

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

ANALISI MATEMATICA III

Lauree in Fisica e Astronomia – A.A. 2025/26

Corrado Marastoni

Lezione di venerdì 09/01/2026

V° APPELLO SCRITTO
2024/25
(20 agosto 2025)

1. Nel piano cartesiano si considerino le funzioni $f(x, y) = x - y$ e $g(x, y) = ye^{x+2y} + 2x$.

- (a) Quali insiemi di livello di g sono curve regolari? Detta Γ quella per $P(2, -1)$, parametrizzare Γ fino all'ordine quadratico attorno P e calcolarne in due modi la retta tangente affine in P .
 (b) Mostrare che P è un punto stazionario per f su Γ , determinandone la natura.
 (c) Disegnato l'insieme $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, x^2 + 2y^2 \leq 6\}$, dire se esistono gli estremi assoluti di f su D e, se sì, calcolarli.

(a) $\nabla g = (ye^{x+2y} + 2, (1+2y)e^{x+2y}) = (0, 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{x-1} + 2 = 0$

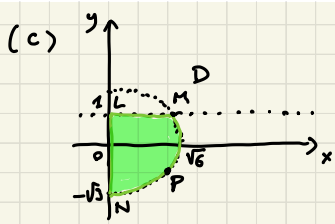
$e^{x-1} = 4 \quad x-1 = 2\ln 2 \quad x = 2\ln 2 + 1 \quad A(2\ln 2 + 1, -\frac{1}{2})$

$g(A) = 4 \ln 2 \Rightarrow$ tutte le curve di livello di g non regolari tranne al più quella di livello $4 \ln 2$ nel punto A .

$P(2, -1) \quad g(P) = 3 \quad \Gamma = \{(x, y) : g(x, y) = 3\}$

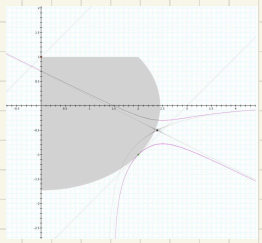
$\nabla g(P) = (1, -1) \rightarrow y(x)$
 $g(x, y(x)) \equiv 3 \xrightarrow{\frac{dx}{dx}} y'e^{x+2y} + y \cdot (1+2y')e^{x+2y} + 2 = 0 \xrightarrow{y=-\frac{1}{2}} y'(2) = 1$
 derivando ancora otteniamo $y''(2) = -3 \rightarrow y = -1 + 1(x-2) - \frac{3}{2}(x-2)^2 + \dots$
 $y = -1 + 1(x-2) \quad y = x-3 \quad (\text{anche } \nabla g(P) \cdot (x-2, y+1) = 0)$

(b) Lagrange $\begin{cases} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ ye^{x+2y} + 2 & (1+2y)e^{x+2y} \end{pmatrix} = 0 \\ ye^{x+2y} + 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+2y)e^{x+2y} + 2 = 0 \\ ye^{x+2y} + 2x = 3 \end{cases}$
 $P(2, -1)$ soddisfa il sistema. $F(x) = f(x, y(x)) = x - y(x) \quad F'(x) = 1 - y'(x) \quad F'(2) = 0, F''(2) = 3 > 0 \Rightarrow P$ è un punto stazionario.



$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} \leq 1$ D è compatto
 Decomponiamo D nelle parti interne
 $D^I = \{(x, y) : x > 0, y < 1, x^2 + 2y^2 < 6\}$
 $D^{II} = \{(0, y) : -\sqrt{3} < y < 1\}, D^{III} = \{(x, 1) : 0 < x < 2\}$
 $D^{IV} = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 6, x > 0, y < 1\}, D^V = \{L, M, N\}$

$D^I: f(x, y) = x - y \quad \nabla f = (1, -1)$ non è nulla mai.
 $D^{II}: F(y) = f(0, y) = -y \quad F'(y) = -1 \neq 0$ nessun punto stazionario
 $D^{III}: F(x) = f(x, 1) = x - 1 \quad F'(x) = 1 \neq 0$ " "
 $D^{IV}: \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 4y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+2y^2=6 \end{cases} \Rightarrow P(2, -1)$
 Gli estremi assoluti di f su D possono essere trovati solo in $P(2, -1), L(0, 1), M(2, 1), N(0, -\sqrt{3})$
 $f: 3 \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{3} \approx 1.7$
 $\max x = 3$ (in P)
 $\min = -1$ (in L)



1. Nel piano cartesiano si considerino le funzioni $f(x, y) = x - y$ e $g(x, y) = ye^{x+2y} + 2x$.
 (a) Quali insiemi di livello di g sono curve regolari? Detta Γ quella per $P(2, -1)$, parametrizzare Γ fino all'ordine quadratico attorno P e calcolarne in due modi la retta tangente affine in P .
 (b) Mostrare che P è un punto stazionario per f su Γ , determinandone la natura.
 (c) Disegnato l'insieme $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, x^2 + 2y^2 \leq 6\}$, dire se esistono gli estremi assoluti di f su D e, se sì, calcolarli.

$$\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{y} dy = \int_0^a (\log \sqrt{a^2-x^2} - \log(x(1-\frac{x}{a}))) dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2} \log(a-x) + \frac{1}{2} \log(a+x) - \log x - \log(1-\frac{x}{a}) \right) dx = (1 + \log 2) a$$

(c) $\nabla \cdot F = 3 \quad \int_E \nabla \cdot F dx dy dz = 3 \text{Vol}(E) = 3 \cdot \text{Area}(A) \cdot a = \frac{3\pi-2}{4} a^3$

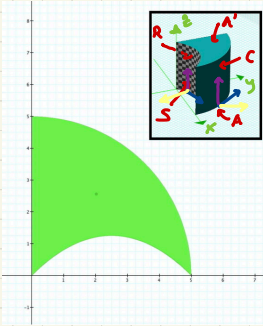
$\phi_A(F) = \phi_R(F) = 0$ per parallelismo.

$\phi_{A'}(F) = \int (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) dx dy = z \cdot \text{Area}(A) = \frac{3\pi-2}{12} a^3$

$S: (x, x(1-\frac{x}{a}), z) : 0 \leq x, z \leq a; \phi_S(F) = \int_0^a dx \int_0^a dz \det \begin{pmatrix} x & 1-\frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\frac{1}{3} a^3$

$C: (a \cos \theta, a \sin \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq a$
 $\phi_C(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dz \det \begin{pmatrix} -a \sin \theta & -a \cos \theta & 0 \\ a \cos \theta & a \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \frac{1}{12} a^3$

(d) $d\sigma = \sqrt{1 + (1 - \frac{2x}{a})^2} dx dz : \dots$ (vedi note).



2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq x \leq a, y \geq x(1 - \frac{x}{a})\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{1}{x} dx dy$ e $\int_A \frac{1}{y} dx dy$ convergono, in tal caso calcolandoli.

Nello spazio cartesiano si disegnano la figura A nel piano orizzontale $z = 0$ e l'analoga figura A' nel soprastante piano orizzontale $z = a$, e sia E il solido di tipo cilindrico con basi A e A'.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo radiale $F = (x, y, z)$.

(d) Calcolare l'area della componente verticale S di ∂E con profili orizzontali parabolici.⁽¹⁾

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq x \leq a, y \geq x(1 - \frac{x}{a})\}$ è la differenza tra un quarto di cerchio e un settore parabolico: essendo $\int_0^a x(1 - \frac{x}{a}) dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3a}]_0^a = \frac{1}{6}a^2$, l'area di A risulta $\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{3\pi-2}{12}a^2$. Ragionando per x-fili si ha poi $\int_A x dx dy = \int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy = \int_0^a (x\sqrt{a^2-x^2} - x^2 + \frac{x^3}{a}) dx = [-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^4}{4a}]_0^a = (-\frac{1}{3} + \frac{1}{4})a^3 - (-\frac{1}{3}a^3) = \frac{1}{4}a^3$ e $\int_A y dx dy = \int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^a ((a^2-x^2) - (x(1-\frac{x}{a}))^2) dx = [\frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + x^4 \frac{2a}{5}]_0^a = a^3 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^3 - \frac{1}{5}a^3 = \frac{19}{60}a^3$: dividendo per l'area, il baricentro risulta $(\frac{3}{3\pi-2}a, \frac{19}{5(3\pi-2)}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo studiarne l'integrabilità su A tramite un integrale iterato. Ragioniamo ancora per x-fili. • Per $\int_A \frac{1}{x} dx dy$ si ha $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{x} dy = \int_0^a (\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - 1 + \frac{x}{a}) dx$: notando che la funzione integranda è $\sim_0 \frac{a}{x} \sim_0^+ \frac{1}{x}$, l'integrale diverge a $+\infty$ in $x \sim 0^+$. • Per $\int_A \frac{1}{y} dx dy$ si ha $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{y} dy = \int_0^a (\log(\sqrt{a^2-x^2}) - \log(x(1-\frac{x}{a}))) dx = \int_0^a (\frac{1}{2} \log(a-x) + \frac{1}{2} \log(a+x) - \log x - \log(1-\frac{x}{a})) dx = [-\frac{1}{2}(a-x)(\log(a-x)-1) + \frac{1}{2}(a+x)(\log(a+x)-1) - x(\log x - 1) + a(1-\frac{x}{a})(\log(1-\frac{x}{a})-1)]_0^a = (a(\log(2a)-1) - a(\log a - 1)) - (-a) = (1 + \log 2)a$. Dunque $\frac{1}{y}$ è integrabile su A con valore $(1 + \log 2)a$.

(c) La superficie esterna ∂E ha 5 componenti: la parte verticale S con profili orizzontali parabolici, la parte cilindrica anteriore C, le due basi A e A' e la parte rettangolare R nel piano (y, z). Per il campo radiale $F = (x, y, z)$ i flussi attraverso A e R sono nulli per parallelismo. Per A' il flusso uscente vale $\int_{A'} (x, y, a) \cdot (0, 0, 1) dx dy = a \cdot \text{Area} A = \frac{3\pi-2}{12}a^3$. Per S, parametrizzata da $(x, x(1-\frac{x}{a}), z)$ con $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq z \leq a$ (normale associata uscente), il flusso uscente vale $\int_0^a dx \int_0^a dz \det \begin{pmatrix} x & 1-\frac{2x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = a \int_0^a (x - \frac{2x^2}{a} - x + \frac{x^2}{a}) dx = -a \int_0^a \frac{x^2}{a} dx = -\frac{1}{3}a^3$. Infine per C, parametrizzata da $(a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq a$ (normale associata uscente) il flusso uscente vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dz \det \begin{pmatrix} -a \sin \theta & -a \cos \theta & 0 \\ a \cos \theta & a \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \frac{\pi}{2}a^3$. Il flusso totale uscente di F da ∂E risulta pertanto $(\frac{3\pi-2}{12} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3})a^3 = 3\frac{3\pi-2}{12}a^3$ (il triplo del volume di E, che è niente altro che area di base per altezza): poiché $\nabla \cdot F = 3$ e dunque $\int_E \nabla \cdot F dx dy dz = 3 \text{Vol} E$, ciò conferma il teorema di Gauss.

(d) La componente S di ∂E , parametrizzata come detto sopra, ha elemento d'area $d\sigma = \sqrt{1 + (1 - \frac{2x}{a})^2} dx dz$ che è l'elemento di lunghezza della base parabolica $\sqrt{1 + (1 - \frac{2x}{a})^2} dx$ per l'elemento di altezza dz (S è un rettangolo deformato, la sua area sarà sempre base per altezza): posto $u = 1 - \frac{2x}{a}$, da cui $x = \frac{1}{2}a(1-u)$ e $dx = -\frac{1}{2}a du$, l'area risulta dunque $\int_A d\sigma = \int_0^a \sqrt{1 + (1 - \frac{2x}{a})^2} dx \int_0^a dz = \frac{1}{2}a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du = a^2 \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = a^2 [\frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2} + \log(u + \sqrt{1+u^2}))]_0^1 = \frac{1}{2}(\log(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2})a^2$.

V° APPELLO SOLTTO
2024/25
(20 agosto 2025)

3. È data l'equazione differenziale $mt y^{m-1} y' = 1 + (t-1)y^m$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $m \in \mathbb{N}$).
- Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni?
 - Posto $m = 2$ determinare le soluzioni con dati iniziali $y(-1) = 1$ oppure $y(1) = 1$.
 - Posto $m = 1$ determinare le soluzioni coi dati iniziali precedenti.
 - Nei casi $m = 2$ e $m = 1$ esistono soluzioni definite anche per $t = 0$?

Ci si poteva accorgere che l'equazione è in realtà $t(y^m)' = 1 + (t-1)y^m$
 Dunque, posto $y^m = u$, diventa $tu' = 1 - (t-1)u$

(a) se $m \geq 1$ diventa lineare: $ty' = 1 - (t-1)y \Rightarrow \exists!$ globale su $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
 se $m \geq 2$, se esistesse una soluzione che si annulla si avrebbe $0 = 1$ impossibile!
 Potrebbe si può dividere per y^{m-1} ; $\exists!$ locale per dati $y(t_0) = y_0$ con $t_0, y_0 \neq 0$.

(b) $m = 2$: $2ty y' = 1 + (t-1)y^2 \rightsquigarrow \omega = p(y, t) dy + q(y, t) dt = 0$
 $-\frac{1}{t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = -\frac{2ty}{2ty} = -1$ non dip. da $y \Rightarrow \int(t) = e^{-t}$
 $\Rightarrow e^{-t} \omega$ esatta: $\begin{cases} \partial_y F = 2ty e^{-t} \\ \partial_t F = ((1-t)y^2 - 1)e^{-t} \end{cases} \quad F = (ty^2 + 1)e^{-t}$
 $F = K \rightsquigarrow ty^2 + 1 = Ke^t \quad y(-1) = 1 \rightsquigarrow K = 2 \Rightarrow ty^2 + 1 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{|t|}}$
 $y(1) = 1 \rightsquigarrow K = 2e \rightsquigarrow y(t) = \sqrt{\frac{2e^{t-1} - 1}{t}} \quad \text{Dom. } t < 0$
 $\text{Dom. } 2e^{t-1} > 1 \Rightarrow e^{t-1} > \frac{1}{2} \Rightarrow t > 1 - \log 2$
 (c), (d): vedi note

3. (a) L'equazione $mt y^{m-1} y' = 1 + (t-1)y^m$ non è in forma normale. • Se $m = 1$ essa diventa $ty' = 1 + (t-1)y$, che essendo lineare avrà soluzioni definite su tutto $]-\infty, 0[$ oppure $]0, +\infty[$; se inoltre esistesse (ma non è detto) qualche soluzione $y(t)$ definita anche per $t = 0$ dovrebbe necessariamente aversi $y(0) = 1$. • Se $m \geq 2$ l'equazione non è lineare. Notiamo che una soluzione non può mai annullarsi, altrimenti si avrebbe $0 = 1$; inoltre un'eventuale soluzione definita per $t = 0$ dovrebbe soddisfare $y(0)^m = 1$, ovvero $y(0) = 1$ (se m dispari) oppure $y(0) = \pm 1$ (se m pari). Invece per dati iniziali $y(t_0) = y_0$ con $t_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, come quelli che sono assegnati nei punti successivi dell'esercizio, si può portare l'equazione in forma normale $y' = f(t, y) = \frac{1+(t-1)y^m}{m t y^{m-1}}$; essendo f di classe C^1 in tutto il quadrante aperto del piano (t, y) che contiene il dato, sono garantite esistenza e unicità locale e l'unicità globale della soluzione.
- (b) Per $m = 2$ l'equazione diventa $2ty y' = 1 + (t-1)y^2$. L'equazione totale associata è $\omega = p(y, t) dy + q(y, t) dt = 0$ con $p(y, t) = 2ty$ e $q(y, t) = (1-t)y^2 - 1$. La forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} = 2y - (1-t)2y = 2ty \neq 0$); tuttavia, poiché $-\frac{1}{t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = -1$ non dipende da y si ha che $\exp(\int(-1) dt) = e^{-t}$ è fattore integrante. Se $F(y, t)$ è primitiva per $e^{-t} \omega$ dovrà aversi $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = (2tye^{-t}, ((1-t)y^2 - 1)e^{-t})$: da $\frac{\partial F}{\partial y} = 2tye^{-t}$ si ricava $F = ty^2 e^{-t} + \varphi(t)$ con φ da determinare, dunque da $\frac{\partial F}{\partial t} = (1-t)y^2 e^{-t} + \varphi'(t) = ((1-t)y^2 - 1)e^{-t}$ si deduce che $\varphi'(t) = -e^{-t}$, ovvero $\varphi(t) = -e^{-t}$. Una forma implicita per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione è data dunque dalle curve di livello $F(y, t) = (ty^2 + 1)e^{-t} = k$, ovvero $ty^2 + 1 = ke^t$. Col dato $y(-1) = 1$ si ottiene $k = 2$, ovvero $ty^2 = -1$, da cui $y^2 = -\frac{1}{t}$ e perciò $y(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$, definita per $t < 0$; invece col dato $y(1) = 1$ si ottiene $k = 2/e$, da cui $ty^2 = 2e^{t-1} - 1$ e dunque $y(t) = \sqrt{\frac{2e^{t-1} - 1}{t}}$, definita per $2e^{t-1} - 1 > 0$ ovvero per $t > 1 - \log 2$.
- (c) Per $m = 1$ come detto l'equazione diventa $ty' = 1 + (t-1)y$, lineare. Scritta per $t \neq 0$ nella forma $y' + p(t)y = q(t)$ con $p(t) = \frac{1-t}{t}$ e $q(t) = \frac{1}{t}$, si ha $P(t) = \int p(t) dt = \log|t| - t$ e $\int e^{P(t)} q(t) dt = \int (|t|e^{-t}) \frac{1}{t} dt = -\sigma e^{-t}$ ove $\sigma = \text{sign } t$, col che la soluzione generale si scrive come $y(t) = e^{-P(t)} (k + \int e^{P(t)} q(t) dt) = \frac{ke^t - 1}{t}$ con $k \in \mathbb{R}$. Col dato $y(-1) = 1$ si ricava $k = 0$, da cui $y = -\frac{1}{t}$ (dominio $]-\infty, 0[$); col dato $y(1) = 1$ si ricava $k = 2/e$, da cui $y = \frac{2e^{t-1} - 1}{t}$ (dominio $]0, +\infty[$).
- (d) Nel caso $m = 2$ si è visto che una forma implicita per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione è della forma $ty^2 + 1 = ke^t$ con $k \in \mathbb{R}$. Ponendo $t = 0$ si ottiene necessariamente $k = 1$, ovvero $ty^2 + 1 = e^t$: per $t \neq 0$ tali soluzioni diventano $y(t) = \pm \sqrt{\frac{e^t - 1}{t}}$, che sono effettivamente prolungabili come funzioni C^1 anche in $t = 0$ col valore del limite ± 1 (si noti che $\sqrt{\frac{e^t - 1}{t}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2) - 1}{t}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)} = 1 + \frac{1}{4}t + o_0(t)$), e come tali sono in effetti le sole soluzioni dell'equazione definite anche per $t = 0$. • Nel caso $m = 1$ si è visto che per $t \geq 0$ le soluzioni si scrivono come $y(t) = \frac{ke^t - 1}{t}$ con $k \in \mathbb{R}$: per $k = 1$ la funzione $y(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ è prolungabile come funzione C^1 anche in $t = 0$ col valore del limite 1 (si noti che $\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2) - 1}{t} = 1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)$) e come tale è la sola soluzione dell'equazione definita anche per $t = 0$. PS. Come potrà suggerire l'evidente somiglianza tra le soluzioni dei casi $m = 2$ e $m = 1$, le considerazioni fatte nel caso $m = 2$ si potevano fare tali e quali per un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$ dando luogo alla primitiva $F(y, t) = (ty^m + 1)e^{-t}$ e dunque alla forma implicita $ty^m + 1 = ke^t$, da cui le soluzioni $y(t) = \sqrt[m]{\frac{ke^t - 1}{t}}$ per il dato $y(-1) = 1$ (dominio $t < 0$) e $y(t) = \sqrt[m]{\frac{2e^{t-1} - 1}{t}}$ per il dato $y(1) = 1$ (dominio $t > 0$ se $m = 1$, oppure $t > 1 - \log 2$ se $m \geq 2$).