

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 20/11/2025

Caso particolare importante : E.D.T. A VARIABILI SEPARABILI

$$\omega = \overset{p(x,y)}{a_1(x) b_2(y)} dx + \overset{q(x,y)}{b_1(x) a_2(y)} dy = 0$$

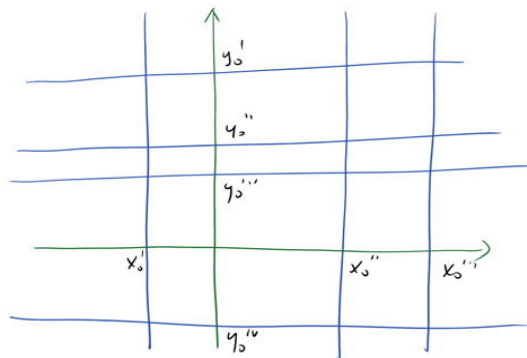
Equazioni : $\begin{cases} a_1(x) b_2(y) = 0 \\ b_1(x) a_2(y) = 0 \end{cases} \begin{cases} a_1(x) = 0 \\ b_2(y) = 0 \\ b_1(x) = 0 \\ a_2(y) = 0 \end{cases}$

Dunque, ho i punti $(x_0, y_0) + c.c.$ $a_1(x_0) = a_2(y_0) = 0$
oppure $b_1(x_0) = b_2(y_0) = 0$

Il fattore integrale si vede anche a occhio : $f = \frac{1}{b_1(x) b_2(y)}$

Prima più accorto di quelli che accade
quando $b_1(x)$ e $b_2(y)$ si annullano.

- Se x_0 è t.c. $b_1(x_0) = 0$, allora
 $x \equiv x_0$ è curva integrale; infatti,
se $\gamma(t)$ è t.c. $\gamma_1(t) \equiv x_0$ allora
 $\gamma'_1(t) \equiv 0$ e dunque è soluzione
- Analogamente, se y_0 è t.c. $b_2(y_0) = 0$
allora $y \equiv y_0$ è curva integrale.



Altrimenti (dopo aver visto di queste zone individuate dal reticolo)

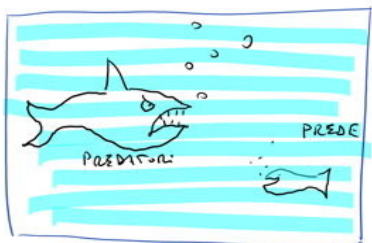
possiamo fare :
$$f\omega = \frac{a_1(x)}{b_1(x)} dx + \frac{a_2(y)}{b_2(y)} dy$$

$$\leadsto F(x, y) = \int \frac{a_1(x)}{b_1(x)} dx + \int \frac{a_2(y)}{b_2(y)} dy \text{ primitive di } f\omega$$

e le altre curve integrali $\leadsto F(x, y) = k$.

Ex. Trattiamo il sistema PREDA - PREDATORE DI LOTKA-VOLTERRA

[IN FONDO AL FILE DELLA LEZIONE RISPONDO MAGGIORI INFORMAZIONI STORICHE]



$$x(t) = \text{PREDE} \quad y(t) = \text{PREDATORI}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d > 0$$

$$\text{Equilibri (st. cost. F)}: \begin{cases} x(a-by) = 0 \\ y(dx-c) = 0 \end{cases}$$

Equilibri in $(0,0)$ oppure $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-by) \\ \dot{y} = y(dx-c) \end{cases} \rightarrow \overset{b_2(y)}{y(dx-c)} dx + \overset{b_1(x)}{x(by-a)} dy \quad \text{a var. sep.}$$

Se non fosse, gli assi $x=0$ e $y=0$ sono soluzioni dell'e.d.t. ma in realtà lo è con un semiasse (vedi l'equilibrio $(0,0)$ di spazze in orbite divise).

Conosciamo allora se dati iniziali nel 1° quadrante (con forze e forze costanti)

Per unicità, l'orbita di un dato iniziale nel 1° quadrante deve restare confinata in esso (gli assi non possono essere attraversati).

$$F(x,y) = \int \frac{dx-c}{x} dx + \int \frac{by-a}{y} dy = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

Le altre orbite sono definite da $F(x,y) = K$. Come farle?

F è di classe C^1 . Inoltre:

$$\nabla F = (d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y}) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$$

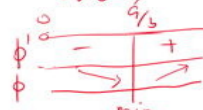
$$H_{(x,y)}(F) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix} > 0 \text{ ovunque} \Rightarrow (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) \text{ è minimo ass. di } F \text{ e } F \text{ è convessa}$$

Inoltre, fissato un qualsiasi $y_0 > 0$, considero

$$\psi(x) := dx - c \ln x + by_0 - a \ln y_0$$

$$\geq dx - c \ln x + M \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

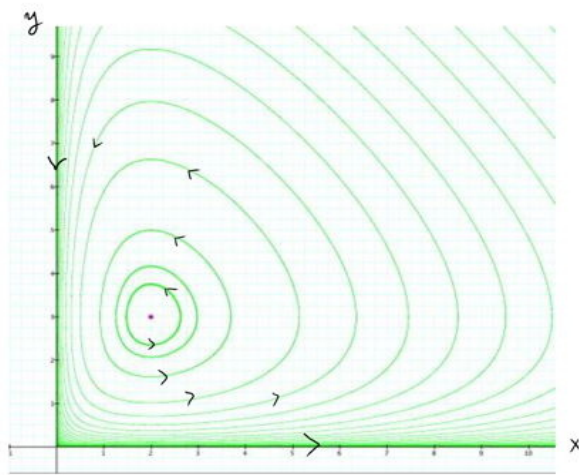
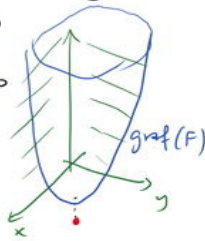
$$\begin{aligned} \phi(y) &= by - a \ln y \\ \phi'(y) &= b - \frac{a}{y} = 0 \quad y = \frac{a}{b} \\ \phi'(y) &> 0 \Leftrightarrow y > \frac{a}{b} \\ \phi'(y) &< 0 \Leftrightarrow y < \frac{a}{b} \end{aligned}$$



$$M = \phi(\frac{a}{b}) = a(1 - \ln \frac{a}{b})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(y) = +\infty$$

ovvero $\psi(x)$ tende a $+\infty$ uniformemente in y
 quando $x \rightarrow 0^+$ oppure quando $x \rightarrow +\infty$
 Idem per $\psi(y)$ quando $y \rightarrow 0$ oppure $y \rightarrow +\infty$
 Per cui le curve di livello $F=k$
 sono delle curve compatte che
 racchiudono l'equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.



Le soluzioni $(x(t), y(t))$
 sono eterne (hanno dominio $\mathbb{R}$)
 per la "fuga dai compatti"
 (le loro immagini in una curva
 compatta, dunque, devono
 "sfiorare nel dominio").
 e sono periodiche (per cui devono
 assumere lo stesso valore dopo
 un certo tempo T , e si è mostrato
 che in tal caso la soluz. è periodica).

Supponiamo ora che le condizioni ambientali migliorino o peggiorino.
 Ciò si modella aggiungendo un termine di crescita o decrescita
 malthusiana uguale per entrambe le popolazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \pm \varepsilon x & = (a \pm \varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \pm \varepsilon y & = -(c \mp \varepsilon)y + dxy \end{cases}$$

→ è un problema come prima, con parametri a e c alterati
 e il vettore medio si attesta sul valore $(\frac{c \mp \varepsilon}{d}, \frac{a \pm \varepsilon}{b})$:

dunque se le condizioni migliorano/peggiorano ma
 ne risultano avvantaggiati i predatori / le prede

(esempi: pesce in Adriatico in tempo di guerra,
 aumento della pesca, uso di pesticidi...)

Infine, qualche nota ulteriore sul problema di Lotka-Volterra...

Si considerino, all'interno di un ambiente molto vasto, due specie di animali. La prima (PREDE) trovi nell'ambiente spazio e cibo a volontà, eliminando così ogni soglia logistica; la seconda (PREDATORI) trovi nell'ambiente spazio a volontà ma nessun cibo disponibile, tranne quello che lei riesce a procurarsi uccidendo le prede.

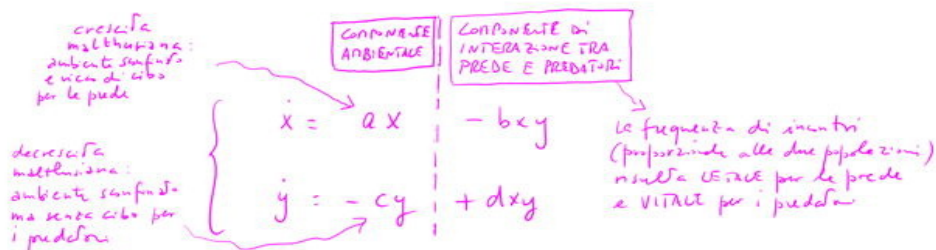
Esempio originale (da cui Vito Volterra elaborò il suo modello): il pesce commestibile e il pesce predatore nel mare Adriatico. Storicamente, i ricercatori dell'Università di Padova notarono che, durante la I^a guerra mondiale, il drastico calo delle prede nell'Adriatico (dovuto alla paura che i pescherecci venissero colpiti da navi militari) stava provocando un aumento non del pesce commestibile ma del pesce predatore (squali etc.), contrariamente a quanto essi si aspettavano. Ne chiesero ragione all'ingegner matematico Volterra, che risolse il dilemma spiegandosi col suo modello, di cui parliamo ora.

$x = \text{PREDE}$ $y = \text{PREDATORI}$. Interesse l'evoluzione temporale di ciascuna delle due popolazioni, ovvero $t \mapsto (x(t), y(t))$.

L'evoluzione obbedisce a una legge del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d > 0$$

che, pensando ad esempio al caso di pesce commestibile e pesce predatore all'interno dell'ambiente marino, si può comprendere come segue:



Una soluzione del problema è la costante $(x_0, y_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

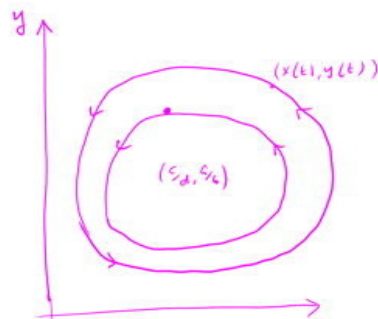
(infatti $\left\{ \begin{array}{l} 0 = a \cdot \frac{c}{d} - b \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \\ 0 = -c \cdot \frac{a}{b} + d \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \end{array} \right.$)

E le soluzioni non costanti $t \mapsto (x(t), y(t))$?

In Analisi III si vedrà che:

- le soluzioni sono periodiche e eterne (hanno dominio $t \in \mathbb{R}$)
- la loro immagine è un arco chiuso che gira attorno alla soluzione costante (EQUILIBRIO), che risulta essere anche il valor medio delle popolazioni $x(t)$ e $y(t)$ nel periodo.

Ovvero, detto $T > 0$ il periodo temporale,
 $(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.



se aumentano le prede aumentano anche i predatori, che mangiando le prede le fanno diminuire, ma anche i predatori diminuiscono perché fanno meno cibo, e questo fa aumentare le prede, che fanno aumentare i predatori...

Supponiamo ora che le condizioni ambientali migliorino oppure peggiorino.

Questo si può modellizzare aggiungendo una crescita o decrescita malthusiana uguale per entrambe le popolazioni ($\varepsilon > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy + \varepsilon x = (a+\varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy + \varepsilon y = -(c-\varepsilon)y + dxy \end{cases}$$

→ il problema è uguale al precedente con parametri alterati,

e il nuovo valor medio si attese su $(\frac{c+\varepsilon}{d}, \frac{a+\varepsilon}{b})$

Dunque se le condizioni ambientali migliorano, ne risultano avvantaggiati i predatori. Ciò è avvenuto ad esempio:

- nell'Adriatico durante la I^a guerra mondiale, in cui le pesche era drasticamente diminuite: si era notato un sensibile aumento non delle specie di pesce commestibile ma delle specie dei predatori (squalotti etc...).

Invece se le condizioni ambientali peggiorano, ne risultano avvantaggiate le prede. Ad esempio:

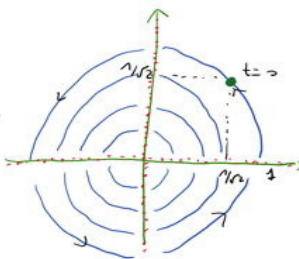
- intensificando moderatamente la pesca (sia del pesce commestibile che dei predatori) si ottiene un aumento del pesce commestibile.
- Trattare una coltivazione con insetticidi, che sterminano sia i parassiti sia i loro predatori naturali (ad esempio le coccinelle), può portare alla fine ad un peggioramento dell'infezione parassitaria.

Qualche altro esercizio.

Ex.1 Dato il sistema autonomo nel piano $\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 \\ \dot{y} = x^2y \end{cases}$ determinare gli equilibri, le orbite, il loro verso di percorrenza. Risolvere infine il pb. di Cauchy su $(x(0), y(0)) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$\begin{cases} \dot{x} = xy(-y) \\ \dot{y} = xy(x) \end{cases}$ Vedo che il sistema, fuori dagli zeri, in cui $y=xy=0$, è equivalente al ben noto sistema $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ di cui abbiamo già trovato le curve integrali:

$F(x, y) = x^2 + y^2 = K$.
Equilibri: $\begin{cases} -xy^2 = 0 \\ x^2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ tutti i punti degli zeri sono equilibri.



Le altre curve integrali (a costanza $x^2 + y^2 = K$) saranno spezzate ciascuna in 8 orbite: ovvero 4 equilibri sugli zeri e 4 tratti in ciascun dei quadranti.

Nel mio caso (della iniziale verde) l'orbita è il quarto di cerchio $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$ percorso in senso antiorario (nel I° quadrante $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$).

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \dot{y} = x^2y = y(1-y^2)$ var. separabili

$$\frac{1}{y(1-y^2)} dy = dt \quad \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2-1} \right) dy = dt \quad \ln y - \frac{1}{2} \ln(1-y^2) = t + K$$

$$\ln \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) = t + K \quad \xrightarrow{y(0) = 1/\sqrt{2}} \ln \left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-1/2}} \right) = 0 + K \Rightarrow K = 0$$

$$\ln \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right) = t \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = e^t \Rightarrow (e^{2t} + 1)y^2 = e^{2t} \Rightarrow y(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{1-y(t)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \quad (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}, \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}} \right)$$

dunque $\in \mathbb{R}^2$ (fuga dai confini)

Ex.2 $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$ Equilibri, orbite, verso di percorrenza.
Risolvere i pbs. di Cauchy con dati iniziali:
 $A(-1, 0) \quad B(-1, 1) \quad C(-1, 2)$

[TRIBUNA2016 NESSA IN CALCE AURE NOTE]

Come detto, nel quadro dei sistemi autonomi del piano vengono
 n. m. p. r. le e.d.o. scalari del I° ordine $y' = f(t, y)$ (con $(x, y) = (t, y)$)
 e le e.d.o. scalari del II° ordine autonome $y'' = h(y, y')$ (con $(x, y) = (y, y')$)

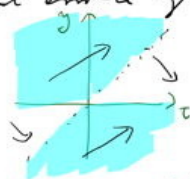
Ex. 3 [ESAME SOLITO 2016/17 DEL 12/9/17, ESERCIZIO (4)]

- Si abbia l'eq. diff. scalare $y'(y-t) = 2y$ nell'intervallo $y(t)$.
 (a) Analizzare l'eq. di f. su esistenza, unicità, esistenza, unicità.
 Soluzioni costanti? Lineari?
 Se $y(t)$ è soluzione su $I \subset]0, +\infty[$, lo è anche $y(-t)$ e/o
 $-y(-t)$ su $-I \subset]-\infty, 0[$?
 (b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione.

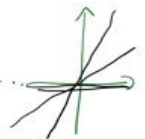
- (a) L'equazione non è in forma normale $y' = f(t, y)$
 Se una soluzione $y(t)$ soddisfa $y(t_0) = t_0$ per un c.s. $t_0 \in \mathbb{R}$,
 e ha che $y'(t_0) = (y(t_0) - t_0) = 2y(t_0) \Rightarrow y(t_0) = 0 = t_0$.
 Dunque tale evenienza può avvenire solo eventualmente in $t=0$ (e $y(0)=0$):
 di conseguenza, soluzioni con dato iniziale $y(2) = 2 \neq 0$ NON ESISTONO.
 Negli altri casi (ovvero per dati del tipo $y(t_0) = y_0$ con $y_0 \neq t_0$)
 posso passare in forma normale $y' = \frac{2y}{y-t} = f(t, y)$, di classe C^2
 $\Rightarrow \exists!$ locale ben garantita!

Nella t può dare per ora sull'esistenza globale (T. Cauchy globale non è applicabile)

Esistenza: $y' = \frac{2y}{y-t} > 0$



Unicità: $y'' = 2 \frac{y'(y-t) - y(y'-1)}{(y-t)^2} = \dots = 2 \frac{y(y-3t)}{(y-t)^3} > 0$



Soluzioni lineari? $y(t) = at + b$ $y' = \frac{2y}{y-t}$ $y'(y-t) = 2y$
 $a(at+b-t) = 2(at+b)$ $a(a-1)t + ab = 2at + 2b$ $\begin{cases} a(a-1) = 2a \\ ab = 2b \end{cases}$
 $a(a-1) = 2a \Rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow b=0 \\ a=3 \Rightarrow b=0 \end{cases}$ $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = 3t$

$y(t)$ è soluzione su $I \subset]0, +\infty[$; lo è anche $-y(-t)$ su $-I$?
 $\psi(t) = -y(-t)$ Dimostrare: $\psi'(\psi-t) = 2\psi$?

$$\psi'(t) = -y'(-t)(-1) = y'(-t).$$

$$\begin{aligned} \psi'(t) (\psi(t) - t) &= y'(-t) (-y(-t) - t) = -y'(-t) (y(-t) - (-t)) \\ &= -2y(-t) = 2(-y(-t)) = 2\psi(t) \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

$$(b) \quad y'(y-t) = 2y \quad \leadsto \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{2y}{-x} \end{cases} \quad \leadsto \quad (y \cdot x) dy - 2y dx = 0$$

Le m^e différentiel (tue ça & ça) : $y' = \frac{dy}{dt}$

$$dy(y-t) = 2y dt \quad (y-t) dy - 2y dt = 0 \quad \begin{matrix} p(y,t) = y-t \\ q(y,t) = -2y \end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} = -1 - (-2) = 1 \neq 0 \quad \text{non exacte} \dots$$

$$\text{Puis } \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2y} \quad \text{non dépend de } t \Rightarrow g(y,t) = \exp\left(\int -\frac{1}{2y} dy\right)$$

c'est f. intégrante

$$g = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln y\right) = \exp\left(\ln \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Donc le forme $\frac{y-t}{\sqrt{y}} dy - \frac{2y}{\sqrt{y}} dt$ sera exacte.

$$F(y,t) \text{ telle : } \begin{cases} \partial_y F = \frac{y-t}{\sqrt{y}} \\ \partial_t F = -2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow F = -2t\sqrt{y} + \psi(y)$$

$$\Rightarrow \partial_y F = -2t \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \psi'(y) = \frac{y-t}{\sqrt{y}} \Rightarrow \psi'(y) = \sqrt{y} \Rightarrow \psi(y) = \frac{2}{3} y\sqrt{y}$$

$$F(y,t) = -2t\sqrt{y} + \frac{2}{3} y\sqrt{y} = \frac{2}{3} \sqrt{y} (y-3t)$$

Courbe intégrale : $F = k$, avec $\sqrt{y} (y-3t) = k$

$$\text{Si } k=0 : \sqrt{y} (y-3t) = 0 \quad \begin{cases} y=0 \\ y=3t \end{cases} \quad (\text{généralisation} \dots)$$

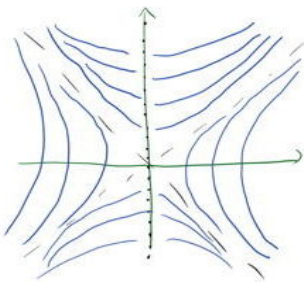
$$\text{Si } k \neq 0 : \sqrt{y} (y-3t) = K \quad \text{donc on trouve } y(t) \dots \text{ D'accord!}$$

RISOLUZIONI DEGLI ESERCIZI NON SVOLTI IN AULA

Es. 2 $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$

Equilibri, orbite, vane di separazione.
Risoluzione: pbb. di Cauchy con dati iniziali
 $A(-1,0)$, $B(-1,1)$, $C(-1,2)$

Equilibri: $\begin{cases} xy=0 \\ x^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=0$, tutti e soli i punti dell'asse y .



Al di fuori dell'asse y il sistema è separabile
a $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \leadsto$ e.d.t. associata $x dx - y dy = 0$
Int. per $x^2 - y^2$: curve di livello su iperbole
equilibrate con assi negli assi coordinati

• Per $A(-1,0)$: $x^2 - y^2 = 1 \leadsto \dot{y} = 1 + y^2 \leadsto$

$\arctan y = t + K$ ma $y(0)=0 \Rightarrow K=0$

$\arctan y = t \leadsto y = \tan t \leadsto x = -\sqrt{1+y^2} = -\frac{1}{\cos t}$

$(x(t), y(t)) = (-\frac{1}{\cos t}, \tan t)$ (definito in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

• Per $B(-1,1)$: $x^2 - y^2 = 0 \leadsto y = -x$ con $x < 0 \leadsto$

$\dot{y} = y^2 \leadsto y(t) = \frac{1}{K-t}$, ma $y(0)=1 \leadsto K=1$

$y(t) = \frac{1}{1-t} \leadsto x = -y = -\frac{1}{1-t} \leadsto (x(t), y(t)) = (-\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t})$

(definito in $]-\infty, 1[$)

• Per $C(-1,2)$: $x^2 - y^2 = -3 \leadsto \dot{y} = y^2 - 3$ $\frac{dy}{y^2-3} = dt$

$\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{y-\sqrt{3}} - \frac{1}{y+\sqrt{3}} \right) dy = dt$ $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}} \right| = t + K$, ma

$y(0)=2 \leadsto K = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2-\sqrt{3})$, per cui

$\ln \left| \frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}} \right| = 2t\sqrt{3} + 2 \ln(2-\sqrt{3}) \leadsto \left| \frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}} \right| = (2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}}$

$\leadsto y - \sqrt{3} = (y + \sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}} \leadsto y(1 - (2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}}) = \sqrt{3}((2-\sqrt{3})^2 e^{2t\sqrt{3}} + 1)$

$\leadsto y(t) = \sqrt{3} \frac{1 + (7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}}{1 - (7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}} \leadsto x(t) = -\sqrt{y^2-3} = -2\sqrt{3} \frac{(2-\sqrt{3})e^{t\sqrt{3}}}{1 - (7-4\sqrt{3})e^{2t\sqrt{3}}}$

(definito per $e^{2t\sqrt{3}} < (2-\sqrt{3})^{-2}$ ovvero $e^{t\sqrt{3}} < \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ ovvero $t\sqrt{3} < \ln(2+\sqrt{3})$
ovvero per $t \in]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2+\sqrt{3})[$.

