

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di martedì 18/11/2025

Ex

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2x^2 + y \\ \ddot{y} = x - \sin y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ x - \sin y \end{pmatrix}$$

è comp. su tutto $\mathbb{R}^2$ che è sempl. conn. dunque
è conservativo $\Leftrightarrow$ h ipotetica in $\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial x}$ (Verif. = 1)

Funzi. potenziale $U(x,y)$: $\nabla U = -h$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -h_1 = -2x^2 - y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -h_2 = -x + \sin y \end{cases} \Rightarrow U = -\frac{2}{3}x^3 - xy + \psi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + \psi'(y) = -x + \sin y \Rightarrow \psi(y) = \sin y$$

$$\text{Dunque } U(y) = -\frac{2}{3}x^3 - xy + \sin y$$

$$\Rightarrow \text{Funzi. Totale } E(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{2}{3}x^3 - xy + \sin y$$

Le conoscenze di un integrale primo può essere decisiva Non lo per
fornire informazioni geometriche sulle orbite (in cui il Tempo non c'è),
ma anche per trovare le soluzioni esplicite $y(t)$ del problema originario
 $y' = g(y)$, ad esempio sfruttando l'informazione per disaccoppiare le
equazioni, o magari (nel caso di equazioni autonome del II° ord. conservative)
per abbassare l'ordine del problema.

Ex. Trovare le soluzioni $x(t)$ del pb di Cauchy $\ddot{x} = 2(e^{2x} + e^x)$
con condizioni iniziali $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=2\sqrt{2}$.

Per il Teorema di Cauchy locale $x(t)$ esiste ed è unica
(in dominio che intorna di $t=0$). Invece non essendo circoscritta soluzione
non potremo applicare il T. Cauchy globale: $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2(e^{2z_1} + e^{z_1}) \end{cases}$ $g(z_1, z_2)$

È del tipo $\ddot{x} = h(x)$ (conservativo perché scalare)

$$\text{Funzi. totale } E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int h(x) dx = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int 2(e^{2x} + e^x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}^2 - e^{2x} - 2e^x$$

Inq. le soluz. cercate, $E(x, \dot{x})$ vale sempre $E(x(0), \dot{x}(0)) = 1$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - e^{2x} - 2e^x = 1 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}^2 = 2(e^{2x} + 2e^x + 1) \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{2}(e^x + 1)$$

$x(0) > 0$

$\dot{x} = \sqrt{2}(e^x + 1)$ eq. del I° ordine a variabili separabili

$$\frac{1}{e^x + 1} dx = \sqrt{2} dt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{e^u + 1} = \int_0^t \sqrt{2} d\tau$$

$$\int \frac{1}{e^u + 1} du \quad \left[u = \ln \frac{q}{1-q}, du = \frac{1}{1-q} dq \right]$$

$$= \int \frac{1}{\frac{q}{1-q} + 1} \frac{dq}{1-q} = \ln \left| \frac{q}{q+1} \right|$$

$$\begin{aligned}
 \left(\ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right)' &= \sqrt{2} (t - 0) & \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) - \ln \frac{1}{2} &= \sqrt{2} t \\
 \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) &= \sqrt{2} t & \frac{2e^x}{e^x + 1} &= e^{t\sqrt{2}} \quad (2 - e^{t\sqrt{2}})e^x = e^{t\sqrt{2}} \\
 e^x &= \frac{e^{t\sqrt{2}}}{2 - e^{t\sqrt{2}}} \Rightarrow x(t) = \ln \left(\frac{e^{t\sqrt{2}}}{2 - e^{t\sqrt{2}}} \right) = t\sqrt{2} - \ln(2 - e^{t\sqrt{2}}) \\
 \text{Domini: } 2 - e^{t\sqrt{2}} > 0 &\Leftrightarrow e^{t\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow t\sqrt{2} < \ln 2 \Leftrightarrow t \in]-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2[
 \end{aligned}$$

non
in t=0

Concentriamo sul caso $n=2$ (sistemi autonomi NEL PIANO).

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases}$$

ove $a, b: V \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni $\mathcal{C}^1$ su un ap. $V \subseteq \mathbb{R}^2$

Da adesso c'è $\exists!$ locale per ogni dato iniziale in V

(ovvero, dato $(x_0, y_0) \in V$, il p.b. $\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$ avrà un'unica

soluzione $(x(t), y(t))$ definita almeno di $t_0 = 0$)

$\Rightarrow$ e c'è anche unicità globale (due soluzioni che coincidono in un ist. t_0 ...)

Questi tipi di problema compaiono in particolare:

- tutte le e.d.o. scalari $y' = f(t, y)$ con f di classe $\mathcal{C}^1$
(basta porre $(x, y) = (t, y)$, e dopo l'eq. equivale a $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$)
- tutte le e.d.o. scalari del $\mathbb{R}^2$ ordine autonomo $y'' = h(y, y')$
(basta porre $(x, y) \rightsquigarrow (y, p)$: $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y, p) \end{cases}$ nel piano delle fasi (y, p))

Andiamo alla ricerca di un integrale primo $E(x, y)$ per il sistema:
come detto, le orbite saranno porzioni delle curve di livello di E
nel piano (x, y)

Considerando, dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases}$, la forma differenziale associata

$$\omega = b(x, y) dx - a(x, y) dy$$

Se ω fosse esatta, una sua primitiva $F(x,y)$ (ovvero t.c. $dF = \omega$, cioè $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = b \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -a \end{cases}$) sarebbe un integrale primo per il sistema d.d.s.: $\nabla F \cdot g = (b, -a) \cdot (a, b) = 0$

Naturalmente quest. non accade sempre! (Sfortunatamente!) ...

Tuttavia, sic $g(x,y)$ una funzione scalare C^1 che non si annulla mai ($\Rightarrow$ ^{sempre} ~~costante~~!) e supponiamo che $g\omega = g^b dx - g^a dy$ dove g esatta: allora

una primitiva $F(x,y)$ di $g\omega$ è ancora un integrale primo per il nostro sistema originario (che sarebbe d'altra parte equivalente a $\begin{cases} \dot{x} = g^a \\ \dot{y} = g^b \end{cases}$):

$$\text{infatti } \nabla F \cdot g = (g^b, -g^a) \cdot (a, b) = 0$$

Una tale funzione $g(x,y)$ si definisce **FATTORIO INTEGRANTE** per ω .

Caratterizzaci allora sul problema geometrico generale, dimostrandoci per un sistema che tutto è risolto dal p.b. analitico $\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases}$.

Sic d.d.s. una forma $\omega = p(x,y) dx + q(x,y) dy$

Il fatto che $g(x,y)$ sia fattore integrante per ω , sui semplici e comuni equivale alle condizioni di ω : ovvero $\frac{\partial}{\partial y}(gp) = \frac{\partial}{\partial x}(gq)$

$$\text{ovvero } \frac{\partial g}{\partial y} p + g \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} q + g \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{ovvero } g \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = q \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{E.D.P.})$$

Si può provare (usando il "metodo delle caratteristiche" per le E.D.P., che va oltre quest. corso) che una tale $g(x,y)$ esiste sempre.

Il problema è risolto! Vediam qualche caso particolare.

Prop. Se esiste $u(x)$ e $v(y)$ tali che $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = u(x)q - v(y)p$ allora $g(x,y) = \exp\left(\int u(x) dx + \int v(y) dy\right)$ è fattore integrante.

Ad esempio:

- Se $\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ non dipende da y , allora $g(x) = e^{\int u(x) dx}$ è f.i.
- Se $-\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ non dipende da x , allora $g(y) = e^{\int v(y) dy}$ è f.i.

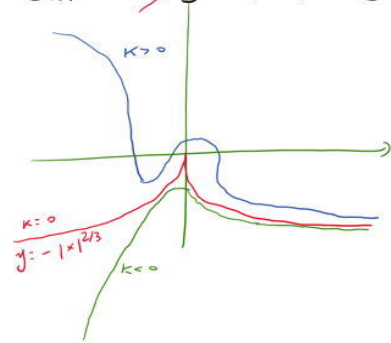
Dim. Le ipotesi $u(x)$ e $v(y)$ che sopra, le condizioni (*) si scrivono $g(u(x)q - v(y)p) = q \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial g}{\partial y}$, ovvero $(u(x)p - \frac{\partial g}{\partial x})q - (v(y)p - \frac{\partial g}{\partial y})p = 0$

Se ho una g che mi annulla le due parentesi ^{non a caso}:
 e questa g è facile da vedere, è proprio $g = e^{\int u(x) dx + \int v(y) dy}$ //

Vediamo un esempio di ricerca del forme integrate, introdotta in precedenza.

Ex. $\omega = (x+y^2) dx + 2xy dy$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 2y, \frac{\partial q}{\partial x} = 2y$ ESATTA! (su $V = \mathbb{R}^2$)
 Primitive $F(x,y)$: $dF = \omega$, con $\begin{cases} \partial_x F = x+y^2 \\ \partial_y F = 2xy \end{cases} \Rightarrow F = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \psi(y)$
 $\leadsto \partial_y F = \cancel{2xy} + \psi'(y) = \cancel{2xy} \Rightarrow \psi'(y) = 0 \leadsto \psi = K$
 $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 = \frac{1}{2}x(x+2y^2)$ (potrei anche scrivere $\tilde{F} = x(x+2y^2) \dots$)

Ex. $\omega = (x^2+2x+y^3) dx + 3y^2 dy$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 3y^2, \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \neq 3y^2$
 Non è esatta, ma $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = \frac{3y^2}{3y^2} = 1$ non dipende da y .
 Dunque, esiste $u(x) \equiv 1$, e l'ham di $\rho(x) = e^{\int u(x) dx} = e^x$ è forma integrale,
 ovvero $e^x \omega$ è forma esatta (su $V = \mathbb{R}^2$)
 Primitive $F(x,y)$ di $e^x \omega$: $\begin{cases} \partial_x F = e^x(x^2+2x+y^3) \\ \partial_y F = 3e^x y^2 \end{cases}$
 $\partial_y F = 3e^x y^2 \leadsto F = e^x y^3 + \psi(x)$, da cui $\partial_x F = \cancel{e^x y^3} + \psi'(x) = e^x(x^2+2x+y^3)$
 dunque $\psi'(x) = e^x(x^2+2x) \Rightarrow$
 $\psi(x) = \int (x^2+2x) e^x dx = x^2 e^x$
 perciò $F(x,y) = e^x(x^2+y^3)$,
 e le sue curve di livello su $F=K$,
 ovvero $x^2+y^3 = K e^{-x}$ ($K \in \mathbb{R}$)



In generale, una EQUAZIONE DIFFERENZIALE TOTALE nel piano è un problema geometrico espresso come $\omega = 0$, ove $\omega = p(x,y) dx + q(x,y) dy$ è

una forma differenziale con $p, q: V \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su un aplo $V \subseteq \mathbb{R}^2$.

Analoga questo problema significa:

trovare tutte le curve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ in V di classe C^1 tali che

- $\gamma(t) = (x_0, y_0)$ (cost.) t.c. $p(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) = 0$ (punti singolari di ω : "soluzioni costanti")
oppure PULL BACK: $\gamma^* \omega$ "estraggo ω al sostegno di γ "
- $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ e $\gamma^* \omega = p(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + q(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \equiv 0 \forall t$.

Come trovare tali curve?

1. trovare una primitiva F di ω (eventualmente di $p\omega$ per un certa fattore integrale p) determinare le curve di livello di F in V
2. Le curve $\gamma(t)$ soluzioni sono tutte e sole quelle il cui sostegno è contenuto in una delle curve di livello di F .

(infatti $\gamma(t)$ ha il sostegno contenuto in una curva di livello di F

$$\Leftrightarrow F(\gamma(t)) \text{ non dipende da } t \Leftrightarrow \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \equiv 0 \forall t$$

$$\Leftrightarrow \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \equiv 0 \forall t$$

$$\Leftrightarrow \cancel{p(\gamma(t))}^{\neq 0} (p(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + q(\gamma(t)) \gamma_2'(t)) \equiv 0 \forall t$$

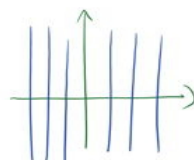
$$\Leftrightarrow p(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + q(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \equiv 0 \forall t$$

Ex. $\omega = dx = \overset{p}{1} \cdot dx + \overset{q}{0} \cdot dy$. Equilibri? $\begin{cases} 1 \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \end{cases}$ No!

ω è esatto con primitiva $F(x) = x$; curve di livello $x = K$

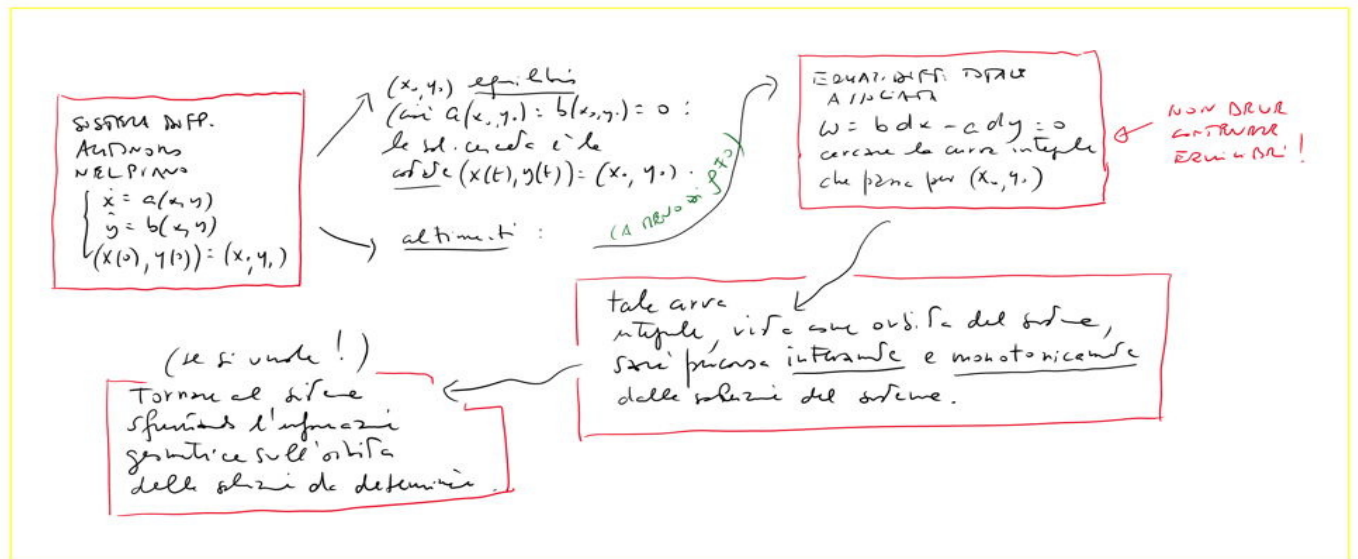
Dunque le soluzioni dell'e.d.t. $\omega = 0$

sono tutte e sole le $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ con $\gamma_1(t) \equiv K$ e $\gamma_2'(t) \neq 0 \forall t$



N.B. I punti singolari di $\omega = p dx + q dy$ (ovvero i (x_0, y_0) t.c. $\begin{cases} p(x_0, y_0) = 0 \\ q(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$) corrispondono ai punti singolari degli insiemi (in genere curve) di livello delle sue primitive $F(x, y)$, ovvero $\nabla F(x_0, y_0) = 0$.

Riassumiamo dopo le tecniche di seguito.



Ex. Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}$ determinare equilibri, orbite, loro vari di provenienza. Risolvere poi il pb. di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$.

Equilibri: $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

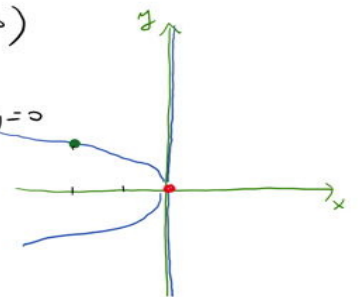
Orbite: $\leadsto$ e.d.t. allora $W = (x+y^2)dx + 2xydy = 0$

Si è già visto che W è esatta, con funzione $F = \frac{1}{2}x(x+y^2)$, le cui curve di levels son $x(x+y^2) = K, K \in \mathbb{R}$.

Curve di levels zero: $x(x+y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+y^2=0 \end{cases}$

Le curve di levels $K \neq 0$ son rappresentate nella figura sott.

Le curve di levels $K=0$ contiene 5 orbite (l'equilibrio 0, e le quattro curve in cui l'equilibrio 0 spezza le curve di levels, che è



l'origine dell'asse y e delle
parabole $x = -2y^2$.

Le altre curve di livello contengono
ciascuna 2 orbite (le anforelle chiuse).

Ad esempio, nel nostro caso
 $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$ l'orbita

sale le curve paraboliche $x = -2y^2$ con $y > 0$

passando internamente da sinistra

a destra (infatti $\dot{x} = -2xy > 0$ nel

Π^2 quadrante): per $t \rightarrow -\infty$ il punto

proviene dalla distanza infinita del Π^2 quadrante, per $t = 0$ transita
per il dato iniziale, e per $t \rightarrow +\infty$ tenderà asintoticamente all'equilibrio O .

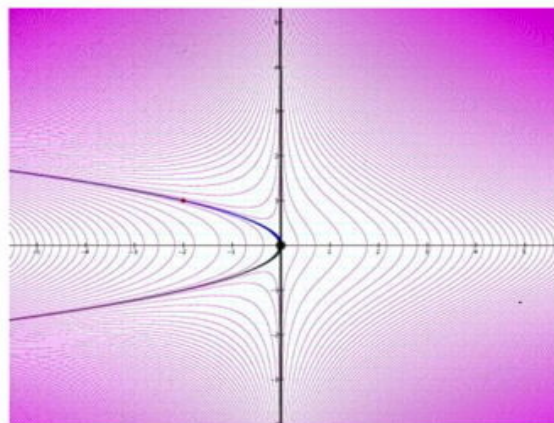
Torniamo ora al dato sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}$ con $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$.

con l'informazione geometrica che $x = -2y^2$

$$\dot{y} = x + y^2 \Rightarrow \dot{y} = -2y^2 + y^2 \Rightarrow -y^2 dy = + dt \quad \frac{1}{y} = t + K \xrightarrow{y(0)=1} \frac{1}{y} = t + 1$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{1+t}; \quad x(t) = -2y(t)^2 = -\frac{2}{(1+t)^2}$$

$$\text{Dopo le sostituzioni si ha } (x(t), y(t)) = \left(-\frac{2}{(1+t)^2}, \frac{1}{1+t}\right).$$



Ex

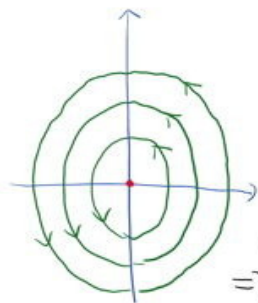
$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha y^a \\ \dot{y} = \beta x^b \end{cases} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

$$\text{Equilibrio: } \alpha = \beta = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

$$\omega = b dx - a dy = \beta x dx + \alpha y dy \quad \text{esatta}$$

$$\text{Primitive: } F(x,y) = \frac{\beta x^2 + \alpha y^2}{2}$$

$$\text{Curve di livello di } F: \beta x^2 + \alpha y^2 = K \geq 0 \quad \text{ellisse} \quad \frac{x^2}{(\sqrt{K/\beta})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{K/\alpha})^2} = 1$$



Le soluzioni in definita inizialmente ad es. nel Π^2 quadrante:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{K - \beta x^2}{\alpha}} \Rightarrow \dot{x} = -\sqrt{2(K - \beta x^2)} \quad (\text{disaccoppiata}) \\ \dot{x} = -2y \end{cases}$$

$$\text{Per risolvere conviene porre } x(t) = \sqrt{\frac{K}{\beta}} \cos \psi(t)$$

$$\text{dopo } \dot{x} = -\sqrt{\frac{K}{\beta}} \psi'(t) \sin \psi(t) = -\sqrt{2(K - K \cos^2 \psi(t))} = -\sqrt{K\alpha} \sin \psi(t)$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = \sqrt{2\beta} \Rightarrow \psi(t) = t\sqrt{2\beta} + \psi_0 \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{K}{\beta}} \cos(t\sqrt{2\beta} + \psi_0)$$

$$\text{e dopo } y(t) = \sqrt{\frac{K - \beta x^2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{K}{\alpha}} \sin(t\sqrt{2\beta} + \psi_0)$$

$$\text{senza: } \dot{x} = -2y \Rightarrow \ddot{x} = -2\dot{y} = -2\beta x \quad \text{cioè } \ddot{x} + 2\beta x = 0 \quad \text{LINEARE II° ordine a coeff. cost.}$$

$$\text{da cui } x(t) = A \cos(\sqrt{2\beta} t + \phi), \text{ per } y = -\frac{\dot{x}}{2} = A\sqrt{\frac{\beta}{2}} \sin(t\sqrt{2\beta} + \phi)$$

Ex.

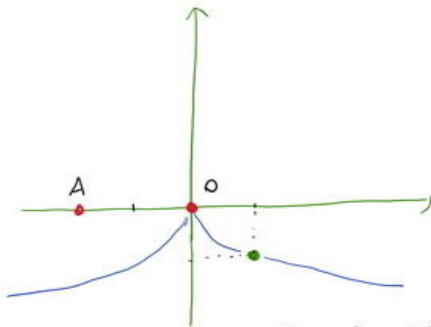
Risolvere l'e.d.t. $(x^2 + 2x + y^3)dx + 3y^2 dy = 0$

determinando in particolare le curve integrali passanti per $(1, -1)$.

Dare due-tre esempi di sistemi autonomi associati a tale e.d.t., risolvendo l'analisi p.p. di Carathéodory.

$\omega = (x^2 + 2x + y^3)dx + 3y^2 dy = 0$. Come visto nelle stesse lezioni, si fa notare integrando $\oint = e^x$ la primitiva $F(x, y) = e^x(x^2 + y^3)$

Punti singolari di ω : $\begin{cases} x^2 + 2x + y^3 = 0 \\ 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=0 & O(0,0) & F(0)=0 \\ x=-2 & A(-2,0) & F(A) = 4/e^2 \end{matrix}$



Le curve di livello di $F (x^2 + y^3 = k e^{-x})$ saranno tutte regolari, tranne:

- Quella con $k = 4/e^2$ (specie delle equazioni A)
- Quella con $k = 0$ (" " " " " 0)

$$x^2 + y^3 = 0 \Rightarrow y = -|x|^{2/3}$$

L'orbita delle soluzioni di un qualche sistema autonomo associato alle mie eq. di H. Totale $\omega = (x^2 + 2x + y^3)dx + 3y^2 dy = 0$, ovvero $\begin{cases} \dot{x} = 6(-3y^2) \\ \dot{y} = 6(x^2 + 2x + y^3) \end{cases}$ sul IV^o quadrante e dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, -1)$

Sono le nostre curve $y = -x^{2/3}$ con $x > 0$, ma la soluzione di più (verso di parvenire, legge o vice, ...) dovrà scegliere σ .

1) $\sigma(x, y) = -\frac{1}{3y^2}$ (< 0 nel semipiano $y < 0$) : $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\frac{x^2 + 2x + y^3}{3y^2} \end{cases}$

$\dot{x} = 1 \Rightarrow x(t) = t + K$, e dato $x(0) = 1 \Rightarrow K = 1$, anzi $x(t) = 1 + t$

Scegliamo poi che $y = -x^{2/3} = -(1+t)^{2/3}$ (definito per $t > -1$, inteso $x(0) = 1$)

2) $\sigma(x, y) = 1$ $\begin{cases} \dot{x} = -3y^2 \\ \dot{y} = x^2 + 2x + y^3 \end{cases}$ $(x(0), y(0)) = (1, -1)$

$\dot{x} = -3y^2 \Rightarrow \dot{x} = -3x^{4/3} \Rightarrow x^{-4/3} dx = -3 dt \Rightarrow \frac{x^{-1/3}}{-1/3} = -3t + K$

Ma $x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{-1/3} = K$ $K = -3 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{(1+t)^3}$

e $y(t) = -x(t)^{2/3} = -\frac{1}{(1+t)^2}$, def. per $t > -1$ (da dx a $5x$)

3) $\sigma(x, y) = x^{-1/3}$ $\begin{cases} \dot{x} = -3x^{-1/3}y^2 \Rightarrow \dot{x} = -3x \Rightarrow x(t) = Ke^{-3t} \text{ con } K=1 \\ \dot{y} = x^{-1/3}(x^2 + 2x + y^3) \end{cases}$

$x(t) = e^{-3t}$, $y(t) = -x^{2/3} = -e^{-2t}$

soluzioni $(x(t), y(t)) = (e^{-3t}, -e^{-2t})$, definita per $t \in \mathbb{R}$

(le nostre curve qui si possono dare dx e $5x$)