

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 14/11/2025

Ex. EQUAZIONI DEL II° ORDINE $y'' = h(y, y')$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \quad z = (z_1, z_2) = (y, y') \in \mathbb{C}^{2n}$$

$$y'' = h(y, y') \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = h(z_1, z_2) \end{cases} \quad z' = g(z) = (g_1(z), g_2(z))$$

$$g_1(z) = z_2, \quad g_2(z) = h(z)$$

Cos'è un equilibrio? È un $z_0 = (z_1, z_2)$ t.c. $g(z_0) = 0$

ovvero $z_{0,2} = 0, \quad h(z_0) = 0$: in termini di y ,

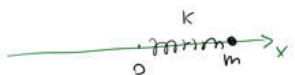
è un coppia del tipo $(y_0, 0)$, t.c. $h(y_0, 0) = 0$

Terminologia: lo spazio delle y è detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI,

l'immagine di una soluz. normale $y(t)$ è detta TRAiettoria.

Lo spazio delle (y, y') è (come detto) lo SPAZIO DELLE FASE,

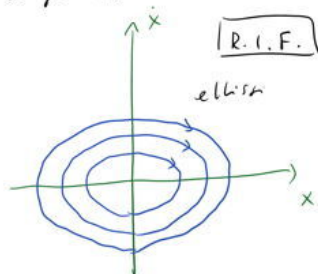
e il PORTRATO IN FASE è le famiglie delle orbite nello spaz. (y, y')

Ex. OSCILLATORE ARMONICO  $m\ddot{x} = -Kx$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ pulsazione caratteristica}).$$

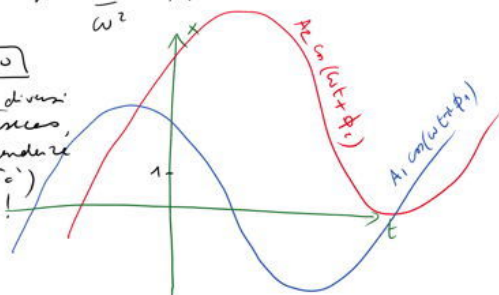
Supponi (Amdin. I) che le soluz. sio $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

$$\text{Dunque } \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \leadsto x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2 \text{ costante}$$



NOTA

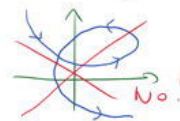
grafici diversi
si intersecano
ma con pendenza
(velocità)
diverse!



Un altro paio di risultati sulle orbite:

4. Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluz. massima di $y' = g(y)$ (sempre $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ loc. Lipsch.)
Se $\exists T > 0$ t.c. per qualche $t_0 \in I$ si abbia $t_0 + T \in I$ e $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$
allora φ è periodica, $I = \mathbb{R}$ e T è tra i periodi di $\varphi(t)$.

Dim. Il pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases}$ è soddisfatto da $\varphi(t)$
e da $(\tau_T \varphi)(t) := \varphi(t + T) \Rightarrow (\text{unicità}) \varphi(t + T) = \varphi(t) \forall t$



5. Se g è campo gradiente, le sue orbite non formano alcun circuito (sono "curve aperte").

Dim. Sici γ around $\varphi(t)$ soluz. massimale non cost. t.c.
 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ $\forall$ qualche $t_1 < t_2$. Allora $\psi := \varphi|_{[t_1, t_2]}$ è un
 circuito, e vale $\oint_{\psi} g \cdot dx = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot g(\varphi(t)) dt = \int_a^b \|g(\varphi(t))\|^2 dt$.
 Ma essendo g campo gradiente deve essere $\oint_{\psi} g \cdot dx = 0$
 $\Rightarrow g(\varphi(t)) \equiv 0 \forall t \Rightarrow$ tutti i punti del circuito
 $\psi([t_1, t_2]) = \varphi([t_1, t_2])$ sono equilibri $\Rightarrow$ around
 perché φ è soluzione non costante. //

6. (FUGA DAI COMPATTI) Una soluz. massimale γ o orbite antenale è un
 compatto di Ω $\forall$ tutti i Tempi positivi/negativi deve avere come
 dominio un intervallo aperto sup./inf. illimitato (in particolare, se
 tutta l'orbita è antenale è un compatto il dominio deve essere $\mathbb{R}$).

Dim. È la rilettura della "Fuga dai compatti" nel caso autonomo.

Parliamo delle nozioni di SISTEMI EQUIVARIANTI.

Due sistemi autonomi $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$ si dicono equivarianti q. ad.

- hanno gli stessi equilibri, e
- le soluzioni $\varphi(t)$ di $y' = g(y)$ si ottengono dalle soluzioni $\tilde{\varphi}(t)$ di $y' = \tilde{g}(y)$ tramite un cambio di parametro $t: \mathcal{D}(\varphi)$ invertibile.

ovvero, questi i due sistemi hanno la stessa struttura a fase!

(i vettori di $\tilde{g}$
 devono avere stessa
 direzione di quelli di g ,
 mentre il modulo può
 variare)

Prop. $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$
 sono equivalenti $\Leftrightarrow \exists$ funzioni $\rho(y)$ loc. lipschitziane
 mai nulle ($\Rightarrow$ di sig. costante) t.c.
 $\tilde{g}(y) = \rho(y) g(y)$.

RESOLUZIONI DEI DUE ESERCIZI
ASSEGNA TI IN PRECEDENZA

(1) Si consideri l'eq. d.o. $y' = \frac{1}{x^2+y^2}$ nell'insieme $y(x)$.

(i) Mostare che se $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (con $b > a > 0$) è soluzione allora lo è anche $\psi:]-b, -a[\rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(x) = -\varphi(-x)$.

(ii) Mostare che $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni massimali t.c. $y(x_0) = y_0$ per un certo $x_0 > 0$ è definite su tutto $]0, +\infty[$.

(iii) Dedurre che se $x_0 < 0$ le soluzioni mass. è def. su $]-\infty, 0[$.

(iv) Mostare che ogni soluzione massimale con $y(0) = y_0 \neq 0$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$.

L'equazione non è autonoma.

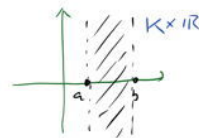
$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ è C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow \exists$ locale per ogni dato iniziale del tipo $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ (e unico) globale).

Esistenza globale? Si può esaminare per $I =]-\infty, 0[$ oppure $I =]0, +\infty[$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$: è limitato su ogni striscia a base compatta

$K \times \mathbb{R}$ con $K = [a, b]$ oppure $K = [-b, -a]$ per $0 < a < b$,

perché $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{2|y|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2|y|}{(a^2+y^2)^2} = \frac{1}{a^2 y^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{2a|y|}{a^2 y^2} \leq \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}$.



Dopo le soluzioni massimali con dato $y(x_0) = y_0$ per $x_0 > 0$ è definite almeno su tutto $]0, +\infty[$ (ma forse anche oltre), e analogamente quelle con dato $y(x_0) = y_0$ per $x_0 < 0$ lo è almeno su $]-\infty, 0[$.

Questo prova (ii).

Vediamo (i). Se $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ soluzione (con $0 < a < b$), e poniamo $\psi(x) = -\varphi(-x)$ (definita sulle intersezioni opposte $]-b, -a[$)

Vale allora $\psi'(x) = \varphi'(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + \varphi(-x)^2} = \frac{1}{x^2 + \psi(x)^2}$, dove

anche $\psi(x)$ è soluzione.

Questo prova (i) e (unendosi (ii)) ne segue anche (iii).

Possiamo infine a (iv): Se $z(x)$ le soluzioni massimali del
problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$: allora $z(x)$ sono

definite puramente in un intorno $] -\delta, \delta[$ di $x=0$ per un certo $\delta > 0$.

D'altra parte le soluzioni massimali $p(x)$

del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(\delta/2) = z(\delta/2) \end{cases}$

sono definite almeno su $]0, +\infty[$ (per (iii)),

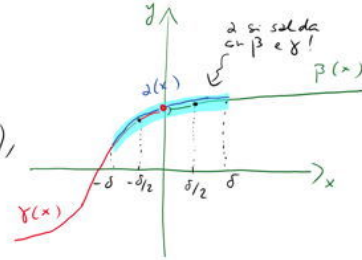
e le soluzioni massimali $\gamma(x)$ del problema

di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(-\delta/2) = z(-\delta/2) \end{cases}$ sono

definite almeno su $] -\infty, 0[$ (per (iii)).

per unicità globale esse si saldano con $z(x)$ dando luogo

ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.



(2) Si consideri l'equazione autonoma $y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y$ ($\log y > 0$).

(i) Scrivere il sistema equivalente del I° ordine, e dire se c'è
una esistenza e unicità locale o globale.

(ii) Vi sono soluzioni costanti?

(iii) Determinare le soluzioni massimali, verificando che hanno
come dominio tutto $\mathbb{R}$ (Sufficiente: porre $u := \log y$)

(i) Sistema equivalente: posto $x = (x_1, x_2) = (y, y')$ e $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 \log x_1 \end{cases}$

$f(x_1, x_2) = (x_2, \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 \log x_1)$ è C^1 su $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, dunque

c'è $\exists!$ locale per ogni dato del tipo $(t_0, (x_1)_0, (x_2)_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Dunque all'esistenza globale, non si può applicare il Teorema per-
ché il dominio di f non è tutto $\mathbb{R}^2$. Dunque non possiamo dire nulla.

(ii) $y \equiv k$ è soluzione $\Leftrightarrow 0 = \frac{0^2}{k} + k \log k \Leftrightarrow k=1$. Quindi $y \equiv 1$.

(iii) $u = \log y$ $y = e^u \rightarrow y' = u' e^u \rightarrow y'' = u'' e^u + (u')^2 e^u$.

L'equazione $y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y$ diventa dunque

$$u'' e^u + (u')^2 e^u = \frac{(u')^2 e^{2u}}{e^u} + e^u \log(e^u)$$

$$u'' e^u + (u')^2 e^u : (u')^2 e^u + u e^u \Leftrightarrow u'' = u$$

$$\Leftrightarrow u(t) = A e^t + B e^{-t} \Leftrightarrow y(t) = e^{A e^t + B e^{-t}} = e^{A e^t} e^{B e^{-t}}$$

$$\text{dunque } y(t) = C e^t D e^{-t} \text{ con } C, D > 0.$$

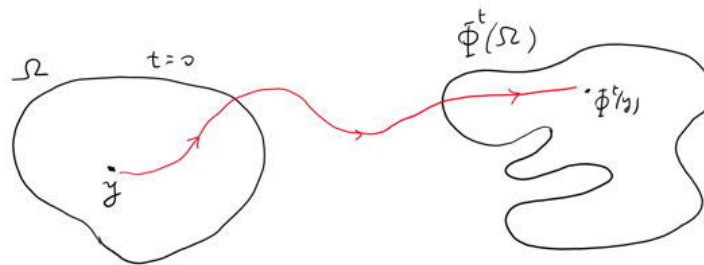
Flusso di sistema autonomo $y' = g(y)$ con $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ compo. l.c. l.p.s.d.
 $(\Rightarrow \exists! \text{ locale, unica! globale})$

Per semplicità supponiamo che le soluzioni $y(t)$ abbiano tutto $\mathbb{R}$

Dunque $\forall y \in \Omega \exists! \text{ soluz. } \varphi_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ tale che } \varphi_y(0) = y$.

Flusso $\Phi: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n, \Phi(t, y) := \varphi_y(t)$

Per $t \in \mathbb{R}$ sia $\Phi^t: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n, \Phi^t(y) := \varphi_y(t)$
 (per tanto $\Phi^0(y) = y \forall y \in \Omega$, l'identità).



Prop. Vale $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ (in part. Φ^t è invertibile con inversa Φ^{-t}).
 Φ^t è omeomorfismo, e se il campo g è C^1 è anche differenziabile.

Dim. $(\Phi^s \circ \Phi^t)(y) = \Phi^s(\varphi_y(t)) = \varphi_{\varphi_y(t)}(s)$

$(\Phi^{s+t})(y) = \varphi_y(s+t) = (\tau_t \varphi_y)(s)$

Ma $\varphi_{\varphi_y(t)}(0) = \varphi_y(t) = (\tau_t \varphi_y)(0) \Rightarrow$ per unicità globale $\varphi_{\varphi_y(t)} = \tau_t \varphi_y$.

In particolare per $s = -t$ si ha $\Phi^{-t} \circ \Phi^t = \Phi^0 = \text{id}_\Omega$.

La continuità e differenziabilità seguono da stime (dim. omesse).

Esempio • $y' = y \leadsto y(t) = y e^t$.
 Qui $\Phi^t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi^t(y) = \varphi_y(t) = y e^t$ (notare che $\Phi^0(y) = y$).

• $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \leadsto (x(t), y(t)) = (A \cos(t+\phi), A \sin(t+\phi))$
 (soluzioni giungono uniformemente in senso antiorario)

Qui $\Phi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Phi^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (rotazione in senso antiorario)

Si sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (CASO REALE), $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ comp. &c. l.p.d.

Un integrale primo del sistema $y' = g(y)$ è una funzione scalare

$E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ costante lungo le soluzioni $y(t)$ del sistema,

ovvero t.c. $E(y(t))$ non dipende da t .

In altri termini: le orbite del sistema sono contenute negli insiemi di livello delle funzioni E (ipersuperfici di $\mathbb{R}^n$):

In particolare: se $n=2$ le orbite saranno porzioni delle curve di livello di E .

Prop. $E(y)$ è integrale primo per $y' = g(y) \Leftrightarrow \nabla E(y) \cdot g(y) = 0 \quad \forall y \in \Omega$

Dim. E int. primo $\Leftrightarrow \frac{d}{dt} E(y(t)) = 0 \quad \forall$ soluz. $y(t)$

$\Leftrightarrow \nabla E(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla E(y(t)) \cdot g(y(t)) = 0 \quad \forall$ soluz. $y(t)$.

Dopo questo passo è sufficiente. Viceversa, dato $y_0 \in \Omega$, considero

il p.b. di Cauchy $\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. Sia $y(t)$ la soluz. massimale:

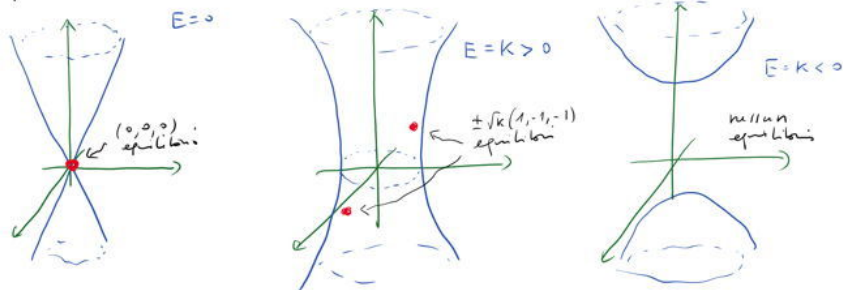
allora $\nabla E(y(t)) \cdot g(y(t)) = 0 \quad \forall t \stackrel{(t=0)}{\Rightarrow} \nabla E(y_0) \cdot g(y_0) = 0 \quad //$

Es. $\begin{cases} x' = z-y \\ y' = x+z \\ z' = x+y \end{cases}$ campo $g(x,y,z) = (z-y, x+z, x+y)$ (vettore)
equilibri $g(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = 2(1,-1,-1)$

La funzione $E(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ è un integrale primo!

Infatti $\nabla E = (2x, 2y, -2z)$, e vale $\nabla E \cdot g = 0$

Dopo le soluzioni del sifone saranno sulle sup. di livello di E .



Quando sapremo risolvere i sistemi lineari (questo lo è)

vedremo che le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo

$(x(t), y(t), z(t)) = (A + Ce^{-t}, -A + Be^t, -A + Be^t - Ce^{-t})$ per $A, B, C \in \mathbb{R}$

(nota che $E(x(t), y(t), z(t)) = A^2 + 2BC$ non dipende da t).

Per quei valori dei parametri le soluzioni soddisfano $z(t_0)=0$ per qualche t_0 .
 A meno di riscalarare il tempo, possiamo supporre $t_0=0$:
 $z(0) = -A+B-C=0 \Leftrightarrow B=A+C$: e su queste soluzioni le funzioni
 E vale $A^2+2BC = A^2+2C(A+C) = (A+C)^2 + C^2$, che è un valore >0
 tranne nel caso $A=B=C=0$ in cui vale 0. Posto quindi $E \leq 0$
 le soluzioni stanno sempre confinate in uno dei due semispazi $z \geq 0$
 (a seconda del dato iniziale) a parte il caso delle soluzioni costanti
 nell'equilibrio $(0,0,0)$: e questo è evidente dalla struttura delle
 superfici di livello $E=K$ quando $K \leq 0$ (vedi disegni sopra).

L'esempio più classico di integrale primo è l'INTEGRALE DELL'ENERGIA.
 per i sistemi autonomi del $\mathbb{R}^2$ ordine conservativi.

$$y'' = h(y, y') \leadsto y'' = h(y) \quad \text{FORZA!} \quad \text{con la campo conservativo.}$$

Sistemi conservativi del $\mathbb{R}^2$ ordine: pos. $p=y'$, equivale a $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y) \end{cases}$
 nell'immagine $(y, p) = (y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$.

Se $h(y)$ è conservativa si definisce l'ENERGIA POTENZIALE $U(y)$,
 tale che $h(y) = -\nabla U$.

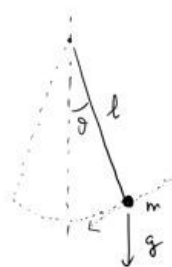
Ebbene, $E(y, p) := \frac{1}{2} \|p\|^2 + U(y)$ ENERGIA TOTALE è l'integrale primo.

Infatti qui il campo $g(y, p) = (p, h(y))$, e $\nabla E = (-h(y), p)$
 $(\text{per } \nabla_y E = \nabla U \text{ e } \frac{\partial}{\partial p_j} (\frac{1}{2} \|p\|^2) = \frac{\partial}{\partial p_j} (\frac{1}{2} (p_1^2 + \dots + p_j^2 + \dots + p_n^2)) = \frac{1}{2} \cdot 2p_j = p_j)$,
 e si ottiene che $\nabla E \cdot g \equiv 0 \quad \forall (y, p)$.

Ne segue che le orbite di $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y) \end{cases}$ (ovvero le orbite di $y'' = h(y)$)
 nello spazio delle fasi (y, y') stanno sempre contenute nelle ipersuperfici
 di livello di E in $\mathbb{R}^{2n} \ni (y, y')$.

NB: Nel caso scalare un'equazione $y'' = h(y)$ ha sempre
 l'integrale dell'energia (un campo scalare $h(y)$)
 e' ovviamente conservativa con $U(y) = -\int h(y) dy$, con
 energia $E(y, y') = \frac{1}{2} (y')^2 - \int h(y) dy$.

Ex



PENDOLO SEMPLICE

Coordinate angolari θ

Meccanica $m(l\ddot{\theta}) = -mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta = h(\theta)$

Pot. $\omega = \dot{\theta}$, il sistema del I° ordine separabile è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases} \quad \text{Equilibri } (\omega, -\frac{g}{l} \sin \theta) = (0, 0) \Rightarrow (\theta, \omega) = (k\pi, 0) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Equilibri stabili/instabili: punti di min/max di l'energia potenziale

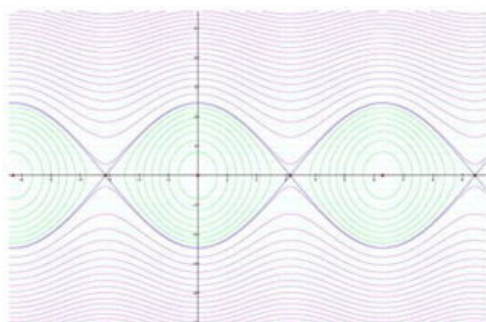
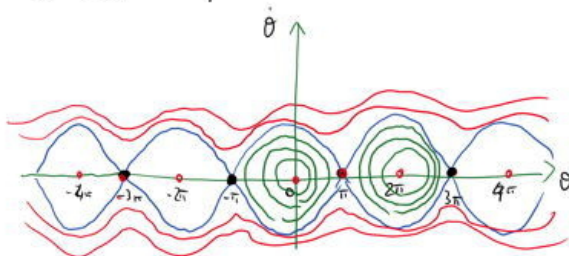
$$U(\theta) = - \int (-\frac{g}{l} \sin \theta) d\theta = -\frac{g}{l} \cos \theta + k, \quad \text{ovvero } \begin{cases} \theta = 2k\pi & (\text{stabile}) \\ \theta = \pi + 2k\pi & (\text{instabile}) \end{cases}$$

Energia Totale $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta$

$E(\theta, \dot{\theta})$ sta costante lungo i moti $\theta(t)$.

Negli equilibri (ovvero $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$) nello spazio delle fasi (θ, ω) vale $E(k\pi, 0) = -\frac{g}{l} \cos(k\pi) = -\frac{g}{l} \cdot (-1)^k$
 $\begin{cases} -\frac{g}{l} \text{ negli eq. stabili } \theta = 2k\pi \\ \frac{g}{l} \text{ negli eq. instabili } \theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$

- I moti con energia "bassa" ($-\frac{g}{l} \leq E < \frac{g}{l}$) sono quelli periodici in cui il pendolo oscilla attorno a un equilibrio stabile, oppure si ferma
 - I moti con energia "alta" ($E > \frac{g}{l}$) sono quelli periodici in cui il pendolo gira velocemente attraversando gli equilibri instabili (in alto)
 - I moti con energia "critica" ($E = \frac{g}{l}$) sono di due tipi:
 - o le quiete in un equilibrio instabile
 - o le tendenze asintotiche a un equilibrio instabile con velocità tendente a zero (senza mai raggiungere, per un'infinità!)
- In effetti queste tre famiglie sono le curve di livello di E



- = equilibri stabili
- = equilibri instabili
- = orbite chiuse (energia bassa) (oscillazioni attorno a eq. stabili)
- = orbite aperte (energia alta) (rotazioni a velocità di segno costante, il pendolo continua a girare)
- = orbite separatrici (energia critica) (il pendolo tende asintoticamente a un eq. instabile senza mai raggiungerlo)