Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 05/12/2025

I° APPELLO SCRITTO 2024/25 (24 gennaio 2025)

Si consideri l'equazione differenziale $(y'' + y^r)\cos t = 1$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $r \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$ allora $\psi(t) = \varphi(-t)$ e/o $\eta(t) = -\varphi(-t)$ lo sono su $-I \subset]-\infty, 0[$? Nel caso, ne seguirebbe che una soluzione definita in $t = 0$ è pari/dispari?

(c) Posto $r = 1$ determinare la soluzione con dato $(y(0), y'(0)) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Rivisitare le precedenti questioni per il problema $(y'' + |y|^\alpha)\cos t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $(y''+y^r)\cos t = 1$ non è in f.n.; fattorizzo di certo $t \neq \pi/2 + k\pi$ (altrimenti $0=1$)

$\rightsquigarrow$ $y''+y^r = 1/\cos t$ su intervalli $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ $\iff$ $\begin{cases} y' = p \\ p' = \dfrac{1}{\cos t} - y^r \end{cases}$ $f(y,p)$

Se $r<0$ dovremo $y \neq 0$; per qualsiasi dato (t_0, y_0) con $t_0 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ e $y_0 \neq 0$ f è C^1 dunque $\exists!$ locale.

Se $r = 0, 1$ l'e.d.o. lineare $\Rightarrow$ $\exists!$ globale su tutto $]-\pi/2+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$

Se $r>1$, per ogni dato (t_0, y_0) con $t_0 \neq \pi/2 + k\pi$ c'è $\exists!$ locale (su $\exists$ glob. non si può dire, cercare altre quantità)

(b) $\psi(t) = \varphi(-t)$ $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$, $\psi''(t) = \varphi''(-t)$

$(\psi''(t) + \psi(t)^r)\cos t = (\varphi''(-t) + \varphi(-t)^r)\cos t$ $\cos(-t)$ $= 1$ ok.

Per $\eta(t) = -\varphi(-t)$ la verifica dà esito negativo.

(c) $y''+y = \dfrac{1}{\cos t}$ omogenea: soluzioni generate da $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$

MVCA: $\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ $W = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$c_1'(t) = (-1)^{2+1}\dfrac{\sin t}{1}\cdot\dfrac{1}{\cos t} = -\operatorname{tg} t \Rightarrow c_1(t) = \log|\cos t|$; $c_2'(t) = (-1)^{2+2}\dfrac{\cancel{\cos t}}{1}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\cos t}} = 1 \Rightarrow c_2 = t$

$y(t) = (A + \log|\cos t|)\cos t + (B+t)\sin t$

$y'(t) = -\operatorname{tg} t\cos t - (A+\log|\cos t|)\sin t + \sin t + (B+t)\cos t$

$\begin{cases} y(0) = A = a \\ y'(0) = B = b \end{cases} \Rightarrow y(t) = (a + \log|\cos t|)\cos t + (b+t)\sin t$

(d) ...

Si consideri l'equazione differenziale $(y'' + y^r)\cos t = 1$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $r \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$ allora $\psi(t) = \varphi(-t)$ e/o $\eta(t) = -\varphi(-t)$ lo sono su $-I \subset]-\infty, 0[$? Nel caso, ne seguirebbe che una soluzione definita in $t = 0$ è pari/dispari?

(c) Posto $r = 1$ determinare la soluzione con dato $(y(0), y'(0)) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Rivisitare le precedenti questioni per il problema $(y'' + |y|^\alpha)\cos t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (a) L'equazione differenziale $(y'' + y^r)\cos t = 1$ non è in forma normale; d'altra parte nessuna soluzione può essere definita in punti del tipo $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (ne seguirebbe $0 = 1$), dunque l'equazione è del tutto equivalente a $y'' + y^r = \frac{1}{\cos t}$ (a sua volta equivalente al problema del 1o ordine in forma normale $(y,p)' = f(y,p,t) = (p, \frac{1}{\cos t} - y^r)$) su intervalli aperti $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. • Se $r \le -1$ deve essere $y \neq 0$; per ogni altro dato (t_0, y_0) con $t_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $y_0 \neq 0$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) della soluzione. • Se $r = 0$ oppure $r = 1$ l'equazione è lineare, dunque per ogni dato (t_0, y_0) con $t_0 \in I_k$ è garantita esistenza e unicità globale sull'intero intervallo I_k. • Se $r \ge 2$, ancora una volta per ogni dato (t_0, y_0) con $t_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) ma non si può dire nulla sull'esistenza globale.

(b) Sia $\varphi(t)$ soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$. Se $\psi(t) = \varphi(-t)$ (ove $t \in -I$) si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$, pertanto $(\psi''(t) + \psi(t)^r)\cos t = (\varphi''(-t) + \varphi(-t)^r)\cos t = (\varphi''(-t) + \varphi(-t)^r)\cos(-t) = 1$, il che mostra che anche $\psi(t)$ è soluzione su $-I$. Una verifica analoga per $\eta(t) = -\varphi(-t)$ dà esito negativo. • Il fatto che se $\varphi(t)$ è soluzione allora lo è anche la riflessa $\psi(t) = \varphi(-t)$ non implica che le soluzioni definite in $t = 0$ siano pari: infatti il fatto che $\psi(0) = \varphi(0)$ costituisce un dato di Cauchy incompleto perché manca il dato anche sulla derivata prima. Se però una soluzione definita in $t = 0$ ha ivi derivata prima nulla allora essa è necessariamente pari, perché infatti in tal caso oltre a $\psi(0) = \varphi(0)$ si ha anche $\psi'(0) = -\varphi'(0) = 0 = \varphi'(0)$, da cui $\psi = \varphi$ per unicità globale.

(c) Come detto prima, le soluzioni di $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ (lineare a coefficienti costanti) con dato in $t_0 = 0$ saranno definite su tutto $I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Un sistema fondamentale per l'omogenea è dato da $\{\cos t, \sin t\}$; col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare per la completa è del tipo $\tilde{y}(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ con $c_1' = -\sin t \frac{1}{\cos t}$ (dunque $c_1(t) = \log|\cos t|$) e $c_2' = +\cos t \frac{1}{\cos t} = 1$ (dunque $c_2(t) = t$). Ne segue che le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A + \log|\cos t|)\cos t + (B + t)\sin t$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando si ha $y' = \operatorname{tg} t \cos t - (A + \log|\cos t|)\sin t + \sin t + (B + t)\cos t$, dunque imponendo che $(y(0), y'(0)) = (A, B) = (a, b)$ si ottiene $y(t) = (a + \log|\cos t|)\cos t + (b + t)\sin t$: in particolare, come previsto, se $y'(0) = b = 0$ le soluzioni sono pari.

(d) Passiamo ora al problema $(y'' + |y|^\alpha)\cos t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ • A quanto detto in (a) va aggiunto che, nel caso $0 < \alpha < 1$, per dati di tipo $(t_0, 0)$ la funzione $f(y,p,t)$ resta continua ma perde la lipschitzianità rispetto (y,p): per tali dati si avrà esistenza locale ma non è assicurata l'unicità. • Per (b) non cambia nulla. • Quanto a (c), invece, la situazione è più delicata. In effetti, per dati con $a > 0$ un sistema fondamentale per l'omogenea resta $\{\cos t, \sin t\}$ come prima; ma per dati con $a < 0$, essendo $|y| = -y$ l'equazione caratteristica diventa $\lambda^2 - 1 = 0$ e dunque un sistema fondamentale per l'omogenea diventa $\{e^t, e^{-t}\}$ (o equivalentemente $\{\cosh t, \sinh t\}$); usando ancora il metodo di variazione delle costanti arbitrarie una soluzione particolare è allora $(\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{2\cos\tau}\,d\tau)e^t + (-\int_0^t \frac{e^{\tau}}{2\cos\tau}\,d\tau)e^{-t} = \int_0^t \frac{\sinh(t-\tau)}{\cos\tau}\,d\tau$, così che lo spazio delle soluzioni nel caso $y(0) = a < 0$ è $y(t) = A\cosh t + B\sinh t + \int_0^t \frac{\sinh(t-\tau)}{\cos\tau}\,d\tau$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $(y(0), y'(0)) = (a, b)$ si ha $(A, B) = (a, b)$. Pertanto, se il dato iniziale è con $a = 0$ e $b \neq 0$ andranno incollate le soluzioni $y(t)$ sopra e sotto con $t \gtrless 0$ a seconda che $b \gtrless 0$, mentre se $a = b = 0$ notiamo che dal testo dell'equazione si deduce che $y''(0) = 1 > 0$ e dunque la soluzione è > 0 per $t \neq 0$ all'intorno di 0; inoltre questo procedimento va rimesso in atto con un nuovo problema di Cauchy in un istante diverso t_1 ogniqualvolta la soluzione si annulli in quell'istante t_1.

II° APPELLO SCRITTO 2024/25 (7 febbraio 2025)

È data l'equazione differenziale $(\alpha y^2 + t)y' = y + (\alpha - 1)t$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Posto $\alpha = 1$ risolvere i problemi di Cauchy con $y(1) = 0$, oppure $y(1) = -1$, oppure $y(-1) = 2$.

(c) Posto $\alpha = 0$ risolvere gli stessi problemi di Cauchy del punto precedente.

(a) L'e.d.o. non è in f.n. • Se $\alpha = 0$: $ty' = y - t$ lineare $\Rightarrow \exists!$ glob. su $]-\infty, 0[$ oppure $]0, +\infty[$. Se una soluzione $y(t)$ è definita all'int. di $t = 0 \Rightarrow 0 = y(0)$

• Se $\alpha \neq 0$ l'e.d.o. non è più lineare. Se il dato $y(t_0) = y_0$ è tale che $\underline{\alpha y_0^2 + t_0 = 0} \Rightarrow y_0 + (\alpha - 1)t_0 = 0$ $\qquad \begin{cases} \alpha y_0^2 + t_0 = 0 \\ y_0 + (\alpha-1)t_0 = 0 \end{cases}$ $\qquad t_0 = -\alpha y_0^2$, $\; y_0 - \alpha(\alpha-1)y_0^2 = 0$

$y_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

$y_0 = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ $(\alpha \neq 1) \Rightarrow t_0 = -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}$ $\quad : \; (0,0), \; \left(-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}, \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\right)$ $\alpha \neq 1$

Invece i dati t.c. $\alpha y_0^2 + t_0 = 0$ ma $y_0 + (\alpha-1)t_0 \neq 0$ non avranno soluzioni.

(es.: $\alpha = 1$: $y_0^2 + t_0 = 0$ $(t_0, y_0) = (-1, 1)$ $y_0 \neq 0$ $y(-1) = 1$ non ha sol.)

Per tutti gli altri dati è garantita $\exists!$ locale

(b) $(y^2 + t)y' = y \rightsquigarrow \omega = \underbrace{(y^2 + t)}_{P}\,dy \overbrace{- y}^{Q}\,dt = 0$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 2$ non è esatta

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y}$ non dip. da t $\rightsquigarrow \rho(y) = \exp\left(\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy\right) = \frac{1}{y^2}$

$\frac{1}{y^2}\,\omega = (1 + t/y^2)\,dy - \frac{1}{y}\,dt = 0$ $\qquad F$ primitiva: $\partial_t F = -\frac{1}{y} \Rightarrow F = -t/y + \varphi(y)$

$\partial_y F = \cancel{t/y^2} + \varphi'(y) = 1 + \cancel{t/y^2} \Rightarrow \varphi(y) = y$ $\qquad F(y,t) = y - t/y$ $\qquad$ ($y \equiv 0$ è curva integrale)

$F = k$: $y - t/y = k$ $\quad y^2 - ky - t = 0$ $\qquad y(1) = 0 \Rightarrow y \equiv 0$

$y(1) = -1$: $1 + k - 1 = 0$ $k = 0$ $y^2 = t$ $y(t) = \cancel{\pm} -\sqrt{t}$ $(]0, +\infty[$,

(c) $\alpha = 0 \Rightarrow ty' = y - t$ lineare $y' + \overbrace{(-\tfrac{1}{t})}^{p}y = \overbrace{-1}^{q}$

$P(t) = \int p(t)\,dt = -\log|t|$; $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int(-\frac{1}{|t|})\,dt = -\sigma \int \frac{1}{t}\,dt$ ± 1 segno

$= -\sigma \log|t|$

$y(t) = |t|\,(-\sigma \log|t| + k) = \underline{t\,(k - \log|t|)}$ $(k \in \mathbb{R})$

$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1\,(k - 0) \Rightarrow k = 0$ $y(t) = -t \log t$ (dom. $]0, +\infty[$)

⋮

Esistono soluzioni definite anche in $t = 0$?

$\lim_{t \to 0} t\,(k - \log|t|) = 0 \ \forall k \Rightarrow y(t)$ è prolungabile per continuità con $y(0) := 0$

$y'(t) = k - \log|t| - 1 \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty \Rightarrow$ nessun prolungam. è C^1

$\Rightarrow \nexists$ soluzione definita all'int. di $t = 0$.

È data l'equazione differenziale $(\alpha y^2 + t)y' = y + (\alpha - 1)t$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Posto $\alpha = 1$ risolvere i problemi di Cauchy con $y(1) = 0$, oppure $y(1) = -1$, oppure $y(-1) = 2$.

(c) Posto $\alpha = 0$ risolvere gli stessi problemi di Cauchy del punto precedente.

(a) L'equazione $(\alpha y^2 + t)y' = y + (\alpha - 1)t$ non è in forma normale. • Se $\alpha = 0$ essa diventa $ty' = y - t$, che essendo lineare avrà soluzioni definite su tutto $]-\infty, 0[$ oppure $]0, +\infty[$; se inoltre esistesse qualche soluzione $y(t)$ definita anche per $t = 0$ dovrebbe necessariamente aversi $y(0) = 0$. • Invece per $\alpha \neq 0$ l'equazione non è lineare. Se il dato iniziale è della forma $y(t_0) = y_0$ con $\alpha y_0^2 + t_0 = 0$ dovrebbe aversi anche $y_0 + (\alpha - 1)t_0 = 0$, e dalle due equazioni risultano le due sole eventuali possibilità $(t_0, y_0) = (0, 0)$ oppure (per $\alpha \neq 1$) $(t_0, y_0) = (-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}, \frac{1}{\alpha(\alpha-1)})$. Invece per dati $y(t_0) = y_0$ con $\alpha y_0^2 + t_0 \neq 0$ si può portare l'equazione in forma normale $y' = f(y, t) = -\frac{y + (\alpha-1)t}{\alpha y^2 + t}$ ed è assicurata l'esistenza e unicità locale (e l'unicità globale) della soluzione.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $(y^2 + t)y' = y$. L'equazione totale associata è $\omega = p(y, t)\,dy + q(y, t)\,dt = 0$ con $p(y, t) = y^2 + t$ e $q(y, t) = -y$; la forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$), tuttavia, una volta notato che la funzione costante $y \equiv 0$ è soluzione, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = -\frac{2}{y}$ non dipende da t si ha che $\exp(\int(-\frac{2}{y})\,dy) = y^{-2}$ è fattore integrante. Se $F(y, t)$ è primitiva per $y^{-2}\omega$ dovrà aversi $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial t}) = (1 + \frac{t}{y^2}, -\frac{1}{y})$: da $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{y}$ si ricava $F = -\frac{t}{y} + \varphi(y)$ con φ da determinare, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{t}{y^2} + \varphi'(y) = 1 + \frac{t}{y^2}$ si deduce che $\varphi'(y) = 1$, ovvero $\varphi(y) = y$. Una forma implicita per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione è data dunque dalle curve di livello $F(y, t) = y - \frac{t}{y} = k$, ovvero $y^2 - ky - t = 0$. Col dato $y(1) = 0$ la soluzione è la costante nulla $y \equiv 0$ (dominio $\mathbb{R}$); col dato $y(1) = -1$ si ricava $k = 0$, da cui $y^2 - t = 0$ ovvero $y = -\sqrt{t}$ (dominio $]0, +\infty[$); infine, col dato $y(-1) = 2$ si ricava $k = \frac{5}{2}$ da cui $2y^2 - 5y - 2t = 0$, ovvero $y = \frac{5 + \sqrt{25 + 16t}}{4}$ (dominio $]-\frac{25}{16}, +\infty[$).

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $ty' = y - t$, lineare. Scritta per $t \neq 0$ nella forma $y' + p(t)\,y = q(t)$ con $p(t) = -\frac{1}{t}$ e $q(t) = -1$, si ha $P(t) = \int p(t)\,dt = -\log|t|$ e $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int(-\frac{1}{|t|})\,dt = -\sigma \log|t|$ ove $\sigma = \operatorname{sign} t$, col che la soluzione generale si scrive come $y(t) = e^{-P(t)}(k + \int e^{P(t)} q(t)\,dt) = |t|(k - \sigma \log|t|) = t(k - \log|t|)$ con $k \in \mathbb{R}$ (notiamo che nessuna di queste soluzioni si può prolungare in $t = 0$ come funzione C^1 perché $y'(t) = k - \log|t| - 1 \xrightarrow{t \to 0} +\infty$). Col dato $y(1) = 0$ si ricava $k = 0$, da cui $y = -t \log t$ (dominio $]0, +\infty[$); col dato $y(1) = -1$ si ricava $k = -1$, da cui $y = -t(1 + \log t)$ (dominio $]0, +\infty[$); infine, col dato $y(-1) = 2$ si ricava $k = -2$ da cui $y = -t(2 + \log|t|)$ (dominio $]-\infty, 0[$).

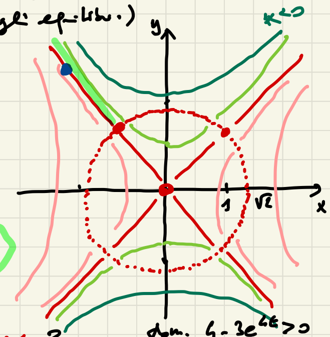
V° APPELLO SCRITTO 2021/22 (6 settembre 2022)

Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = y(2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x(2 - x^2 - y^2) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e le orbite delle soluzioni non costanti.

(b) Determinare le soluzioni che per $t = 0$ valgono rispettivamente $(-2, 2)$ e $(1, 1)$.

(a) Il campo $g(x,y) = (y(2-x^2-y^2), x(2-x^2-y^2))$ è $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ $\exists!$ locale $\forall$ dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$; esistenza globale non si può dire (cresce come cubica).
Tutti i punti della circonferenza $x^2+y^2=2$ sono equilibri.
Al di fuori della circonf. il sistema è equivalente al sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$
che ha un solo altro equilibrio in $(0,0)$; le altre orbite saranno le curve di livello $x^2 - y^2 = k$ (nei tratti individuati dagli equilibri.)



(b) $(1,1)$ è equilibrio $\Rightarrow (x(t), y(t)) \equiv (1,1)$

$(-2,2)$: l'orbita è $y = -x$, con $x < -1$

$\dot{x}(0) = 2(2-4-4) = -12 < 0$

$\dot{x} = y(2-x^2-y^2) \Rightarrow \dot{x} = -x(2-x^2-x^2)$

$\dot{x} = -2x(1-x^2) = 2x(x^2-1)$

$\frac{dx}{x(x^2-1)} = 2\,dt$ $\quad \log \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} = 2t + k$ $\quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}$

$x(0) = -2 \Rightarrow k = \log \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{2t}$

$\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{3}{4} e^{4t} \Rightarrow (4 - 3e^{4t})x^2 = 4 \Rightarrow x(t) = \cancel{+}- \frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}} = -y(t)$ $\quad$ dom. $4 - 3e^{4t} > 0$, $t < \frac{1}{4} \log \frac{4}{3}$

(a) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = y(2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x(2 - x^2 - y^2) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare. Al di fuori della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ (che è fatta di equilibri) il sistema è equivalente a quello in cui si semplifica per $2 - x^2 - y^2$, ovvero $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, x)$: l'unico altro equilibrio è dunque l'origine $(0, 0)$, e un integrale primo del sistema (al di fuori della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$) è dato da $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, le cui curve di livello $x^2 - y^2 = k$ per $k \neq 0$ sono iperboli equilatere di asintoti $y = \pm x$ e per $k = 0$ sono l'unione delle due bisettrici $y = \pm x$. Tenendo presente che gli equilibri (che sono $(0, 0)$ e tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$) spezzano le curve di livello in orbite distinte, si ha che le orbite non costanti sono le porzioni delle suddette curve di livello $x^2 - y^2 = k$ che non contengono equilibri.

(b) Per quanto detto prima, l'orbita della soluzione con $(x(0), y(0)) = (-2, 2)$ sarà la semiretta $y = -x$ con $x < -1$ (punto d'intersezione di $y = -x$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$), percorsa dal basso verso l'alto (infatti $\dot{x}(0) = y(0)(2-x(0)^2-y(0)^2) = -12 < 0$). Sostituendo $y = -x$ in $\dot{x} = y(2-x^2-y^2)$ si ottiene $\dot{x} = 2x(x^2-1)$, equazione scalare del 1o ordine a variabili separabili: integrando $\frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = 2\,dt$ si ottiene $\log(\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}) = 2t+h$, e ricordando che $x(0) = -2$ si ricava $k = \log \frac{\sqrt{3}}{2}$; esponenziando si ha $\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{2t}$, da cui $\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{3}{4} e^{4t}$ ovvero $(4-3e^{4t})x^2 = 4$ e dunque (sempre ricordando che $x(0) = -2$) si ricava $x(t) = -\frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}}$. La soluzione cercata è perciò $(x(t), y(t)) = (-\frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}}, \frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}})$, definita per $t < t_0 := \frac{1}{4} \log \frac{4}{3}$: si noti che per $t \to -\infty$ la soluzione tende all'equilibrio $(-1, 1)$ e per $t \to t_0^-$ scappa all'infinito. • Il punto $(1, 1)$ è un equilibrio, dunque la soluzione con tale dato iniziale sarà la costante in tale punto.

I° APPELLO SCRITTO 2021/22 (18 gennaio 2022)

È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + \alpha(y')^2 = 4y + (\alpha-1)e^{2t} \\ y(0)=1,\ y'(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni?
(b) Risolvere il problema per $\alpha = 1$.
(c) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

(a) L'e.d.o. e' equivalente a $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4y - \alpha p^2 + (\alpha-1)e^{2t} \end{cases}$ $f(t,y,p)$

$f \in C^1 \Rightarrow \exists!$ locale per ogni dato $(y(t_0), y'(t_0)) = (y_0, y_0')$

Esistenza globale: se $\alpha = 0$ diventa $y'' - 4y = -e^{2t}$ lineare $\Rightarrow \exists!$ glob. su $\mathbb{R}$

se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ crescenza quadratica, non si può dire nulla a priori

(b) $\alpha = 1$: $y'' + (y')^2 = 4y$ e.d.o. autonoma del I° ordine.

$\rightsquigarrow$ e.d. totale $\omega = \underbrace{(4y - p^2)}_{P} dy \underbrace{- p}_{Q}\, dp = 0$ $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial p} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2p$ non è esatta

$\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial p} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) = 2$ non dip. da $p \Rightarrow \rho(y) = e^{2y}$

$F(y,p)$ prim. di $e^{2y}\omega$: $\partial_p F = -pe^{2y} \Rightarrow F = -\frac{p^2}{2}e^{2y} + \varphi(y)$

$\partial_y F = \cancel{-\frac{p^2}{2}\cdot 2e^{2y}} + \varphi'(y) = e^{2y}(4y - \cancel{p^2}) \Rightarrow \varphi'(y) = 4ye^{2y} \Rightarrow \varphi(y) = (2y-1)e^{2y}$

$F(y,p) = \left(-\frac{1}{2}p^2 + 2y - 1\right)e^{2y}$ $\qquad F(1, -\sqrt{2}) = 0$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}p^2 + 2y - 1\right)\cancel{e^{2y}} = 0$

$p^2 = 2(2y-1)$ $\qquad y' = \cancel{\pm}-\sqrt{2(2y-1)} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{2(2y-1)}} = -dt$ $\qquad u = 2(2y-1)$, $du = 4dy$

$\rightsquigarrow y(t) = t^2 - t\sqrt{2} + 1$

(c) $\alpha = 0$: $y'' - 4y = -e^{2t}$ lineare a coeff. costanti

Omogenea: $\varphi_1(t) = e^{2t}$, $\varphi_2(t) = e^{-2t}$

Sol. part.: $\tilde{\varphi}(t) = ate^{2t} \to \tilde{\varphi}'(t) = (1+2t)ae^{2t} \to \tilde{\varphi}''(t) = a(4+4t)e^{2t}$

$\tilde{\varphi}''(t) - 4\tilde{\varphi}(t) = a(4 + \cancel{4t})e^{2t} - \cancel{4at}e^{2t} = -e^{2t} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

$\rightarrow y(t) = \left(A - \frac{1}{4}t\right)e^{2t} + Be^{-2t}$ $\qquad (A, B \in \mathbb{C})$

$y'(t) = \left(-\frac{1}{4} + 2A - \frac{1}{2}t\right)e^{2t} - 2Be^{-2t}$

$\begin{cases} y(0) = A + B = 1 \\ y'(0) = 2A - 2B - 3/4 = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases}$

È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + \alpha(y')^2 = 4y + (\alpha-1)e^{2t} \\ y(0)=1,\ y'(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni?
(b) Risolvere il problema per $\alpha = 1$.
(c) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

3. (a) L'equazione $y'' + \alpha(y')^2 = 4y + (\alpha-1)e^{2t}$ è equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $(y,p) = (y,y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4y - \alpha p^2 + (\alpha-1)e^{2t} \end{cases}$. La funzione $f(t,y,p) = (p, 4y - \alpha p^2 + (\alpha-1)e^{2t})$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$, dunque la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, se $\alpha \neq 0$ non si può dire nulla a priori (infatti c'è crescita quadratica), mentre se $\alpha = 0$ l'equazione diventa lineare e dunque la soluzione sarà certamente definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' + (y')^2 = 4y$, autonoma del 2o ordine ed equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4y - p^2 \end{cases}$. Passando all'equazione totale $\omega = (4y-p^2)\,dy - p\,dp = 0$ e notando che $\frac{1}{-p}\left(\frac{\partial(4y-p^2)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}\right) = 2$ non dipende da p, si ha che $\rho(y) = e^{2y}$ è un fattore integrante. Detta $F(y,p)$ una primitiva di $e^{2y}\omega$, da $\partial_p F = -pe^{2y}$ si ha $F(y,p) = -\frac{1}{2}p^2e^{2y} + \varphi(y)$ con φ da determinare, e da $\partial_y F = -pe^{2y} + \varphi'(y) = (4y-p^2)e^{2y}$ si ricava $\varphi'(y) = 4ye^{2y}$, da cui integrando $\varphi(y) = (2y-1)e^{2y}$ (a meno di costanti additive). Si ha così $F(y,p) = (-\frac{1}{2}p^2 + 2y - 1)e^{2y}$; essendo nel dato iniziale $F(1,-\sqrt{2}) = 0$, tale valore nullo sarà mantenuto lungo tutta la soluzione cercata. Ci siano allora ricondotti all'equazione del 1o ordine $p^2 = (y')^2 = 2(2y-1)$, da cui $y' = -\sqrt{2(2y-1)}$, a variabili separabili. Ponendo $u = 2(2y-1)$ si ha $\frac{1}{4}u' = \sqrt{u}$, da cui separando le variabili $\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = 2\,dt$ che integrata dà $\sqrt{u} = k - 2t$, e da $u(0) = \frac{1}{2}$ si ricava $k = \sqrt{2}$. Pertanto $\sqrt{u} = \sqrt{2} - 2t$, da cui $u(t) = 2(1 - t\sqrt{2})^2$ e infine $y(t) = t^2 - t\sqrt{2} + 1$.

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' - 4y = -e^{2t}$, lineare del 2o ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono generate da e^{2t} e e^{-2t} mentre, essendo 2 una radice caratteristica semplice, una soluzione particolare per l'equazione completa sarà della forma $\tilde{y}(t) = ate^{2t}$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare, e i conti danno $a = -\frac{1}{4}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque $y(t) = (A - \frac{1}{4}t)e^{2t} + Be^{-2t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = A + B = 1$ e $y'(0) = 2A - \frac{1}{4} - 2B = -\sqrt{2}$ si ottiene $(A,B) = (\frac{9-4\sqrt{2}}{16}, \frac{7+4\sqrt{2}}{16})$.