Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)
Esercizi sull'integrazione multipla - 2

1. (a) [1] Per quali α la funzione $f_\alpha(x,y) = \frac{xy^\alpha}{1+y}\, e^{-x^2y}$ è integrabile su $E = \{(x,y) : x^2y \geq 1\,,\ x \geq 0\}$? Calcolare poi l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$, sia in coordinate cartesiane che col cambio $(u,v) = (x^2y, y)$.

(b) Idem per $g_\alpha(x,y) = \frac{y^\alpha}{1+y}\, e^{-x^2y}$ sulla striscia orizzontale $\mathbb{R} \times [0,1]$, calcolando poi per $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{5}{2}$.

2. Si consideri $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $(x,y) = \phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$: dire tra quali aperti $A, B \subset \mathbb{R}^2$ essa è diffeomorfismo. Usare ciò per calcolare (se finito) $\int_{D_{1,2}} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, ove $D_1 = \{(x,y) : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4,\ \frac{1}{4} - y^2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2 - 1\}$ e $D_2 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2,\ |x| \leq 1 - \frac{1}{4}y^2\}$.[2]

3. [1] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|+|y|)^\alpha}\, dx\, dy$, e calcolarlo in tre modi: (i) direttamente con la formula di riduzione; (ii) osservato che $I_\alpha = \lambda_3(T_\alpha)$ ove $T_\alpha = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq \frac{1}{(1+|x|+|y|)^\alpha}\}$, trovare la z-sezione di T_α e usarla per calcolare $\lambda_3(T_\alpha)$; (iii) dopo aver ricondotto I_α a un integrale sul primo quadrante, usare il cambio $(u,v) = (x+y, y)$.

4. (a) [1] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale di $\frac{x^2y}{1+(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ su $\{(x,y,z) : y \geq 0\}$, calcolandolo poi per $\alpha = 12$. Stessa domanda su tutto $\mathbb{R}^3$, calcolandone il valore per ogni α.

(b) Sia D il cilindro $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale di $\frac{x^2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ su $D \cap \{y \geq 0\}$ e su D, calcolandone i valori per $\alpha = 5$. Stesse domande nel caso in cui D sia il cilindro superiormente illimitato $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\,,\ z \geq 0\}$.

5. Disegnare la porzione P_α del paraboloide $z \geq x^2+y^2$ che giace sotto il piano $\alpha x + z = 1$ (ove $\alpha \geq 0$), e calcolarne il volume. Detta poi S_α la superficie esterna di P_α, scrivere correttamente gli integrali che ne descrivono l'area, il baricentro geometrico e i momenti d'inerzia (con densità superficiale di massa δ costante) rispetto ai tre assi coordinati, provando se possibile a proseguire i calcoli nel caso $\alpha = 0$.

6. Descrivere la superficie $S = \{(x,y,z) : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ 1 \leq z \leq 2\}$ e calcolarne l'area; dire poi per ciascuno dei tre integrali di superficie $\int_S \frac{1}{y}\, d\sigma$, $\int_S \frac{y}{\sqrt{|x|}}\, d\sigma$ e $\int_S \frac{1}{z^4}\, d\sigma$ se esiste finito, se possibile calcolandolo.

7. In $\mathbb{R}^3$, due palle di raggi a e b hanno i centri che distano tra loro d, ove $d < a+b$. Detta L l'intersezione delle due palle, calcolare il volume di L e l'area della superficie ∂L.

8. L'elicoide è la superficie parametrizzata da $(r,t) \mapsto (r\cos t,\ r\sin t,\ t)$ con $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Disegnare la sua porzione E tale che $2(x^2+y^2) \leq z \leq \pi$, calcolarne l'area, e (se finito) l'integrale $\int_E \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)}}\, d\sigma$.

9. Calcolare le aree (finite?) delle porzioni di superficie $2\log x + y - \sqrt{3}\, z = 0$ che sul piano (x,z) si proiettano rispettivamente sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ e sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

10. Si disegnino il tratto ℓ_1 di spirale d'Archimede $r(\theta) = 2\theta$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e il tratto ℓ_2 di grafico $x = \log(1+y)$ con $y \in [0,1]$, e siano A_1 e A_2 le zone di piano racchiuse tra essi e l'asse y. Calcolare le lunghezze di $\ell_{1,2}$ e le aree di $A_{1,2}$; scrivere poi in modo corretto gli integrali che esprimono le aree delle superfici e i volumi dei solidi ottenuti ruotando $\ell_{1,2}$ e $A_{1,2}$ di un giro attorno a ciascuno degli assi coordinati.

---

[1] Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

[2] Il calcolo di $\phi^{-1}(D_{1,2})$ è un po' delicato (ma fattibile!). Tuttavia, per chi non ne uscisse ne diamo qui di seguito il risultato: viene $\phi^{-1}(D_1) = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 2\,,\ u \geq \frac{1}{2}\,, v \geq 1\}$ e $\phi^{-1}(D_2) = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1\,,\ 0 \leq v \leq 1\}$.

Soluzioni.

1. (a) Su $E=\{(x,y)\,:\,x^2y\geq 1\,,\ x\geq 0\}$ (si tratta della parte del primo quadrante che sta sopra il grafico $y=\frac{1}{x^2}$) la funzione $f_\alpha(x,y)=\frac{xy^\alpha}{1+y}\,e^{-x^2y}$ è positiva, dunque per Tonelli e Fubini il suo integrale esiste finito se e solo se esiste finito l'integrale iterato $\int_0^{+\infty}dy\int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty}\frac{xy^\alpha}{1+y}\,e^{-x^2y}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{y^\alpha}{1+y}\,(-\frac{1}{2y}e^{-x^2y}]_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{+\infty}\,dy=\frac{1}{2e}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{1+y}\,dy$, che converge se e solo se $\alpha-1>-1$ e $\alpha-2<-1$, ovvero $0<\alpha<1$. In particolare, se $\alpha=\frac12$ si ottiene $\frac{1}{2e}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\,dy=\frac1e\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi=\frac{\pi}{2e}$. Alternativamente, da $\phi(u,v)=(x^2y,y)$ si ricava $y=v$ e $x=\pm\sqrt{\frac uv}$, dunque ϕ si può interpretare come omeomorfismo dal primo quadrante in sè; essendo poi $\mathsf{J}_\phi(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac uv}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ si ha $\det\mathsf{J}_\phi(u,v)=\frac{1}{2\sqrt{uv}}>0$, pertanto si tratta di un diffeomorfismo. Essendo $\phi^{-1}(E)=\{(u,v)\,:\,u\geq 1\}$, per Tonelli e Fubini si ricava poi $\int_E f_{\frac12}(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}dv\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac uv}\sqrt v}{1+v}\,\frac{1}{2\sqrt{uv}}\,e^{-u}\,du=\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{v}(1+v)}\,dv\int_1^{+\infty}e^{-u}\,du=\frac{\pi}{2e}$.

(b) La funzione $g_\alpha(x,y)=\frac{y^\alpha}{1+y}\,e^{-x^2y}$ è positiva sulla striscia orizzontale $\mathbb{R}\times[0,1]$, dunque per Tonelli e Fubini calcolarne ivi l'integrale equivale a calcolarne un integrale iterato. Si ha allora $\int_0^1 dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^\alpha}{1+y}\,e^{-x^2y}\,dx=\int_0^1\frac{y^\alpha}{1+y}\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2y}\,dx=$ [ponendo $t:=x\sqrt{y}$] $\int_0^1\frac{y^\alpha}{1+y}\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-t^2}\,dt=\int_0^1\frac{y^{\alpha-\frac12}}{1+y}\,dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=$ [ricordando l'integrale di Gauss] $\sqrt{\pi}\int_0^1\frac{y^{\alpha-\frac12}}{1+y}\,dy$, che converge se e solo se $\alpha-\frac12>-1$ ovvero $\alpha>-\frac12$. Per $\alpha=0$ si ottiene $\sqrt\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\,dy=2\sqrt\pi(\operatorname{arctg}\sqrt{y}]_0^1=\frac{\pi\sqrt\pi}{2}$; per $\alpha=\frac52$ si trova $\sqrt\pi\int_0^1\frac{y^2}{1+y}\,dy=\sqrt\pi\int_0^1(y-1+\frac{1}{1+y})\,dy=\sqrt\pi(\frac12y^2-y+\log|1+y|]_0^1=(\log 2-\frac12)\sqrt\pi$.

2. (Figura 1) Si noti che $\phi(-u,-v)=\phi(u,v)$, dunque A non potrà contenere punti antipodali. Posto $v\neq 0$ si ottiene $u=\frac{y}{2v}$, da cui $4v^4+4xv^2-y^2=0$, da cui $v=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$ e $u=\pm\frac{y}{2\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}}$: ne ricaviamo che ϕ è omemorfismo tra $A=\{(u,v)\,:\,v>0\}$ (oppure $A=\{(u,v)\,:\,v<0\}$) e $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,:\,x\geq 0\}$, ed essendo $\det\mathsf{J}_\phi(u,v)=4(u^2+v^2)>0$ si tratta in effetti di un diffeomorfismo. In modo simile, posto $u\neq 0$ si ottiene $v=\frac{y}{2u}$, da cui $4u^4-4xu^2-y^2=0$, da cui $v=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}$ e $u=\pm\frac{y}{2\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}}$, e pertanto ϕ è diffeomorfismo anche tra $A=\{(u,v)\,:\,u>0\}$ (oppure $A=\{(u,v)\,:\,u<0\}$) e $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,:\,x\leq 0\}$. Usando ad esempio il diffeomorfismo tra $A=\{(u,v)\,:\,v>0\}$ e $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,:\,x\geq 0\}$, facciamo il cambio di variabile negli integrali $\int_{D_{1,2}}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$. • Si ha $\phi^{-1}(D_1)=\{(u,v)\,:\,u\geq 0,\ u^2+v^2\leq 2,\ \frac14-4u^2v^2\leq u^2-v^2\leq u^2v^2-1\}$: l'unica condizione un po' ostica da interpretare è l'ultima, che tuttavia, separata nella sue due disequazioni, diventa $\begin{cases}1-16u^2v^2\leq 4u^2-4v^2\\ u^2-v^2\leq u^2v^2-1\end{cases}$ ovvero $\begin{cases}(4v^2+1)(4u^2-1)\geq 0\\ (u^2+1)(v^2-1)\geq 0\end{cases}$ che equivale a $\begin{cases}|u|\geq\frac12\\ |v|\geq 1\end{cases}$. Tenuto conto che siamo in $v>0$, ricaviamo insomma che $\phi^{-1}(D_1)=\{(u,v)\,:\,u^2+v^2\leq 2\,,\ u\geq\frac12\,, v\geq 1\}$. Dunque l'integrale $\int_{D_1}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ (che di certo esiste finito, perché $\frac{y}{x^2+y^2}$ è continua su D_1, un compatto ben lontano da $(0,0)$) diventa, per Fubini, $\int_{\frac12}^1du\int_1^{\sqrt{2-u^2}}\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}4(u^2+v^2)\,dv=4\int_{\frac12}^1u(\log(u^2+v^2)]_{v=1}^{v=\sqrt{2-u^2}}\,du=4\int_{\frac12}^1u(\log 2-\log(u^2+1))\,du=4\Big(\frac12u^2\log 2-\frac12(u^2+1)(\log(u^2+1)-1)\Big]_{\frac12}^1=\frac12(5\log 5-15\log 2+3)$. • Si ha $\phi^{-1}(D_2)=\{(u,v)\,:\,0\leq uv\leq 1,\ |u^2-v^2|\leq 1-u^2v^2\}$, e, ragionando come prima, la condizione $|u^2-v^2|\leq 1-u^2v^2$ (che, essendo $0\leq uv\leq 1$, significa $u^2v^2-1\leq u^2-v^2\leq 1-u^2v^2$) equivale a $0\leq u\leq 1$ e $0\leq v\leq 1$, dunque il quadrato $[0,1]^2$. Sul quadrato la funzione è positiva; tuttavia, vista la prossimità del quadrato a $(0,0)$, tendendo al quale la funzione diventa illimitata, non è certo che l'integrale esista finito (potrebbe essere $+\infty$). Perlomeno, essendo la funzione positiva, per Tonelli e Fubini lo possiamo calcolare come integrale iterato, venga quello che venga. Si ha allora $\int_0^1du\int_0^1\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}4(u^2+v^2)\,dv=4\int_0^1u(\log(u^2+v^2)]_{v=0}^{v=1}\,du=4\int_0^1u\log(1+\frac{1}{u^2})\,du$. Vale $\int u\log(1+\frac{1}{u^2})\,du=\frac12u^2\log(1+\frac{1}{u^2})-\int\frac12u^2\frac{-\frac{2}{u^3}}{1+\frac{1}{u^2}}\,du=\frac12(u^2\log(1+\frac{1}{u^2})+\log(1+u^2))$, da cui ricaviamo che $4\int_0^1u\log(1+\frac{1}{u^2})\,du=4(\frac12(u^2\log(1+\frac{1}{u^2})+\log(1+u^2))]_0^1=2((2\log 2)-(0))=4\log 2$, valore finito.

3. Se $\alpha\leq 0$ si ha $\frac{1}{(1+|x|+|y|)^\alpha}\geq 1$, dunque di certo per confronto l'integrale cercato non sarà finito. Possiamo dunque supporre da subito che $\alpha>0$. (i) Per parità si ha $I_\alpha=4\int_{[0,+\infty[^2}\frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx\,dy$. La funzione integranda è positiva, dunque per Tonelli e Fubini si ottiene $I_\alpha = 4\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\, dy =$ [se $\alpha>1$] $4\int_0^{+\infty}(-\frac{(1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha})\, dx = \frac{4}{\alpha-1}\int_0^{+\infty}(1+x)^{1-\alpha}\, dx =$ [se $\alpha>2$] $\frac{4}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$. (ii) Da $z \le \frac{1}{(1+|x|+|y|)^\alpha}$ si ricava $|x|+|y| \le z^{-\frac{1}{\alpha}}-1$, dunque per $0<z<1$ la z-sezione di T_α è il rombo-quadrato di diagonali $2|z^{-\frac{1}{\alpha}}-1|$, che avrà area $2(z^{-\frac{1}{\alpha}}-1)^2$. Si ricava perciò $I_\alpha = \int_0^1 2(z^{-\frac{1}{\alpha}}-1)^2\, dz = 2\int_0^1 (z^{-\frac{2}{\alpha}} - 2z^{-\frac{1}{\alpha}}+1)\, dz = 2(\frac{z^{1-\frac{2}{\alpha}}}{1-\frac{2}{\alpha}} - 2\frac{z^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}} + z]_0^1 =$ [se $\alpha>2$] $2(\frac{1}{1-\frac{2}{\alpha}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}+1) = 2(\frac{\alpha}{\alpha-2} - \frac{2\alpha}{\alpha-1}+1) = \frac{4}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$. (iii) Come detto, vale $I_\alpha = 4\int_{[0,+\infty[^2} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\, dx\, dy$; col cambio di variabili suggerito (cioè $(x,y)=(u-v,v)$) le condizioni $x,y\ge 0$ diventano $u \ge v$ e $v \ge 0$, dunque il nostro integrale diventa $4\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^\alpha}\, du \int_0^u dv = 4\int_0^{+\infty}\frac{u}{(1+u)^\alpha}\, du =$ [posto $w=u+1$] $4\int_1^{+\infty}\frac{w-1}{w^\alpha}\, dw = 4\int_1^{+\infty}(w^{1-\alpha}-w^{-\alpha})\, dw = 4(\frac{w^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_1^{+\infty} =$ [se $\alpha>2$] $-4(\frac{1}{2-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}) = \frac{4}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$.

4. (a) In coordinate sferiche l'integrale cercato equivale a $\int_{[0,+\infty[\times[0,\pi]\times[0,\pi]} \frac{(r\cos\theta\sin\varphi)^2(r\sin\theta\sin\varphi)}{1+r^\alpha} r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$, che, visto che la funzione integranda è positiva, per Tonelli e Fubini esiste finito se e solo se esiste finito l'iterato (a variabili separate) $\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^\pi \sin^4\varphi\, d\varphi \int_0^{+\infty}\frac{r^5}{1+r^\alpha}\, dr$. L'unica condizione affinché ciò avvenga è che l'ultimo integrale converga a $+\infty$, ovvero che $5-\alpha<-1$, ovvero $\alpha>6$: e per $\alpha=12$ si ottiene[(3)] $(-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi\,(\frac{1}{4}(\frac{3}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)-\cos\varphi\sin^3\varphi)]_0^\pi\,(\frac{1}{6}\operatorname{arctg} r^6]_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\frac{3\pi}{8}\frac{\pi}{12} = \frac{\pi^2}{48}$. Quanto all'integrale su tutto $\mathbb{R}^3$: poiché $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$, tale integrale esisterà finito (e sarà nullo) se e solo se esiste finito quello per $y>0$, ovvero, come appena visto, se e solo se $\alpha>6$.

(b) Similmente a prima, per y-antisimmetria l'integrale di $\frac{x^2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ sul cilindro $D=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\}$ esisterà finito (e sarà nullo) se e solo se esiste finito l'integrale sul mezzo cilindro $D\cap\{y\ge 0\}$, sul quale la funzione è positiva e che si lascia descrivere in coordinate polari come $\{(r,\theta,\varphi): 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi}\}\cup\{(r,\theta,\varphi): 0\le\theta\le\pi,\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\frac{1}{\sin\varphi}\}$. Per Tonelli-Fubini si tratta dunque di calcolare l'iterato $\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\varphi\, d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r^{5-\alpha}\, dr + \int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\, d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r^{5-\alpha}\, dr =$ [supposto $\alpha<6$] $\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^{\alpha-6}\varphi}{6-\alpha}\sin^4\varphi\, d\varphi + \int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{\alpha-6}\varphi}{6-\alpha}\sin^4\varphi\, d\varphi$, che non dà ulteriori condizioni su α per esistere finito. Dunque deve essere $\alpha<6$; e se $\alpha=5$ si ha $\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\, d\varphi\right) = \int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi)\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi\right) = (-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi\left((\log|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}| - \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{9}\left(6\log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}\right)$. Infine, se il cilindro è superiormente illimitato le considerazioni precedenti restano valide, tranne che stavolta φ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ e si ha sempre $0<r<\frac{1}{\sin\varphi}$ così che, arrivati a $\frac{1}{6-\alpha}\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-2}\varphi\, d\varphi$ bisogna richiedere che $\alpha-2>-1$ (ovvero $\alpha>1$), e pertanto deve essere $1<\alpha<6$; nel caso $\alpha=5$ si ottiene (sempre sul mezzo cilindro) $\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\, d\varphi = (-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi\,(-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{9}$.

5. (Figura 2) La proiezione di P_α sul piano orizzontale (x,y) è il disco D_α dato da $x^2+y^2+\alpha x-1\le 0$ (centro $(-\frac{\alpha}{2},0)$, raggio $\frac{\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$). Il volume, per fili paralleli all'asse z, è allora $\int_{D_\alpha} dx\, dy\int_{x^2+y^2}^{1-\alpha x} dz = \int_{D_\alpha}(1-\alpha x-x^2-y^2)\, dx\, dy$; usando coordinate polari traslate $(x,y)=(-\frac{\alpha}{2}+r\cos\theta, r\sin\theta)$ si ha $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{\alpha^2+4}}{2}}(1-\alpha(-\frac{\alpha}{2}+r\cos\theta) - \frac{\alpha^2}{4} - r^2\cos^2\theta+\alpha r\cos\theta - r^2\sin^2\theta)\, r\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{\alpha^2+4}}{2}}(1+\frac{\alpha^2}{4}-r^2)\, r\, dr = \frac{(\alpha^2+4)^2}{32}\pi$. (Una possibile alternativa per il calcolo del volume è di passare alle coordinate adattate $(u,v,w)=(x+\frac{\alpha}{2}, y, \alpha x+z)$ ovvero $(x,y,z)=(u-\frac{\alpha}{2},\ v,\ w-\alpha u+\frac{\alpha^2}{2})$, che tagliano P_α in fette parallele al piano.) Per il calcolo degli integrali superficiali usiamo naturalmente la parametrizzazione come grafico: ponendo $d\sigma_1=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$ e $d\sigma_2=\sqrt{1+\alpha^2}\, dx\, dy$ (elementi d'area rispettivamente nella parte curva $S_{\alpha,1}$ e dritta $S_{\alpha,2}$ di S_α), usando la legge del coseno per le aree piane e le coordinate polari traslate otteniamo $\operatorname{Area}(S_\alpha)=\operatorname{Area}(S_{\alpha,1})+\operatorname{Area}(S_{\alpha,2}) = \frac{(\alpha^2+4)\sqrt{1+\alpha^2}}{4}\pi + \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{\alpha^2+4}}{2}} r\sqrt{4r^2-4r\alpha\cos\theta+1+\alpha^2}\, dr$ (in particolare $\operatorname{Area}(S_0)=\pi+\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr = \pi + 2\pi(\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{6}\pi$). Per simmetria sarà poi $y_G=0$, quindi $x_G=\frac{1}{\operatorname{Area}(S_\alpha)}\int_{D_\alpha} x\,(\sqrt{1+4x^2+4y^2}+\sqrt{1+\alpha^2})\, dx\, dy$ e $z_G=\frac{1}{\operatorname{Area}(S_\alpha)}\int_{D_\alpha}((x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}+(1-\alpha x)\sqrt{1+\alpha^2})\, dx\, dy$; quanto ai momenti d'inerzia, si avrà $I_x=\delta\int_{D_\alpha}((y^2+(x^2+y^2)^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}+(y^2+(1-\alpha x)^2)\sqrt{1+\alpha^2})\, dx\, dy$, $I_y=\delta\int_{D_\alpha}((x^2+(x^2+y^2)^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}+(x^2+(1-\alpha x)^2)\sqrt{1+\alpha^2})\, dx\, dy$ e $I_z=\delta\int_{D_\alpha}(x^2+y^2)(\sqrt{1+4x^2+4y^2}+\sqrt{1+\alpha^2})\, dx\, dy$ (si omettono i calcoli, comunque fattibili, nel caso $\alpha=0$).

6. (Figura 3) La superficie $S=\{(x,y,z): z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\le z\le 2\}$ è un z-grafico sopra la corona circolare

---

(3) Si ricordi che, posto $I_n := \int\sin^{2n}\varphi\, d\varphi$, vale $I_n=\frac{1}{2n}(\,(2n-1)I_{n-1}-\cos\varphi\sin^{2n-1}\varphi\,)$.

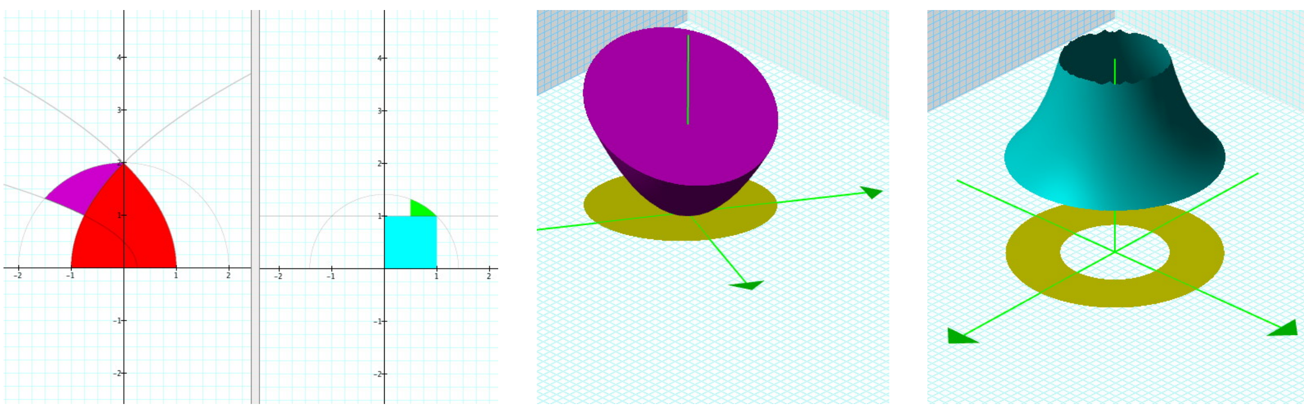
$C=\{(x,y):\frac{1}{2}\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}$, a simmetria radiale, compreso tra la z-quota 1 sul bordo esterno di C e 2 su quello interno. L'elemento d'area è $d\sigma=\sqrt{1+(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}})^2+(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}})^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, pertanto $\text{Area}(S)=\int_S d\sigma=\int_C\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt{1+r^4}}{r^2}\,r\,dr=$ [ponendo $u=\sqrt{r^4+1}$] $\pi\int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\sqrt{2}}\frac{u^2}{u^2-1}\,du=\pi\int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\sqrt{2}}(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}))\,du=\pi(u-\frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1}]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{17}}{4}+\log\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{2}+1})\pi$. (In alternativa si sarebbe potuto usare il teorema di Guldino: la curva nel piano (x,z) è data da $\gamma(x)=(x,\frac{1}{x})$ (con elemento di lunghezza $||\gamma'(x)||\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{x^4}\,dx}$) per $\frac{1}{2}\le x\le 1$, dunque ancora una volta si ha $\text{Area}(S)=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 x\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx$.) • Vale $\int_S\frac{1}{y}\,d\sigma=\int_C\frac{1}{y}\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$: non è però certo che questo integrale esista, perché la funzione integranda non ha segno costante su C e diverge nei punti di C sull'asse x. Tuttavia essa è y-antisimmetrica, dunque se l'integrale esiste finito su $C^+=C\cap\{y\ge 0\}$ (in cui la funzione è positiva, dunque grazie a Tonelli e Fubini per il calcolo possiamo usare un integrale iterato) allora esisterà anche su C, con valore nullo. Occupiamoci dunque di $\int_{C^+}\frac{1}{y}\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^\pi d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\sqrt{1+r^4}}{r^2}\,r\,dr=\int_0^\pi\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt{1+r^4}}{r^2}\,dr$: ma tale integrale iterato diverge a $+\infty$ perché $\frac{1}{\sin\theta}\sim_0\frac{1}{\theta}$. Pertanto $\int_S\frac{1}{y}\,d\sigma$ non ha senso (sia la parte positiva che quella negativa hanno integrale che diverge a $+\infty$). • Il discorso per $\int_S\frac{y}{\sqrt{|x|}}\,d\sigma=\int_C\frac{y}{\sqrt{|x|}}\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ è del tutto analogo al precedente (anche questa funzione è y-antisimmetrica), solo che stavolta i problemi sono nei punti di C sull'asse y. In ogni caso, come prima, se l'integrale esiste finito su $C^+=C\cap\{y\ge 0\}$ allora esisterà anche su C, con valore nullo. Si ha $\int_{C^+}\frac{y}{\sqrt{|x|}}\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^\pi d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r|\cos\theta|}}\frac{\sqrt{1+r^4}}{r^2}\,r\,dr=\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sqrt{|\cos\theta|}}\,d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{1+r^4}{r}}\,dr$, integrale iterato che stavolta (a differenza della precedente) esiste finito, anche se non riesco a calcolarne il valore nel suo fattore in r (invece quello in θ vale $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta=-4(\sqrt{\cos\theta}]_0^{\frac{\pi}{2}}=4)$. • Invece $\int_S\frac{1}{z^4}\,d\sigma=\int_C\frac{1}{1/(x^2+y^2)^2}\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_C(x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ certamente esiste finito, perché la corona C si mantiene lontana dall'origine: e vale $\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2\sqrt{1+r^4}\,r\,dr=2\pi\,(\frac{1}{6}(1+r^4)]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-\frac{17}{64}\sqrt{17})$.

7. Denotiamo con B_a e B_b le palle, e con S_a e S_b le superfici; giusto per fissare le idee sia $a\ge b$. Se $b+d\le a$ (ovvero se $d\le a-b$) allora B_b è tutta contenuta in B_a: in altre parole, in tal caso si ha $L=B_b$, di cui ben conosciamo il volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ e la superficie $4\pi b^2$. D'ora in poi supporremo che $a-b<d<a+b$: in tale intervallo le due palle si intersecano in modo proprio. Per prepararsi al calcolo converrà calcolare quanto valgono, in generale, il volume e l'area di una calotta sferica $C_{R,h}=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le R^2\,,\ z\ge h\}$ per $R>0$ e $-R\le h\le R$. Usando z-fette e coordinate cilindriche, il volume risulta $\int_h^R(R^2-z^2)\pi\,dz=\frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2h+h^3)$; quanto alla superficie sferica della calotta, la parametrizzazione $(\sqrt{R^2-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{R^2-z^2}\sin\theta,\ z)$ (con $0\le\theta\le 2\pi$ e $h\le z\le R$) dà l'elemento d'area $R\,d\theta\,dz$, da cui l'area $\int_{[0,2\pi]\times[h,R]}R\,d\theta\,dz=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_h^R dz=2\pi R(R-h)$. (Per esercizio, ricalcolando le stesse cose in coordinate sferiche si riotterrebbe $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\arccos\frac{h}{R}}d\varphi\int_{\frac{h}{\cos\varphi}}^R r^2\sin\varphi\,dr=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\arccos\frac{h}{R}}(R^3-\frac{h^3}{\cos^3\varphi})\sin\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi(-R^3\cos\varphi-\frac{h^3}{2\cos^2\varphi}]_0^{\arccos\frac{h}{R}}=\frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2h+h^3)$ e $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\arccos\frac{h}{R}}R^2\sin\varphi\,d\varphi=2\pi R^2(-\cos\varphi]_0^{\arccos\frac{h}{R}}=2\pi R(R-h)$.) Torniamo ora al nostro quadro geometrico. Ponendo il centro di B_a nell'origine e quello di B_b in $(0,0,d)$, confrontando tra loro le equazioni $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+(z-d)^2=b^2$ si vede subito che l'intersezione tra S_a e S_b avviene a quota $z=\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}$, che sta tra 0 e a (nell'emisfero superiore di S_a), dunque i contributi di B_a al volume di L e di S_a all'area di ∂L sono quelli della calotta $C_{a,\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}}$. Per quanto riguarda l'altra palla, la stessa situazione va letta dal suo punto di vista, ovvero alzandosi di d e poi a testa in giù: in altre parole, cambiando la terza coordinata in $\tilde{z}=-(z-d)=d-z$ (si noti infatti che i centri di B_a e B_b, caratterizzati da $z=0$ e $z=d$, hanno coordinata $\tilde{z}$ rispettivamente d e 0). L'intersezione, che in z avviene a quota $\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}$, in $\tilde{z}$ avviene a quota $d-\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}=\frac{d^2-a^2+b^2}{2d}$, e dunque i contributi di B_b al volume di L e di S_b all'area di ∂L sono quelli della calotta $C_{b,\frac{d^2-a^2+b^2}{2d}}$.

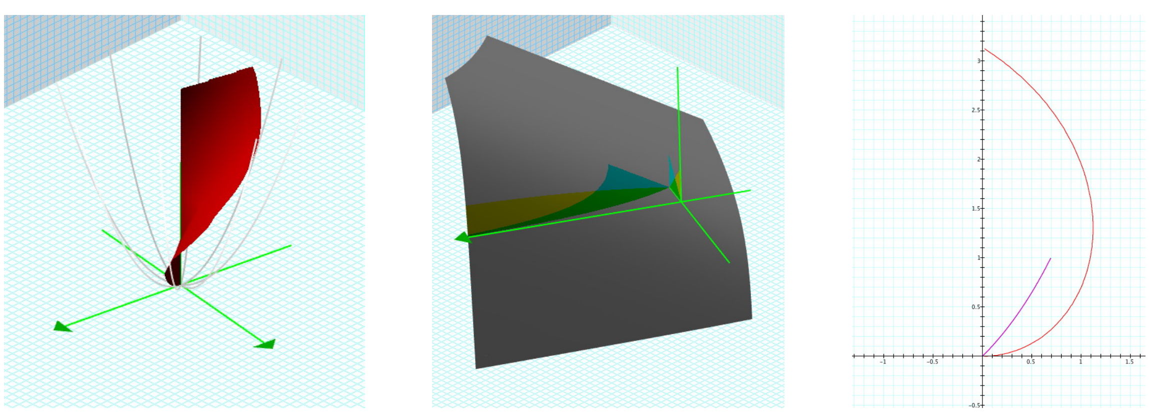
8. (Figura 4) L'elicoide, nella parametrizzazione data da $(r,t)\mapsto(r\cos t,\ r\sin t,\ t)$ ha elemento d'area $\sqrt{r^2+1}\,dr\,dt$; e la sua porzione E tale che $2(x^2+y^2)\le z\le\pi$ è ottenuta quando (r,t) soddisfano $2r^2\le t\le\pi$. Pertanto l'integrale $\int_E\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)}}\,d\sigma$ diventa $\int_{\{(r,t):2r^2\le t\le\pi\}}\frac{r^2(1+\sin^2 t)}{r\sqrt{r^2+1}}\sqrt{r^2+1}\,dr\,dt=\int_{\{(r,t):2r^2\le t\le\pi\}}r(1+\sin^2 t)\,dr\,dt$; visto che l'integrando è positivo, usando Tonelli e Fubini l'integrale esisterà finito se e solo se esiste finito l'iterato $\int_0^\pi(1+\sin^2 t)\,dt\int_0^{\sqrt{\frac{t}{2}}}r\,dr=\int_0^\pi(1+\sin^2 t)(\frac{1}{2}r^2]_0^{\sqrt{\frac{t}{2}}}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^\pi t(1+\sin^2 t)\,dt$, che evidentemente è finito. Continuando il calcolo, otteniamo $\frac{1}{8}\int_0^\pi t(3-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{8}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t]_0^\pi=\frac{3}{16}\pi^2$.

9. (Figura 5) La superficie $2\log x+y-\sqrt{3}\,z=0$ può essere vista come grafico cartesiano $y=f(x,z)=\sqrt{3}\,z-2\log x$, e l'elemento di superficie è $d\sigma=\sqrt{1+(-\frac{2}{x})^2+(\sqrt{3})^2}\,dx\,dz=\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}\,dx\,dz$. Notiamo che $\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}\ge 0$ su ciascuno dei due triangoli nel piano (x,z) indicati come proiezione. • La porzione (illimitata) che sul piano (x,z) si proietta sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ ha l'area calcolata da $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}\,dz = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$, dunque finita: posto $x=\sinh\xi$ e ricordando che $\mathrm{settsinh}\, t = \log(\sqrt{t^2+1}+t)$ si ottiene $2\int_0^{\log(\sqrt{2}+1)} \cosh^2\xi\,d\xi = (\xi+\sinh\xi\cosh\xi]_0^{\log(\sqrt{2}+1)} = \log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}$. • L'altra porzione (pure illimitata) che si proietta sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ ha l'area calcolata da $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} \frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}\,dz = 2\int_0^1 \frac{1-x}{x}\sqrt{x^2+1}\,dx$, integrale che però diverge a $+\infty$ in quanto $\frac{1-x}{x}\sqrt{x^2+1}\sim_0 \frac{1}{x}$.

10. (Figura 6) Il tratto ℓ_1 di spirale d'Archimede $r(\theta)=2\theta$ con $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ è parametrizzato da $\gamma_1(\theta)=(2\theta\cos\theta, 2\theta\sin\theta)$, dunque la sua lunghezza è data da $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\theta^2+4}\,d\theta$: ponendo $x=\sinh\xi$ (vedi anche esercizio precedente) si ottiene $2\int_0^{\mathrm{settsinh}\frac{\pi}{2}}\cosh^2\xi\,d\xi = (\xi+\sinh\xi\cosh\xi]_0^{\mathrm{settsinh}\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}+\log(\frac{\pi}{2}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}})$. Il tratto ℓ_2 di grafico $x=\log(1+y)$ con $y\in[0,1]$ è parametrizzato da $\gamma_2(y)=(\log(1+y),y)$, dunque la sua lunghezza è data da $\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{(y+1)^2}}\,dy =$ [posto $u=y+1$] $\int_1^2\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\,du =$ [posto $w=\sqrt{u^2+1}$] $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{w}{w^2-1}w\,dw = (u-\frac{1}{2}\log\frac{u+1}{u-1}]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = (\sqrt{5}-\log\frac{\sqrt{5}+1}{2})-(\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)) = \sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$. L'area di A_1 è data da $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\theta^2\,d\theta = (\frac{2}{3}\theta^3]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12}$, quella di A_2 da $\int_0^1\log(1+y)\,dy = ((1+y)(\log(1+y)-1)]_0^1 = 2\log 2-1$. Usando Guldino, gli integrali che esprimono le aree delle superfici ottenute ruotando $\ell_{1,2}$ di un giro attorno all'asse x sono rispettivamente $2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\sin\theta\sqrt{4\theta^2+4}\,d\theta$ e $2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+\frac{1}{(y+1)^2}}\,dy$, mentre i volumi dei solidi ottenuti ruotando $A_{1,2}$ di un giro attorno all'asse x sono rispettivamente $2\pi\int_{A_1}y\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}(r\sin\theta)\,r\,dr = \frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^3\sin\theta\,d\theta$ e $2\pi\int_{A_2}y\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 dy\int_0^{\log(1+y)}y\,dx = 2\pi\int_0^1 y\log(1+y)\,dy$; quanto al giro attorno all'asse y, gli integrali diventano $2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos\theta\sqrt{4\theta^2+4}\,d\theta$, $2\pi\int_0^1\log(1+y)\sqrt{1+\frac{1}{(y+1)^2}}\,dy$, $2\pi\int_{A_1}x\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}(r\cos\theta)\,r\,dr = \frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^3\cos\theta\,d\theta$ e $2\pi\int_{A_2}x\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 dy\int_0^{\log(1+y)}x\,dx = \pi\int_0^1\log^2(1+y)\,dy$ (naturalmente alcuni di questi integrali sarebbero facilmente calcolabili).



(1) Ex. 2. **(2)** Ex. 5. **(3)** Ex. 6.



(4) Ex. 8. **(5)** Ex. 9. **(6)** Ex. 10.