

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 21/11/2025

Ex. 4

Studio di $y'' = \overbrace{2yy'/(y'-1)}^{h(y,y')}$ (nell'intervallo $y(t) \in \mathbb{R}$).

Eq. scalare autonoma del II° ordine.

Pos. $(y, p) = (y, y')$ e la equazione del sistema $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2yp/(p-1) \end{cases}$

Il campo $g(y, p) = (p, 2yp/(p-1))$ è $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow$ generica $\exists!$ sol.

$\Rightarrow$ unic. globale!

($\forall$ soluz. $y(t)$ di un problema $y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$)

Le curve di g si intersecano $\Rightarrow$ un + pr. affl. a T. Cauchy globale

$2yp(p-1)dy - p dp = 0$ a variabili separabili.

Nota che $p=0$ e $p=1$ son curve integrali.

(corrispondono a $y'=0$ e $y'=1$, ovvero $y(t) \equiv K$ e $y(t) = t + K$)

separo le variabili: $2y dy - \frac{1}{p-1} dp = 0$

$F(y, p) = y^2 - \ln|p-1| = K \Rightarrow \ln|p-1| = y^2 - K \Rightarrow |p-1| = e^{y^2-K} = e^{y^2} \cdot e^{-K}$

$\Rightarrow p-1 = \underbrace{h}_{\in \mathbb{R}} e^{y^2} \Rightarrow p = h e^{y^2} + 1$ cioè $y' = h e^{y^2} + 1$ a m. up.

$\frac{1}{h e^{y^2} + 1} dy = dt$, da dove integrare...

Ex. 5

$x^2 y' + \sin y = 0$ (qui x intende $y(x)$).

Analizzabile tramite l'eq. d.t. associata oppure con i mezzi di

Analisi I (ovvero a variabili separabili), e risolvere i pbl.

di Cauchy con dati iniziali $y(1) = 3\pi/2$ oppure $y(-1) = \pi$.

[RIBUZIONE MESSA IN CALCE AURE NOTE]

Altri tipi di equazioni differenziali che si possono trattare
sono ad esempio:

- le equazioni scalari del 1° ordine omogenee, ovvero del tipo
 $y' = f(x, y)$ con f omogenea di grado 0 (cioè $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \forall \lambda \neq 0$),
o, in modo analogo,
le e.d. totali $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$ con p e q
omogenee dello stesso grado r (cioè $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r p(x, y) \forall \lambda \neq 0$):
la tecnica prevede di sostituire $y(x)$ con $z(x)$ t.c. $y = xz$,
e poi $z(x)$ soddisfa un'equazione a variabili separabili.
- le equazioni di Bernoulli $y' + p(x)y = q(x)y^\beta$ con $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
(si veda sulle dispense).

Ex. 6

$$y' = \frac{3x-y}{x+y}$$

Si nota che $f(x,y) = \frac{3x-y}{x+y}$ è omogenea di grado 0.

Poniamo $y = xz$ (anziché $y(x)$ mi occupo di $z(x)$)

$$y = xz \rightarrow y' = z + xz', \text{ dove}$$

$$z + xz' = \frac{3x - xz}{x + xz} \Rightarrow xz' = \frac{3-z}{1+z} - z = \frac{3-2z-z^2}{1+z}$$

$$\rightarrow xz' = \frac{3-2z-z^2}{1+z} \text{ variabile separabile!}$$

$$z \equiv 1 \text{ e } z \equiv -3 \text{ soluzioni } (\Rightarrow y = x \text{ e } y = -3x)$$

$$\frac{z+1}{z^2+2z-3} dz = -\frac{1}{x} dx \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+3} \right) dz = -\frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \log |z^2+2z-3| = -\log |x| + K \Rightarrow |z^2+2z-3| = \frac{h}{x^2} \quad (h > 0)$$

$$z^2+2z-3 = \frac{h}{x^2} \rightarrow z(x) = -1 \pm \sqrt{1+3\frac{h}{x^2}} = -1 \pm \frac{\sqrt{4x^2+h}}{|x|}$$

$$\text{da cui } y(x) = x \cdot z(x) = \pm \sqrt{4x^2+h} - x \quad \text{con } h \in \mathbb{R}.$$

Ex. 7

$$\sqrt{y-x} \, dx + \frac{x}{\sqrt{y-x}} \, dy = 0$$

[RIBLUZZARE NESSA IN CALCE AUE NOTE]

Ex. 8

[FALLI ESERCIZI n° 2, Ex. 3(i)]

Dati la l'eq. autonoma $y'' = e^y$ le soluzioni costanti.

Determinare poi le soluzioni $y_2(t)$ t.c. $y_2(0) = 0$ e $y_2'(0) = 2$ al variare di $2 > 0$.

Una soluz. cost. $y \equiv k$ deve soddisfare $0 = e^k$ impossibile! No costanti.
 L'equazione $y'' = e^y$ è del tipo $y'' = h(y)$, con h cost. ausiliari
 (ovvero: è scalare...) con primitive $\int e^y dy = e^y$.

Funzi. pot. $U(y) = -e^y$. Funzi. totale (int. prim.): $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 - e^y$

Dunque lungo le soluzioni $y_2(t)$ l'energia vale cost. (vt) $\frac{y'^2}{2} - 1$

dunque anche soddisfa $\frac{1}{2}(y')^2 - e^y = \frac{y'^2}{2} - 1 \quad \forall t. \quad (I^2 \text{ ord.})$

ovvero $(y')^2 = 2^2 - 2 + 2e^y \Rightarrow y' = \pm \sqrt{2^2 - 2 + 2e^y}$.

Conviene distinguere i casi $2 = \sqrt{2}$, $0 < 2 < \sqrt{2}$, $2 > \sqrt{2}$.

• Se $2 = \sqrt{2}$: $y' = \sqrt{2e^y} = \sqrt{2} \cdot e^{y/2} \quad e^{-y/2} dy = \sqrt{2} dt$

$-2e^{-y/2} = t\sqrt{2} + K \quad y_2(0) = 0 \quad -2 = 0 + K \text{ con } K = -2$

$-2e^{-y/2} = -2 + t\sqrt{2} \quad e^{-y/2} = 1 - t/\sqrt{2}$

$-y/2 = \ln(1 - t/\sqrt{2}) \quad y(t) = -2 \ln(1 - t/\sqrt{2}) \quad \text{definita per } 1 - t/\sqrt{2} > 0 \text{ con } t \in]-\infty, \sqrt{2}[$

• Se non ($2 \neq \sqrt{2}$): $y' = \sqrt{2^2 - 2 + 2e^y}$

Pong. $2^2 - 2 + 2e^y = \eta^2 \quad (\text{da cui } e^y dy = \eta d\eta)$

Dunque $\int \frac{1}{\sqrt{2^2 - 2 + 2e^y}} dy = \int \frac{2}{\eta^2 + (2-2^2)} d\eta \quad \text{etc...}$

Ex. 9 [PROVA SCRITTA 2015/16 DEL 25/1/2016, EX. 4]

Si abbia l'eq. diff. $y'' = (y')^2 - 2y$ nell'intervallo $y(t)$.

(a) Cosa dire su esistenza e unicità delle soluzioni?

Vi sono soluzioni costanti?

Se $\varphi(t)$ è soluzione, lo sono anche $\varphi(-t)$ oppure $-\varphi(-t)$?

Se sì, le soluzioni definite in tutto sono necessariamente (dis)persi?

(b) Determinare la soluzione tale che $y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$.

(a) L'equazione equivale al sistema del I° ord. $\begin{cases} y' = p \\ p' = p^2 - 2y \end{cases}$
 Le funzi. $f(y, p) = (p, p^2 - 2y)$ è C^∞ su tutto il piano (y, p)
 dunque esistenza e unicità loc. (e unicità glob.) ha garantiti
 la ogni dato iniziale $(y(t_0), y'(t_0)) = (2, p)$
 Poichè f ha crescita quadratica, nulla si può dire sull'esistenza
 globale delle soluzioni.

Una soluz. cost. $y \equiv k$ deve soddisfare $0 = 0^2 - 2k$,
 dunque l'unica soluz. cost. è $y \equiv 0$.

Sì ora $\varphi(t)$ una soluzione di $y'' = (y')^2 - 2y$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
 Allora $\psi(t) := \varphi(-t)$ è anch'essa soluzione sull'intervallo $-I$.

$$\psi'(t) = -\varphi'(-t) \quad \psi''(t) = \varphi''(-t).$$

$$\psi''(t) = \varphi''(-t) \stackrel{\text{eq.}}{=} (\varphi'(-t))^2 - 2\varphi(-t) = (-\varphi'(-t))^2 - 2\varphi(-t) = (\psi'(t))^2 - 2\psi(t)$$

dunque anche $\psi(t) = \varphi(-t)$ è soluzione.

Una verifica analogica per $\eta(t) := -\varphi(-t)$ dà esito negativo.

Abbiamo visto che dunque anche $\psi(t) = \varphi(-t)$ è soluzione; ed
 evidentemente $\varphi(0) = \psi(0)$. Ma ora non basta qui a dire che
 $\varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t$ (sarebbe la parità) poiché siamo in un problema
 al II° ordine, dunque andrebbe verificato che anche $\varphi'(0) = \psi'(0)$
 lo concludiamo così. Ma ciò non ci viene, poiché $\psi'(0) = -\varphi'(0)$
 dunque l'unico caso di parità è quello con $\varphi'(0) = 0$.

(b) Andiamo a risolvere di $y'' = (y')^2 - 2y$ con $y(0) = 0, y'(0) = -1$.

Eq. totale ammette $\omega = (p^2 - 2y) dy - p dp$. ω esatta?

$$\frac{\partial(p^2 - 2y)}{\partial p} = \frac{\partial(-p)}{\partial y} = 2p \neq 0. \text{ Non è esatta.}$$

$$\text{Poi } \frac{1}{-p} \cdot \left(\frac{\partial(p^2 - 2y)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y} \right) = -2 \text{ non dipende da } p.$$

$$\Rightarrow \text{facciamo integrale } e^{\int -2 dy} = e^{-2y}.$$

Dunque $e^{-2y} \omega$ è esatta. (Si tratta di trovare in $\mathbb{R}^2$ delle fun. (y, p)).

$$\text{Proviamo } F(y, p): \begin{cases} \partial_y F = (p^2 - 2y) e^{-2y} \\ \partial_p F = -p e^{-2y} \end{cases}$$

$$\partial_p F = -p e^{-2y} \Rightarrow F(y, p) = -\frac{p^2}{2} e^{-2y} + \phi(y)$$

$$\partial_y F = -\frac{p^2}{2} \cdot (-2e^{-2y}) + \phi'(y) = (p^2 - 2y) e^{-2y} \Rightarrow \phi'(y) = -2y e^{-2y}$$

$$\Rightarrow \phi(y) = (y + \frac{1}{2}) e^{-2y}$$

Conseguenza: integrando nel piano delle fun.: $F(y, p) = K$, con

$$(-\frac{p^2}{2} + y + \frac{1}{2}) e^{-2y} = K \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo le cond. iniziali $y(0) = 0, y'(0) = -1$

$$(-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}) e^0 = K \Rightarrow K = 0.$$

$$\text{dunque } (-\frac{p^2}{2} + y + \frac{1}{2}) e^{-2y} = 0 \Rightarrow p^2 = 2y + 1$$

$$\text{cioè } (y')^2 = 2y + 1 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{2y + 1} \quad \text{I° o.d.i!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2y+1}} dy = -dt \Rightarrow \sqrt{2y+1} = 1-t \quad \text{con } t=1 \text{ (poiché } y(0)=0)$$

$$\sqrt{2y+1} = 1-t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} t^2 - t \quad (\text{definita in } t=0 \text{ ma non per } t=1)$$

RISOLUZIONI DEGLI ESERCIZI NON SVOLTI IN AULA

Ex. 4 $x^2 y' + \sin y = 0$ (qui si intende $y(x)$).
 Analizzarlo tramite l'equazione differenziale oppure con i metodi di
 Analisi I (ovvero a variabili separabili), e risolvere i p.b.
 di Cauchy con dati iniziali $y(1) = 3\pi/2$ oppure $y(-1) = \pi$.

Essa corrisponde al sistema $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -\frac{\sin y}{x^2} \end{cases}$ ($x \neq 0$) (o al sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = \sin y \end{cases}$)

che dà luogo all'equazione differenziale $\sin y \, dx + x^2 dy = 0$:

facile veder che, formalmente, possiamo $y' = \frac{dy}{dx}$, trovare

$$x^2 y' + \sin y = 0 \quad x^2 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0 \quad \sin y \, dx + x^2 dy = 0$$

È un'equazione differenziale a variabili separabili.

Conseguentemente: $x=0$ (ovvero $y = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$)

Per le altre curve integrali:

$$\frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{\sin y} dy = 0$$

$$\text{Puntualità: } \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{\sin y} dy = -\frac{1}{x} + \ln |\tan \frac{y}{2}| = F(x, y)$$

Le soluzioni con $y(-1) = \pi$ è la costante $y(x) \equiv \pi$.

Vediamo ora quella con $y(1) = 3\pi/2$: $F(1, 3\pi/2) = -1 + \ln |\tan \frac{3\pi}{4}| = -1$

$$-\frac{1}{x} + \ln |\tan \frac{y}{2}| = -1 \quad \ln |\tan \frac{y}{2}| = \frac{1}{x} - 1 \quad |\tan \frac{y}{2}| = e^{\frac{1}{x} - 1}$$

$$\tan \frac{y}{2} = \pm e^{\frac{1}{x} - 1} \Rightarrow \frac{y}{2} = -\arctan(e^{\frac{1}{x} - 1}) + h\pi \quad \text{per qualche } h \in \mathbb{Z}$$

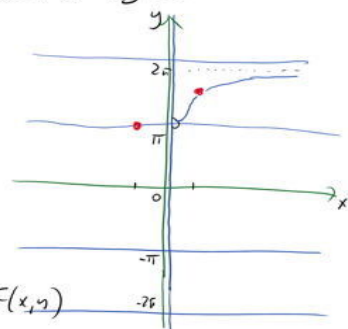
$$\text{ma } y(1) = 3\pi/2 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} = -\arctan(1) + h\pi = -\pi/4 + h\pi \Rightarrow h = 1$$

$$y(x) = 2(\pi - \arctan(e^{\frac{1}{x} - 1})) \quad \text{che vale nel dominio }]0, +\infty[$$

$$\text{Notare che } \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 2(\pi - \pi/2) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 2(\pi - \arctan(1/e))$$

$$y'(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+(e^{\frac{1}{x}-1})^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+ : \text{infatti, assegnando le}$$

dati iniziali $y(0) = \pi$ si possono trovare sia le soluzioni
 costanti $y \equiv \pi$ che le soluzioni $y_2(x) = \begin{cases} \pi & (\text{per } x \leq 0) \\ 2(\pi - \arctan(e^{\frac{1}{x} - 1})) & (\text{per } x > 0) \end{cases}$ (o più semplicemente $y \equiv \pi$)



dell'equazione originale $x^2 y' + \sin y = 0$ che sono diverse
onde solitarie ... contraddittorie? No, perché il T. Cauchy
non funziona su i dati $y(0) = y_0$ (per $x=0$ non si può porre
l'equazione in forma normale).

N.B. L'ultimo discorso ha importanza quando si ricercano
delle soluzioni $y(x)$ al dominio il più largo possibile
(ragionando da Analisi I); invece per la o.d.t.
ammissa il problema non si pone, perché si dà
iniziale $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ la soluzione è l'equilibrio
 $(0, \pi)$ stesso, e non ci sono bisogno di saldare
alcuna delle altre curve integrali del tipo
 $F(x, y) = K$ vanno considerate solo per $x > 0$ o solo per $x < 0$
(ragionando da Analisi III).

Quale dei due rami è quello da seguire?

Risposta: dipende da quello che uno vuole!

Per come è stato formulato il problema, in quali caso
possibilmente sono più interessanti al ramo tipo
Analisi I, ovvero a trovare soluzioni in forma grafica
 $y(x)$ al dominio più largo possibile.

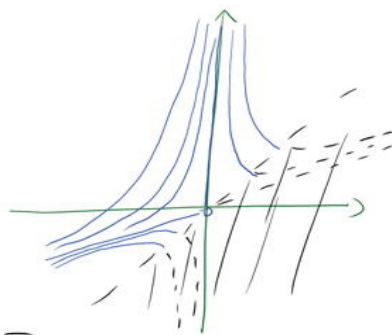
Ex. 6 $\sqrt{y-x} \, dx + \frac{x}{\sqrt{y-x}} \, dy = 0$

Questa e.d.t. è definita per $y > x$
(si noti che $p(x, y) = \sqrt{y-x}$ e $q(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y-x}}$
= $\frac{x}{\sqrt{y-x}}$ sono omogenee di grado $1/2$).
Essa è equivalente a $(y-x)dx + xdy = 0$
(moltiplicando per $\sqrt{y-x}$).

Si può trattare direttamente come forma esatta

$$\left(\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = y-x \\ \frac{\partial}{\partial y} F = x \end{cases} \Rightarrow F = xy - \frac{x^2}{2} + \psi(y) \right. \\ \left. \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} F = x + \psi'(y) = x \Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi = \text{costante} \right)$$

$$\text{da cui } x(2y-x) = K;$$



ou bien comme e.d.t. homogène de degré 1 posons $y = xz$
 $dy = z dx + x dz \Rightarrow (xz - x) dx + x(z dx + x dz) = 0$

$\rightarrow$ (noté de $x=0$ à courbe intégrale, div (y, x))

$(2z-1) dx + x dz = 0$ à variable séparable :

considérons la courbe intégrale $z = 1/2$ (ou $y = x/2$)

une primitive est $F(x, z) = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{2z-1} dz = \frac{1}{2} \ln |x^2(2z-1)|$,

d'où $\frac{1}{2} \ln |x^2(2z-1)| = k \rightarrow x^2(2z-1) = h \rightarrow$

$x^2 \left(\frac{2y}{x} - 1 \right) = h$ ou encore $x(2y-x) = k$.

E.D.O. LINEARI

Ci concentriamo d'ora in poi sul caso LINEARE:

$$y' = f(t, y) \rightsquigarrow y' = A(t)y + b(t) \quad \text{ove}$$

$A: I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, $b: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

$$\text{ovvero: } \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \color{red}{A(t)} & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{ovvero: } \begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

Es.
$$\begin{cases} \dot{x} = x \log|t| - y \sqrt{t+3} \\ \dot{y} = t^2 x + 2y - \frac{\sin t}{t-1} \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \log|t| & -\sqrt{t+3} \\ t^2 & 2 \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sin t}{t-1} \end{pmatrix}$$

È un sistema lineare con soluzioni definite sull'intervallo $] -3, 0[$ oppure $] 0, 1[$ oppure $] 1, +\infty[$ e se date di due si trova t_0 nel dato di Cauchy $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$

Quelli che fanno aff. riguarda informazioni generali sulle strutture dello spazio delle soluzioni di un sistema di quel tipo.

Purtroppo NON esistono formule di soluzioni che valgono in generale: queste esistono particolari solo nel caso dei coefficienti costanti (ovvero $A(t)$ è una matrice costante $A \in M_n(\mathbb{C})$, mentre $b(t)$ può dipendere dal tempo). Ma poi aff. si fanno ancora sul generale.

Per il Teo. di $\exists^!$ di C.L., già sappiamo che tutte le soluzioni del sistema saranno funzioni $y(t)$ di classe $\mathcal{C}^1$ su domini tutto I :
 def., detto $S = \{y: I \rightarrow \mathbb{C}^n: y' = A(t)y + b(t)\}$ ($\begin{smallmatrix} \text{SPAZIO DELLE} \\ \text{FUNZIONI} \\ \text{DEI SISTEMI} \end{smallmatrix}$)
 sarei $S \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ $\leftarrow$ SPAZIO DELLE FUNZIONI $I \rightarrow \mathbb{C}^n$ DI CLASSE $\mathcal{C}^1$
 E' SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$ DI DIM. INFINITA
 (CHIAMATO ANCHE MSE...)

Ma come è fatto il suo sottospazio S' ?

A tal fine consideriamo anche il sistema omogeneo $y' = A(t)y$,
 e chiamiamo $S_0 \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ il suo spazio di soluzioni.

S_0 è un $\mathbb{C}$ -sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$, di dimensione n ,
 ovvero un suo n soluzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in S_0$ definite su tutto I
 e linearmente indipendenti (ovvero $\lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$)

tale che $S_0 = \{ \lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$.

Un tale insieme $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ si dice SISTEMA FONDAMENTALE di soluzioni.

Una matrice $\Phi(t)$ le cui colonne costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni è detta (MATRICE) FOUNDATE del sistema $\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_n(t) \\ | & | & | \end{pmatrix}$

che S_0 è un $\mathbb{C}$ -sottosp. vet. è facile: se $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in S_0$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
 allora $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)' = \lambda_1 \varphi_1' + \lambda_2 \varphi_2' = \lambda_1 A(t) \varphi_1 + \lambda_2 A(t) \varphi_2 = A(t) (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)$

Fissato un arb. $t_0 \in I$, consideriamo la funzione $v: S_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$, VALUTAZIONE IN t_0

$v(\varphi) = \varphi(t_0)$. la funz. v è chiaramente lineare ($v(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) =$
 $= (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(t_0) = \lambda_1 \varphi_1(t_0) + \lambda_2 \varphi_2(t_0) = \lambda_1 v(\varphi_1) + \lambda_2 v(\varphi_2)$)

ed è anche biettiva poiché $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ha una e una sola soluz. $\forall y_0 \in \mathbb{C}^n$.

Dunque v è isomorfismo di spazi vet. su $\mathbb{C}$, poiché anche S_0 ha dim. n (come $\mathbb{C}^n$).

Ex. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases} \quad \begin{matrix} Y' = A(t)Y \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix}$

Vediamo però come risolvere questo sistema (a cell. cost., omogeneo):

limitiamoci per ora a prendere att. dal fatto che

$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix}$ sono due soluzioni lin. indip.

(che sono soluzioni si vede direttamente; che poi siano l.i. si vede dal fatto che $\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono vettori l.i. in $\mathbb{C}^2$).
 Per questo detto, le soluzioni del sistema sono tutte e solo quelle del tipo
 $\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-3t} \\ -\lambda_1 e^{2t} + 2\lambda_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
 Una soluzione del sistema è detta $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-3t} \\ -e^{2t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Se $\Phi(t)$ è una matrice di funzioni le cui colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ son soluzioni in S_0 (ovvero $\varphi_j'(t) = A(t)\varphi_j(t) \quad \forall j=1, \dots, n$)

allora $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Inoltre le segg. affermazioni son equivalenti:

- (i) $\Phi(t)$ è una soluzione ($\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$)
- (ii) le soluzioni in S_0 son tutte e sole quelle del tipo $\Phi(t)c$, con $c \in \mathbb{C}^n$ cost.
- (iii) $\exists \tilde{t} \in I$ t.c. $\Phi(\tilde{t})$ è non singolare ($\det \Phi(\tilde{t}) \neq 0$)
- (iv) $\forall t \in I$ vale $\Phi(t)$ non singolare ($\det \Phi(t) \neq 0$)

In particolare:

(a) se $\Phi(t)$ è non singolare allora $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$

e tutte le altre soluzioni son del tipo $\Phi(t)L$ con $L \in M_n(\mathbb{C})$ invertibile.

(b) le soluzioni di $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ è $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$

Se le colonne di $\Phi(t)$ son soluzioni di $y' = A(t)y$, allora $\varphi_j(t)' = A(t)\varphi_j(t) \quad \forall j$, ma questo è proprio se e solo se $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii), (iv) $\Rightarrow$ (iii) ovvio

(iii) $\Rightarrow$ (i). La soluzione $v_{\tilde{t}}: S_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ è un isomorfismo! Le val. (iii), significa che $\{v_{\tilde{t}}(\varphi_1), \dots, v_{\tilde{t}}(\varphi_n)\}$ è base di $\mathbb{C}^n$, poiché anche $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ deve esser base di S_0 .

(i) $\Rightarrow$ (iv) $\forall t \in I$ la soluzione v_t è isomorfismo! Le val. (i) significa che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è base di $S_0 \Rightarrow \{v_t(\varphi_1), \dots, v_t(\varphi_n)\}$ base di $\mathbb{C}^n$ ovvero $\Phi(t)$ è non singolare.

(a) Da $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, se $\Phi(t)$ è non singolare allora è invertibile (b (i.)) dopo moltiplicare ambo i membri a dx per $\Phi(t)^{-1}$ otterremo $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$. Quindi, alle altre soluzioni, fare $\Phi(t)L$ con L invertibile in $M_n(\mathbb{C})$ equivale a fare un cambio di base!

(b) Impostiamo che $\varphi(t) = \Phi(t)c$ (con $c \in \mathbb{C}^n$) risolve $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.
 $\varphi(t) = \Phi(t)c \Rightarrow \varphi(t_0) = \Phi(t_0)c = y_0 \Rightarrow c = \Phi(t_0)^{-1}y_0$
 e perciò $\varphi(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(t_0)^{-1}y_0$.