Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 12/12/2025

1. È data la funzione $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ con $g(x,y,z)=(x+y+z,\ 2yz+xz+y^2-3x^2)$.

(a) Mostrare che la curva di livello Γ di g passante per il punto $P(-1,1,0)$ è regolare all'intorno di P e determinarne ivi una parametrizzazione locale e la retta tangente affine. In generale, quali curve di livello di g sono regolari?

(b) Trovare i punti stazionari di $f(x,y,z)=4x-z$ su Γ, e la loro natura.

(c) Provare che la curva Γ è un compatto di $\mathbb{R}^3$, determinando gli estremi assoluti di f su essa.

(a) $J_g = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ z-6x & 2(y+z) & 2y+x\end{pmatrix}$ g non è sommersiva $\iff z-6x = 2(y+z) = 2y+x$ ovvero $x=2z$, $2y=-13z$

dunque $P_a(-4a, 13a, -2a)$ $(a\in\mathbb{R})$ $g(P_a) = (7a, 43a^2)$

$P(-1,1,0)$ $g(P)=(0,-2)$ $\Gamma \begin{cases} x+y+z=0\\ 2yz+xz+y^2-3x^2=-2\end{cases}$ è curva regolare

$J_g(P) = \left(\begin{matrix}1\\ 6\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{matrix}}\right)$ $\rightsquigarrow$ retta tg. affine $J_g(P)\begin{pmatrix}x+1\\ y-1\\ z-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

det $\neq 0$ Dini

$\begin{cases}x+y+z=0\\ 6x+2y+z=-4\end{cases}$

$y(x)$, $z(x)$ con $y(-1)=1$, $z(-1)=0$.

$\begin{pmatrix}y'(-1)\\ z'(-1)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\ 4\end{pmatrix}$

$\begin{cases} y = 1-5(x+1)+\dots\\ z = 0+4(x+1)+\dots\end{cases}$

$\begin{cases}5x+y+5=0\\ 4x-z+4=0\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+z=0\\ 2yz+xz+y^2-3x^2=-2\end{cases}$

$\xrightarrow{d/dx} \begin{cases}1+y'+z'=0\\ 2y'z+2yz'+z+xz'+2yy'-6x=0\end{cases}$

$x=-1$, $y(-1)=1$, $z(-1)=0$ $\begin{cases}1+y'+z'=0\\ 2z'-z'+2y'+6=0\end{cases}$ $\begin{cases}y'(-1)=-5\\ z'(-1)=4\end{cases}$

$\xrightarrow{d/dx} \begin{cases}1+y'+z'=0\\ 2y'z+2yz'+z+xz'+2yy'-6x=0\end{cases}$ $\xrightarrow{d/dx} \begin{cases}y''+z''=0\\ 2y''z+2y'z'+2y'z'+2yz''+z'+z'+xz''+2(y')^2+2yy''-6=0\end{cases}$

$\overset{x=-1}{\rightsquigarrow}$ $y''(-1)=28$, $z''(-1)=-28$

param. locale $\gamma(x)=(x, y(x), z(x))$ all'intorno di P $(x\sim -1)$

(b) Lagrange $\det\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ z-6x & 2(y+z) & 2y+x\end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow 2x+2y+9z=0$

$\begin{cases}2x+2y+9z=0\\ x+y+z=0\\ 2yz+xz+y^2-3x^2=-2\end{cases} \rightsquigarrow P(-1,1,0)$, $Q(1,-1,0)$

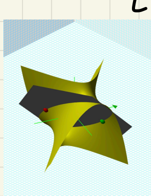
$F(x)=f(\gamma(x))=4x-z(x)$ $F'(x)=4-z'(x)$ $F'(-1)=4-z'(-1)=0$ OK

$F''(x)=-z''(x)$ $F''(-1)=28>0$ pt di minimo loc stretto.

(c) $\Gamma \begin{cases}x+y+z=0\\ 2yz+xz+y^2-3x^2=-2\end{cases}$ $z=-x-y \rightsquigarrow 4x^2+3xy+y^2=-2$ ELLISSE

$\Rightarrow x, y$ limitati $\Rightarrow z=-x-y$ lim. (Γ lim. e chiuso) $\Rightarrow \Gamma$ compatto

$f(P)$ max, $f(Q)$: min.



1. È data la funzione $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ con $g(x,y,z)=(x+y+z,\ 2yz+xz+y^2-3x^2)$.

(a) Mostrare che la curva di livello Γ di g passante per il punto $P(-1,1,0)$ è regolare all'intorno di P e determinarne ivi una parametrizzazione locale e la retta tangente affine. In generale, quali curve di livello di g sono regolari?

(b) Trovare i punti stazionari di $f(x,y,z)=4x-z$ su Γ, e la loro natura.

(c) Provare che la curva Γ è un compatto di $\mathbb{R}^3$, determinando gli estremi assoluti di f su essa.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y,z) = (x+y+z,\, 2yz + xz + y^2 - 3x^2)$ ha matrice jacobiana $\mathrm{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z-6x & 2(y+z) & 2y+x \end{pmatrix}$; g non è sommersiva nei punti in cui lo jacobiano ha rango < 2, e questo accade quando $2(y+z) = 2z+x = z-6x$, ovvero quando $x = 2z$ e $2y = -13z$, ovvero in tutti e soli i punti del tipo $P_\alpha = (-4\alpha, 13\alpha, -2\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ (retta per l'origine): dunque la curva di livello $g(P_\alpha) = (7\alpha, 43\alpha^2)$ è singolare nel suo solo punto P_α, regolare in tutti gli altri. Il nostro punto $P(-1,1,0)$ non è tra quelli del tipo P_α, dunque la sua curva di livello $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = (0,-2)\}$ è regolare: lo jacobiano in P è $\mathrm{J}_g(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, e la retta tangente affine è data da $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero dal sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 6x+2y+z+4=0 \end{cases}$. Per la parametrizzazione locale, per il Dini all'intorno di A si può esplicitare $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} y(-1) \\ z(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \dot y(-1) \\ \dot z(-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si può anche derivare il sistema di Γ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2yz+xz+y^2-3x^2 \end{cases}$ rispetto a x, ottenendo $\begin{cases} 1+\dot y+\dot z=0 \\ 2\dot y z + 2y\dot z + z + x\dot z + 2y\dot y - 6x = 0 \end{cases}$ che per $x=-1$ dà $\begin{cases} 1+\dot y(-1)+\dot z(-1)=0 \\ 2\dot z(-1) - \dot z(-1) + 2\dot y(-1) + 6 = 0 \end{cases}$ ovvero di nuovo $\begin{cases} \dot y(-1) = -5 \\ \dot z(-1) = 4 \end{cases}$. Per uso futuro, derivando ancora si ha $\begin{cases} \ddot y + \ddot z = 0 \\ 2\ddot y z + 2\dot y\dot z + 2\dot y\dot z + 2y\ddot z + \dot z + \dot z + x\ddot z + 2(\dot y)^2 + 2y\ddot y - 6 = 0 \end{cases}$ che per $x=-1$ dà $\begin{cases} \ddot y(-1) = 28 \\ \ddot z(-1) = -28 \end{cases}$.

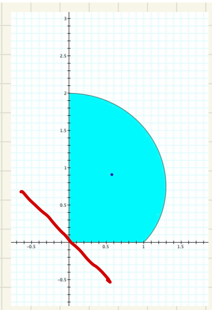
(b) La condizione di Lagrange si traduce nel fatto che la matrice 3×3 le cui prime due righe sono quelle di $\mathrm{J}_g(x,y,z)$ e la terza il gradiente $\nabla f = (4,0,-1)$ abbia determinante nullo, e a conti fatti questo dà l'equazione $2x+2y+9z=0$ che, messa in sistema con le due che definiscono Γ dà come soluzioni i due punti opposti $P(-1,1,0)$ e $Q(1,-1,0)$. Per vedere il carattere di P basta comporre f con la parametrizzazione di Γ attorno P, ottenendo $F(x) := f(x,y(x),z(x)) = 4x - z(x)$: si ha $F'(x) = 4 - z'(x)$ e dunque $F'(-1) = 4 - z'(-1) = 4 - 4 = 0$ come previsto, ed essendo $F''(z) = -z''(x)$ si ha $F''(-1) = -z''(-1) = 28 > 0$, il che ci dice che P è punto di minimo locale stretto per f su Γ, con $f(P) = -4$. Considerazioni simili mostrano che Q è punto di massimo locale stretto per f su Γ, con $f(Q) = 4$.

(c) Sostituendo $z = -x-y$ in $2yz + xz + y^2 - 3x^2 = -2$ si ottiene $4x^2 + 3xy + y^2 = -2$: dunque la proiezione di Γ sul piano orizzontale (x,y) è un'ellisse (si noti che $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$) centrata nell'origine (mancano i termini di primo grado) ma ruotata rispetto agli assi coordinati: questo mostra che x e y sono limitati, e tale sarà di conseguenza anche $z = -x-y$. Dunque la curva Γ, chiusa perché insieme di livello di una funzione continua, è anche compatta, e per Weierstrass la funzione continua f dovrà assumere su Γ degli estremi assoluti che pe quanto visto in (b) saranno necessariamente i valori -4 e 4 assunti rispettivamente nei punti P e Q.

2. Nel I quadrante del piano sia A la parte racchiusa dalla curva $\rho(\theta) = a(1+\sin\theta)$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire quali tra le funzioni $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{\sqrt{y}}$ e $\frac{1}{x+y}$ sono integrabili su A, calcolando se possibile l'integrale.



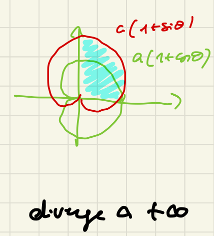
(a) Area A: $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2(1+\sin\theta)^2\,d\theta = \dots = \left(\frac{3\pi}{8}+1\right)a^2$

$\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1+\sin\theta)} \rho\cos\theta \cdot \rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} a^3(1+\sin\theta)^3\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{a^3}{12}(1+\sin\theta)^4\Big|_0^{\pi/2} = 5/4\,a^3 \Rightarrow x_G = \frac{10}{3\pi+8}a$

$\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1+\sin\theta)} \rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} a^3(1+\sin\theta)^3\sin\theta\,d\theta$

$\dots = \left(\frac{5\pi}{16}+1\right)a^3 \Rightarrow y_G = \frac{5\pi+16}{2(3\pi+8)}a$



(b) le funzioni sono >0 su A $\overset{F+T}{\Rightarrow}$ procedere con integrale iterato

$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1+\sin\theta)} \frac{\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho}\cos\theta}\cdot\rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta}\,d\theta$ $\underset{\pi/2}{\sim} \frac{1}{\pi/2-\theta}$ diverge a $+\infty$

$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1+\sin\theta)} \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho\sin\theta}}\cdot\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\left[\frac{\rho^{5/2}}{5/2}\right]_0^{a(1+\sin\theta)} = \frac{2}{5}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)^{5/2}}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta$ $\underset{0^+}{\sim} \theta^{-1/2}$ integrabile

$= \frac{2}{5}\int_0^1 (1+t)^{5/2}t^{-1/2}\,dt$

$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(1+\sin\theta)} \frac{1}{\cancel{\rho}(\sin\theta+\cos\theta)}\cancel{\rho}\,d\rho = a\int_0^{\pi/2}\frac{1+\sin\theta}{\underbrace{\sin\theta+\cos\theta}_{\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)}}\,d\theta$ $\quad \psi = \theta + \pi/4$

2. (a) (Figura 1) La figura piana A racchiusa nel 1o quadrante dalla curva polare $\rho(\theta) = a(1+\sin\theta)$ ha area data da $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+\sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}a^2[\theta-2\cos\theta+\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}a^2(\frac{3\pi}{2}-(-2)) = (\frac{3\pi}{8}+1)a^2$. Vale poi[1] $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a(1+\sin\theta)}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(1+\sin\theta)^3\,d\theta = [\frac{1}{12}a^3(1+\sin\theta)^4]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a(1+\sin\theta)}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,(1+\sin\theta)^3\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+3\sin^2\theta+3\sin^3\theta+\sin^4\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}a^3[-\cos\theta+\frac{3}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)-3\cos\theta+\cos^3\theta+\frac{1}{4}(\frac{3}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)-\cos\theta\sin^3\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{5\pi}{16}+1)a^3$, da cui $x_G = \frac{10}{3\pi+8}a \sim 0{,}6\,a$ e $y_G = \frac{5\pi+16}{2(3\pi+8)}a \sim 0{,}9\,a$.

(b) L'insieme A è compatto, ma le funzioni $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{\sqrt{y}}$ e $\frac{1}{x+y}$ non sono limitate su A; tuttavia, essendo positive su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. Poniamo $a = 1$ per semplicità di conto. • L'integrale $\int_A \frac{y}{x}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato (già in variabili polari) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\sin\theta}\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta}d\theta$; ma, essendo $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta} \sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\theta}$, la funzione non è integrabile su A. • Analogamente, l'integrale $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\sin\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho\sin\theta}}\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}[\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^{1+\sin\theta}\,d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}(1+\sin\theta)^{\frac{5}{2}}\,d\theta =$ [posto $t=\sin\theta$] $\frac{2}{5}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{5}{2}}\,dt$ da cui, essendo $t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{5}{2}}\,dt \sim_{0^+} t^{-\frac{1}{2}}$, si nota che la funzione è integrabile su A. Volendo si potrebbe terminare il conto col metodo degli *integrali binomi*, ponendo $\frac{1+t}{t} = u^2$ e ottenendo così una funzione integranda razionale in u (calcolo omesso). • L'integrale $\int_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\sin\theta}\frac{1}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$, che dopo la semplificazione per ρ è l'integrale di una funzione continua su $[0,\frac{\pi}{2}]$ e dunque converge. Per terminare il calcolo converrà porre $\psi = \theta+\frac{\pi}{4}$, ottenendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\sin(\psi-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin\psi}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\psi-\cos\psi)}{\sqrt{2}\sin\psi}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+\sin\psi-\cos\psi}{\sin\psi}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi}-\operatorname{cotg}\psi+1)\,d\theta = \frac{1}{2}[\sqrt{2}\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}+\log\sin\psi+\psi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$ (ricordando che $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ e dunque $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$).

---

[1] Ricordiamo che $\int\sin^3\theta\,d\theta = \int\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta = -\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta+k$ e che $\int\sin^4\theta\,d\theta = \int\sin\theta\cdot\sin^3\theta\,d\theta = -\cos\theta\sin^3\theta-\int(-\cos\theta)\cdot 3(\cos\theta)\sin^2\theta\,d\theta = -\cos\theta\sin^3\theta+3\int(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta\,d\theta = -\cos\theta\sin^3\theta+\frac{3}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)-3\int\sin^4\theta\,d\theta$, da cui $\int\sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)-\cos\theta\sin^3\theta)$.

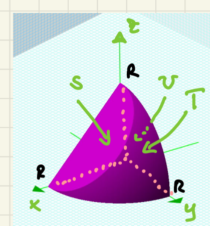
3. Si consideri l'insieme $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2\,;\ x,y,z\ge 0\,;\ x+z\le R\}$, ove $R>0$.

(a) Dato $0\le\alpha\le R$ calcolare volume e area esterna della "fetta di sfera" $D_\alpha = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge\alpha\}$, e usare i risultati per calcolare il volume di E e l'area della porzione sferica T della superficie esterna ∂E.

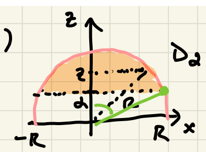
(b) Determinare il baricentro della porzione U di ∂E sul piano $x=0$, direttamente e con Green.

(c) Parametrizzare e calcolare l'area della porzione piana e obliqua S di ∂E, e verificare la formula di Stokes per essa e il campo $F=(z,0,-x)$.

(d) Esprimere una parametrizzazione di T, e usarla per ricalcolarne l'area.



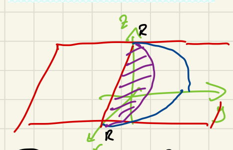
(a)



Per $\alpha\le z\le R$ la z-fetta $(D_\alpha)_z$ è un disco di raggio $\sqrt{R^2-z^2}$

$\mathrm{Vol}(D_\alpha) = \int_\alpha^R \mathrm{Area}((D_\alpha)_z)\,dz = \int_\alpha^R (R^2-z^2)\pi\,dz$

$= \pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_\alpha^R = \pi\left(\frac{2R^3}{3}-R^2\alpha+\frac{\alpha^3}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(R-\alpha)(2R^2-\alpha R-\alpha^2)$



$d\sigma = R^2\sin\varphi \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\varphi\le\arccos\alpha/R$

$\mathrm{Area}(A) = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\arccos\alpha/R}R^2\sin\varphi\,d\varphi = 2\pi\cdot R^2(-\cos\varphi)_0^{\arccos\alpha/R} = 2\pi R^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)$

(b) U è un quarto di disco ...

(c) S è metà di un cerchio di raggio $R/\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ Area $S = \frac{1}{2}\left(R/\sqrt{2}\right)^2\pi = \frac{R^2}{4}\pi$

Proiezione orizzontale: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+z=R \end{cases} \Rightarrow 2x^2-2Rx+y^2=0 \quad 2(x-\frac{1}{2}R)^2+y^2=\frac{1}{2}R^2$

$\frac{(x-\frac{1}{2}R)^2}{(\frac{1}{2}R)^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}}R)^2}=1$ Area $\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}R = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}R^2 \Rightarrow$ Area $S = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{4\sqrt{2}}R^2 = \frac{\pi}{4}R^2$

$F = (z, 0, -x) \qquad \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 0 & -x \end{vmatrix} = (0,-2,0)$

$\Phi_S(\nabla \times F) = 0$ (parallelismo)

Bordo di S:

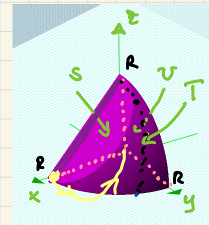
tratto circolare $\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\cos\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}R\sin\psi, R - \left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\cos\psi\right)\right)$ con $0 \le \psi \le \pi$

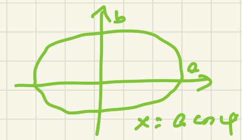
tratto segmento $(x, 0, R-x)$ con $0 < x < R$. ...

(d) $\gamma(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$

$0 \le \theta \le \pi/2$, $\varphi_{min}(\theta) \le \varphi \le \pi/2$

$x + z = R$





$x = a\cos\psi$

$y = b\sin\psi$

$a = \frac{1}{2}R$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}R$

3. Si consideri l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2 ;\, x,y,z \ge 0 ;\, x+z \le R\}$, ove $R > 0$.

(a) Dato $0 \le \alpha \le R$ calcolare volume e area esterna della "fetta di sfera" $D_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge \alpha\}$, e usare i risultati per calcolare il volume di E e l'area della porzione sferica T della superficie esterna ∂E.

(b) Determinare il baricentro della porzione U di ∂E sul piano $x = 0$, direttamente e con Green.

(c) Parametrizzare e calcolare l'area della porzione piana e obliqua S di ∂E, e verificare la formula di Stokes per essa e il campo $F = (z, 0, -x)$.

(d) Esprimere una parametrizzazione di T, e usarla per ricalcolarne l'area.

3. (a) (Figura 3) Iniziamo con la fetta di sfera $D_\alpha = \{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge \alpha\}$. Per $0 \le z \le \alpha$ la z-fetta è il disco di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$, dunque il volume di D_α è $\int_\alpha^R (R^2 - z^2)\pi\, dz = \pi(R^2 z - \frac{1}{3}z^3]_\alpha^R = \frac{1}{3}\pi(R-\alpha)(2R^2 - \alpha R - \alpha^2)$; per l'area, la superficie esterna sferica di D_α si può parametrizzare tramite $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \varphi \le \arccos\frac{\alpha}{R}$, dunque l'area risulta $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{\alpha}{R}} R^2 \sin\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2(-\cos\varphi]_0^{\arccos\frac{\alpha}{R}} = 2\pi R^2(1 - \frac{\alpha}{R})$. • L'insieme $E = \{(x, y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x, y, z \ge 0,\ x + z \le R\}$ può essere visto come un ottavo di sfera cui è stata asportata la metà di una fetta D_α con $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ (l'angolo di semiapertura è $\arccos\frac{\alpha}{R} = \frac{\pi}{4}$, da cui $\frac{\alpha}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Pertanto, ricordando che volume e area esterna della sfera intera sono $\frac{4}{3}\pi R^3$ e $4\pi R^2$, il volume di E e l'area della porzione sferica T della superficie esterna ∂E si calcolano rispettivamente dalle differenze $\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\pi(R - \frac{\sqrt{2}}{2}R)(2R^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2) = \frac{1}{6}\pi R^3(1 - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{5\sqrt{2}-4}{24}\pi R^3$ e $\frac{1}{8}4\pi R^2 - \frac{1}{2}2\pi R^2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi R^2$.

(b) La porzione U di ∂E sul piano $x = 0$ è un quarto di disco, di area $\frac{1}{4}\pi R^2$. Per il baricentro G di U, che per ragioni di simmetria avrà $x_G = 0$ e $y_G = z_G$, va calcolato l'integrale $\int_U y\, dy\, dz$: il calcolo diretto, con le coordinate polari $(y, z) = (\rho\cos\eta, \rho\sin\eta)$, dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\eta \int_0^R \rho\cos\eta\, \rho\, d\rho = (\sin\eta]_0^{\frac{\pi}{2}}\, (\frac{1}{3}\rho^3]_0^R = \frac{1}{3}R^3$; il calcolo con la formula di Green (che dice che $\oint_{\partial U}(f, g)\cdot(y, z) = \int_U(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z})\, dy\, dz$, e qui sceglieremo $(f, g) = (0, \frac{1}{2}y^2)$) dà $\int_U y\, dy\, dz = \oint_{\partial U}(0, \frac{1}{2}y^2)\cdot(y, z) = 0 + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}R^2\cos^2\eta\, R\cos\eta\, d\eta = \frac{1}{2}R^3(\sin\eta - \frac{1}{3}\sin^3\eta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}R^3$, come già trovato. Si ha dunque $y_G = \frac{1}{\text{Area}\, U}\int_U y\, dy\, dz = \frac{4}{3\pi}R$, perciò il baricentro è il punto $G(0, \frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R)$.

(c) L'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ col piano $x + z = R$ dà un disco di raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}R$, del quale S è la metà: pertanto l'area di S risulta $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}R)^2\pi = \frac{1}{4}\pi R^2$. Queste sono semplici considerazioni geometriche, ma ovviamente si arriva allo stesso risultato anche per via analitica, determinando la proiezione ellittica del detto disco sul piano orizzontale (che ci sarà utile tra breve come parametrizzazione per la verifica della formula di Stokes). In effetti, dal sistema tra le due equazioni ricaviamo $2x^2 - 2Rx + y^2 = 0$ che, opportunamente manipolata, diventa $2(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 = \frac{1}{2}R^2$, ovvero $\frac{(x-\frac{1}{2}R)^2}{(\frac{1}{2}R)^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}}R)^2} = 1$, un'ellisse del piano (x, y) con centro in $(\frac{1}{2}R, 0)$ e semiassi $a = \frac{1}{2}R$ e $b = \frac{1}{\sqrt{2}}R$, dunque di area $\pi ab = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi R^2$: pertanto, per la legge del coseno, l'area di S risulta $\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$. • Il rotore di $F = (z, 0, -x)$ è $\nabla \times F = (0, -2, 0)$, parallelo a S e dunque con flusso nullo. D'altra parte, il bordo di S ha il tratto curvilineo che si parametrizza con l'ellisse di base e ricordando che $z = R - x$, ovvero $(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\cos\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}R\sin\psi, \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R\cos\psi)$ con $0 \le \psi \le \pi$, e il tratto rettilineo (sempre ricordando $z = R - x$) tramite $(x, 0, R - x)$ con $0 \le x \le R$: pertanto $\oint F \cdot dx = \int_0^\pi (\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R\cos\psi, 0, -(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\cos\psi))\cdot(-\frac{1}{2}R\sin\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}R\cos\psi, \frac{1}{2}R\sin\psi))\, d\psi + \int_0^R (R - x, 0, -x)\cdot(1, 0, -1)\, dx = \frac{1}{4}R^2\int_0^\pi(-2\sin\psi)\, d\psi + \int_0^R R\, dx = \frac{1}{4}R^2(2\cos\psi]_0^\pi + R^2 = \frac{1}{4}R^2(-2-2]_0^\pi + R^2 = 0$. Ciò verifica la formula di Stokes.

(d) Per T usiamo ancora la parametrizzazione sferica $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ in cui stavolta s'intende $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$: ma bisogna anche inserire l'informazione che deve essere $x + z \le R$, ovvero $R\cos\theta\sin\varphi + R\cos\varphi \le R$, ovvero $\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \le 1$ che, posto $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, dà $t(t - \cos\theta) \ge 0$, risolta per $t > \cos\theta$. Detto φ_0 l'angolo in $[0, \frac{\pi}{2}]$ in cui $t = \cos\theta$, la disequazione $t > \cos\theta$ è risolta per $\varphi_0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; notiamo che $\cos\varphi_0 = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}$ e $\sin\varphi_0 = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$. Ricapitolando, T è parametrizzata da $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $\varphi_0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, e l'area di T ne risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\varphi\, d\varphi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\varphi]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\, d\theta$ che, posto $\tau = \operatorname{tg}\theta$ (da cui $\theta = \operatorname{arctg}\tau$ e $d\theta = \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau$) e ricordato che $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$ e $\sin\theta = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$, diventa $R^2\int_0^{+\infty}\frac{\tau^2}{(\tau^2+1)(\tau^2+2)}\, d\tau = R^2\int_0^{+\infty}(\frac{2}{\tau^2+2} - \frac{1}{\tau^2+1})\, d\tau = R^2(\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tau) - \operatorname{arctg}\tau]_0^{+\infty} = R^2((\sqrt{2}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) - 0) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi R^2$, già calcolata prima.

4. È data l'equazione differenziale $u''=4(u-16u^{-3})$ nella funzione incognita scalare $u(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Vi sono simmetrie o invarianze temporali nell'integrale generale?

(b) Determinare un integrale primo per l'equazione, e la soluzione tale che $u(0)=4$ e $u'(0)=-6$.

$g(u,p)$

(a) E.d.o. autonoma del II ordine $u''=h(u)$ $\quad \begin{cases} u'=p \\ p'=4(u-16u^{-3}) \end{cases}$

g campo C^∞ $\Rightarrow$ $\exists!$ locale per ogni dato $u(0)=u_0\neq 0$, $u'(0)=p_0$

Unicità globale.

Esistenza globale: non si può applicare ($u\neq 0$)

Costanti: $K-16/K^3=0$ $\quad K^4=16$ $\quad K=\pm 2$. $\quad u\equiv 2$, $u\equiv -2$.

Se $u(t)$ è soluzione su I $\Rightarrow$ $-u(t)$ lo è su I, $u(-t)$ lo è su $-I$

(b) Integrale dell'energia $E(u,u')=\frac{1}{2}(u')^2+V(u)$ $\quad V(u)=-\int h(u)\,du$

$V(u)=-2(u^2+16/u^2)$ $\quad E(u(0),u'(0))=E(4,-6)=-16$

$\Rightarrow (u')^2=4(u^2-8+16/u^2)=(2(u-4/u))^2$

$\Rightarrow u'=\cancel{\pm}2(u-4/u)$ $\quad u'=-2\cdot\frac{u^2-4}{u}$ $\quad \frac{2u}{u^2-4}\,du=-4\,dt$

$\log(u^2-4)=-4t+h$ $\quad u(0)=4$ $\quad \log(12)=h$

$u^2-4=12e^{-4t}$ $\quad u^2=4(1+3e^{-4t})$ $\quad u(t)=2\sqrt{1+3e^{-4t}}$

dominio $\mathbb{R}$

4. (a) L'equazione differenziale scalare $u''=4(u-16u^{-3})$ è autonoma non lineare, e le soluzioni $u(t)$ non potranno mai annullarsi. Essa è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y,p)=(u,u')$ dato da $\begin{cases} y'=p \\ p'=4(y-16y^{-3}) \end{cases}$. La funzione $f(y,p)=(p,4(y-16y^{-3}))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi meno l'asse y, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0,u_0,u_0') con $y_0\neq 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y,p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante $y\equiv\alpha$ deve soddisfare $0=4(\alpha-16\alpha^{-3})$, ovvero $\alpha^4=16$, dunque le soluzioni costanti sono $u\equiv\mp 2$. Poiché l'equazione è autonoma c'è invarianza delle soluzioni per traslazioni temporali; inoltre, se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I è immediato verificare che $-\varphi(t)$ (definita su I) e $\varphi(-t)$ (definita su $-I$) lo sono pure: dunque l'integrale generale è una famiglia invariante per traslazioni temporali, simmetrica rispetto al segno e pari.

(b) Come sappiamo, le equazioni scalari del 2o ordine della forma $u''=h(u)$ ammettono l'integrale dell'energia $\frac{1}{2}|u'|^2+V(u)$, ove $V(u)=-\int h(u)\,du$ è l'energia potenziale: nel nostro caso $V(u)=-\int 4(u-16u^{-3})\,du=-2(u^2+16u^{-2})$. Le traiettorie delle soluzioni giaceranno perciò su una delle curve di livello $\frac{1}{2}|u'|^2-2(u^2+16u^{-2})=k$, e nel nostro caso in cui $u(0)=4$ e $u'(0)=-6$ ricaviamo $\frac{1}{2}\cdot 36-2(16+1)=k$, ovvero $k=-16$. Abbiamo così $|u'|^2=4(u^2-8+16u^{-2})=(2(u-4u^{-1}))^2$, da cui (visti i dati iniziali) ricaviamo $u'=-2(u-4u^{-1})=-2\frac{u^2-4}{u}$.