{3} a^2 - a^2 = \frac{13}{12} a^2 \end{aligned}$$

$\oint_{\partial S'} F \cdot dx$: calcolato in senso orario partendo dal punto $(a, 0, -a/2)$
(e scrivendo in rosso le parametrizzazioni di ogni tratto):

$$\begin{aligned} &\int_a^{2a} (x - (\frac{x^2}{2a} - a), 0, 0) \cdot (1, 0, \frac{x}{a}) dx + \int_0^{\pi/2} (2a \cos\theta - a, 2a \sin\theta, 0) \cdot (-2a \sin\theta, 2a \cos\theta, 0) d\theta + \\ &\quad - \int_a^{2a} (0 - (y^2/2a - a), y, 0) \cdot (0, 1, y/a) dy - \int_0^{\pi/2} (a \cos\theta - (-\frac{a}{2}), a \sin\theta, 0) \cdot (-a \sin\theta, a \cos\theta, 0) d\theta \\ &= \int_a^{2a} (x - \frac{x^2}{2a} + a) dx + \int_0^{\pi/2} (-4a^2 \sin\theta \cos\theta + 2a^2 \sin\theta + 4a^2 \cos\theta \sin\theta) d\theta - \int_a^{2a} y dy - \int_0^{\pi/2} (-\frac{a^2 \sin\theta \cos\theta}{2} - \frac{a^2}{2} \sin\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} + ax \right)_a^{2a} + 2a^2 (-\cos\theta)_0^{\pi/2} - \left(\frac{y^2}{2} \right)_a^{2a} + \frac{a^2}{2} (-\cos\theta)_0^{\pi/2} \\ &= \left(2a^2 - \frac{4}{3} a^2 + 2a^2 \right) - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) + 2a^2(1) - 2a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}(1) = \frac{7}{3} a^2. \end{aligned}$$

Rispetto al solito fatto al flusso del rotore il segno è invertito perché l'orientazione indotta è da quella di S' (uscendo da 0) sarebbe quella opposta a quanto scelto.

- (d) Per determinare gli estremi di $f(x, y, z) = \sqrt{3}(x-z) + y$ sul compatto K si tratta di decomporre K in porzioni ciascuna delle quali sia varietà classica senza bordo, e poi di cercare i punti stazionari di f su ciascuna di queste porzioni, confrontando infine i valori di f su tali punti.

Dividiamo K :

- nell'apice K_0 dei suoi punti interni (dim. 3),
- nelle sue 5 facce B, B', S', C^+, C^- private del bordo (dim. 2),
- negli 8 spigoli senza vertici che contornano le facce (dim. 1)
- e nei 5 vertici $O(0,0,0), P(a,0,-\frac{a}{2}), Q(0,a,-\frac{a}{2}), U(2a,0,a), V(0,2a,a)$.

Trattiamo separatamente ciascuna delle porzioni.

- Perché $\nabla f = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}) \neq (0,0,0)$, non vi sono punti stazionari in K_0 .
- Su B vale $f(x,0,z) = \sqrt{3}(x-z)$ che non ha alcun punto stazionario.
 - Idem su B' , ove vale $f(0,y,z) = -\sqrt{3}z + y$: nessun pto stazionario.
 - S' è parametr. da $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho^2}{2a} - a)$, dove su essa f vale $F(\rho, \theta) := \sqrt{3}(\rho \cos \theta - \frac{\rho^2}{2a} + a) + \rho \sin \theta$ con $a < \rho < 2a$ e $0 < \theta < \pi/2$.
 Si ha $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = (\sqrt{3}(\cos \theta - \frac{\rho}{a}) + \sin \theta, \rho(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)) = (0,0)$
 quando $\begin{cases} \sqrt{3}(\cos \theta - \frac{\rho}{a}) + \sin \theta = 0 \\ \rho(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{6} \\ \rho_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}a \end{cases}$: si ottiene
 dopo il punto $R(a, \frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{3}) = \gamma(\rho_0, \theta_0)$.
 Giusto per verifica, usiamo la forma cartesiana di S' , che è
 $z = \frac{\rho^2}{2a} - a = \frac{x^2+y^2}{2a} - a$, ovvero $x^2+y^2-2az-2a^2=0$: il met. d.
 di Lagrange dà $\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 2x & 2y & -2a \end{pmatrix} < 2 \\ x^2+y^2-2az-2a^2=0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ x^2+y^2-2az-2a^2=0 \end{cases}$
 il che dà nuovamente $R(a, \frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{3})$.
- C^+ è parametr. da $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho}{2})$ con $0 < \rho < 2a$ e $0 < \theta < \pi/2$.
 Su essa vale $F(\rho, \theta) := f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho}{2}) = \sqrt{3}(\rho \cos \theta - \frac{\rho}{2}) + \rho \sin \theta$.
 $\nabla F = (\sqrt{3} \cos \theta - \sqrt{3}/2 + \sin \theta, \rho(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \theta = 0 \\ \rho(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) = 0 \end{cases}$
 che è un sistema privo di soluzioni: nessun punto stazionario.
- C^- , per cambiare, le equazioni cartesiane $z = -\frac{\rho}{2} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$
 ovvero $x^2+y^2-4z^2=0$ con $z < 0$: il met. d. di Lagrange dà
 $\begin{cases} \text{rk} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 2x & 2y & -8z \end{pmatrix} < 2 \\ x^2+y^2-4z^2=0 \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ x = 4z \\ x^2+y^2-4z^2=0 \end{cases}$, sistema con le
 sole soluzioni $(0,0,0)$ non accettabili: nessun pto staz. su C^- .

- (iii) • Segmento $(x, 0, x/2)$ con $0 < x < 2a$: su esso vale
 $F(x) := f(x, 0, x/2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, prova di punti stazionari ($F'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$).
 Allo stesso modo si vede che non vi sono punti stazionari
 sugli altri tre segmenti. Restano da vedere gli spigoli curvi.
- Arco superiore $(2a \cos \theta, 2a \sin \theta, a)$ con $0 < \theta < \pi/2$.
 $F(\theta) := f(2a \cos \theta, 2a \sin \theta, a) = \sqrt{3}a(2 \cos \theta - 1) + 2a \sin \theta$
 $F'(\theta) = -2a\sqrt{3} \sin \theta + 2a \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/6$. Punto $T(a\sqrt{3}, a, a)$.
- Arco inferiore: facciamoli nelle forme (anteriore)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = -a/2 \end{cases}$$

 Metodi di Lagrange:
$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x & 1 & -\sqrt{3} \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ z = -a/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ z = -a/2 \end{cases}$$

 Si trova il pto $W(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, -a/2)$.
- Arco parabola con $y=0$: $(x, 0, x/2a - a)$ con $a < x < 2a$.
 $F(x) := \sqrt{3}(x - x/2a + a) \leadsto F'(x) = \sqrt{3}(1 - x/a) = 0$ per $x=a$ No!
- Arco parabola con $x=0$: $(0, y, y/2a - a)$ con $a < y < 2a$.
 $F(y) := \sqrt{3}(-y/2a + a) + y \leadsto F'(y) = -\sqrt{3} \frac{y}{2a} + 1 = 0 \leadsto y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ No!

(iv) I 5 punti-vertici O, P, Q, U, V sono per def. tutti stazionari

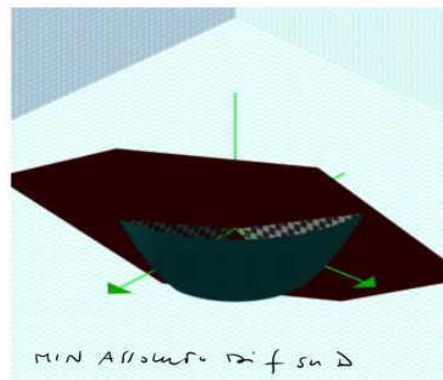
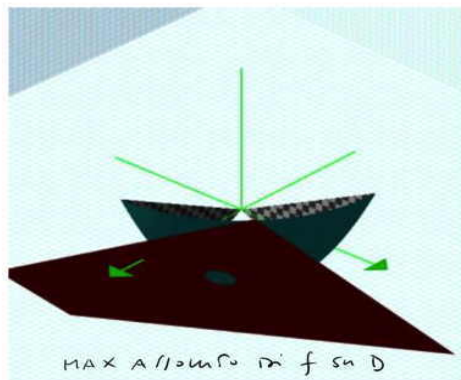
Abbiamo dunque individuato 8 punti O, P, Q, U, V, R, T, W

in cui vale: $f(O)=0$, $f(P)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(Q)=(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)a$, $f(U)=a\sqrt{3}$, $f(V)=(2-\sqrt{3})a$,
 $f(R)=\frac{5}{\sqrt{3}}a$, $f(T)=(4-\sqrt{3})a$, $f(W)=(2+\frac{\sqrt{3}}{2})a$.

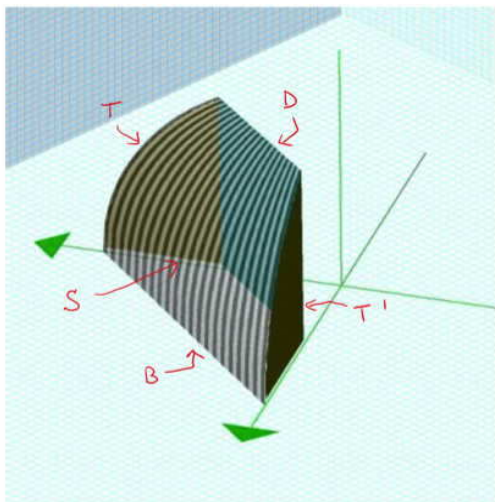
Essendo $0 < 2-\sqrt{3} < \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}+1 < 4-\sqrt{3} < \frac{3\sqrt{3}}{2} < 2+\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{\sqrt{3}}$, concludiamo che:

- il max assoluto di f su D è $\frac{5}{\sqrt{3}}a$, assunto in R ;
- il min assoluto di f su D è 0 , assunto in O .

Le seguenti immagini, dell'elaborazione grafica, in cui appaiono D (visto dall'ottante $x, y, z > 0$) e i piani di livello di f , danno una giustificazione dei risultati appena ottenuti:



Ex. 3



(a) Parametrizziamo T usando la descrizione fornita nel testo.
 Due punti corrispondenti a $T \in T'$ sono $(u, 0, v) \in T$ e $(0, u, v) \in T'$; il segmento che li unisce sarà allora $(1-t)(u, 0, v) + t(0, u, v) = ((1-t)u, tu, v)$ con $0 \leq t \leq 1$.

Abbiamo in questo modo ottenuto una buona (naturale) parametrizzazione di E , tramite

$$(x, y, z) = \phi(u, v, t) = ((1-t)u, tu, v)$$

con $(u, v) \in T =$



Calcoliamo allora $\text{Vol}(E)$ in due modi.

1. Usando la parametrizzazione (come cambio di variabili in integrali):

$$\text{Vol}(E) = \int_E dx dy dz = \int_{\phi^{-1}(E)} |\det J_{\phi}(u, v, t)| du dv dt$$

$$\text{Si ha } J_{\phi}(u, v, t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & -u \\ t & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\det J_{\phi}(u, v, t)| = |-u| = u$$

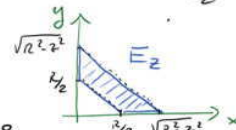
$$\text{e } \phi^{-1}(E) = T \times [0, 1], \text{ dunque}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_0^1 dt \int_T u du dv = 1 \cdot \int_{R/2}^R u du \int_0^{\sqrt{R^2 - u^2}} dv = \int_{R/2}^R u \sqrt{R^2 - u^2} du \\ &= \left(-\frac{1}{3} (R^2 - u^2)^{3/2} \right)_{R/2}^R = \frac{\sqrt{3}}{8} R^3 \end{aligned}$$

2. Per z-fette. Il corpo E giace nel settore $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R$.

La z-fetta E_z di E in corrispondenza $z \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2} R]$

è il trapezio nel piano (x, y) in figura:



la cui area si calcola facilmente per differenza delle aree dei triangoli:

$$\text{Area}(E_z) = \frac{1}{2} (\sqrt{R^2 - z^2})^2 - \frac{1}{2} (R/2)^2 = \frac{3R^2 - 4z^2}{8}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_E dx dy dz = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} dz \int_{E_z} dx dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} \text{Area}(E_z) dz = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} \frac{3R^2 - 4z^2}{8} dz = \frac{1}{8} \left(3R^2 z - \frac{4z^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} = \frac{1}{8} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} R^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} R^3 \quad (\text{OK!}) \end{aligned}$$

Quanto al T. Gauss per E e il campo $F = (x, y, -1)$:

essendo $\nabla \cdot F = 2$ si ha $\int_E \nabla \cdot F dx dy dz = 2 \text{Vol}(E) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3$.

D'altra parte calcoliamo il flusso totale uscente da ∂E , composta da T, T', D (parte posteriore), B (basamento) e S (superficie curva).

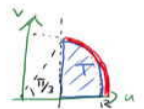
- Sul piano $y=0$ il campo $F = (x, 0, -1)$ è parallelo al piano stesso, dunque anche a T: ne segue che $\Phi_T(F) = 0$.
- Per lo stesso motivo vale $\Phi_{T'}(F) = 0$.
- Sulle basi B si ha $z=0$ e la normale uscente $-e_3 = (0, 0, -1)$, dunque

$$\Phi_B(F) = \int_B (x, y, -1) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \text{Area}(B) = \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} R^2.$$

Per D si può usare la param. ϕ bloccando $u \equiv R/2$, ovvero $\gamma(v, t) := \phi(\frac{R}{2}, v, t) = ((1-t)R/2, tR/2, v)$ con $0 \leq v \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R$ e $0 \leq t \leq 1$: la orientazione che ne risulta è quella uscente, perciò

$$\Phi_D(F) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} dv \int_0^1 dt \det \begin{pmatrix} (1-t)R/2 & 0 & -R/2 \\ tR/2 & 0 & R/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} dt = - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} dv \int_0^1 \frac{R^2}{4} dt = -\frac{\sqrt{3}}{8} R^3$$

- Per S, generata da un arco di circonferenza, il legame tra (u, v) su T è $(u, v) = (R \cos \psi, R \sin \psi)$ ove ψ è l'angolo polare in $[0, \pi/3]$:



possiamo parametrizzare con $\gamma(\psi, t) := \phi(R \cos \psi, R \sin \psi, t) = ((1-t)R \cos \psi, tR \cos \psi, R \sin \psi)$ con $0 \leq \psi \leq \pi/3$ e $0 \leq t \leq 1$. L'orientazione che ne risulta su S è quella con la normale entrante, dunque

$$\Phi_S(F) = - \int_0^{\pi/3} d\psi \int_0^1 dt \det \begin{pmatrix} (1-t)R \cos \psi & -(1-t)R \sin \psi & -R \cos \psi \\ tR \cos \psi & -tR \sin \psi & R \cos \psi \\ -1 & R \cos \psi & 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= - \int_0^{\pi/3} d\psi \int_0^1 \left((1-t)R^2 \sin \psi \cos \psi + tR^2 \sin \psi \cos \psi - R \cos \psi ((1-t)R^2 \cos^2 \psi + tR^2 \cos^2 \psi) \right) dt = - \int_0^{\pi/3} (R^2 \sin \psi \cos \psi - R^3 \cos^3 \psi) d\psi$$

$$= R^2 \left[\frac{\cos 2\psi}{4} \right]_0^{\pi/3} + R^3 \int_0^{\pi/3} \cos^3 \psi d\psi = \frac{R^2}{4} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) + R^3 \left(\sin \psi - \frac{\sin^3 \psi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= -\frac{3}{8} R^2 + R^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = -\frac{3}{8} R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8} R^3.$$

Notiamo che $\Phi_T(F) + \Phi_{T'}(F) + \Phi_B(F) + \Phi_D(F) + \Phi_S(F) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3$, in accordo col Teorema di Gauss.

(b) Per calcolare l'area di S usiamo le parametrizzazioni esibite

per $\mathcal{S}$, ovvero $\gamma(\psi, t) := \phi(R \cos \psi, R \sin \psi, t) = ((1-t)R \cos \psi, tR \cos \psi, R \sin \psi)$.

con $0 \leq \psi \leq \pi/3$ e $0 \leq t \leq 1$. Si ha $J_\gamma(\psi, t) = \begin{pmatrix} -R(1-t)\sin\psi & -R\cos\psi \\ -tR\sin\psi & R\cos\psi \\ R\cos\psi & 0 \end{pmatrix}$,

da cui l'elemento d'area moltiplicato (a anti-fatto) $d\sigma = R^2 \cos \psi \sqrt{1 + \sin^2 \psi} d\psi dt$.

$$\text{Dunque } \text{Area}(S) = \int_S d\sigma = R^2 \int_0^1 dt \int_0^{\pi/3} \cos \psi \sqrt{1 + \sin^2 \psi} d\psi = R^2 \int_0^{\pi/3} \cos \psi (2 - \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi;$$

per $z = \sin \psi$ l'integrale diventa $R^2 \int_0^{\sqrt{3}/2} (2 - z^2)^{1/2} dz$;

per la sua valore $z = \sqrt{2} \sin u$ (dove $u = \arcsin(\frac{z}{\sqrt{2}})$) si ottiene

$$R^2 \int_0^{\arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4})} \frac{1}{\sqrt{2}} du = 2R^2 \int_0^{\arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4})} \cos^2 u du = 2R^2 \left[\frac{u + \sin u \cos u}{2} \right]_0^{\arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4})}$$

$$= \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{6}{16}} \right) R^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{8} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \right) R^2.$$

Verifichiamo infine il T. Rotori per S e per il campo $H = (0, x, -z)$.

$$\text{Si ha } \nabla \times H = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & x & -z \end{vmatrix} = (0, 0, 1), \text{ dove}$$

$$\Phi_S(\nabla \times H) = - \int_0^1 dt \int_0^{\pi/3} \det \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)R\sin\psi & -R\cos\psi \\ 0 & -tR\sin\psi & R\cos\psi \\ 1 & R\cos\psi & 0 \end{pmatrix} d\psi$$

$$= - \int_0^1 dt \int_0^{\pi/3} (- (1-t)R^2 \sin\psi \cos\psi - tR^2 \sin\psi \cos\psi) d\psi$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/3} \sin\psi \cos\psi d\psi = R^2 \left[-\frac{\cos 2\psi}{4} \right]_0^{\pi/3} = -\frac{R^2}{4} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3}{8} R^2.$$

Calcoliamo d'altra parte la circolazione $\oint_{\partial S} H \cdot dx$, ove ∂S

sia percorso in senso antiorario a partire dal punto $(R, 0, 0)$:

$$\oint_{\partial S} H \cdot dx = \int_0^1 (0, (1-t)R, -2) \cdot (-R, R, 0) dt + \int_0^{\pi/3} (0, 0, -2) \cdot (0, -R\sin\alpha, R\cos\alpha) d\alpha +$$

$$\gamma(t) = ((1-t)R, tR, 0) \quad \gamma(\alpha) = (0, R\cos\alpha, R\sin\alpha)$$

$$- \int_0^1 (0, (1-t)\frac{R}{2}, -2) \cdot (-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0) dt - \int_0^{\pi/3} (0, R\cos\psi, -2) \cdot (-R\sin\psi, 0, R\cos\psi) d\psi$$

$$\gamma(t) = ((1-t)R/2, tR/2, \frac{\sqrt{3}}{2}R) \quad \gamma(\psi) = (R\cos\psi, 0, R\sin\psi)$$

$$= \int_0^1 (1-t)R^2 dt + \int_0^{\pi/3} (-2R) \cos\alpha d\alpha - \int_0^{\pi/3} \frac{R^2}{4} (1-t) dt - \int_0^{\pi/3} (-2R) \cos\psi d\psi$$

$$= R^2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 - 2R [\sin\alpha]_0^{\pi/3} - \frac{R^2}{4} \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 2R [\sin\psi]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{R^2}{2} - R\sqrt{3} - \frac{R^2}{8} + R\sqrt{3} = \frac{3R^2}{8}, \text{ in conformit\`a col T. Rotori.}$$