Università
degli Studi
di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 06/11/2025

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (24/01/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si abbia la curva polare Γ data da $\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$.

(a) Disegnare Γ, scrivere l'integrale che calcola la lunghezza e trovarne la retta tangente in $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcolare l'area della figura A racchiusa da Γ e dall'asse x, bordi compresi.

(c) Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x - y$ su A (perché esistono?).

2. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 \,;\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$.

(a) Calcolare il baricentro della componente C della superficie esterna ∂E nel piano (x, z).

(b) Calcolare il volume di E.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (y, -x, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente S di ∂E su $z = 1 - x^2$.

3.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (24/01/2025) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'elemento di lunghezza di una curva polare $\rho(\theta)$ è $d\ell = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$, dunque nel nostro caso con $\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta$ la lunghezza di Γ è data da $\int_0^\pi \sqrt{(3-2\sin 2\theta)^2 + (-4\cos 2\theta)^2}\, d\theta$. • Derivando la parametrizzazione $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ si ha $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)$; una forma parametrica della retta tangente è dunque $r = \{\gamma(\frac{\pi}{2}) + t\gamma'(\frac{\pi}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) = (0,3) + t(-3,4) : t \in \mathbb{R}\}$, ovvero $y = -\frac{4}{3}x + 3$.

(b) L'area di A è $\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho(\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (9 - 12\sin 2\theta + 4\sin^2 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}[9\theta + 6\cos 2\theta + (2\theta - \sin 2\theta\cos 2\theta)]_0^\pi = \frac{11\pi}{2}$.

(c) La figura A è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta; per Weierstrass la funzione continua $f(x,y) = x - y$ vi ammetterà estremi assoluti. Per il calcolo dividiamo A in parte interna A', curva Γ' privata dei vertici, segmento aperto $T = \{(x,0) : |x| < 3\}$ e due vertici $P(-3,0)$ e $Q(3,0)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Poiché $\nabla f = (1,-1)$ non si annulla mai, non vi sono punti stazionari in A'. Per Γ' componiamo f con γ ottenendo $F(\theta) = (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$; derivando e ricordando che $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ si ha $F'(\theta) = (-4\cos 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta) - (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = -(\cos\theta + \sin\theta)(4(\cos\theta - \sin\theta)^2 + 3 - 2\sin 2\theta)$, e si ha $F'(\theta) = 0$ solo per $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (infatti la seconda parentesi è ≥ 1), ottenendo così il punto $R(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$. Su T si ha $f(x,0) = x$, priva di punti stazionari. Per quanto detto, gli estremi assoluti di f su A potranno essere assunti solo in R, P e Q: essendo $f(R) = -5\sqrt{2} \sim -7{,}1$, $f(P) = -3$ e $f(Q) = 3$, il massimo assoluto è 3 (assunto in Q) e il minimo $-5\sqrt{2}$ (assunto in R).

2. (Figura 2) Il solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ è delimitato dalle due superfici di equazioni $z = x^2 + y^2$ (un paraboloide di rotazione con asse l'asse z e vertice nell'origine) e $z = 1 - x^2$ (una "grondaia rovesciata" parallela all'asse y con sezione la parabola indicata nel piano (x,z)). Notiamo che l'intersezione delle due superfici determina l'equazione $x^2 + y^2 = 1 - x^2$, ovvero $2x^2 + y^2 = 1$ (quarto di ellisse centrata in $(0,0)$ di semiassi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1) che delimita la proiezione D di E nel nel 1o quadrante del piano orizzontale. La superficie esterna ∂E ha 4 componenti: la figura C nel piano (x,z) compresa tra due parabole $z = x^2$ e $z = 1 - x^2$; la figura L nel piano (y,z) compresa tra la parabola $z = y^2$ e la quota $z = 1$; la porzione di paraboloide P data da $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 1 - x^2$; e la porzione di grondaia S data da $z = 1 - x^2$ con $z \geq x^2 + y^2$.

(a) La figura $C = \{(x,z) : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ x^2 \leq z \leq 1 - x^2\}$ ha area $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1-x^2) - x^2)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)\, dx = [x - \frac{2}{3}x^3]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; si ha poi $\int_C x\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,((1-x^2) - x^2)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - 2x^3)\, dx = \frac{1}{2}[x^2 - x^4]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{8}$, da cui $x_G = \frac{3\sqrt{2}}{16}$. Per simmetria deve essere $z_G = \frac{1}{2}$, perciò il baricentro è $G(\frac{3\sqrt{2}}{16}, \frac{1}{2})$.

(b) Il volume di E espresso per (x,y)-fili è $\int_D ((1-x^2) - (x^2+y^2))\, dx\, dy = \int_D (1 - 2x^2 - y^2)\, dx\, dy$. Per continuare il calcolo converrà parametrizzare il quarto di ellisse piena D tramite $(x,y) = \phi(s,\alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha, s\sin\alpha)$ con $0 \leq s \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: si ha $\det \mathrm{J}_\phi(s,\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}s\sin\alpha \\ \sin\alpha & s\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}s$, dunque l'integrale diventa $\int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - s^2)\, \frac{\sqrt{2}}{2}s\, d\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}[\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s^4]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$. • In alternativa ragioniamo per y-fette. Per $0 \leq y \leq 1$ la y-fetta è la parte del piano (x,z) compresa tra le parabole $z = x^2 + y^2$ (sotto) e $z = 1 - x^2$ (sopra) che si intersecano per $x = x_y = \sqrt{\frac{1-y^2}{2}}$ e ha area $\int_0^{x_y} ((1-x^2) - (x^2+y^2))\, dx = \int_0^{x_y} (1 - 2x^2 - y^2)\, dx = [(1-y^2)x - \frac{2}{3}x^3]_0^{x_y} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}$; pertanto, ponendo $y = \sin\alpha$ il volume di E risulta $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\, d\alpha \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{2}}{3}[\frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha) + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{8}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già trovato in precedenza. • Un'ulteriore alternativa è di ragionare per (x,z)-fili. Per $(x,z) \in C$ il filo è dato da $0 \leq y \leq \sqrt{z - x^2}$, dunque il volume è $\int_C \sqrt{z - x^2}\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{x^2}^{1-x^2} \sqrt{z - x^2}\, dz$. Posto $z - x^2 = u^2$ (da cui $dz = 2u\, du$) si ha allora $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-2x^2}} u\, 2u\, du = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$; posto ancora $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta$ si ottiene infine $\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\beta\, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\, d\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\beta\, d\beta = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già calcolato prima.

(c) Il campo $F = (y, -x, 0)$ è orizzontale e ha come curve integrali le circonferenze centrate nell'asse z: dunque, per parallelismo, il suo flusso $\Phi_P(F)$ attraverso il paraboloide P è nullo. La componente superiore S è parametrizzata da $(x, y, 1-x^2)$ con $(x,y) \in D$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_S(F) = \int_D \det \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 0 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\, dy = \int_D 2xy\, dx\, dy = \int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha)(s\sin\alpha)\, \frac{\sqrt{2}}{2}s\, d\alpha = \int_0^1 s^3\, ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = [\frac{1}{4}s^4]_0^1[-\frac{1}{4}\cos 2\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}$. Per definizione si ha poi $\Phi_C(F) = \int_C (0, -x, 0)\cdot(0, -1, 0)\, dx\, dz = \int_C x\, dx\, dz = \frac{1}{8}$ (calcolo già fatto nel punto (a)) e $\Phi_L(F) = \int_L (y, 0, 0)\cdot(-1, 0, 0)\, dy\, dz = -\int_L y\, dy\, dz = -\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y\, dz = -\int_0^1 y(1 - y^2)\, dy = -[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4]_0^1 = -\frac{1}{4}$. Pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E è $0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$, coerentemente col fatto che $\nabla \cdot F = 0$ (Gauss).

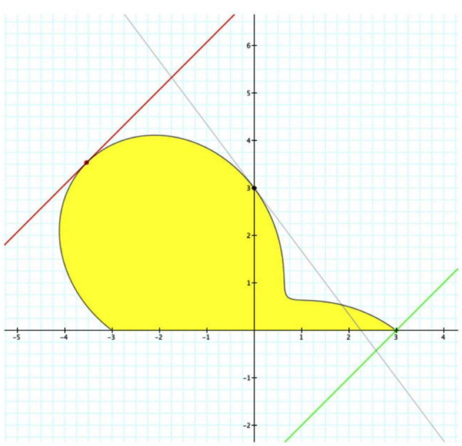
(d) Usando la parametrizzazione precedente, il flusso di $\nabla \times F = (0, 0, -2)$ attraverso S vale $\int_D \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\, dy = -2\,\mathrm{Area}\, D = -2\,\frac{1}{4}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})\,1 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. D'altra parte, girando da $(0,0,1)$ in senso antiorario, il bordo di S è parametriz-

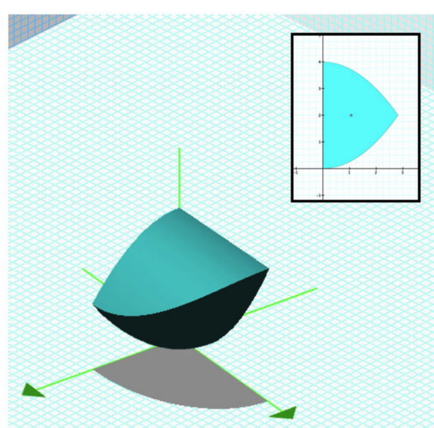
---

(1) Posto $I = \int \cos^4\alpha\, d\alpha$, integrando per parti si ha $I = \int \cos\alpha\, \cos^3\alpha\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha - \int \sin\alpha\,(-3\sin\alpha\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int (1 - \cos^2\alpha)\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int \cos^2\alpha\, d\alpha - 3I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 3I$ da cui confrontando primo e ultimo membro $4I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$, ovvero $I = \frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha))$.

zato da $(x, 0, 1-x^2)$ con $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, poi $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, \sin\alpha, \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$ con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e infine $(0, y, 1)$ con $0 \leq y \leq 1$ (quest'ultimo in senso contrario), dunque la circuitazione di F vale $\oint_{\partial D} F \cdot dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (0, -x, 0) \cdot (1, 0, -\frac{2}{x})\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, 0) \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha\cos\alpha)\, d\alpha - \int_0^1 (y, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)\, dy = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - 0 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, come già trovato prima, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

3.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (07/02/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si consideri la funzione $g(x,y) = \log(x^2 + y^2) - 2x + y$.

(a) Quali curve di livello di g sono regolari? Detta poi Γ la curva di livello passante per $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ determinare la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Mostrare che $Q(1,0)$ è stazionario su Γ per una delle due coordinate, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 2x + y \ge 2a,\ x^2 + y^2 \le 4a^2,\ y \ge 0\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, z, z)$.

3.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (07/02/2025) – $\boxed{\text{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y) = \log(x^2+y^2) - 2x + y$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha $\nabla g = (\frac{2x}{x^2+y^2} - 2, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1) = (0,0)$ se e solo se $x^2+y^2 = x = -2y$: dunque sostituendo $x = -2y$ in $x^2+y^2 = -2y$ si ricava $5y^2 = -2y$, ovvero $y = 0$ (da cui $x = 0$, ma il punto $O(0,0)$ è fuori dal dominio) oppure $y = -\frac{2}{5}$, che dà luogo all'unico punto $A(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$. Pertanto tutte le curve di livello di g sono regolari, tranne (al più) quella di livello $g(A) = 2\ln 2 - \ln 5 - 2$ nel punto A. • In particolare la curva di livello Γ passante per $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ (ovvero $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = g(P) = -2\}$) è regolare, e la retta tangente affine è data da $\nabla g(P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \cdot (x - \frac{3}{5}, y + \frac{4}{5}) = 0$, ovvero $y = -\frac{4}{3}x$.

(b) Per il punto $Q(1,0)$ si ha $g(Q) = -2$, dunque anche Q appartiene alla curva di livello Γ. Essendo $\nabla g(Q) = (0,1)$ si ha che $Q(1,0)$ è stazionario su Γ per la coordinata y, e per determinarne la natura dobbiamo parametrizzare Γ attorno a Q: in sostanza, da $g(x,y) = -2$ dobbiamo esplicitare $y(x)$ al 2o ordine. Derivando l'identità $g(x, y(x)) \equiv -2$ rispetto a x si ottiene $\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} - 2 + y' = 0$, da cui calcolando per $x = 1$ con $y(1) = 0$ si ha $2 - 2 + y'(1) = 0$ (dunque $y'(1) = 0$, come atteso); derivando ancora si ha $2\frac{(1+(y')^2+yy'')(x^2+y^2) - 2(x+yy')^2}{(x^2+y^2)^2} + y'' = 0$, da cui calcolando per $x = 1$ con $y(1) = y'(1) = 0$ si ricava $2(1-2) + y''(1) = 0$ (dunque $y''(1) = 2$). Pertanto $y = (x-1)^2 + o_1(x-1)^2$, dunque $Q(1,0)$ è un punto di minimo locale stretto per la coordinata y su Γ.

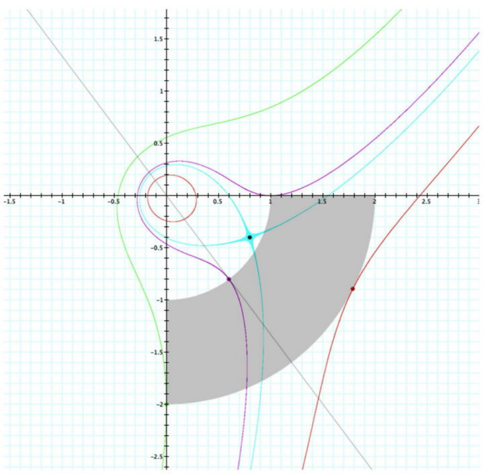
(c) La figura $K = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta, ed è interamente contenuta nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su K esistono per Weierstrass. Per il calcolo dividiamo K nella parte interna K_1, nei due quarti aperti di circonferenza K_2 e K_3 di raggi 1 e 2, nei due segmenti aperti $K_4 = \{(x,0) : 1 < x < 2\}$ e $K_5 = \{(0,y) : -2 < y < -1\}$ e nei quattro punti $B_1(0,-2)$, $B_2(0,-1)$, $B_3(1,0)$ e $B_4(2,0)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Come visto, l'unico punto stazionario di g è $A(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ che però non appartiene a K_1 e dunque non va tenuto considerato. L'arco K_2 è parametrizzato da $(\cos\theta, \sin\theta)$ con $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, dunque su esso g vale $G(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = -2\cos\theta + \sin\theta$; la derivata $G'(\theta) = 2\sin\theta + \cos\theta$ si annulla per $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}$, dando luogo al punto $A_1(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. Similmente, sull'arco K_3 si determina il punto $A_2(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. Per K_4 si ha $G(x) = g(x,0) = 2\log|x| - 2x$ con $1 < x < 2$: la derivata $G'(x) = \frac{2}{x} - 2$ si annulla per $x = 1$, non da considerare. Per K_5 si ha $G(y) = g(0,y) = 2\log|y| + y$ con $-2 < y < -1$: la derivata $G'(y) = \frac{2}{y} + 1$ si annulla per $y = -2$, pure da non considerare. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su K potranno essere assunti solo in A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 e B_4: essendo $g(A_1) = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \sim -2{,}2$, $g(A_2) = \log(4) - \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\log 2 - 2\sqrt{5} \sim -3{,}1$, $g(B_1) = \log(4) - 2 = 2\log 2 - 2 \sim -0{,}6$, $g(B_2) = -1$, $g(B_3) = -2$ e $g(B_4) = \log(4) - 4 = 2\log 2 - 4 \sim -2{,}6$, il massimo assoluto è $2\log 2 - 2$ (assunto in B_1) e il minimo $2\log 2 - 2\sqrt{5}$ (assunto in A_2).

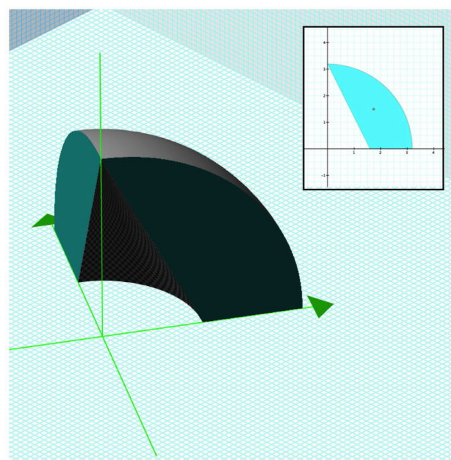
2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : 2x + y \ge 2a,\ x^2 + y^2 \le 4a^2,\ y \ge 0\}$ si calcola facilmente anche per differenza, e vale $(\pi - 1)a^2$. Ragionando per y-fili si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2a}((4a^2 - y^2) - (a - \frac{1}{2}y)^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(4a^2 - y^2 - a^2 - \frac{1}{4}y^2 + ay)\,dy = \frac{1}{2}[3a^2 y + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{5}{12}y^3]_0^{2a} = \frac{7}{3}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} y\,dx = \int_0^{2a} y(\sqrt{4a^2 - y^2} - (a - \frac{1}{2}y))\,dy = [-\frac{1}{3}(4a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{6}y^3]_0^{2a} = 2a^3$, perciò il baricentro è $G(\frac{7}{3(\pi-1)}a, \frac{2}{\pi-1}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo testare l'integrabilità con un integrale iterato. Ragionando sempre per y-fili si ha $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{2a} [\log x]_{x=a-\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{4a^2-y^2}}\,dy = \int_0^{2a} \log\frac{\sqrt{4a^2-y^2}}{a-\frac{1}{2}y}\,dy = \int_0^{2a} \log 2\sqrt{\frac{2a+y}{2a-y}}\,dy = \int_0^{2a}(\log 2 + \frac{1}{2}\log(2a+y) - \frac{1}{2}\log(2a-y))\,dy = [y\log 2 + \frac{1}{2}(2a+y)(\log(2a+y) - 1) + \frac{1}{2}(2a - y)(\log(2a-y) - 1)]_0^{2a} = (2a\log 2 + 2a(\log 4a - 1)) - 2a(\log 2a - 1) = 4a\log 2$, valore finito. D'altra parte si ha $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^{2a} \frac{\sqrt{4a^2-y^2} - (a - \frac{1}{2}y)}{y}\,dy$, e poiché la funzione integranda è $\sim_0 \frac{a}{y}$ l'integrale diverge a $+\infty$.

(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (0,z,z)$ attraverso ∂E è pari a $\int_E (\nabla \cdot F)\,dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol} E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{7}{3}a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$. La superficie esterna ∂E è formata da A nel piano (x,z), dalla sua copia A' nel piano (y,z), dalla base B (corona circolare nel piano (x,y)) e dalle componenti conica e sferica C e S. Per parallelismo o nullità si ha $\Phi_{A'}(F) = \Phi_B(F) = 0$, mentre per definizione $\Phi_A(F) = \int_A (0,z,z) \cdot (0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -2a^3$. La componente C è data da $\gamma(\theta, z) = ((a - \frac{1}{2}z)\cos\theta, (a - \frac{1}{2}z)\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le 2a$ (normale associata uscente dal cono, dunque entrante in E) perciò $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 0 & -(a - \frac{1}{2}z)\sin\theta & -\frac{1}{2}\cos\theta \\ z & (a - \frac{1}{2}z)\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} z(a - \frac{1}{2}z)(\frac{1}{2} + \sin\theta)\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \sin\theta)[\frac{1}{2}az^2 - \frac{1}{6}z^3]_{z=0}^{z=2a}\,d\theta = -\frac{2}{3}a^3[\frac{1}{2}\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3})a^3$. Infine la componente S è data da $\gamma(\theta, \varphi) = (2a\cos\theta\sin\varphi, 2a\sin\theta\sin\varphi, 2a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante in E) perciò $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\cos\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 2a\cos\varphi & 0 & -2a\sin\varphi \end{pmatrix} dz = 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,[\sin\theta\sin^3\varphi - \cos^3\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}a^3(\frac{\pi}{2} + 1) = (\frac{4\pi}{3} + \frac{8}{3})a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0 + 0 - 2a^3 - (\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3})a^3 + (\frac{4\pi}{3} + \frac{8}{3})a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$, come si voleva.

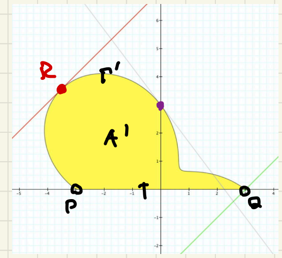
3.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

APPELLO SCRITTO 2024/25, 24 gennaio 2025

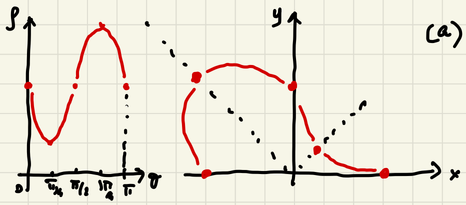


1. Nel piano cartesiano si abbia la curva polare Γ data da $\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$.

(a) Disegnare Γ, scrivere l'integrale che calcola la lunghezza e trovarne la retta tangente in $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcolare l'area della figura A racchiusa da Γ e dall'asse x, bordi compresi.

(c) Determinare gli estremi assoluti di $f(x,y) = x - y$ su A (perché esistono?).



(a) $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

$\gamma(\theta) = (\underbrace{\rho(\theta)\cos\theta}_{x(\theta)}, \underbrace{\rho(\theta)\sin\theta}_{y(\theta)})$

$\gamma'(\theta) = (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta, \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta) \rightsquigarrow \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$

$\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta \qquad \rho'(\theta) = -4\cos 2\theta$

$L = \int_0^\pi \sqrt{(3 - 2\sin 2\theta)^2 + (-4\cos 2\theta)^2}\,d\theta$

$\gamma(\pi/2) = (0,3) \qquad \gamma'(\pi/2) = (-3,4) \qquad r : \{(0,3) + t(-3,4)\}$ $\begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ $\quad y = -\frac{4}{3}x + 3$

(b) $\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho(\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (3 - 2\sin 2\theta)^2\,d\theta = \dots = 11\pi/2$

(c) $A = A' \cup \Gamma' \cup T \cup \{P, Q\}$. $\quad A' : \nabla f = (1,-1) \neq (0,0)$ NO.

$\Gamma' : \quad F(\theta) = f(x(\theta), y(\theta)) = (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$

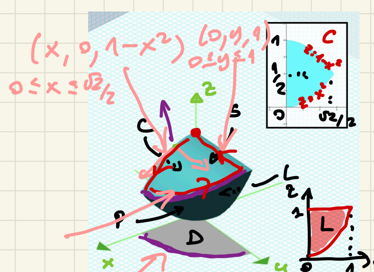
$F'(\theta) = -4\cos 2\theta(\cos\theta - \sin\theta) - (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta + \sin\theta) =$

$= -(\cos\theta + \sin\theta)(\underbrace{4(\cos\theta - \sin\theta)^2 + 3 - 2\sin 2\theta}_{\geq 1}) = 0 \iff \cos\theta + \sin\theta = 0 \iff \tan\theta = -1$, $\theta = 3\pi/4$

$R(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$. $\quad T : (x,0)$ con $|x| < 3 \quad F(x) = x \quad F'(x) = 1 \neq 0$

$f(R) = -5\sqrt{2}$ min, $f(P) = -3$, $f(Q) = 3$ max

I° APPELLO SCRITTO 2024/25, 24 gennaio 2025



2. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1 - x^2 \,;\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$.

(a) Calcolare il baricentro della componente C della superficie esterna ∂E nel piano (x,z).

(b) Calcolare il volume di E.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (y, -x, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente S di ∂E su $z = 1 - x^2$.

(a) $\int_C x\,dx\,dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_{x^2}^{1-x^2} x\,dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} x(1 - x^2 - x^2)\,dx = 1/8$

$\text{Area}(C) = \int_C dx\,dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - x^2 - x^2)\,dx = \sqrt{2}/3 \Rightarrow x_G = 3\sqrt{2}/16 \;;\; z_G = 1/2$

(b) $\text{Vol}(E) = \int_D dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz = \int_D (1 - x^2 - (x^2 + y^2))\,dx\,dy = \int_D (1 - 2x^2 - y^2)\,dx\,dy$

$D: \quad x^2 + y^2 = 1 - x^2 \qquad 2x^2 + y^2 = 1 \qquad \frac{x^2}{(\sqrt{2}/2)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$

$\gamma(\alpha) = (\underbrace{\tfrac{\sqrt{2}}{2} s\cos\alpha}_{x}, \underbrace{s\sin\alpha}_{y}) \qquad 0 \le \alpha \le \pi/2, \quad 0 \le s \le 1 \qquad (s, \alpha)$

$J = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}s\sin\alpha \\ \sin\alpha & s\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad |\det J| = \frac{\sqrt{2}}{2}s$

$\text{Vol}(E) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^1 (1 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} s^2\cos^2\alpha - s^2\sin^2\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\,ds = \frac{\pi}{2}\int_0^1$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 s(1 - s^2)\,ds = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

(c) $\Phi_P(F) = 0 \qquad \Phi_C(F) = \int_C (0, -x, 0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = \int_C x\,dx\,dz = 1/8$

$$\phi_L(F) = \int_L (y,0,0)\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz = -\int_L y\,dy\,dz = -\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y\,dz$$

$$= -\int_0^1 y(1-y^2)\,dy = -1/4$$

$S: \quad (x, y, 1-x^2) \qquad (x,y)\in D$

$$\phi_S(F) = +\int_D \det\begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 0 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_D 2xy\,dx\,dy =$$

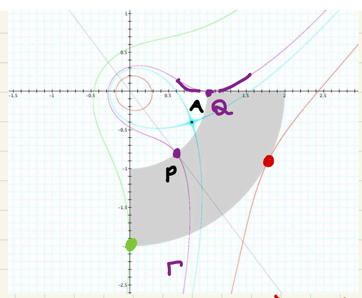
$$= \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^1 2\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, s\cos\alpha \cdot s\sin\alpha\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, s\; ds = \dots = \frac{1}{8}$$

(d) $$\nabla\times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\phi_S(\nabla\times F) = +\int_D \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\,dy = -2\cdot \text{Area}(D) = -2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = -\pi\sqrt{2}/4$$

...

$\underline{II}^\circ$ APPELLO SCRITTO 2024/25, 7 febbraio 2025



1. Nel piano cartesiano si consideri la funzione $g(x,y) = \log(x^2+y^2) - 2x + y$.

(a) Quali curve di livello di g sono regolari? Detta poi Γ la curva di livello passante per $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ determinare la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Mostrare che $Q(1,0)$ è stazionario su Γ per una delle due coordinate, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ (esistono?).

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(a) $\nabla g = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - 2, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1\right) = (0,0) \iff$

$x^2+y^2 = x = -2y \quad x = -2y \rightsquigarrow x^2+y^2 = -2y \quad 5y^2 = -2y$ $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \cancel{O(0,0)} \\ y = -2/5 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \quad A(4/5, -2/5) \end{cases}$

$g(A) = 2\log 2 - \log 5 - 2. \qquad \nabla g(P) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \qquad \nabla g(P)\cdot(x - 3/5, y + 4/5) = 0$

$g(P) = -2 \qquad \Gamma: \{(x,y) : g = -2\}$ $\quad y = -4/3\, x$

(b) $Q(1,0) \quad g(Q) = -2$ $\quad \begin{pmatrix} 1\ 0? & 0\ 1 \\ \nabla g(Q) & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\nabla g(Q) = (0,1)$ $\quad Q$ è staz. su Γ per la coord. y.

$g(x,y) = -2 \rightsquigarrow y(x) = 0 + y'(1)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)\cdot(x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$

$g(x,y(x)) \equiv -2 \xrightarrow{d_x} \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} - 2 + y' = 0 \xrightarrow[y=0]{x=1} \frac{2}{1} - 2 + y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$

$\xrightarrow{d_x} \frac{(2+2(y')^2+2yy'')(x^2+y^2) - (2x+2yy')^2}{(x^2+y^2)^2} + y'' = 0$

$\xrightarrow[\substack{y(0)=0 \\ y'(0)=0}]{x=1} \quad y''(0) = 2 \qquad y(x) = (x-1)^2 + \dots \qquad$ p^{to} di minimo.

II° APPELLO SCRITTO 2024/25, 7 febbraio 2025

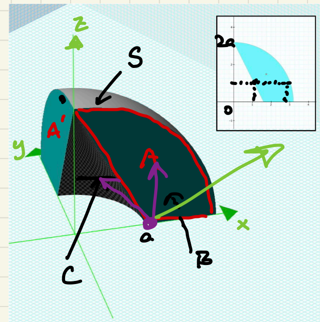
2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 2x + y \geq 2a,\ x^2 + y^2 \leq 4a^2,\ y \geq 0\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0,z,z)$.



(a) Area A : $(\pi - 1)a^2$ $\qquad \int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} x\,dx$

$\int_A y\,dx\,dy = \dots$ $\qquad G\left(\frac{7}{3(\pi-1)}a,\ \frac{2}{\pi-1}a\right)$

(c) $F = (0, z, z)$ $\qquad \nabla \cdot F = 1$ $\qquad \int_E \nabla \cdot F\,dx\,dy\,dz = \text{Vol}(E) = \frac{\pi}{2}\int_D x\,dx\,dz = \dots = \frac{7\pi}{6}a^3$

$\phi_{A'}(F) = 0$ $\qquad \phi_B(F) = 0$ $\qquad \phi_A(F) = \int_A (0,z,z)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dy = \dots = -2a^3$

C : $\qquad \rho = \left(1 - \frac{z}{2a}\right)a$ $\qquad \left(\left(1-\frac{z}{2a}\right)a\cos\theta,\ \left(1-\frac{z}{2a}\right)a\sin\theta,\ z\right)$

$0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq z \leq 2a$

S : $\left(2a\cos\theta\sin\varphi,\ 2a\sin\theta\sin\varphi,\ 2a\cos\varphi\right)$ $\quad 0 \leq \theta, \varphi \leq \pi/2$