Università degli Studi di Padova

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di giovedì 08/01/2026

IV° APPELLO SCRITTO 2024/25 (3 luglio 2025)

1. Nello spazio cartesiano sia $(g,h):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ data da $(g(x,y,z),h(x,y,z))=(2xy+z,\ yz-z^2)$.

(a) Provare che l'insieme di livello Γ di (g,h) passante per $P(0,1,-1)$ è una curva regolare attorno a P, parametrizzarla in P fino all'ordine quadratico e calcolarne in due modi la retta tangente affine in P. Determinare poi in generale quali insiemi di livello di (g,h) sono curve regolari.

(b) Trovare i punti stazionari su Γ per la funzione $f(x,y,z)=y-3z$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.

(c) Disegnare l'insieme $B=\{(x,y,z): z=1,\ x^2-1\le y\le 1\}$ e calcolare gli estremi assoluti di g su B, spiegando perché esistono.

(a) $J_{(g,h)} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 0 & z & y-2z \end{pmatrix}$ $\quad J_{(g,h)}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

$\Gamma : \{(x,y,z) : (g,h)(x,y,z) = (g(P), h(P)) = (-1,-2)\}$ regolare attorno a P.

Esplicitiamo $(y(x), z(x))$: $\begin{cases} 2xy+z=-1 \\ yz-z^2=-2 \end{cases} \xrightarrow{d_x} \begin{cases} 2y+2xy'+z'=0 \\ y'z+yz'-2zz'=0 \end{cases}$ $\quad x=0\ (y=1, z=-1) \Rightarrow y'(0)=-6,\ z'(0)=-2$

$\xrightarrow{d_x} \begin{cases} 2y'+2y'+2xy''+z''=0 \\ y''z+y'z'+y'z'+yz''-2(z')^2-2zz''=0 \end{cases}$ $\quad x=0 \Rightarrow y''(0)=88,\ z''(0)=24$

$(y(x), z(x)) = (1-6x+44x^2+o_0(x^2),\ -1-2x+12x^2+o(x^2))$

RETTA TG. A Γ in P $\begin{cases} y=1-6x \\ z=-1-2x \end{cases}$

Altrimenti : $J_{(g,h)}(P)\cdot\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=-1 \\ -y-3z=4 \end{cases}$

$\text{rk}\, J_{(g,h)} < 2 \iff \begin{cases} yz=0 \\ y(y-2z)=0 \\ 2x(y-2z)-z=0 \end{cases}$ $\quad yz=0 \begin{cases} y=0 \quad (4x+1)z=0 \begin{cases} (-1/4, 0, \alpha) \\ (\beta,0,0) \end{cases} \\ z=0 \quad \begin{cases} y^2=0 \\ xy=0 \end{cases} \quad (\beta,0,0) \end{cases}$

$(g,h)(-1/4, 0, \alpha) = (\alpha, -\alpha^2)$; $(g,h)(\beta,0,0)=(0,0)$

(b) Lagrange $\det\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2y & 2x & 1 \\ 0 & z & y-2z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} y(y+z)=0 \\ 2xy+z=-1 \\ yz-z^2=-2 \end{cases}$ $\to y=0 \Rightarrow \cancel{\begin{cases} z=-1 \\ z^2=2 \end{cases}}$; $\to z=-y$ $\quad \begin{cases} -2xz+z=-1 \\ -2z^2=-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z^2=1 \\ z(1-2x)=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z=1 \Rightarrow x=1 \\ z=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$

$P(0,1,-1)$, $Q(1,-1,1)$

$\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ att. a P,

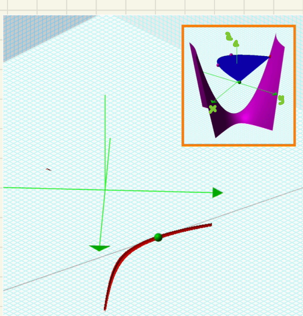
$F(x) = f(x, y(x), z(x)) = y(x) - 3z(x)$

$F'(x) = y'(x) - 3z'(x) \quad F'(0) = y'(0) - 3z'(0) = -6-3(-2) = 0$

$F''(x) = y''(x) - 3z''(x) \quad F''(0) = y''(0) - 3z''(0) = 88 - 3\cdot 24 = 16 > 0$

$\Rightarrow$ P punto di minimo rel. ristretto per f su Γ.

(c)



Si può porre $z=1 \rightsquigarrow G(x,y) = 2xy+1$

Dettagli nelle risoluzioni.

1. Nello spazio cartesiano sia $(g,h):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ data da $(g(x,y,z),h(x,y,z))=(2xy+z,\ yz-z^2)$.

(a) Provare che l'insieme di livello Γ di (g,h) passante per $P(0,1,-1)$ è una curva regolare attorno a P, parametrizzarla in P fino all'ordine quadratico e calcolarne in due modi la retta tangente affine in P. Determinare poi in generale quali insiemi di livello di (g,h) sono curve regolari.

(b) Trovare i punti stazionari su Γ per la funzione $f(x,y,z)=y-3z$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.

(c) Disegnare l'insieme $B=\{(x,y,z): z=1,\ x^2-1\le y\le 1\}$ e calcolare gli estremi assoluti di g su B, spiegando perché esistono.

1. (a) (Figura 1) La funzione $(g,h):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ data da $(g(x,y,z),h(x,y,z))=(2xy+z,\,yz-z^2)$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^3$, con matrice jacobiana $\mathsf{J}_{(g,h)}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\nabla g\\ \nabla h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y & 2x & 1\\ 0 & z & y-2z\end{pmatrix}$. Poiché nel punto $P(0,1,-1)$ la matrice $\mathsf{J}_{(g,h)}(P)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ ha rango 2, la curva di livello $\Gamma=\{(x,y,z):(g(x,y,z),h(x,y,z))=(g(P),h(P))=(-1,-2)\}$ è regolare attorno a P. Inoltre, visto che tutti i minori di $\mathsf{J}_{(g,h)}(P)$ sono nonsingolari, da $(g(x,y,z),h(x,y,z))=(-1,-2)$ si può indifferentemente esplicitare attorno a P qualunque coppia di variabili rispetto alla rimanente: ad esempio esplicitiamo $(y(x),z(x))$ con $(y(0),z(0))=(1,-1)$. Derivando l'identità $(g(x,y(x),z(x)),h(x,y(x),z(x)))\equiv(-1,-2)$ rispetto a x si ha $2y+2xy'+z'=y'z+yz'-2zz'=0$, che calcolata per $x=0$ dà $2+z'(0)=-y'(0)+z'(0)+2z'(0)=0$ da cui si ricava $(y'(0),z'(0))=(-6,-2)$; derivando ancora si ha $2y'+2y'+2xy''+z''=y''z+y'z'+y'z'+yz''-2(z')^2-2zz''=0$, che calcolata per $x=0$ dà $-12-12+z''(0)=-y''(0)+12+12+z''(0)-8+2z''(0)=0$, da cui si ricava $(y''(0),z''(0))=(88,24)$. La parametrizzazione locale di Γ attorno a P cercata è dunque $\gamma(x)=(x,y(x),z(x))=(x,1-6x+44x^2+o_0(x^2),-1-2x+12x^2+o_0(x^2))$, la cui parte al 1o ordine $\begin{cases}y=1-6x\\ z=-1-2x\end{cases}$ dà la retta tangente affine a Γ in P; in alternativa, la retta tangente è data da $\mathsf{J}_{(g,h)}(P)\cdot(x-0,y-1,z-(-1))=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y-1\\ z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases}2x+z=-1\\ y-3z=4\end{cases}$ (sistema equivalente al precedente). • La matrice jacobiana $\mathsf{J}_{(g,h)}(x,y,z)$ ha rango 1 quando $yz=y(y-2z)=2x(y-2z)-z=0$; quando $y=0$ si ha $(4x+1)z=0$, ovvero i punti del tipo $(-\frac{1}{4},0,\alpha)$ e $(\beta,0,0)$, mentre quando $z=0$ si ricava $y^2=2xy=0$, ovvero nuovamente i punti del tipo $(\beta,0,0)$ (l'asse x): poiché $(g,h)(-\frac{1}{4},0,\alpha)=(\alpha,-\alpha^2)$ e $(g,h)(\beta,0,0)=(0,0)$, le curve di livello di (g,h) sono tutte regolari tranne eventualmente quelle del tipo $(g,h)=(\alpha,-\alpha^2)$ nel punto $(-\frac{1}{4},0,\alpha)$, e in particolare quella di livello $(0,0)$ anche nei punti dell'asse x.

(b) La condizione di Lagrange per la funzione $f(x,y,z)=y-3z$ sulla curva Γ richiede $\det\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 2y & 2x & 1\\ 0 & z & y-2z\end{pmatrix}=0$ più le condizioni di appartenenza a Γ, ovvero il sistema $\begin{cases}y(y+z)=0\\ 2xy+z=-1\\ yz-z^2=-2\end{cases}$. Se $y=0$ si ricava $z=-1$ e $z^2=2$, impossibile; se invece $z=-y$ si ricava $2xy-y=-1$ e $y^2=1$, ovvero i punti stazionari $P(0,1,-1)$ (già noto), $Q(1,-1,1)$ e $R(1,-1,1)$. • Componendo f con la parametrizzazione locale $(y(x),z(x))$ si ha $F(x)=y(x)-3\,z(x)$. Si ha dunque $F'(x)=y'(x)-3\,z'(x)$ e $F''(x)=y''(x)-3\,z''(x)$, da cui per P si ricava $F'(0)=y'(0)-3\,z'(0)=-6+6=0$ (come previsto) e $F''(0)=y''(0)-3\,z''(0)=88-72=16>0$: pertanto P è un punto di minimo locale stretto per f su Γ.

(c) (Figura 1) L'insieme $B=\{(x,y,z):z=1,\,x^2-1\le y\le 1\}$ è un settore parabolico nel piano orizzontale $z=1$, chiuso (comprende il bordo) e limitato, dunque compatto, contenuto nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su B esistono per Weierstrass. Per il calcolo, riconducendoci nel piano $z=1$ a $G(x,y)=g(x,y,1)=2xy+1$, dividiamo C nella parte interna $C_1=\{(x,y,1):x^2-1<y<1\}$ (aperto di $\mathbb{R}^2$), nell'arco aperto di parabola del bordo $C_2=\{(x,y,1):y=x^2-1,\,-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$, nel segmento aperto del bordo $C_3=\{(x,y,1):y=1,\,-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$ e nei due punti $A'(\sqrt{2},1,1)$ e $A''(-\sqrt{2},1,1)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Vale $\nabla G=(2y,2x)$, pertanto l'unico punto stazionario di G in C_1 è $D(0,0,1)$. L'arco C_2 è parametrizzato da $(x,x^2-1,1)$ con $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, dunque su esso G vale $2x(x^2-1)+1$; la derivata $6x^2-2$ si annulla per $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, dando luogo ai punti $M'(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},1)$ e $M''(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},1)$. Analogamente, il segmento C_3 è parametrizzato da $(x,1,1)$ con $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, dunque su esso G vale $2x+1$, priva di punti stazionari. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su B potranno essere assunti solo nei punti D, M', M'', A' e A'': essendo $g(D)=1$, $g(M')=1-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sim 0{,}2$, $g(M'')=1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\sim 1{,}8$, $g(A')=2\sqrt{2}+1\sim 3{,}8$ e $g(A'')=-2\sqrt{2}+1\sim -1{,}8$, il massimo assoluto è $2\sqrt{2}+1$ (assunto in A') e il minimo $-2\sqrt{2}+1$ (assunto in A'').

IV° APPELLO SCRITTO 2024/25 (3 luglio 2025)

2. Nel piano cartesiano sia $A=A_1\cup A_2$ con $A_1=\{(x,y):0\le x\le a,\,0\le y\le a-x\}$ e $A_2=\{(x,y):x\le 0,\,y\ge 0,\,x^2+y^2\le a^2\}$ (ove $a>0$).

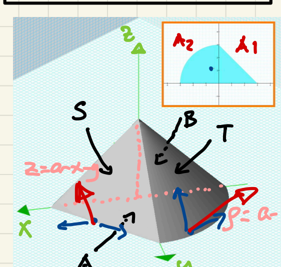
(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Calcolare (se converge) $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$; più in generale, dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge $\int_A xy^\alpha\,dx\,dy$.

Si disegni ora nello spazio cartesiano il cono C avente come base A nel piano orizzontale (x,y) e come vertice il punto $(0,0,a)$ sull'asse z.

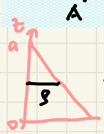
(c) Verificare il teorema di Gauss per C e per il campo $F=(x+y,0,0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente piana obliqua S di ∂C.



(a) $\int_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_{A_1}+\int_{A_2}$ $\qquad G\left(-\frac{2}{3(\pi+2)}a,\ \frac{2}{\pi+2}a\right)$

(b) Decomponiamo il problema su A1 e A2 dove xy^α ha segno costante, dunque (F+T) posso ragionare con integrali iterati:



Su A_1: $\int_0^a dx\int_0^{a-x} xy^\alpha\,dy$ $\quad \alpha>-1 \quad = \int_0^a dx\cdot x\left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{a-x}=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^a x\cdot(a-x)^{\alpha+1}\,dx$

Su A_2: $\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta\int_0^a(\rho\cos\theta)\cdot(\rho\sin\theta)^\alpha\cdot\rho\,d\rho=\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\cdot\sin^\alpha\theta\,d\theta\int_0^a\rho^{\alpha+2}\,d\rho$ $\quad \alpha>-1 \quad \alpha+2>-1,\ \alpha>-3$

Dunque $\int_A xy^\alpha\,dx\,dy$ converge $\iff \alpha>-1$

$\alpha=-\frac{1}{2}$: $\int_{A_1}\frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy=2\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx$ $=$ $a-x=u^2$, $dx=-2u\,du$ $\quad -2\int_{\sqrt{a}}^{0}(a-u^2)u\cdot 2u\,du=\dots=\frac{8}{15}a^2\sqrt{a}$

$\int_{A_2}\frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta\int_0^a\rho^{3/2}\,d\rho=\dots=-\frac{4}{5}a^2\sqrt{a}\Rightarrow\int_A=-\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}<0$

2. (a) (Figura 2) La figura piana A è l'unione del triangolo $A_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a-x\}$ nel 1o quadrante e del quarto di disco $A_2 = \{(x,y) : x \le 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le a^2\}$ nel 2o quadrante, di aree rispettivamente $\frac{1}{2}a^2$ e $\frac{\pi}{4}a^2$. Si ha $\int_A x\,dx\,dy = \int_{A_1} x\,dx\,dy + \int_{A_2} x\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} x\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^a x(a-x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = [\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^a + [\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\frac{1}{3}\rho^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = -\frac{1}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_{A_1} y\,dx\,dy + \int_{A_2} y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} y\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = [-\frac{1}{3}(a-x)^3]_0^a + [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\frac{1}{3}\rho^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$. Dividendo per l'area di A che vale $\frac{\pi+2}{4}a^2$ il baricentro risulta dunque il punto $(-\frac{2}{3(\pi+2)}a,\ \frac{2}{\pi+2}a)$.

(b) La funzione xy^α è integrabile su A se e solo se lo è separatamente sui due sottoinsiemi A_1 e A_2 (e l'integrale sarà la somma algebrica dei due integrali sui sottoinsiemi); inoltre essa ha segno costante su A_1 (positiva) e A_2 (negativa), dunque per Fubini e Tonelli possiamo esaminare integrali iterati separatamente per A_1 e A_2. Per A_1 si ha $\int_0^a dx \int_0^{a-x} xy^\alpha\,dy$ che per l'integrabilità in $x \sim 0^+$ richiede $\alpha > -1$, mentre per A_2 si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho\cos\theta\rho^\alpha\sin^\alpha\theta\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\sin^\alpha\theta\,d\theta \int_0^a \rho^{\alpha+2}\,d\rho$ che per l'integrabilità in $\theta \sim \pi^-$ richiede $\alpha > -1$ mentre per l'integrabilità in $\rho \sim 0^+$ richiede $\alpha+2 > -1$ (ovvero $\alpha > -3$). Pertanto $\int_A xy^\alpha\,dx\,dy$ converge se e solo se $\alpha > -1$. • Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha in particolare $\int_{A_1} \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int_0^a x[2\sqrt{y}]_0^{a-x}\,dx = 2\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx =$ [posto $a-x=u^2$] $4\int_0^{\sqrt{a}} u^2(a^2-u^2)\,du = 4[\frac{1}{3}a^3u^3 - \frac{1}{5}u^5]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8}{15}a^2\sqrt{a}$ e $\int_{A_2} \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho\sin\theta}}\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \int_0^a \rho^{\frac{3}{2}}\,d\rho = [2\sqrt{\sin\theta}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^a = -\frac{4}{5}a^2\sqrt{a}$, dunque $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy = \frac{8}{15}a^2\sqrt{a} - \frac{4}{5}a^2\sqrt{a} = -\frac{4}{15}a^2\sqrt{a} < 0$.

(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (x+y,0,0)$ attraverso ∂C è pari a $\int_C (\nabla \cdot F)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}\,C = \frac{1}{3}a\,\mathrm{Area}\,A = \frac{\pi+2}{12}a^3$. La superficie esterna ∂C è formata da A nel piano (x,y), dalla parete piana verticale B nel piano (x,z), dalla componente conica T e dalla componente piana obliqua S. Ora, per parallelismo si ha $\Phi_A(F) = \Phi_B(F) = 0$. La componente conica T è descritta in coordinate polari da $\rho = a-z$, dunque una parametrizzazione è $\gamma(\theta,z) = ((a-z)\cos\theta,(a-z)\sin\theta,z)$ con $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ e $0 \le z \le a$ (normale associata uscente), perciò $\Phi_T(F) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} (a-z)(\cos\theta+\sin\theta)) & -(a-z)\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & (a-z)\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta \int_0^a (a-z)^2\,dz = [\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{2}\sin^2\theta)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-\frac{1}{3}(a-z)^3]_0^a = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})a^3$. Infine, la componente S è parametrizzata da $\gamma(x,y) = (x,y,a-x-y)$ con (x,y) nel triangolo A_1 (normale associata uscente), perciò $\Phi_S(F) = \int_{A_1} \det\begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_{A_1} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x+y)\,dy = \int_0^a [xy + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=a-x}\,dx = \int_0^a (x(a-x) + \frac{1}{2}(a-x)^2)\,dx = [\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}(a-x)^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0 + 0 + \frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{\pi+2}{12}a^3$, come si voleva.

(d) Si ha $\nabla \times F = (0,0,-1)$, dunque $\Phi_S(\nabla \times F) = \int_{A_1} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx\,dy = -\mathrm{Area}\,A_1 = -\frac{1}{2}a^2$. D'altra parte, percorrendo il bordo di S in senso antiorario partendo da $(a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial S} F \cdot dx = \int_a^0 (a,0,0)\cdot(1,-1,0)\,dx + \int_a^0 (y,0,0)\cdot(0,1,-1)\,dy + \int_0^a (x,0,0)\cdot(1,0,-1)\,dx = -a^2 + 0 + \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}a^2$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

$\boxed{\text{IV° APPELLO SCRITTO 2024/25 (3 luglio 2025)}}$

3. Si abbia il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 2(2y + 3\alpha\sqrt{y} + 1) + (\alpha-1)e^{-2t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -4 \end{cases}$ in $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?
(b) Risolvere il problema di Cauchy quando $\alpha = 1$.
(c) Risolvere il problema di Cauchy quando $\alpha = 0$.

(a) $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2(2y+3\alpha\sqrt{y}+1) + (\alpha-1)e^{-2t} \end{cases}$ $f(y,p)$

f è C^1 all'intorno di $(y(0), y'(0)) = (1,-4)$ $\Rightarrow$ $\exists!$ locale della soluzione del pb. di Cauchy dato.

C'è anche unicità globale finché $y(t)$ non si annulla (per la presenza di $\sqrt{y}$).

(b) $\alpha = 1$: $y'' = 2(2y+3\sqrt{y}+1) = h(y)$ $\qquad V(y) = -\int h(y)\,dy = -2(y^2+2y\sqrt{y}+y) = -2y(\sqrt{y}+1)^2$

$E(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 + V(y)$ si conserva

$E(1,-4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 - 2y(\sqrt{y}+1)^2 = 0 \qquad (y')^2 = 4y(\sqrt{y}+1)^2$

$\Rightarrow y' = \cancel{\pm} -2\sqrt{y}(\sqrt{y}+1) \qquad \frac{dy}{2\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)} = -\cancel{2}\,dt \qquad \log(\sqrt{y}+1) = -t+K$

$t=0 \quad \log 2 = K \qquad \sqrt{y}+1 = 2e^{-t} \qquad \sqrt{y} = 2e^{-t}-1$

$\begin{cases} y(t) = (2e^{-t}-1)^2 \\ 2e^{-t}-1 > 0 \end{cases}$ $\qquad 2e^{-t} > 1 \qquad \log 2 - t > 0 \qquad t < \log 2$

(c) $y'' = 2(2y+1) - e^{-2t} \qquad y'' - 4y = 2 - e^{-2t} \qquad \ldots$

3. (a) L'equazione $y'' = 2(2y+3\alpha\sqrt{y}+1)+(\alpha-1)e^{-2t}$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$) equivale al sistema del 1o ordine $(y', p') = f(y, p, t) = (p, 2(2y+3\alpha\sqrt{y}+1)+(\alpha-1)e^{-2t})$. All'intorno del dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -4)$ la funzione $f(y, p)$ è di classe C^1, dunque esistenza e unicità locale della soluzione (e unicità globale) sono assicurate fintanto che y non si annulla. Nel caso particolare $\alpha = 0$ l'equazione diventa lineare, dunque si ha anche esistenza globale.

(b) (Figura 3) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' = 2(2y+3\sqrt{y}+1)$, della forma $y'' = h(y)$ che ammette l'integrale dell'energia $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 + V(y)$ con $V(y) = -\int h(y)\,dy = -2\int(2y+3\sqrt{y}+1)\,dy = -2(y^2+2y\sqrt{y}+y) = -2y(\sqrt{y}+1)^2$. Nel dato iniziale si ha $E(1, -4) = 0$, dunque lungo la soluzione cercata si ha $\frac{1}{2}(y')^2 = 2y(\sqrt{y}+1)^2$ da cui (essendo $y'(0) < 0$) si ricava $y' = -2\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)$. Separando le variabili e integrando si ha $\log(\sqrt{y}+1) = k - t$, e da $y(0) = 1$ deve essere $k = \log 2$; esponenziando si ha allora $\sqrt{y}+1 = 2e^{-t}$, dunque $\sqrt{y} = 2e^{-t} - 1$, il che pone la condizione $2e^{-t} > 1$ ovvero $t < \log 2$; infine elevando al quadrato si arriva alla soluzione cercata $y(t) = (2e^{-t} - 1)^2$ definita per $t < \log 2$.

(c) (Figura 3) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = 2(2y+1) - e^{-2t}$ ovvero $y'' - 4y = 2 - e^{-2t}$, lineare a coefficienti costanti. Una base di soluzioni dell'equazione omogenea è $\{e^{2t}, e^{-2t}\}$; per il termine non omogeneo 2 una soluzione particolare sarà ovviamente la costante $-\frac{1}{2}$, mentre per $-e^{-2t}$ una soluzione particolare avrà la forma $\tilde{y}(t) = a\,t\,e^{-t}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, e imponendolo i calcoli danno $a = \frac{1}{4}$. La soluzione generale è dunque della forma $y(t) = A\,e^{2t} + (B + \frac{1}{4}t)\,e^{-2t} - \frac{1}{2}$ con $A, B \in \mathbb{C}$; col dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -4)$ si trova $(A, B) = (-\frac{5}{16}, \frac{29}{16})$.