

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 11/11/2025

Le dim. del T. Cauchy-Lipschitz mostra un criterio costruttivo per costruire una soluzione concreta del problema, criteri basati sul Lemma delle Contrazioni:

$$\psi_0(t) \equiv y_0, \\ \psi_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_0(\tau)) d\tau$$

$$\psi_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau$$

$$\psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_{n-1}(\tau)) d\tau \quad \text{e così via:}$$

le successioni $\psi_n(t)$ convergono nella norma $\|\cdot\|_\infty$ alla soluzione "punto unico" $\psi(t)$.

Vediamo un esempio concreto.

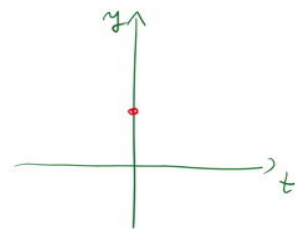
E x

$$\begin{cases} y' = 2y^2 = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

f è C^∞ , dunque $\exists!$ i' anzitutto
 $\forall$ dato iniziale $y(t_0) = y_0$

Scegliamo $\psi_0(t)$ le soddisca 1

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= (T\psi_0)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_0(\tau)) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t 2 \cdot 1^2 d\tau = 1 + \int_0^t 2 d\tau = 1 + 2t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= (T\psi_1)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau = 1 + \int_0^t 2(1+2\tau)^2 d\tau \\ &= 1 + \left(\frac{1+2\tau}{3} \right)^3 \Big|_0^t = 1 + \frac{1}{3} ((1+2t)^3 - 1) = 1 + 2t + 4t^2 + \frac{8}{3}t^3 \end{aligned}$$

$$\psi_3(t) = (T\psi_2)(t) = \dots = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \frac{32}{3}t^4 + \frac{32}{3}t^5 + \frac{64}{9}t^6 + \frac{128}{63}t^7$$

Le successioni $\psi_n(t)$ tende a $1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \dots + (2t)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n$

ovvero $\psi(t) = \frac{1}{1-2t}$ per $|2t| < 1$ ovvero $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ (intorno di $t_0=0$)

Ma il problema $\begin{cases} y' = 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ si sappiamo già risolvere da Analisi 1:

$$\frac{1}{2y^2} dy = dt \quad \int_1^y \frac{1}{2\eta^2} d\eta = \int_0^t d\tau \quad \left(-\frac{1}{2\eta}\right)_1^y = (\tau)_0^t$$

$$-\frac{1}{2y} - \left(-\frac{1}{2}\right) = t - 0 \quad -\frac{1}{2y} = 2t - 1 \quad y(t) = \frac{1}{1-2t} \quad (\text{ou!})$$

Il T. Cauchy-Lipschitz di $\exists!$ Lode dice, leggendo con cura, che due soluzioni di un sistem pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ nelle ipotesi del Teorema sono obbligate a essere uguali solo vicino a t_0 . In realtà l'unicità nasce generalmente a patto che le ipotesi del Teorema siano soddisfatte anche per gli altri dati iniziali nel dominio U di f .

Prop. (UNICITÀ LOCALE IN OGNI PUNTO IMPLICA UNICITÀ GLOBALE)

Se $y' = f(t, y)$ ha esistenza e unic. locali in ogni punto $(t_0, y_0) \in U$ (ovvero, per ogni dato iniziale $y(t_0) = y_0$), allora due soluzioni di $y' = f(t, y)$ definite su un stesso intervallo I che coincidono in un punto di I devono essere uguali dappertutto.

Dim. Siano $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ due soluzioni di $y' = f(t, y)$ t.c.

$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ per un certo $t_0 \in I$.

Poniamo $I' = \{t \in I : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$, $I'' = \{t \in I : \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$.

Ovviamente $I = I' \cup I''$. Notiamo che I' è un ap. di I (è il

T. Cauchy: due soluz. che coincidono in un punto devono coincidere in tutto un intorno del punto). Ma anche I'' lo è (φ_1, φ_2 continue!)

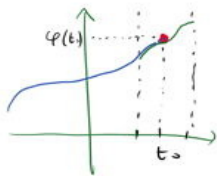
Ma I intervallo (connesso) $\Rightarrow I' = \emptyset$ oppure $I'' = \emptyset$, ma $I' \neq \emptyset$

per $t_0 \in I' \Rightarrow I'' = \emptyset$. //

Una conseguenza di questo fatto è la nozione di SOLUZIONE MASSIMALE di $y' = f(t, y)$ che soddisfa $\exists!$ locali e globali def.: è quella con il dominio non ulteriormente allargibile da una soluzione più grande.

Prop. | Una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

Dim. Si ad esempio $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ una sol. massimale, e per assurdo sia $t_0 = \max(I)$: considero il pb. di Cauchy $(x) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases}$

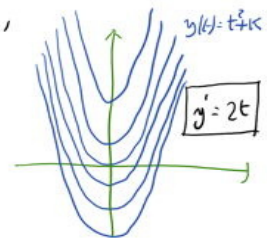
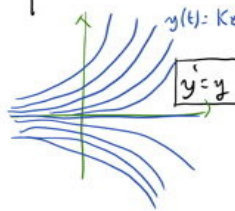


Per il T. Cauchy $\exists \delta > 0$ e un'unica sol. $\tilde{\varphi}(t)$ di (x) con dominio $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

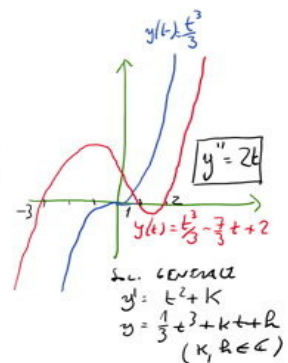
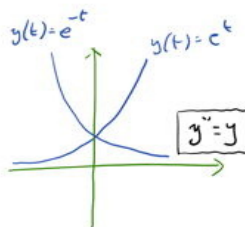
Per unicità globale sarà $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in]t_0 - \delta, t_0[$

Ma allora otterremo una sol. $\tilde{\varphi}: I \cup]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{C}^n$ estendendo la due. Assurdo, perché I era l'intervallo massimale e invece l'ho esteso! Dunque $\max I$ non può esistere. //

Conseguenze dell'unicità globale: in questo caso, i grafici di due diverse soluzioni di uno stesso problema del I^2 ordine non possono mai intersecarsi.



Invece i grafici di due diverse soluzioni di uno stesso problema del II^2 ordine possono sì intersecarsi, ma con pendenze diverse! (Il dato iniziale si fonda sui valori $y(t_0)$ e $y'(t_0)$).



Un'altra fenomeno interessante è quello:

Prop. (FUGA DEI COMPATTI) Una soluzione massima "esce definitivamente" da ogni sottoinsieme compatto di U , nel senso che:
 dato $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ soluzione massima di $y' = f(t, y)$ (con f locale lipschitz)
 e un compatto $K \subset U$, esiste $t_-, t_+ \in I$ tali che
 $(t, \varphi(t)) \notin K \quad \forall t < t_- \text{ e } \forall t > t_+$.

Es. $y' = 2ty^2$ f è C^∞ dunque f è continua per ogni dato iniziale $y(t_0) = y_0 \Rightarrow$ unicità globale!

Integrando: sol. costante $y \equiv 0$

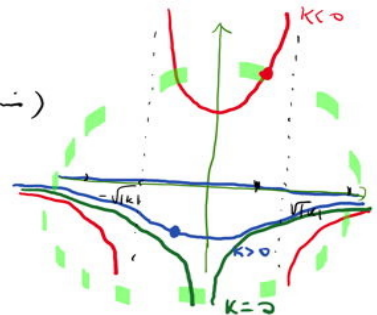
$\Rightarrow$ per unicità globale, le altre soluzioni non si annulleranno in alcun istante, ovvero avranno segno costante!

$$\frac{1}{y^2} dy = 2t dt \quad -\frac{1}{y} = t^2 + k \quad y(t) = -\frac{1}{t^2 + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Le soluzioni massimali sono quelle i cui grafici sono le componenti connesse delle curve evidenziate in figura.

Le fughe dei compatti si apprezzano in quanto dei (si evidenziano):

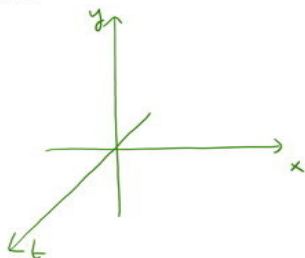
- se $k < 0$ la fuga avviene nei valori y (e domini)
- se $k > 0$ la fuga avviene nell'ampiezza del dominio $(\mathbb{R}_t)$
- se $k = 0$, in entrambi i sensi.



Es. $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases} \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad f(t, Y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$
 $Y' = f(t, Y)$ sistema diff. lineare AUTONOMO nel piano.

Soluzioni evidenti (a parte quella nulla): $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (\cos 2t, \sin 2t)$

Le altre? Le vedremo tra un po'.



La fig. di compatto si legge nel funz. di $(\bar{x}, \bar{y})$, limitate nei valori assunti (già sulle ϵ -sferre unitarie in (x, y)) e "eterna" nel dominio di definizione ($\forall t \in \mathbb{R}$).

Proviamo ora di ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE: con quali ulteriori ipotesi su f è più spesso di ottenere $J=a$, ovvero una soluz. definita su TUTTA la base I_a del cilindro di base $I_a \times \mathbb{R}^n$?

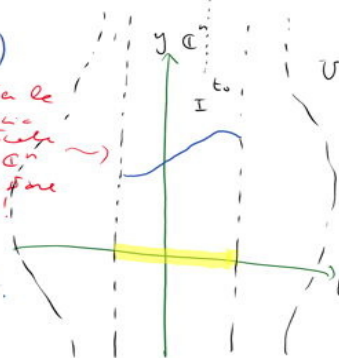
Teo. (CAUCHY, LIPSCHITZ E ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE)

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ t.c. $I \times \mathbb{C}^n \subset U$

Si suppone che valga una delle seguenti due ipotesi (la 1^a è più forte della 2^a,

dopo di' luogo a una versione più debole del Teorema).

tutta la striscia verticale $I \times \mathbb{C}^n$ deve finire in U !



(a) (Lipschitzianità risp. y su ogni compatto di I).

$\forall$ intervallo compatto $K \subseteq I$ si ha che

$$\exists L_K > 0: \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in K, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$$

(b) (Crescita sublineare)

f si suppone Lipschitziana risp. y (dopo di' f' è localmente

e di più ogni intervallo compatto $K \subseteq I$ si abbia

$$\exists A_K, B_K > 0: \|f(t, y)\| \leq A_K \|y\| + B_K \quad \forall (t, y) \in K \times \mathbb{C}^n$$

Allora $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ esiste (ed è unica) una soluz. del pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{su dominio TUTTO } I.$$

Dim. (del Teo. di C.L. globale)

Iniziamo mostrando che (a) $\Rightarrow$ (b).

In (a) scegliamo $y_1 = y$, $y_2 = 0$:

$\forall K \subset \text{supp. } \vec{u}$ in I $\exists L_K \geq 0$:

$$\|f(t, y) - f(t, 0)\| \leq L_K \|y\| \quad \forall t \in K, \forall y \in \mathbb{C}^n. \text{ Allora:}$$

$$\|f(t, y)\| \leq \|f(t, y) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq \overset{A_K}{L_K} \|y\| + \overset{B_K}{\max_{t \in K} \|f(t, 0)\|}$$

Dimostriamo ora il Teorema nelle forme deboli (sufficienti (a)).

Sia $a > 0$: $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq I$. Esiste una soluzione su tutto I_a ?

Sì! Perché esiste su I_δ con $\delta = \min \{a, \overset{+ \infty \text{ per ipotesi}}{b_M}\} = a$.

Stesso ragionamento fatto per qualsiasi compatto $K \subseteq I$.

Infine esiste una successione crescente K_n di compatti in I t.c. $I = \bigcup K_n$. Su ciascun K_n troviamo una soluzione del problema,

e quella su K_{n+1} , coincide, per una certa restrizione, con quella su K_n

(per l'ipotesi (a) fa funzionare il Teo. C.L. locale, dopo c'è

$\exists!$ per quel dato iniziale in $I \times \mathbb{C}^n \Rightarrow$ unicità globale su $I \times \mathbb{C}^n$)

e quindi di lungo è una soluzione su tutto I . //

A proposito del T. Cauchy - Lipschitz di esistenza e unicità globale:

Ex. $y' = y^2$ e $y' = 2\sqrt{|y|}$:

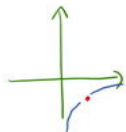
In entrambi questi casi (in cui $y' = f(t, y)$ con f continua su $\mathbb{R}^2$) il Teo. di C.L. in grande non è applicabile.

• Per $y' = y^2$ ($f(t, y) = y^2$) non ha crescita sublineare

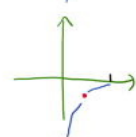
• Per $y' = 2\sqrt{|y|}$ non soddisfiamo nemmeno le ipotesi del Teo. di C.L. locale.

E in effetti le soluzioni generali di entrambe NON HA dominio $\mathbb{R}$:

• $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$



• $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(1) = -1 \end{cases}$



$$\frac{1}{y^2} dy = dt \quad -\frac{1}{y} = t + K \quad K = 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{dominio }]0, +\infty[\quad (\text{non } \mathbb{R})$$

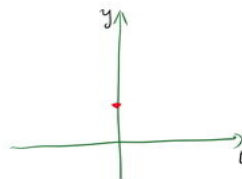
$$y(t) = -(t-2)^2 \quad \text{definita per } t < 2$$

$$\text{ovvero su }]-\infty, 2[\quad (\text{non } \mathbb{R})$$

Ex

$y' = \arctan(ty)$. Sia $\varphi(t)$ la soluz. iniziale con $\varphi(0) = 1$.

- (i) Provare che φ ha dominio $\mathbb{R}$.
- (ii) Studiare punto, estremo, asintoti di φ
- (iii) Provare che φ è illimitata.



$f(t, y) = \arctan(ty)$ è C^∞ su $U = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ soluz. + derivate
 $\Rightarrow$ unicità globale $\Rightarrow$ le uniche soluz. iniziali!
 $y=0$ soluzione evidente $\Rightarrow$ la unicità globale serve $\varphi(t) > 0 \forall t$

(i) Intanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset U = \mathbb{R}^2$.

Abbiamo forme che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata su ogni striscia verticale
 del tipo $K \times \mathbb{R}$ con K compatto.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{1+t^2y^2} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{|t|}{1+t^2y^2} \leq |t| \leq \max_{t \in K} |t| \quad \text{ok!}$$

Per cui $\varphi(t)$ ha dominio tutto $\mathbb{R}$.

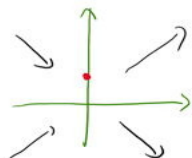
(ii) Punto: provare $\psi(t) := \varphi(-t)$, e provare che anch' $\psi(t)$ è soluz.
 $\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -\arctan((-t)\varphi(-t)) = \arctan(t\varphi(-t)) = \arctan(t\psi(t))$ (ok)

Insomma $\psi(0) = \varphi(0) = 1 \Rightarrow \psi \equiv \varphi$ la unicità globale.

Dunque φ è pari.

Asintoti di φ .

$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \arctan(t\varphi(t)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ \varphi(t)=0 \end{cases}$ per $t=0$ la soluz. iniziale di φ .
Ma una sola?
 $\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow \arctan(t\varphi(t)) > 0 \Leftrightarrow I^+, III^+$ Ma ($\exists t$) per unicità globale,
una $y=0$ evidente soluz.



Dunque $t=0$ sta al punto di minimo assoluto
 studiato per $\varphi(t)$.

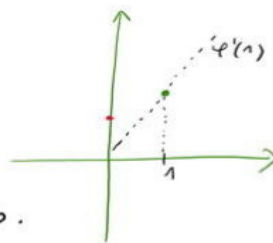
Convergenza di φ , derivando ambo i membri di $\varphi'(t) = \arctan(t\varphi(t))$

$$\varphi'' = \frac{1}{1+t^2\varphi(t)^2} \cdot (\varphi(t) + t\varphi'(t)) = \frac{\varphi(t) + t \cdot \arctan(t\varphi(t))}{1+t^2\varphi(t)^2} > 0$$

dunque $\varphi(t)$ è strettamente convessa.

dopo $\varphi(t)$ è strettamente crescente.

- (iii) Per $t > 0$ si ha $\varphi'(t) > 0$, dopo
 nel punto $\varphi'(1) > 0$
 Per convessità (stretta), il grafico
 di φ stari sopra la retta tangente
 in $t=1$, che va a $+\infty \Rightarrow \varphi(t) \rightarrow +\infty$.



Un caso di fondamentale importanza in cui c'è $\exists!$ globale è quello delle

EQUAZIONI LINEARI

$$y' = f(t, y) = A(t)y + b(t)$$

ove $A(t)$ è una matrice $n \times n$ di funzioni continue $a_{ij}(t)$, e $b(t)$ è
 un vettore di funzioni continue.

Ex. • $t(y' - \ln t) + y = 0 \leadsto y' + \frac{1}{t}y = \ln t$ è lineare
 le soluzioni massimali $y(t)$ saranno definite su tutto $]0, +\infty[$.

$$\begin{cases} x' = 4t^2x - \frac{1}{\sqrt{1+2t}}y - e^t \\ y' = x \cos t + \frac{y}{t} + \arctg(3t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4t^2 & -\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \\ \cos t & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t \\ \arctg(3t) \end{pmatrix}$$

Verifichiamo: è lineare $\Rightarrow$ le soluzioni $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ saranno definite su $] -\frac{1}{2}, 0[$
 oppure su $]0, +\infty[$. (a seconda di t_0 nel dato iniziale $y(t_0) = y_0$).

Prop. (ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE PER LE E.D.O. LINEARI)

Sia $y' = A(t)y + b(t)$, ove $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ e $b: I \rightarrow \mathbb{C}^n$
 sono funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Allora $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n \exists!$ soluzione di $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ su tutto I

Dim. Vediamo che nel T. C.L. globale è soddisfatta l'ipotesi (a), ovvero che

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in K \text{ compatto } \subseteq I, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$$

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \|A(t) \cdot (y_1 - y_2)\| = \|A(t)\| \cdot \|y_1 - y_2\|$$

$\|y_1 - y_2\| = 1$
 $\|y_1 - y_2\| = 1$

$$\begin{aligned}
 \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &= \|A(t) \cdot (y_1 - y_2)\| = \|A(t) \left(\|y_1 - y_2\| \cdot \frac{y_1 - y_2}{\|y_1 - y_2\|} \right)\| \\
 &= \|A(t)(v)\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \left(\max_{\|v\|=1} \|A(t)(v)\| \right) \cdot \|y_1 - y_2\| \\
 &\quad \text{norma operatoriale di } A(t): \|A(t)\|_{op} \\
 &\quad \text{max delle norme dei suoi} \\
 &\quad \text{valori sulle sfere unitarie} \\
 &= \|A(t)\|_{op} \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \max_{t \in K} \|A(t)\|_{op} \cdot \|y_1 - y_2\| \quad //
 \end{aligned}$$

Ex. Risolvere $t(y' - \ln t) + y = 0$

$y' + \frac{1}{t}y = \ln t$ lineare $\Rightarrow$ sol. massima su $]0, +\infty[$

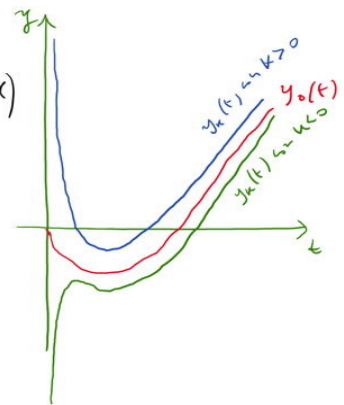
$$\begin{aligned}
 A(t) &= \int a(t) dt = + \ln t ; \int e^{A(t)} b(t) dt = \int t \cdot \ln t dt = t^2/2 \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t^2/2 dt \\
 &= t^2/2 \ln t - t^2/4 = t^2/4 (2 \ln t - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-A(t)} \left(\int e^{A(t)} b(t) dt + k \right) = \frac{1}{t} \left(\frac{t^2}{4} (2 \ln t - 1) + k \right) \\
 &= \frac{k}{t} + \frac{t}{4} (2 \ln t - 1) \quad (k \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$y_k(t) = \frac{k}{t} + \frac{t}{4} (2 \ln t - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y_k(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ 0^- & \text{se } k = 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y_k(t) = +\infty$$

$$|y_k(t) - y_0(t)| = \frac{k}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$



ESERCIZI

(1) Si consideri l'e.d.o. $y' = \frac{1}{x^2 + y^2}$ nelle ipotesi $y(x)$.

- (i) Mostrare che se $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (con $b > a > 0$) è soluzione allora lo è anche $\psi:]-b, -a[\rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(x) = -\varphi(-x)$.
- (ii) Mostrare che $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni massimali t.c. $y(x_0) = y_0$ per un certo $x_0 > 0$ è definite su tutto $]0, +\infty[$.
- (iii) Dedurre che se $x_0 < 0$ le soluzioni mass. è def. su $]-\infty, 0[$.
- (iv) Mostrare che ogni soluzione massimale con $y(0) = y_0 \neq 0$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri l'equazione autonoma $y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y$ (con $y > 0$).

- (i) Scrivere il sistema equivalente del I° ordine, e dire se ci sono esistenza e unicità locali o globali.
- (ii) Vi sono soluzioni costanti?
- (iii) Determinare le soluzioni massimali, verificando che hanno come dominio tutto $\mathbb{R}$ (Sufficiente: porre $u := \log y$)