Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 11/12/2025

III° APPELLO SCRITTO 2024/25 (19 giugno 2025)

1. Nello spazio cartesiano siano $g(x,y,z) = 3xyz - x^3 + 3y^2$ e $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3\}$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari. Parametrizzare poi la superficie S localmente attorno al suo punto $P(0,1,2)$, e determinare in due modi il piano tangente affine a S in P.

(b) Trovare i punti stazionari su S per la funzione $f(x,y,z) = x+y$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2 \le y \le x+2\}$ (esistono?).

(a) $\nabla g :\ 3(yz - x^2,\ xz+2y,\ xy) = (0,0,0)$ $\quad xy=0 \begin{cases} x=0 & yz=2y=0 \quad \text{ASSE } z \\ y=0 & -x^2 = xz = 0 \quad \text{"} \end{cases}$

$g(0,0,z) = 0 \Rightarrow$ tutte le sup. di livello $g = a$ sono regolari tranne $a=0$.

$\nabla g(P) = 6(1,1,0) \rightsquigarrow 6(1,1,0)\cdot(x-0,\ y-1,\ z-2) = 0 \qquad x+y=1$

$x(y,z)$ con $x(1,2)=0$

$3xyz - x^3 + 3y^2 = 0$ $\begin{cases} \xrightarrow{\partial_y} \cancel{3}(\dot{x}_y yz + xz) - \cancel{3}x^2\dot{x}_y + \cancel{6}\,2y = 0 & \xrightarrow{(1,2)} 2\dot{x}_y + 2 = 0 \quad \dot{x}_y(1,2) = -1 \\ \xrightarrow{\partial_z} \cancel{3}(\dot{x}_z yz + xy) - \cancel{3}x^2\dot{x}_z = 0 & \rightsquigarrow 2\dot{x}_z = 0 \quad \dot{x}_z(1,2) = 0 \end{cases}$

Derivando ulteriormente: $\ddot{x}_{yy}(1,2) = 1,\quad \ddot{x}_{yz}(1,2) = 1/2,\quad \ddot{x}_{zz}(1,2) = 0$

$$x = 0 + (-1,0)(y-1,\ z-2) + \frac{1}{2}(y-1,\ z-2)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \dots$$

(b) Lagrange: ∇g, ∇f siano paralleli $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3(yz-x^2) & 3(xz+2y) & 3xy \end{pmatrix}$

$xy = 0,\quad xz + 2y = yz - x^2$ $\begin{cases} x=0 & 2y = yz \quad y(z-2)=0 \begin{cases} y=0 \Rightarrow 0=3 \text{ NO} \\ z=2 \Rightarrow 3y^2 = 3 \quad y = \pm 1 \end{cases} \\ y=0 & xz = -x^2 \quad x(x+z) = 0 \begin{cases} x=0 \Rightarrow 0=3 \text{ NO} \\ z=-x \Rightarrow -x^3 = 3 \quad x = -\sqrt[3]{3} \end{cases} \end{cases}$

$P(0,1,2),\ P'(0,-1,2),\ Q(-\sqrt[3]{3},\ 0,\ \sqrt[3]{3})$

localmente in P la sup. S si parametrizza come $x(y,z)$ trovata prima

$f(x,y,z) = x+y \qquad F(y,z) = f(x(y,z),y,z) = x(y,z) + y$

$\nabla F = (\dot{x}_y + 1,\ \dot{x}_z) \qquad H_F = H_x \qquad \nabla F(1,2) = (\dot{x}_y(1,2)+1,\ \dot{x}_z(1,2)) = (0,0)$ ok

$H_F(1,2) = H_x(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ det $<0 \Rightarrow$ INDEF $\Rightarrow P$ punto di sella per f su S

(c) $G(x,y) = g(x,y,0) = 3y^2 - x^3 \qquad A(-1,1),\ B(2,4)$

Punti interni: $\nabla G = (-3x^2, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow \cancel{O(0,0)}$

Arco parabola: $(x, x^2),\ -1 < x < 2$

$G(x,x^2) = 3x^4 - x^3 \xrightarrow{d/dx} 12x^3 - 3x^2 = 3x^2(4x-1)$

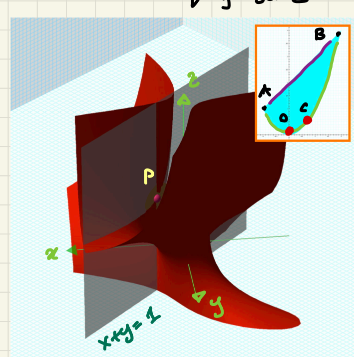
si annulla in $x=0,\ x=1/4 \quad O(0,0),\ C(1/4,\ 1/16)$

Segmento: $(x, x+2),\ -1 < x < 2$

$G(x,x+2) = 3(x+2)^2 - x^3 \xrightarrow{d/dx} 6(x+2) - 3x^2$

si annulla: $3(x^2 - 2x - 4) = 0 \quad \cancel{x = 1 \pm \sqrt{5}}$

$G(O) = 0,\ \underbrace{G(C) = -\frac{1}{256}}_{\text{min}},\ G(A) = 4,\ \underbrace{G(B) = 40}_{\text{max}}$



1. Nello spazio cartesiano siano $g(x,y,z) = 3xyz - x^3 + 3y^2$ e $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3\}$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari. Parametrizzare poi la superficie S localmente attorno al suo punto $P(0,1,2)$, e determinare in due modi il piano tangente affine a S in P.

(b) Trovare i punti stazionari su S per la funzione $f(x,y,z) = x+y$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2 \le y \le x+2\}$ (esistono?).

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y) = 3xyz - x^3 + 3y^2$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^3$. Ponendo $\nabla g = 3(yz - x^2,\, xz + 2y,\, xy) = (0,0,0)$, da $xy = 0$ si ha o $x = 0$ (da cui $yz = 2y = 0$, ovvero i punti dell'asse z) o $y = 0$ (da cui $-x^2 = xz = 0$, ovvero nuovamente i punti dell'asse z). Poiché g si annulla su tutto l'asse z, tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne alpiù quella di livello 0 in tali punti. In particolare $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3\}$ è regolare; nel suo punto $P(0,1,2)$ si ha $\nabla g(P) = 6(1,1,0)$, dunque il piano tangente affine a S in P ha equazione $\nabla g(P) \cdot (x - 0.y - 1, z - 2) = 6(1,1,0)(x, y-1, z-2) = 0$, ovvero $x + y = 1$. • Alternativamente da $g(x,y,z) = 3$ possiamo esplicitare localmente $x(y,z)$ con $x(1,2) = 0$. Derivando l'identità $g(x(y,z),y,z) \equiv 3$ rispetto a y e z si ottiene $3\dot{x}_y yz + 3xz - 3x^2\dot{x}_y + 6y = 0$ e $3\dot{x}_z yz + 3xy - 3x^2\dot{z}_z = 0$, da cui calcolando per $(y,z) = (1,2)$ si ottiene $2\dot{x}_y + 2 = 0$ e $2\dot{x}_z = 0$, ovvero $\dot{x}_y(1,2) = -1$ e $\dot{x}_z(1,2) = 0$. Derivando nuovamente si ha $\ddot{x}_{yy} yz + \dot{x}_y z + \dot{x}_y z - 2x\dot{x}_y^2 - x^2\ddot{x}_{yy} + 2 = 0$, $\ddot{x}_{yz} yz + \dot{x}_y y + \dot{x}_z z + x - 2x\dot{x}_y\dot{x}_z - x^2\ddot{x}_{yz} = 0$ e $\ddot{x}_{zz} yz + \dot{x}_z y + \dot{x}_z y - 2x\dot{x}_z^2 - x^2\ddot{x}_{zz} = 0$, da cui calcolando per $(y,z) = (1,2)$ si ottiene $2\ddot{x}_{yy} - 4 + 2 = 0$, $2\ddot{x}_{yz} - 1 = 0$ e $2\ddot{x}_{zz} = 0$, ovvero $\ddot{x}_{yy}(1,2) = 1$, $\ddot{x}_{yz}(1,2) = \frac{1}{2}$ e $\ddot{x}_{zz}(1,2) = 0$. Pertanto $x(y,z) = 0 + (-1,0)\cdot(y-1, z-2) + \frac{1}{2}((y-1)^2 + (y-1)(z-2)) + \cdots$, sviluppo che al primo ordine dà $x = -(y-1)$, ovvero nuovamente il piano tangente affine $x + y = 1$.

(b) Imponendo che $\nabla g = 3(yz - x^2,\, xz + 2y,\, xy)$ e $\nabla f = (1,1,0)$ siano paralleli si ha $yz - x^2 = xz + 2y$ e $xy = 0$. Se $x = 0$ si ricava $yz = 2y$, ovvero $y = 0$ (ma nessun punto dell'asse z sta in S) oppure $z = 2$ e $y = \pm 1$, dunque i punti $P(0,1,2)$ (già noto) e $P'(0,-1,2)$. Se invece $y = 0$ si ricava $-x^2 = xz$, ovvero $x = 0$ (ma come detto nessun punto dell'asse z sta in S) oppure $z = -x$; da $g = 3$ si ha allora $-x^3 = 3$, ovvero il punto $Q(-\sqrt[3]{3}, 0, \sqrt[3]{3})$. • Componendo f con la parametrizzazione locale $x(y,z)$ si ha $F(y,z) = x(y,z) + y$, con $\nabla F = (\dot{x}_y + 1, \dot{x}_z)$ (da cui $\nabla F(1,2) = (0,0)$, come atteso) e $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, indefinita: pertanto P è un punto di sella per f su S.

(c) La figura piana $K = \{(x,y,z) : z = 0,\, x^2 \le y \le x + 2\}$ è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta, e contenuta nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su K esistono per Weierstrass. Per il calcolo, riconducendoci nel piano $z = 0$ a $G(x,y) = g(x,y,0) = 3y^2 - x^3$, dividiamo K nella parte interna $K_1\{(x,y,z) : z = 0,\, x^2 < y < x+2\}$ (aperto di $\mathbb{R}^2$), nell'arco aperto di parabola del bordo $K_2 = \{(x,y,z) : z = 0,\, y = x^2,\, -1 < x < 2\}$, nel segmento superiore aperto del bordo $K_3 = \{(x,y,z) : z = 0, y = x + 2,\, -1 < x < 2\}$ e nei due punti $A(-1,1)$ e $B(2,4)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Vale $\nabla G = (-3x^2, 6y)$, pertanto l'unico punto stazionario di G è $(0,0)$ che però non sta in K_1 e dunque non va considerato qui. L'arco K_2 è parametrizzato da (x, x^2) con $-1 < x < 2$, dunque su esso G vale $3x^4 - x^3$; la derivata $12x^3 - 3x^2 = 3x^2(4x-1)$ si annulla per $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$, dando luogo ai punti $O(0,0)$ e $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$. Similmente, il segmento K_3 è parametrizzato da $(x, x+2)$ con $-1 < x < 2$, dunque su esso G vale $3(x+2)^2 - x^3$; la derivata $6(x+2) - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 4)$ si annulla per $x = 1 \mp \sqrt{5}$, entrambi però fuori dall'intervallo d'interesse $-1 < x < 2$. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su K potranno essere assunti solo nei punti O, C, A e B: essendo $G(O) = 0$, $G(C) = -\frac{1}{256}$, $G(A) = 4$ e $G(B) = 40$, il massimo assoluto è 40 (assunto in B) e il minimo $-\frac{1}{256}$ (assunto in C).

III° APPELLO SCRITTO
2024/25
(19 giugno 2025)

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : x \ge 0,\, y \ge 0,\, 2ax \le x^2 + y^2 \le 4a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.[1]

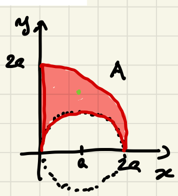
(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, y, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente sferica C di ∂E.

(a) $2a\cancel{\rho}\cos\theta \le \rho^{\cancel{2}} \le 2a \qquad A = \{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \pi/2,\ 2a\cos\theta \le \rho \le 2a\}$



$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (4a^2 - 4a^2\cos^2\theta)\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$

$= 2a^2 \cdot \left[\frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2a^2 \cdot \pi/4 = \frac{\pi a^2}{2}$

$\int_A x\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{2a} \rho\cos\theta \cdot \rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \cos\theta\, \frac{1}{3}(8a^3 - 8a^3\cos^3\theta)$

$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \cos^4\theta)\, d\theta = \cdots = \frac{16 - 3\pi}{6} a^3 \Rightarrow x_G = \frac{16 - 3\pi}{3\pi}$

$\int_A y\, dx\, dy = \cdots = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta - \sin\theta\cos^3\theta)\, d\theta = \cdots = 2a^3 \Rightarrow y_G = \frac{4}{\pi} a$

(b) $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0$ su $A \overset{F+T}{\Rightarrow}$ posso procedere con le verifica tramite int. iterati.

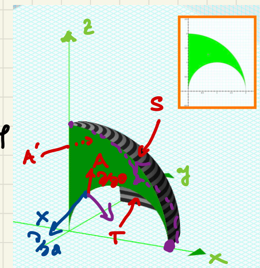
$\int \frac{1}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{2a} \frac{1}{\cancel{\rho}\cos\theta} \cdot \cancel{\rho}\, d\rho = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta \qquad \sim_{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta} \sim \frac{1}{\pi/2 - \theta}$ div. a $+\infty$.

$\int \frac{1}{y}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{2a} \frac{1}{\cancel{\rho}\sin\theta} \cdot \cancel{\rho}\, d\rho = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta = 2a\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\, dt = 2a\log 2$

$\sim_0 \frac{1}{2}\theta \qquad t = \operatorname{tg}\theta/2$

(c) $F=(0,y,0)$ $\quad \nabla\cdot F = 1$ $\quad \int \nabla\cdot F\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(E)$

$$= \frac{\pi}{2}\int_D x\,dx\,dz = \frac{16-3\pi}{6}a^3$$



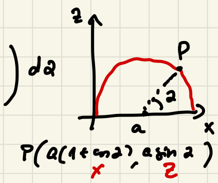
$\Phi_A(F) = \Phi_{A'}(F) = 0$

$$\Phi_S(F) = -\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \det\begin{pmatrix} 0 & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2a\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= 8a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi}{3}a^3$$

T : $\left(a(1+\cos\alpha)\cos\theta,\ a(1+\cos\alpha)\sin\theta,\ a\sin\alpha\right)$

$0\le\alpha\le\pi,\quad 0\le\theta\le\pi/2$



$$\Phi_T(F) = +\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{\pi}\det\begin{pmatrix} 0 & -a\sin\alpha\cos\theta & -a(1+\cos\alpha)\sin\theta \\ a(1+\cos\alpha)\sin\theta & -a\sin\alpha\sin\theta & a(1+\cos\alpha)\cos\theta \\ 0 & a\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} d\alpha$$

$$= a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\cos\alpha(1+\cos\alpha)^2\,d\alpha = -\frac{\pi^2}{4}a^3$$

$$\Phi_{\partial E}(F) = 0+0+\frac{4\pi}{3}a^3-\frac{\pi^2}{4}a^3 = \frac{16-3\pi}{6}a^3$$

(d) $\nabla\times F = (0,0,0)$

...

2. Nel piano cartesiano sia $A=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2ax\le x^2+y^2\le 4a^2\}$ (ove $a>0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.[1]

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F=(0,y,0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente sferica C di ∂E.

2. (a) (Figura 2) La figura piana $A=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2ax\le x^2+y^2\le 4a^2\}$ è descritta in coordinate polari (ρ,θ) come $2a\cos\theta\le\rho\le 2a$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, dunque l'area (calcolabile facilmente anche con la geometria elementare) vale $\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4a^2-4a^2\cos^2\theta)\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta = 2a^2[\frac12(\theta-\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac83 a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\cos^3\theta)\,d\theta = \frac83 a^3[\sin\theta-\frac18(2\sin\theta\cos^3\theta+3(\theta+\sin\theta\cos\theta))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16-3\pi}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac83 a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^3\theta)\,d\theta = \frac83 a^3[-\cos\theta+\frac14\cos^4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^3$, perciò, dividendo per l'area, il baricentro risulta $G(\frac{16-3\pi}{3\pi}a,\ \frac{4}{\pi}a)$.

(b) Le funzioni $\frac1x$ e $\frac1y$ sono >0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo testare l'integrabilità con un integrale iterato, che faremo direttamente in coordinate polari. Si ha $\int_A\frac1x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}\frac{1}{\rho\cos\theta}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$ che diverge a $+\infty$ in quanto $\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\sim_{\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos\theta}\sim_{\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\theta}$. D'altra parte si ha $\int_A\frac1y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}\frac{1}{\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$ che certamente converge in quanto $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sim_{0^+}\frac{\frac12\theta^2}{\theta}=\frac12\theta$; per il calcolo, col cambio di variabile parametrico $t=\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$ (da cui $\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,t$ e $d\theta=\frac{2}{1+t^2}\,dt$) si ottiene $2a\int_0^1\frac{2t}{1+t^2}\,dt = 2a[\log(1+t^2)]_0^1 = 2a\log 2$.

(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F=(0,y,0)$ attraverso ∂E è pari a $\int_E(\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}\,E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{16-3\pi}{6}a^3 = \frac{\pi(16-3\pi)}{12}a^3$. La superficie esterna ∂E è formata da A nel piano (x,z), dalla sua copia A' nel piano (y,z) e dalle componenti sferica C e toroidale T. Ora, per parallelismo o nullità si ha $\Phi_A(F)=\Phi_{A'}(F)=0$. La componente C è descritta in coordinate sferiche come $\gamma(\theta,\varphi)=(2a\cos\theta\sin\varphi, 2a\sin\theta\sin\varphi, 2a\cos\varphi)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante in E) perciò $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\det\begin{pmatrix} 0 & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2a\sin\varphi\end{pmatrix}d\varphi = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi = 8a^3[\frac12(\theta-\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos\varphi+\frac13\cos^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac23 = \frac{4\pi}{3}a^3$. Infine, la componente T è descritta da $\gamma(\theta,\alpha)=(a(1+\cos\alpha)\cos\theta, a(1+\cos\alpha)\sin\theta, a\sin\alpha)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le\alpha\le\pi$ (normale associata uscente dal toro, dunque entrante in E), perciò $\Phi_T(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\det\begin{pmatrix} 0 & -a(1+\cos\alpha)\sin\theta & -a\sin\alpha\cos\theta \\ a(1+\cos\alpha)\sin\theta & a(1+\cos\alpha)\cos\theta & -a\sin\alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & a\cos\alpha\end{pmatrix}d\alpha = -a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\cos\alpha(1+\cos\alpha)^2\,d\alpha = -a^3[\frac12(\theta-\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin\alpha+\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha-\frac13\sin^3\alpha]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{4}a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0+0+\frac{4\pi}{3}a^3-\frac{\pi^2}{4}a^3 = \frac{\pi(16-3\pi)}{12}a^3$, come si voleva.

(d) Il campo F è irrotazionale; d'altra parte, percorrendo il bordo di C in senso antiorario partendo da $(2a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial C}F\cdot dx = 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0,2a\sin\varphi,0)\cdot(9,2a\cos\varphi,-2a\sin\varphi)\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^0(0,2a\sin\theta,0)\cdot(-2a\sin\theta,2a\cos\theta,0)\,d\theta = 4a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta) = 0$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

III° APPELLO SCRITTO
2024/25
(19 giugno 2025)

3. È dato il sistema autonomo $(\dot{x}, \dot{y}) = (4xy,\, x^2)$ nella funzioni incognite $(x(t), y(t))$.

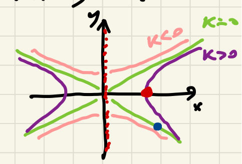
(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato? Determinarne equilibri e orbite, disegnando il tutto sul piano cartesiano.

(b) Risolvere il problema con i dati iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, oppure $(1, 0)$, oppure $(2, -1)$.

(c) Risolvere il sistema lineare omogeneo $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y,\, x)$ con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (2, -1)$, illustrando eventuali relazioni con quanto fatto nei punti precedenti.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \overset{g(x,y)}{4xy} = x \cdot 4y \\ \dot{y} = x^2 = x \cdot x \end{cases}$ g campo $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow \exists!$ locale per ogni dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$

$\exists$ globale non si può dire (crescita quadratica)



Tutti i punti dell'asse y $(x=0)$ sono equilibri.
Al di fuori il sistema è equivalente a $\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ che ha integrale primo $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - 4y^2)$.
$F = K$ $\quad x^2 - 4y^2 = K$

(b) $(x_0, y_0) = (0,1) \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \equiv (0,1)$
$(x_0, y_0) = (1,0)$ $\quad F(1,0) = 1/2 \rightsquigarrow x^2 = 1 + 4y^2 \rightsquigarrow \dot{y} = 1 + 4y^2$

$\frac{dy}{1+4y^2} = dt$ $\quad \frac{1}{2}\,\text{arctg}(2y) = t + \underset{y(0)=0}{\cancel{k}}$ $\quad \text{arctg}(2y) = 2t$ $\quad \left(|t| < \frac{\pi}{4}\right)$

$y(t) = \frac{1}{2}\,\text{tg}(2t)$ $\quad x(t) = \sqrt{1 + 4y(t)^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2(2t)} = \frac{1}{\cos(2t)}$

$(x_0, y_0) = (2, -1)$ $\quad x^2 - 4y^2 = 0$ $\quad x = -2y$ $\quad \dot{y} = 4y^2$ $\quad y^{-2}\,dy = 4\,dt$

$-1/y = 4t + \underset{y(0)=-1}{k} = 1$ $\quad y(t) = -\frac{1}{1+4t}$ $\quad x(t) = \frac{2}{1+4t}$ $\quad$ per $t > -1/4$

(c) $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y, x)$ $\quad \dot{y} = x = -2y \Rightarrow y(t) = -e^{-2t}$ $\quad x(t) = 2e^{-2t}$

3. (a) (Figura 3) Il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x,y) = (4xy,\, x^2)$ è autonomo del 1o ordine; essendo f di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, per ogni dato iniziale la soluzione del corrispondente problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, il teorema di Cauchy-Lipschitz globale non può essere applicato, perché la crescita di f è quadratica. Gli equilibri sono tutti e soli i punti dell'asse y; al di fuori di essa il sistema è equivalente al sistema lineare $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y,\, x)$, la cui equazione totale associata $x\,dx - 4y\,dy = 0$ ha primitiva $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - 4y^2)$. Le curve di livello di F, ovvero $x^2 - 4y^2 = k$, sono iperboli con asintoti $y = \pm\frac{1}{2}x$ (Figura 3): in particolare per $k = 0$ si ha $(x + 2y)(x - 2y) = 0$ ovvero l'unione dei due asintoti. L'asse y taglia solo i rami delle iperboli di livello con $k \leq 0$ dividendoli in 3 orbite distinte (le semicurve e l'equilibrio), mentre per $k > 0$ ogni ramo di iperbole è un'orbita intera.

(b) Il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è un equilibrio, dunque la soluzione è la costante $(x(t), y(t)) \equiv (0, 1)$. • Nel dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ si ha l'integrale primo $x^2 - 4y^2 = 1$ da cui $x^2 = 1 + 4y^2$, dunque $\dot{y} = 1 + 4y^2$: separando le variabili si ha $\frac{1}{1+4y^2}\,dy = dt$, da cui integrando $\frac{1}{2}\text{arctg}\,2y = t + k$. Da $y(0) = 0$ si ricava $k = 0$, dunque $\frac{1}{2}\text{arctg}\,2y = t$, da cui si ottiene $y(t) = \frac{1}{2}\text{tg}\,2t$; da $x^2 = 1 + 4y^2 = 1 + \text{tg}^2 2t$ si ricava
poi $x(t) = \sqrt{1 + \text{tg}^2 2t} = \frac{1}{\cos 2t}$ (dominio $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, orbita l'intero ramo di iperbole $x^2 - 4y^2 = 1$ con $x > 0$). • Nel dato iniziale $(x(0), y(0)) = (2, -1)$ si ha l'integrale primo $x^2 - 4y^2 = 0$ da cui $x^2 = 4y^2$, dunque $\dot{y} = 4y^2$: separando le variabili si ha $y^{-2}\,dy = 4\,dt$, da cui integrando $-\frac{1}{y} = 4t + k$. Da $y(0) = -1$ si ricava $k = 1$, dunque $-\frac{1}{y} = 1 + 4t$, da cui si ottiene $y(t) = -\frac{1}{1+4t}$; da $x^2 = 4y^2$ si ricava poi $x(t) = -2y(t) = \frac{2}{1+4t}$ (dominio $t > -\frac{1}{4}$, orbita la semiretta $y = -\frac{1}{2}x$ con $x > 0$).

(c) Il sistema lineare omogeneo $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y, x)$ con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (2, -1)$ si risolve facilmente coi metodi noti dando $(x(t), y(t)) = (2e^{-2t}, -e^{-2t})$. • Poiché, come spiegato prima, con questo dato iniziale questo sistema lineare è equivalente al sistema studiato in precedenza, entrambe le soluzioni $(x(t), y(t))$ trovate nei punti (b) e (c) percorreranno monotonicamente la stessa orbita (in questo caso la semiretta $y = -\frac{1}{2}x$ con $x > 0$).