

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 07/11/2025

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE: TEORIA GENERALE

Ci occuperemo di trovare una n -uple di funzioni in vettore $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ a valori complessi e partire da un dato sistema di equazioni differenziali, che passeremo fin da subito in forma normale:

$$y' = f(t, y) \quad \text{over} \quad \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

ove $f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una funzione continua definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, ovvero $f_j: U \rightarrow \mathbb{C}$ son funzioni scalari continue.

Queste forme e' in realta' molto generale, perche' non si puo' andare ad ad esempio le e.d.o. scalari di ordine superiore:

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

(e.d.o. scalar with input)
 $y(t): I \rightarrow \mathbb{C}$ on $I \subseteq \mathbb{R}$
 in form number 2 order n)

ponendo $(z_1, \dots, z_n) := (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, l'eq. def. è
equivalente al sistema del I° ordine

equival al sistem del I- ordin

$$z' = f(t, z) : \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = g(t, z_1, \dots, z_n) \end{cases} \quad \text{con } f(t, z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ g(t, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

Ma and : estimi differenziali di ordine superiore : es. :

$$\begin{cases} u'' = g(t, u, u', v, v', v'', w, w') \\ v''' = h(\quad \quad \quad) \\ w'' = k(\quad \quad \quad) \end{cases} \text{ powers}$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (u, u', v, v', v'', w, w')$$

equale a

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = g(t, z_1, \dots, z_7) \\ z_3' = z_4 \\ z_4' = z_5 \\ z_5' = h(t, z_1, \dots, z_7) \\ z_6' = z_7 \\ z_7' = k(t, z_1, \dots, z_7) \end{cases}$$

Sia dato un sistema differenziale del I -ordine

$$y' = f(t, y) \quad \text{con } y = (y_1, \dots, y_n)(t), \quad f: U \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad U \text{ aperto in } \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

PROBLEMA DI CAUCHY: assegnare, oltre all'e.d.o., anche il valore y_0 che la soluzione cercata deve assumere in un certo t_0 :

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ove $(t_0, y_0) \in U$

Ovvero, cerca le funzioni $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ di classe C^1 su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$,

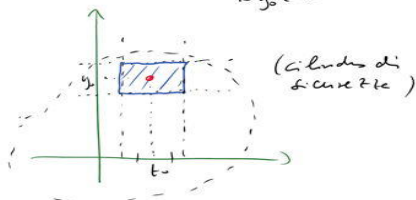
$$\text{talché} \quad \begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Possiamo dire che i valori di φ non escono dalle proiezioni di U su $\mathbb{C}^n$. A tal fine scegliamo fin da subito $a, b > 0$ tali che,

$$\text{denotando} \quad I_a := [t_0 - a, t_0 + a] = \overline{B_{t_0}(a)} \quad \text{e} \quad J_b := \{y \in \mathbb{C}^n : \|y - y_0\| \leq b\} = \overline{B_{y_0}(b)}$$

si abbia che $I_a \times J_b \subset U$

(tal a, b esiste poiché U è aperto e i rettangoli chiusi sono una base di intorno di (t_0, y_0)).



Ci interessa studiare esistenza e unicità di una tale soluzione $\varphi(t)$ e ottenere informazioni anche sull'intervallo I su cui è definita.

Il risultato fondamentale è il seguente:

Teo. (CAUCHY-LIPSCHITZ, ESISTENZA E UNICITÀ LOCALI)

Se in $I_a \times J_b$ le funzioni f sono continue (e i part. teor.)
e anche Lipschitziane risp. a y uniformemente risp. a t :

$$\exists L \geq 0 : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in I_a \quad \forall y_1, y_2 \in J_b$$

allora esistono $0 < \delta \leq a$ e un'unica soluz. $\varphi: I_\delta \rightarrow J_b$
di classe C^1 del problema (*).

Ex.

Un paio di esempi su e.d.o. scalari già visti.

- $\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(1) = -2 \end{cases}$ e.d.o. a variabili separabili del I° ord. in forma normale
 $y' = f(t, y) = ty^3$ è C^∞ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ (per Cauchy-Lipsch.) $\exists!$ soluz. $\varphi(t)$ all'intorno di $t_0 = 1$

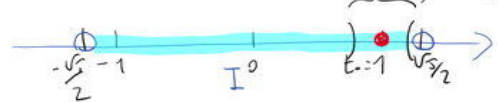
È a var. separabili, dunque si separano variabili.

$$y^{-3} dy = t dt \leadsto \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{t^2}{2} + K \leadsto \frac{1}{y^2} = K - t^2$$

$$\xrightarrow{y(1)=-2} \frac{1}{(-2)^2} = K - 1^2 \Rightarrow K = \frac{5}{4}. \text{ Dunque}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{5-4t^2}{4} \leadsto y(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{5-4t^2}} \quad \text{dove } y(t) = -\frac{2}{\sqrt{5-4t^2}}$$

$y(t)$ è definita in $I =]-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2[$ che è intorno di $t=1$



- $y'' + 2y' + 3y = 9t - 4 \cos t$ E.D.O. LINEARE DEL II° ORDINE IN "F. NORMALE"
Ponendo $(z_1, z_2) = (y, y')$, l'equazione equivale al sistema del I° ordine

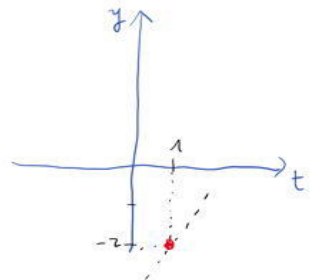
$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -3z_1 - 2z_2 + 9t - 4 \cos t \end{cases} \quad \text{cioè } z' = g(t, z) = (z_2, -3z_1 - 2z_2 + 9t - 4 \cos t)$$

Dato di Cauchy: $z(t_0) = (z_1(t_0), z_2(t_0)) = (y(t_0), y'(t_0)) = (\alpha, \beta)$

g è C^∞ c.l. $\Rightarrow \exists!$ $y(t)$ all'intorno di t_0 t.c.
 $y(t_0) = \alpha, y'(t_0) = \beta$

$$\text{Risolvendo: } y'' + 2y' + 3y = 9t - 4 \cos t$$

$$\text{Eq. caratteristica } \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm i\sqrt{2}$$



$\Rightarrow$ soluzioni dell'omogenea associata sono

$$y(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = e^{-t} (A e^{i\sqrt{2}t} + B e^{-i\sqrt{2}t}) \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

$$= e^{-t} (C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t)) \quad (C, D \in \mathbb{R})$$

Per $b_1(t) = 9t$: $\tilde{y}_1(t) = at + b$ $\tilde{y}_1'' + 2\tilde{y}_1' + 3\tilde{y}_1 = 9t$ $0 + 2a + 3(at+b) = 9t$
 $3at + (2a+3b) = 9t$ $(3a, 2a+3b) = (9, 0) \Rightarrow a=3, b=-2$

Per $b_2(t) = -4 \cos t$: $\tilde{y}_2(t) = a \cos t + b \sin t$ $\tilde{y}_2'' + 2\tilde{y}_2' + 3\tilde{y}_2 = -4 \cos t$
 $(-a+2b+3a) \cos t + (-b-2a+3b) \sin t = -4 \cos t$ $(2a+2b, -2a+2b) = (-4, 0)$
 $\begin{cases} a+b = -2 \\ -a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ $\tilde{y}_2(t) = -\cos t - \sin t$

Soluzioni generali: $y(t) = e^{-t} (C \cos(t\sqrt{2}) + D \sin(t\sqrt{2})) + 3t - 2 - \cos t - \sin t$ $(C, D \in \mathbb{R})$

Allegiamo un dato di Cauchy, ad es. $y(0) = -1, y'(0) = 2$

Derivo: $y'(t) = e^{-t} ((-C + D\sqrt{2}) \cos(t\sqrt{2}) + (-D - C\sqrt{2}) \sin(t\sqrt{2})) + 3 + \sin t - \cos t$

$$\begin{cases} y(0) = C - 2 - 1 = -1 \\ y'(0) = -C + D\sqrt{2} + 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = \sqrt{2} \end{cases}$$

Perciò $y(t) = e^{-t} (2 \cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sin(t\sqrt{2})) + 3t - 2 - \cos t - \sin t$

Domini: $I = \mathbb{R}$, $\delta = +\infty$ (non si perde nulla nel dominio: è una buona proprietà delle eq. diff. lineari...)

Ci occupiamo ora delle dimostrazioni del Teorema di C-L locale.

Primo passo: riformulazione integrale del problema di Cauchy (Volterra):

Prop. $\left| \begin{matrix} (*) \\ \end{matrix} \right. \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (**)$

Dim. " $\Rightarrow$ " se $y(t)$ soddisfa le cond. a sx, integrando ambo i membri

di $y' = f(t, y)$ tra $\tau = t_0$ e $\tau = t$ otteniamo

$$\int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad \text{ma a sx: } (y(\tau)) \Big|_{t_0}^t = y(t) - y_0$$

dove $y - y_0 = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$ come si voleva

" $\Leftarrow$ " La $y(t)$ ed 1° m. e' C¹ (perché è il 2° membro).

Poi, derivando ambo i membri risp. t e ricordando il

T.F.C., allora $y' = f(t, y(t))$.

Inoltre, calcolando anche i valori a $t=t_0$ ho $y(t_0) = y_0 + 0 = y_0$.

Dobbiamo ora richiamare un già noto risultato di Topologia.

Ricordiamo che, se (X, d) è uno spazio metrico, una contrazione è una funzione $T: X \rightarrow X$ che "contrae le distanze":

$$\exists 0 \leq \alpha < 1 \text{ t.c. } d(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Sappiamo che una contrazione è uniformemente continua, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(Tx_1, Tx_2) < \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} \text{dato } \varepsilon > 0 \\ \text{basta porre } \delta = \varepsilon/\alpha \end{array} \right).$$

Serve inoltre ricordare le nozioni di spazio metrico completo, nel quale ogni successione di Cauchy (ovvero, ad elementi sempre più vicini tra loro) ammette limite.

Teorema (CONTRAZIONE CONTRAZIONE)

(a) Se (X, d) è spazio metrico completo, e $T: X \rightarrow X$ contrazione, allora T ha un unico punto fisso, cioè $\exists! \tilde{x} \in X : T(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Più in generale:

(b) Se $\exists r \in \mathbb{N}$ t.c. $T^r = \overbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}^{r \text{ volte}} : X \rightarrow X$ sia contrazione, allora T ha un unico punto fisso, che è quello di T^r .

Dim (a) Già provato nel Cor. di Analisi II.

(b) UNICITÀ: se $\tilde{x}$ è punto fisso per T lo è anche per T^r , che è contrazione (dunque è unico per (a)).

ESISTENZA: sia ora $\tilde{x}$ il punto fisso di T^r .

Allora $T^r(T\tilde{x}) = T(T^r\tilde{x}) = T\tilde{x}$, dunque $T\tilde{x}$ è punto fisso di $T^r \Rightarrow T\tilde{x} = \tilde{x}$ per unicità. //

Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria del T. Cauchy-Lipschitz locale.

Poniamo $M := \max \{ \|f(t, y)\| : (t, y) \in I_a \times I_b \}$ (finito e ≥ 0 per Weierstrass).

• Se $M = 0$ il T. è dimostrato: in tal caso il problema diventa

$$\begin{cases} y' \equiv 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ che ha soluz. costante } y \equiv y_0 \text{ con } \delta = a$$

• Se $L > 0$, idem: in tal caso f è costante risp. y ovvero $f(t, y) = a(t)$:

• Se $L=0$, idem: in tal caso f è costante risp. y ovvero $f(t, y) = a(t)$:

$$\begin{cases} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzione } y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, \text{ definita} \\ \text{per } t \in I_\delta \text{ t.c. } 0 < \delta < \frac{b}{M} \text{ con } M = \max_{t \in I_a} |a(t)|$$

• Nel caso generale, i cui $M > 0$, $L > 0$, scegliamo

$0 < \delta < \min \left\{ a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M} \right\}$. Scelti un tale δ , consideriamo

$V = \mathcal{C}^{[t_0-\delta, t_0+\delta]}(I_\delta, \mathbb{C}^n)$ che è uno spazio vettoriale normato e completo

rispetto alla sup-norma $\|\psi\|_\infty = \max \{ \|\psi(t)\| : t \in I_\delta \}$.

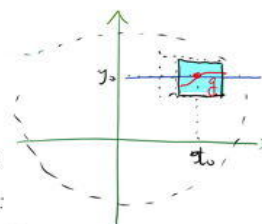
(il limite uniforme di una succ. di funzioni continue è continuo).

All'interno di V consideriamo

$$B = \{ g \in V : \|g - y_0\|_\infty \leq b \}$$

(la palla delle funzioni $I_\delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ di raggio $\leq b$ dalle coordinate y_0 , ovvero le funzioni $I_\delta \rightarrow J_b$):

poiché B è una palla chiusa dentro V , anche B sarà uno spazio di Banach rispetto alla sup-norma.



Definiamo un operatore $T: B \rightarrow B$ in questo modo:

se $\psi: I_\delta \rightarrow J_b$ (ovvero $\psi \in B$), definiamo

$$T\psi: I_\delta \rightarrow J_b, (T\psi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau \quad (\text{come in } (**))$$

è da dimostrare che T è una contrazione, la funzione:

infatti ci serve un unico "punto" fisso (cioè: "funzioni" unificate!)

$\varphi: I_\delta \rightarrow J_b$ t.c. $T\varphi = \varphi$, ovvero φ soddisfa (**).

Prima di tutto verifico che, se $\psi \in B$, anche $T\psi \in B$, ovvero

che $\|(T\psi)(t) - y_0\| \leq b \quad \forall t \in I_\delta$:

$$\begin{aligned} \left\| \cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau - \cancel{y_0} \right\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau, \psi(\tau))\|}_{\leq M} d\tau \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| = M |t - t_0| \leq M \delta < \underbrace{M}_{\exists a < 1} \frac{b}{M} = b \quad (**) \end{aligned}$$

Vediamo ora che è contrazione, ovvero che $\|T\psi_1 - T\psi_2\|_\infty \leq \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty$

se $t \in I_\delta$:

$$\begin{aligned} \|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)\| &= \left\| \cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau - (\cancel{y_0} + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))\|}_{\leq L \|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\|} d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\| d\tau \leq L \delta \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} L \|\psi_1(t) - \psi_2(t)\| dt \right| \leq L \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty} \left| \int_{t_0}^{t_1} dt \right|$$

$$= L \cdot |t_1 - t_0| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty} \leq L \delta \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty} \quad //$$

POSTERIORI IMPORTANTE: in realtà si può scegliere $0 < \delta < \min \{a, b/\pi\}$
(non serve tener conto delle costanti di Lipschitz L).

In effetti si può provare per induzione che

$$\|(T^r \psi_1)(t) - (T^r \psi_2)(t)\| \leq \frac{L^r}{r!} |t - t_0|^r \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty} \leq \frac{(L\delta)^r}{r!} \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty}$$

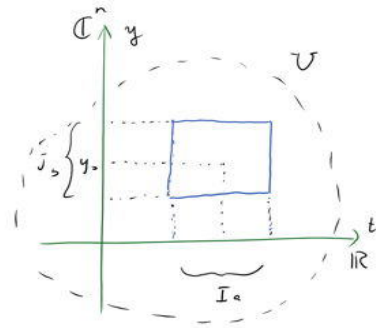
Se $r \in \mathbb{N}$ è abbastanza grande affinché $\frac{(L\delta)^r}{r!} < 1$ allora T^r è
contrazione: per questo vif. possiamo, T ammette come un
unico pnf. unito. //

Alcuni commenti al T. Cauchy-Lipschitz di $\exists!$ locale...

Se in $I_a \times J_b$ f è di classe C^1
rispetto a y (cioè molto smooth!)

le ipotesi del T. sono soddisfatte,

$$\text{con } L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right\| : (t, y) \in I_a \times J_b \right\}$$



Se le ipotesi del Teorema non sono soddisfatte, cosa succede?

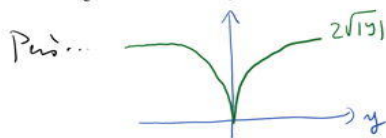
Succede che potrebbero saltare esistenza e unicità della soluzione.

In realtà l'esistenza non salta, perché già è garantita dalle
sole continuità di f (Teorema di Peano: delle int., Teo. 4.1.4)

Perché allora di saltare l'unicità (non è certo, ma lo insicuro!)

Es. (*) $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad f(t, y) = 2\sqrt{|y|} \quad \text{E.D. DIFF. AUTONOMA (f non dip. da t)}$

Per Peano, certamente c'è esistenza locale delle soluzioni.



$2\sqrt{|y|}$ è continua MA non Lipschitziana
in $y=0$, mentre per $y \neq 0$ è C^∞

$\Rightarrow$ se $y(t_0) = y_0 \neq 0$ allora $\exists!$ locale
risoluzioni di partenza
e uniche

Vediamo due esempi.

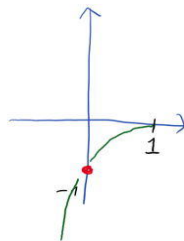
1. $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = -1 \neq 0 \end{cases}$ Facciamo i conti (un aspetto che si sta a guardare è che $y > 0$)

$$\frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = dt \leadsto \int_{-1}^y \frac{d\eta}{2\sqrt{|\eta|}} = \int_0^t d\tau \Rightarrow ((\text{sign } \eta) \sqrt{|\eta|})_{-1}^y = (\tau)_0^t$$

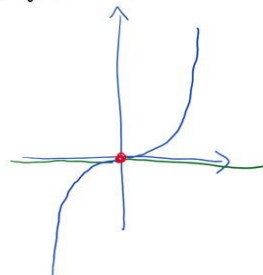
$$\leadsto (\text{sign } y) \sqrt{|y|} - ((-1) \sqrt{1}) = t \quad 1 - \sqrt{|y|} = t$$

$$\sqrt{|y|} = 1 - t \quad (\text{anche } 1 - t \geq 0 \text{ cioè } t \leq 1) \quad \exists!$$

$$\Rightarrow |y| = (1 - t)^2 \Rightarrow y(t) = -(1 - t)^2 \quad (\text{dominio }]-\infty, 1] \text{ intorno di } t_0 = 0)$$



2. $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Soluzioni evidenti: $y \equiv 0$
Ma non è l'unica:
 $y(t) = \sigma t^2$ con $\sigma = \text{sign } t$
Sono due soluzioni diverse anche in un intorno di $t_0 = 0$ (ho perso l'unicità!)



Una situazione simile si presenta più in generale per un'equazione del tipo $y' = \alpha |y|^\beta$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \beta < 1$. (v. sulle note)