

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 13/11/2025

E.D.O. AUTONOME

$$y' = \cancel{f(t, y)} \rightarrow y' = g(y)$$

ove $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una funzione continua su un aprto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$.

(in altre parole: g è un campo vettoriale in Ω)

In sostanza, di una soluzione $y(t)$ (consistente in Ω)

sta assegnando il vettore tangente $y'(t) = g(y(t))$.

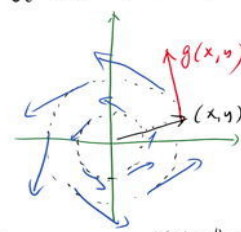
Posso dunque g e visualizzarlo in funzione di visualizzare subito l'immagine di $y(t)$, ovvero il tracciato delle curve $y(t)$, dette ORBITA delle soluzioni $y(t)$ (più informale: "traiettoria").

Le famiglie delle orbite dentro Ω si dicono

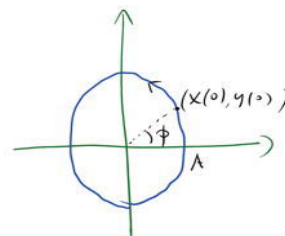
RICETTA IN FASE del sistema autonomo.

Il R.I.F. fornisce dunque una visione geometrica delle soluzioni (della ho immagino a dire il vero!) prescindendo dalle legge orarie con cui ho pensato.

Ex. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
 $g(x, y) = (-y, x)$



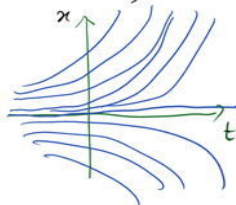
Soluzioni $\begin{cases} x(t) = A \cos(t + \phi) \\ y(t) = A \sin(t + \phi) \end{cases}$



Ex. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$: visto a dx, si ottengono le circonferenze.

• caso scalare: $x' = x$ (cioè $x(t)$). $\Omega = \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Soluzioni: $x(t) = K e^t$



ritratto in fase:



Osservazioni : anche una e.d.o. non autonoma si può vedere, vedere che una autonoma: basta aggiungere una coordinata.

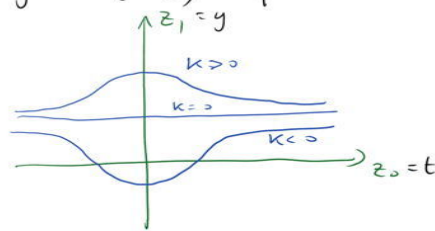
$y = (y_1, \dots, y_n)$ $y' = f(t, y)$ si può scrivere usando

$z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ con $z_0 = t$, $z_j = y_j$ ($j = 1, \dots, n$) :

$y' = f(t, y) \Leftrightarrow z' = g(z)$ ove $g(z) = g(z_0, z_1) = (1, f(z_1))$

$$\begin{cases} z_0' = 1 \\ z_1' = f_1(z) \\ \vdots \\ z_n' = f_n(z) \end{cases}$$

Ex. $y' = 2t(1-y)$ eq. scalare di equivar. a $\begin{cases} z_0' = 1 \\ z_1' = 2z_0(1-z_1) \end{cases}$



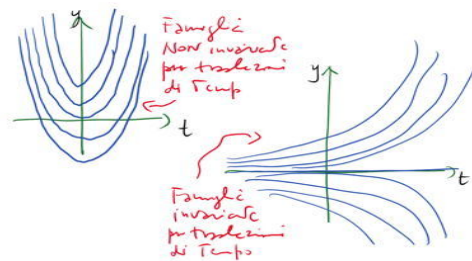
soluzioni: $y(t) = 1 + Ke^{-t^2}$

Il vettore è fisso per (z_0, z_1) equivale al dirimp del grafici per $y(t)$.
Le curve sono in ogni punto tangenti al campo vettoriale $(1, 2z_0(1-z_1))$ ovvero $(1, 2t(1-y))$

Prop. Lo spazio delle soluzioni di una e.d.o. autonoma è invariante per traslazioni temporali, ovvero, se
se $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ è soluzione, è anche $\varphi(t+k): I-k \rightarrow \mathbb{C}^n$

Dim. $y' = g(y)$ $\varphi(t)$ soluzione. Considera $\varphi(t+k)$:
 $\varphi(t+k)' = \varphi'(t+k) \cdot 1 = \varphi'(t+k) = g(\varphi(t+k)) //$

Ex. $y' = 2t \Rightarrow y(t) = t^2 + k$
 $y' = 2y \Rightarrow y(t) = Ke^{2t}$



Nel caso di un sistema autonomo $y' = g(y)$, i teoremi di C.L. si enunciano che segue:

Teo. (ESISTENZA E UNICITÀ PER I SISTEMI AUTONOMI, PEANO-LIPSCHITZ)

- (a) ($\exists!$ locale) Se il campo $g(y)$ è localmente lipschitziano (ad es.: se g è C^1 in Ω) allora c'è esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale in Ω ($\Rightarrow$ unicità globale!)
 ovvero: il problema $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = y_0 \in \Omega \end{cases}$ ha soluzioni uniche
 una sola soluzione, cioè $\exists \delta > 0$ e $\varphi:]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\rightarrow \Omega$
 t.c. $\varphi'(t) = g(\varphi(t)) \quad \forall t: |t - t_0| < \delta, \quad \varphi(t_0) = y_0$.
- (b) ($\exists!$ globale) Nel caso $\Omega = \mathbb{C}^n$, se g è globalmente lipschitziano (ad es.: se g è C^1 e $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ sono tutte limitate) o se g è l.c. lipsch. con crescita sublineare
 $\Rightarrow$ c'è esistenza e unicità globale su tutto $\mathbb{R}$ per ogni dato $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

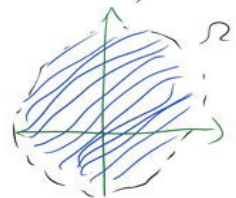
D'ora in poi lavoreremo su un campo g l.c. LIPSCHITZIANO (dunque c'è $\exists!$ locale, e unicità globale).

In particolare le anche sono parole di funzioni risolte $y(t)$ di $y' = g(y)$.

ORBITA: immagine di una soluzione massimale $y(t)$ di $y' = g(y)$.

RETROIN FASE: le famiglie delle orbite in Ω (foliazione di Ω)

EQUILIBRIO: $y_0 \in \Omega$ t.c. $g(y_0) = 0$



Prop. | $y_0 \in \Omega$ equilibrio $\Leftrightarrow y \equiv y_0$ è soluzione costante

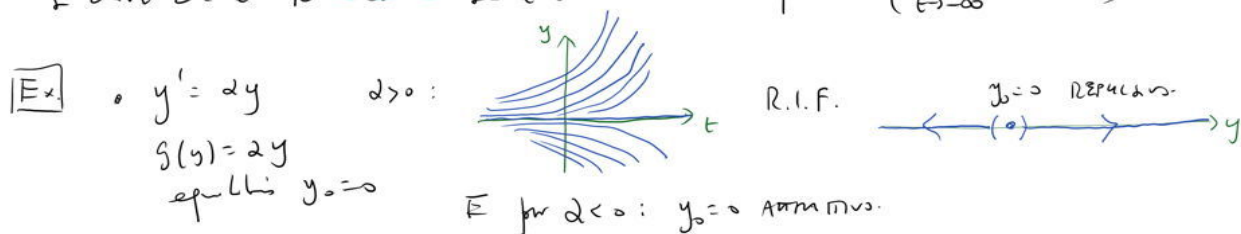
Dim. " $\Rightarrow$ " considero $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$: i valori delle cost. $y \equiv y_0$

" $\Leftarrow$ " $0 = (y_0)' = g(y_0) \quad //$

Per le nozioni di "equilibrio stabile" ci sono vari possibili. $\square$
 Quella forse più semplice (ma più restrittiva) è la seguente:

Si dice che un equilibrio $y_0 \in \Omega$ è **ATTRATTIVO** se
 $\exists$ intorno V di y_0 in Ω t.c. $\forall \tilde{y} \in V$ la soluzione $y(t)$
 del ps di Cauchy $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = \tilde{y} \end{cases}$ soddisfa $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$

Si dice che è **REPULSIVO** se è attrattivo nel passato ($\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_0$)



Vediamo vari fatti fondamentali su soluzioni e orbite di
 un sistema autonomo $y' = g(y)$ su g campo l.c. LIPSCITZIANO.

1. Orbite diverse non si intersecano mai.
2. Due soluzioni $y(t)$ che percorrono la stessa orbita sono l'una la traslazione temporale dell'altra.

Dim. Sian $\varphi_1: I_1 \rightarrow \Omega$ e $\varphi_2: I_2 \rightarrow \Omega$ soluzioni massimali in $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$ ^{si: y_0}
 per certi istanti $t_1 \in I_1$ e $t_2 \in I_2$. Notiam allora che sic φ_2 che $\tau_{t_2, t_1} \varphi_1$
 soddisfa alle condizioni $y(t_2) = y_0$ ^{unica} $\Rightarrow \varphi_2 = \tau_{t_2, t_1} \varphi_1$.

3. Sici $y(t)$ una soluz. massimale di $y' = g(y)$ che sia non costante.
 Allora le velocità $y'(t)$ non si annulla mai.
 Inoltre se $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$, allora $\begin{cases} y_0 \in \partial\Omega \\ y_0 \in \Omega \text{ ed è un equilibrio.} \end{cases}$

Dim. Le premesse $\exists t_0: y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = g(y(t_0)) = 0 \Rightarrow y(t_0)$ è eq. lib. ^{si: y_0}

Ma anche, visto che $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è soddisfatto se da $y(t)$ che dalle eq. $y \equiv y_0$, per unic. $y(t)$ è la sol. y_0 : assurdo!

Se per $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$. Se $y_0 \notin \Omega \Rightarrow y_0 \in \partial\Omega$ (per $\forall t, y(t) \in \Omega$)

Se invece $y_0 \in \Omega$, se per assurdo y_0 non è eq. lib., cioè $g(y_0) \neq 0$.
 $\Rightarrow \exists j$ in $g_j(y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ intorno V di y_0 in Ω t.c. $|g_j(y)| > K > 0$
 $\forall y \in V$.

Perché $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$, $\exists T > 0$ t.c. $y(t) \in V \forall t > T$: allora

$$|y_j(t) - y_j(T)| = \left| \int_T^t g_j(y(\tau)) d\tau \right| = \left| \int_T^t g_j(y(\tau)) d\tau \right|$$

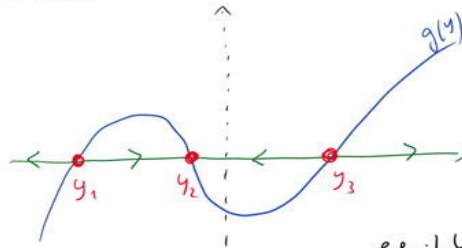
g_j è la j -esima comp. di g

$$= \int_T^t |g_j(y(\tau))| d\tau \geq \int_T^t K d\tau = K|t-T|$$

ma per. è assurdo, perché quando t cresce il 1° m. delle
 uscite limitate (tende a $|(y_0)_j - y_j(T)|$) ma il 2° m.
 diverge a $+\infty$. //

Ex.

RITRATTO IN FASE DELLE EQ. AUTONOME **SCALARI** $y' = g(y)$



y_1, y_2, y_3 equilibri

$g(y) \geq 0 \Rightarrow y$ cresce

Le orbite sono gli equilibri e
 gli intervalli interni in cui gli

equilibri spaziano il dominio di g , ovvero Ω

(e si dice che le soluzioni devono tendere o a pt. di frontiera o
 a equilibri...).

Esempio. EFFETTO ALBERE IN ECOSISTEMI: se la popolazione scende
 sotto un livello minimo S inizia a diminuire e si estingue.

Cioè raffina il modello logistico $y' = \delta y (1 - \frac{y}{S})$: ($\delta > 0$)

dati $0 < S < S'$, il modello diventa

$$y' = \delta y (1 - \frac{y}{S}) (\frac{y}{S} - 1) = g(y)$$

