

Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi sull'integrazione multipla - 1

Ove possibile, per allenamento calcolare gli integrali in modi diversi (esempio con le polari, le cartesiane...). Le coordinate del baricentro e il momento d'inerzia sono definiti in termini di integrali multipli nelle dispense; ivi è anche ricordato il teorema di Huygens-Steiner.

1. Disegnare e calcolare area e baricentro geometrico delle seguenti figure piane limitate:

- A_1 situata sopra l'asse x e delimitata da questo asse, dalla parabola $y^2 = 4ax$ e dalla retta $x + y = 3a$, con $a > 0$;
- A_2 compresa tra le due spirali di Archimede $\rho = \theta$ e $\rho = 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$, e sopra l'asse x ;
- $A_3 = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 3, ax \leq y \leq bx\}$ con $0 < a < b$. (Suggerimento: visto che la conformazione di A_3 non è comoda per il calcolo in coordinate cartesiane, converrà considerare il cambio di coordinate $(u, v) = (xy, \frac{y}{x})$).

2. Dire se $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ è integrabile su ciascuno dei seguenti insiemi, e se sì calcolarlo:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 1\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y \leq 0\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, -1 \leq xy < x\}. \end{aligned}$$

3. Calcolare, se finito, l'integrale di $\frac{y}{x} \log x$ su (disegnare) $D = \{(x, y) : |y| < x \leq 1\}$, $E = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq \min\{\sqrt{x}, \frac{1}{x}\}\}$, $F = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq xy \leq 2\}$ e su $H = D \cap E$.

4. Posto $T = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, spiegare perché $\int_T z \, dx \, dy \, dz$ esiste finito, e calcolarlo sia per fili paralleli all'asse y , sia per fette perpendicolari all'asse z .

5. Determinare volume, baricentro e momento d'inerzia rispetto alla retta $y = -3, z = 0$ (parallela all'asse x) del corpo omogeneo B , di densità costante δ , delimitato dal paraboloido $y^2 + 2z^2 = 4x$ e dal piano $x = 2$. (Suggerimento: la sezione del paraboloido non è circolare ma... , dunque nel piano della sezione converrà forse considerare un sistema di coordinate polari leggermente adattato all'uopo. Per il momento d'inerzia, ricordare il teorema di Huygens-Steiner.)

6. Dire se è finito, ed eventualmente calcolarlo, l'integrale $\int_E (x + y + z)^2 \, dx \, dy \, dz$ ove:

- E è la parte comune al paraboloido $2az \geq x^2 + y^2$ e alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$, con $a > 0$.
- E è la piramide retta di base quadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ sul piano xy e vertice $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

7. Disegnare $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, 0 \leq y \leq \alpha x, 0 \leq z \leq h\}$ (ove $\alpha > 0$ e $0 < h \leq R$) e calcolarne volume e baricentro sia nel caso omogeneo che in quello di densità di massa che cresce linearmente con z da un valore ρ_0 per $z = 0$ a un valore ρ_1 per $z = h$.

8. Calcolare $\lambda_n(\mathbb{B}^n(R))$, ove $\mathbb{B}^n(R)$ è la palla in \mathbb{R}^n di centro l'origine e raggio $R > 0$, fino a $n = 5$. (Suggerimento: ragionando per fette rispetto x_n ...)

Soluzioni.

1. Le tre aree sono rappresentate nella Figura 1.

- Integrando per fili paralleli all'asse x si ha $\text{Area}(A_1) = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{4a}y^2}^{3a-y} dx = \int_0^{2a} (3a - y - \frac{1}{4a}y^2) dy = \frac{10}{3}a^2$.
Il baricentro ha coordinate $x_G = \frac{1}{10a^2/3} \int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{4a}y^2}^{3a-y} x dx = \frac{3}{10a^2} \frac{1}{2} \int_0^{2a} ((3a - y)^2 - \frac{1}{16a^2}y^4) dy = \frac{31}{25}a$ e
 $y_G = \frac{1}{10a^2/3} \int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{4a}y^2}^{3a-y} y dx = \frac{3}{10a^2} \int_0^{2a} y(3a - y - \frac{1}{4a}y^2) dy = \frac{7}{10}a$.
- In generale l'area di una figura descritta in coordinate polari come $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ per $\theta \in [\alpha, \beta]$ è $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta$: dunque $\text{Area}(A_2) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (4\theta^2 - \theta^2) d\theta = \frac{1}{2} (\theta^2)_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^3$. Il baricentro ha coordinate
 $x_G = \frac{1}{\pi^3/2} \int_{A_2} x dx dy = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{\theta}^{2\theta} (r \cos \theta) r dr = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\frac{1}{3}r^3)_\theta^{2\theta} \cos \theta d\theta = \frac{14}{3\pi^2} \int_0^{\pi} \theta^3 \cos \theta d\theta = -\frac{14(\pi^2-4)}{\pi^3}$
e $y_G = \frac{1}{\pi^3/2} \int_{A_2} y dx dy = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{\theta}^{2\theta} (r \sin \theta) r dr = \frac{14}{3\pi^2} \int_0^{\pi} \theta^3 \sin \theta d\theta = \frac{14(\pi^2-6)}{3\pi^2}$.
- Da $(u, v) = (xy, \frac{y}{x})$ si ha $(x, y) = \phi(u, v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$ con $\det J_{\phi}(u, v) = \frac{1}{2v}$, dunque il cambio proposto è un diffeomorfismo del primo quadrante in sé. Si ha perciò $\text{Area}(A_3) = \int_{A_3} dx dy = \int_1^3 du \int_{\frac{1}{2v}}^b \frac{1}{2v} dv = \log \frac{b}{a}$.
Il baricentro: $x_G = \frac{1}{\log(b/a)} \int_{A_3} x dx dy = \frac{1}{\log(b/a)} \int_1^3 du \int_a^b \sqrt{\frac{u}{v}} \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{\log(b/a)} (2\sqrt{3} - \frac{2}{3})(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}})$, $y_G = \frac{1}{\log(b/a)} \int_{A_3} y dx dy = \frac{1}{\log(b/a)} \int_1^3 du \int_a^b \sqrt{uv} \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{\log(b/a)} (2\sqrt{3} - \frac{2}{3})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

2. La funzione $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ è continua nel piano bucatato. Al fine del calcolo degli integrali l'assenza di $(0, 0)$ dal dominio è irrilevante (un punto è trascurabile); tuttavia, tendendo a $(0, 0)$ la funzione è illimitata (passando in polari si ha infatti $\frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$, che per $r \rightarrow 0^+$ tende a ∞ tranne il caso in cui $\theta = \mp \frac{\pi}{2}$), pertanto bisognerà porre attenzione all'integrabilità sia nel caso in cui il dominio d'integrazione coinvolga in qualche modo $(0, 0)$, sia ovviamente nel caso in cui il dominio sia illimitato. I quattro domini proposti sono rappresentati nella Figura 2.

- Il rettangolo D_1 è un compatto ben lontano da $(0, 0)$, dunque nessun problema. Usando Fubini si ottiene $\int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_1^{\sqrt{3}} (\arctg \frac{y}{x})_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx = (x \arctg \frac{1}{x})_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} x \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} dx = \sqrt{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + (\frac{1}{2} \log(1+x^2))_1^{\sqrt{3}} = (\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2} \log 2$. Provando a integrare nell'altro ordine si ha $\int_0^1 dy \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+y^2} dx = \int_0^1 (\frac{1}{2} \log(x^2+y^2))_{x=1}^{x=\sqrt{3}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (\log(y^2+3) - \log(y^2+1)) dy = \frac{1}{2} ((y \log \frac{y^2+3}{y^2+1})_0^1 - \int_0^1 y (\frac{2y}{y^2+3} - \frac{2y}{y^2+1}) dy = \frac{1}{2} \log 2 - (y - \sqrt{3} \arctg \frac{y}{\sqrt{3}})_0^1 + (y - \arctg y)_0^1$, che ridà $(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2} \log 2$.
- Il semidisco D_2 invece lambisce $(0, 0)$, dunque serve verificare l'integrabilità: vediamo in due modi. • Usando il cambio di variabili polari, ciò è equivalente al verificare che esista l'integrale $\int_{[0,2] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr d\theta$. L'integrando è positivo, dunque per Fubini e Tonelli l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito l'iterato $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^2 dr$, che in effetti vale $(\sin \theta)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r)_0^2 = 4$, ed è ad esso uguale. • Sennò, essendo l'integrando positivo, per Fubini e Tonelli è come calcolare l'iterato $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^2 (\arctg \frac{y}{x})_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \int_0^2 \arctg \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = 2(x \arctg \frac{\sqrt{4-x^2}}{x})_0^2 - 2 \int_0^2 (-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}) dx = 2(0-0) + 2(-\sqrt{4-x^2})_0^2 = 4$.
- Col cuneo D_3 siamo nella stessa situazione di D_2 ; ma con la rilevante novità che stavolta f non ha più segno costante sul dominio d'integrazione. Procediamo comunque, per quanto possibile, come prima. • Col cambio di variabili polari, ciò è equivalente al verificare che esista finito l'integrale $\int_{[0,+\infty] \times [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]} \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr d\theta$. Usando Tonelli, vediamo se è finito l'iterato $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r |\cos \theta|}{r^2} r dr$: ma l'integrazione rispetto r dà $+\infty$ (tranne che nel caso $\theta = \mp \frac{\pi}{2}$), dunque niente da fare. Attenzione: se avessimo fatto l'integrale iterato $\int_0^{+\infty} dr \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{r \cos \theta}{r^2} r d\theta$ avremmo trovato $\int_0^{+\infty} dr (\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta) = \int_0^{+\infty} 0 dr = 0$, ma questo, senza la verifica preliminare con Tonelli (che infatti è andata male), non sarebbe stato affatto il nostro integrale doppio. Tra l'altro si noti che, con l'altro iterato $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr$, l'integrazione rispetto r dà $\pm \infty$ (tranne che nel caso $\theta = \mp \frac{\pi}{2}$). • Alla stessa conclusione si arriva seguendo, come prima, l'integrazione per x -fili (anche qui, applicare prima Tonelli senza scordare il modulo!).
- Nell'insieme illimitato D_4 la funzione è negativa: dunque per Fubini e Tonelli l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito uno degli iterati. Abbiamo allora $\int_{-1}^0 dx \int_1^{-\frac{1}{x}} \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_{-1}^0 (\arctg \frac{y}{x})_{y=1}^{y=-\frac{1}{x}} dx = \int_{-1}^0 (\arctg(-\frac{1}{x^2}) - \arctg \frac{1}{x}) dx = [\text{posto } t = -\frac{1}{x}] - \int_1^{+\infty} (\arctg t^2 - \arctg t) \frac{1}{t^2} dt = [\text{per parti}] \frac{1}{t} (\arctg t^2 -$

$$\begin{aligned} & \arctg t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \left(\frac{2t}{1+t^4} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = (0) - (0) - \int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{1+t^4} - \frac{1}{t(1+t^2)} \right) dt = - \int_1^{+\infty} \left(\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}-1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \right. \\ & \left. \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} \right) dt = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \left(\frac{(2t+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{(2t-\sqrt{2})-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \left(\frac{2t}{t^2+1} - \frac{2}{t} \right) \right) dt = - \frac{1}{2\sqrt{2}} (\log \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \log \frac{t^2+1}{t^2} + \\ & 2(\arctg(t\sqrt{2}+1) + \arctg(t\sqrt{2}-1))]_1^{+\infty} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} (\log \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \log \frac{t^2+1}{t^2} + 2(\pi + \arctg \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}))]_1^{+\infty} = \\ & - \frac{\pi-2 \log(2+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1) \log 2}{2\sqrt{2}} \sim -0,14. \end{aligned}$$

3. La funzione $f(x, y) = \frac{y}{x} \log x$ è continua nel piano privato dell'asse y ; anche qui, come nell'esercizio precedente, al fine del calcolo degli integrali l'assenza dell'asse dal dominio è irrilevante, ma tendendovi la funzione è illimitata, pertanto bisognerà porre attenzione all'integrabilità sia nel caso in cui il dominio d'integrazione coinvolga in qualche modo l'asse y sia ovviamente nel caso in cui il dominio sia illimitato. I quattro domini proposti sono rappresentati nella Figura 3.

- La funzione è dispari rispetto all'asse x , ovvero $f(x, -y) = -f(x, y)$, e D è un triangolo simmetrico rispetto all'asse x che lambisce l'origine. Converrà allora forse partire dallo studio di ciò che accade per il triangolo $H = D \cap E$, che ha vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$: se su di esso f è integrabile, lo sarà anche su D con integrale nullo. Su H la funzione è negativa: per Fubini e Tonelli l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito uno degli iterati, e sarà ad esso uguale: si ha $\int_H f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{x} \log x dy = \int_0^1 \frac{\log x}{x} (\frac{y^2}{2})_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \log x dx = \frac{1}{2} (x^2 \frac{2 \log x - 1}{4})]_0^1 = \frac{1}{2} ((-\frac{1}{4}) - (0)) = -\frac{1}{8}$ e $\int_D f(x, y) dx dy = 0$.
- La funzione cambia segno passando da $0 < x < 1$ a $x > 1$: verificando l'integrabilità con Tonelli si trova $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{x} (-\log x) dy + \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{y}{x} \log x dy = \int_0^1 (-\frac{\log x}{x}) \frac{x}{2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x} \frac{1}{2x^2} dx$, che converge; poi con Fubini si ha $\int_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \frac{\log x}{x} \frac{x}{2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x} \frac{1}{2x^2} dx = (\frac{1}{2} x (\log x - 1))]_0^1 + (-\frac{2 \log x + 1}{8x^2})]_1^{+\infty} = -\frac{3}{8}$.
- Su F la funzione cambia segno; verificando l'integrabilità con Tonelli si trova $\int_0^{+\infty} dx \int_{1/x}^{2/x} y \frac{|\log x|}{x} dy = \int_0^{+\infty} (\frac{|\log x|}{x}) \frac{1}{2} \frac{3}{x^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{|\log x|}{x^3} dx$, che però non converge in 0^+ .

4. L'insieme T è il tetraedro costruito su tre versori della base canonica, che (oltre che ovviamente misurabile) è compatto. Dunque l'integrale su esso di z (continua) esiste finito. L'integrale per fili paralleli all'asse y diventa $\int_{\{(x,z):x,z \geq 0, x+z \leq 1\}} dx dz \int_0^{1-x-z} z dy = \int_{\{(x,z):x,z \geq 0, x+z \leq 1\}} z(y)_0^{1-x-z} dx dz = \int_{\{(x,z):x,z \geq 0, x+z \leq 1\}} z(1-x-z) dx dz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} z(1-x-z) dx = \int_0^1 z((1-z)x - \frac{1}{2}x^2)_0^{1-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 dz = (\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4)]_0^1 = \frac{1}{24}$ (da cui si può anche concludere che il baricentro di T è a quota $z_G = \frac{1}{\text{vol}(T)} \int_T z dx dy dz = \frac{1}{1/6} \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$). Ragionando invece per z -fette, se $z \in [0, 1]$ la sezione di T diventa il triangolo $\{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}$ che ha area $\frac{1}{2}(1-z)^2$, dunque l'integrale diventa $\int_0^1 (\frac{1}{2}(1-z)^2)z dz$, tale e quale a prima.

5. Conviene ragionare per x -fette (vedi Figura 4). Se $x \in [0, 2]$ la x -sezione è l'ellisse $y^2 + 2z^2 = 4x$ nel piano (y, z) , ovvero $\frac{y^2}{(\sqrt{4x})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2x})^2} = 1$; ricordando che l'area di un'ellisse di semiassi a e b è data da πab (usando infatti il sistema di coordinate polari adattate $(x, y) = (ar \cos \alpha, br \sin \alpha)$ con $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, il cui jacobiano ha determinante abr , tale area diventa $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr dr = \pi ab$) il volume di B risulta $\int_0^2 (\pi \sqrt{4x} \sqrt{2x}) dx = 4\pi \sqrt{2}$. Per simmetria materiale il baricentro starà sull'asse x , con $x_G = \frac{1}{4\pi \sqrt{2}} \int_B x dx dy dz = \frac{1}{4\pi \sqrt{2}} \int_0^2 x (\pi \sqrt{4x} \sqrt{2x}) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$. Per quanto riguarda il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse x (baricentrico), usando coordinate polari adattate $(y, z) = (\sqrt{4x} r \cos \alpha, \sqrt{2x} r \sin \alpha)$ con $r \in [0, 1]$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$, il cui jacobiano ha determinante $2\sqrt{2}xr$, si ottiene $\int_B \delta(y^2 + z^2) dx dy dz = \delta \int_0^2 dx \int_{\{y^2+2z^2=4x\}} (y^2 + z^2) dy dz = \delta \int_0^2 dx \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 (4xr^2 \cos^2 \alpha + 2xr^2 \sin^2 \alpha) (2\sqrt{2}xr) dr = 4\delta \sqrt{2} \int_0^2 x^2 dx \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \alpha) d\alpha \int_0^1 r^3 dr = 4\delta \sqrt{2} (\frac{1}{3}x^3)_0^2 (\alpha + \frac{1}{2}(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha))_0^{2\pi} (\frac{1}{4}r^4)_0^1 = 4\delta \sqrt{2} \frac{8}{3} (3\pi) (\frac{1}{4}) = 8\sqrt{2}\pi\delta$: dunque, grazie al teorema di Huygens-Steiner, il momento d'inerzia cercato è $I_x + Md^2$ (ove $M = 4\pi\sqrt{2}\delta$ è la massa totale e $d = 3$ è la distanza tra i due assi), ovvero $44\sqrt{2}\pi\delta$.

6. Gli insiemi proposti sono (ovviamente misurabili e) compatti, e la funzione integranda è continua: dunque gli integrali proposti sono entrambi finiti.

- (Figura 5) Paraboloidi e sfera si tagliano a quota $z = a$ (come si vede ponendo $2az = 3a^2 - z^2$ con $z > 0$); integrando per z -fette si ottiene $\int_0^a dz \int_{\{x^2+y^2 \leq 2az\}} (x+y+z)^2 dx dy + \int_a^{\sqrt{3}} dz \int_{\{x^2+y^2 \leq 3a^2-z^2\}} (x+y+z)^2 dx dy$. Ora, usando le coordinate polari si ricava in generale $\int_{\{x^2+y^2 \leq \beta^2\}} (x+y+\alpha)^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta (r \cos \theta + r \sin \theta + \alpha)^2 r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\beta (r^2 + 2r\alpha(\cos \theta + \sin \theta) + r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2) r dr = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{4}r^4 (1 + \sin 2\theta) + \frac{2}{3}r^3 \alpha (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{2}r^2 \alpha^2)_0^\beta d\theta = \frac{\pi}{2} \beta^2 (2\alpha^2 + \beta^2)$, dunque l'integrale diventa $\int_0^a \frac{\pi}{2} 2az(2z^2 + 2az) dz + \int_a^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} (3a^2 - z^2)(2z^2 + 3a^2 - z^2) dz = \frac{108\sqrt{3}-97}{30} \pi a^5$.
- Anche qui, ragionando per z -fette si ottiene $\int_0^a dz \int_{\frac{z}{2}}^{1-\frac{z}{2}} dy \int_{\frac{z}{2}}^{1-\frac{z}{2}} (x+y+z)^2 dx = \frac{17}{30}$.

7. (Figura 6) Per $z \in [0, h]$ la z -fetta è il settore circolare di apertura $\arctg \alpha$ e raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$, che ha area $\frac{1}{2}(R^2 - z^2) \arctg \alpha$, dunque il volume di L è $\int_0^h \frac{1}{2}(R^2 - z^2) \arctg \alpha dz = \frac{1}{6}h(3R^2 - h^2) \arctg \alpha$. Si ha poi $\int_L z dx dy dz = \int_0^h \frac{1}{2} z(R^2 - z^2) \arctg \alpha dz = \frac{1}{8}(2R^2 - h^2)h^2 \arctg \alpha$, dunque il baricentro geometrico è a quota

$z_G = \frac{1}{\text{Vol}L} \int_L z \, dx \, dy \, dz = \frac{3(2R^2 - h^2)}{4(3R^2 - h^2)} h$; per simmetria materiale il baricentro materiale giacerà poi sul piano verticale-bisettrice di L , dunque basta trovare la sua distanza dall'asse z , data da $r_G = \frac{1}{\text{Vol}L} \int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \frac{6}{h(3R^2 - h^2) \arctg \alpha} \int_0^h dz \int_0^{\arctg \alpha} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r \, r \, dr = [\text{posto } z = R \sin t] \frac{2R^4}{h(3R^2 - h^2)} \int_0^{\arcsin \frac{h}{R}} \cos^4 t \, dt = \dots$ (si omettono ulteriori calcoli).^(*)

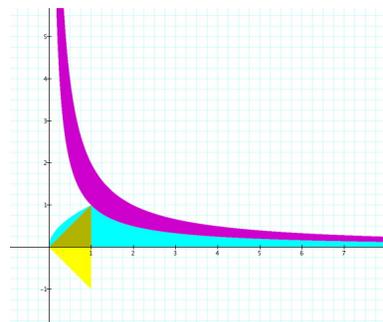
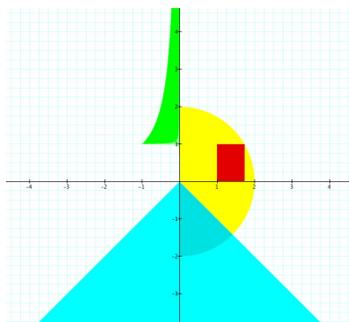
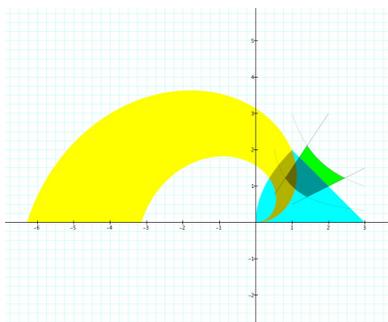
Nel caso di densità di massa che cresce linearmente con z da un valore ρ_0 per $z = 0$ a un valore ρ_1 per $z = h$ si intende che tale densità è $\rho(z) = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{h} z$, dunque andrà prima calcolata la massa totale $M_L = \int_L \rho(z) \, dx \, dy \, dz$, e poi ad esempio si avrà $z_G = \frac{1}{M_L} \int_L z \rho(z) \, dx \, dy \, dz$ (si omettono ulteriori calcoli).

8. Già sappiamo che $\lambda_1(\mathbb{B}^1(R)) = \lambda_1([-R, R]) = 2R$, che $\lambda_2(\mathbb{B}^2(R)) = \pi R^2$ e che $\lambda_3(\mathbb{B}^3(R)) = \frac{4}{3} \pi R^3$. Poi, per $n = 4$, se $x_4 \in [-R, R]$ allora la x_4 -sezione di $\mathbb{B}^4(R)$ ha area $\lambda_3(\mathbb{B}^3(\sqrt{R^2 - x_4^2})) = \frac{4}{3} \pi (R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}$ e dunque, posto $x_4 = R \sin t$, si ottiene^(*) che $\lambda_4(\mathbb{B}^4(R)) = \int_{-R}^R \frac{4}{3} \pi (R^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}} \, dx_4 = \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{\pi^2}{2} R^4$. Analogamente per $n = 5$ si ottiene $\lambda_5(\mathbb{B}^5(R)) = \int_{-R}^R \lambda_4(\mathbb{B}^4(\sqrt{R^2 - x_5^2})) \, dx_5 = \int_{-R}^R \frac{\pi^2}{2} (R^2 - x_5^2)^2 \, dx_5 = \frac{8\pi^2}{15} R^5$. In realtà si può dimostrare senza grosse difficoltà, usando in \mathbb{R}^n la naturale generalizzazione delle coordinate sferiche data da

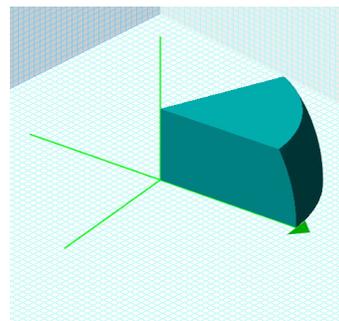
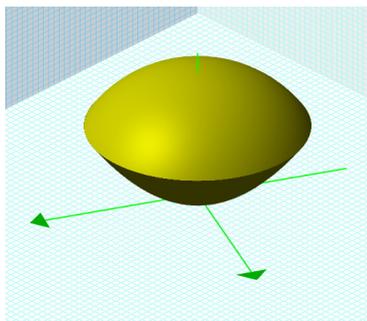
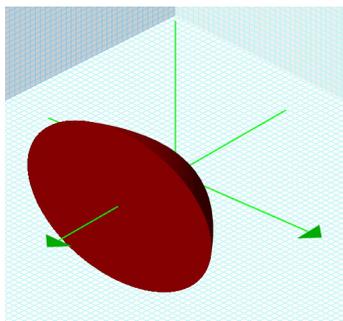
$$\begin{cases} x_1 &= r \cos \varphi_1 \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \vdots &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \theta \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \theta \end{cases}$$

con $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[$, che

$$\lambda_n(\mathbb{B}^n(R)) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!} R^n & (\text{se } n = 2m, m \geq 1) \\ \frac{2^n m! \pi^m}{n!} R^n & (\text{se } n = 2m + 1, m \geq 0). \end{cases}$$



(1) Ex. 1. (2) Ex. 2. (3) Ex. 3.



(4) Ex. 5. (5) Ex. 6. (6) Ex. 7.

^(*) Sarà utile ricordare che $\int \cos^{2n} t \, dt = \frac{1}{2n} (\cos^{2n-1} t \sin t + (2n-1) \int \cos^{2(n-1)} t \, dt)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.