

2 Integrazione multidimensionale

Una teoria di *integrazione alla Riemann* per funzioni di più variabili reali (ovvero $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$) si può costruire adattando in modo naturale quella già vista per una variabile: il ruolo degli intervalli di $\mathbb{R}$ verrà svolto dagli “intervalli n -dimensionali” $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, ove gli I_j sono intervalli di $\mathbb{R}$ con gli estremi inclusi o meno; ci saranno ancora le funzioni semplici (o “a scalino”, “a gradino”) di cui definire l’integrale, le somme superiori e inferiori e così via. Sostanzialmente equivalente al problema di dare un valore all’integrale di una funzione sarà quello di dare una *misura* ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$: si dirà che $E \subset \mathbb{R}^n$ è *elementarmente misurabile* (o *misurabile alla Peano-Jordan*) se la sua funzione caratteristica χ_E è Riemann-integrabile, chiamando “misura di E ” (anche “area”, “volume” nei casi $n = 2, 3$) il valore di tale integrale. Innegabili pregi di questa teoria sono la sua semplicità e naturalezza; tuttavia gli inconvenienti già incontrati in una variabile restano presenti. Citiamone tre tra i più rilevanti.

- Anche su un dominio compatto, le *funzioni Riemann-integrabili* (e, in parallelo, gli insiemi elementarmente misurabili) *sono relativamente poche* se si deve allargare lo sguardo oltre le funzioni continue, o tutt’al più con un numero “ragionevole” di singolarità.⁽²³⁾ Infatti, su un intervallo compatto una funzione Riemann-integrabile deve essere limitata, e continua “quasi ovunque”.⁽²⁴⁾ ad esempio questo, come già noto, esclude la Riemann-integrabilità della funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, discontinua in tutti i punti di $[0, 1]$.
- *L’integrale di Riemann non funziona in modo soddisfacente col limite*. Data una successione di funzioni f_n che converge a una funzione f in modo sufficientemente debole (ad esempio puntualmente, o anche meno), vorremmo che anche f fosse integrabile e si potesse “passare al limite sotto il segno di integrale”, ovvero che $\int f = \lim \int f_n$. Ora, detta in tale generalità, questa richiesta è un po’ troppo ottimistica, perché con una convergenza così debole è difficile evitare fenomeni di “dispersioni di massa” nel dominio, come mostra il seguente esempio.

Esempio. Definiamo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come 2^n sull’intervallo $[2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$, e 0 altrove. Ognuna delle f_n è Riemann-integrabile con $\int f_n = 1$, e la successione (f_n) tende puntualmente alla funzione nulla

⁽²³⁾È quello che accade nello sviluppo delle scienze esatte da oltre un secolo, in cui nuove importanti tecniche (ad esempio, le serie di Fourier) possono dare luogo a funzioni altamente irregolari.

⁽²⁴⁾Il significato preciso di questo “quasi ovunque” è —come vedremo più tardi— “ovunque tranne un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla” (o, come si dice, “Lebesgue-trascurabile”): l’enunciato preciso è che una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e a supporto compatto è Riemann-integrabile se e solo se l’insieme dei suoi punti di discontinuità è Lebesgue-trascurabile. La misura di Lebesgue, come vedremo, è più estesa di quella di Peano. Ad esempio, tutti gli insiemi numerabili sono Lebesgue-misurabili (con misura nulla), mentre non è detto siano elementarmente misurabili: ad esempio $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ lo è (considerata la funzione semplice $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che vale 1 su $[0, \frac{1}{n}] \cup \{\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$, si ha $\chi_E \leq s_n$ e dunque $\int_{\mathbb{R}} s_n = \frac{1}{n}$ è una somma superiore di χ_E), mentre come visto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ non lo è. Un classico esempio di funzione Riemann-integrabile con un insieme di discontinuità Lebesgue-trascurabile ma non elementarmente misurabile è $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come 0 su $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e come $\frac{1}{q}$ su $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ con $p, q \geq 0$ coprimi, il cui insieme di discontinuità è quello di Dirichlet $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

$f \equiv 0$, ovviamente anch'essa Riemann-integrabile; ma $\int f = 0 \neq \lim \int f_n = 1$.

Per prevenire tali fenomeni, una richiesta ragionevole è che la cosa valga perlomeno per successioni “dominate” da una fissata funzione integrabile, ovvero tali che esista una funzione integrabile g tale che $|f_n| \leq g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per l'integrale di Riemann, però, nemmeno questo basta: bisogna che la convergenza sia uniforme, perché la convergenza puntuale può non essere sufficiente.

Esempio. Sia $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ una qualsiasi biiezione (sappiamo che $\mathbb{Q}$ è numerabile), e definiamo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come 1 sui soli razionali q_m con $m \leq n$, e 0 altrove: ognuna delle f_n è Riemann-integrabile (ha un numero finito di discontinuità) con $\int f_n = 0$, ma la successione (f_n) tende puntualmente (non uniformemente!) alla funzione di Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, che non è Riemann-integrabile.

- *L'integrale di Riemann è legato alle proprietà dei reali.* La costruzione di Riemann dipende molto dalle proprietà dei reali (in particolare dall'ordine totale), e l'estendibilità al caso di funzioni reali definite su insiemi più generali di $\mathbb{R}^n$ appare limitata.

Queste ragioni, unite ad altre, suggerirono già dalla fine del XIX secolo di cercare una teoria dell'integrazione più efficiente, nella consapevolezza di dover pagare un prezzo in termini di semplicità rispetto a quella di Riemann ma senza per questo sacrificarne troppo la naturalezza: tra le varie costruzioni proposte si affermò alla fine quella del francese Henri Lebesgue (1875-1941), e lo mostriamo a partire dalle ragioni appena elencate.

- Rispetto a Riemann, *Lebesgue allarga in modo considerevole la famiglia degli insiemi misurabili*⁽²⁵⁾, al punto che, come vedremo, descrivere insiemi non Lebesgue-misurabili in $\mathbb{R}^n$ è complicato; in particolare ogni insieme finito o numerabile —tra cui l'insieme di Dirichlet $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ — è misurabile alla Lebesgue con misura nulla (un tale insieme si dirà “trascurabile”). In parallelo aumentano in modo considerevole anche l'ampiezza e la flessibilità della teoria di integrazione delle funzioni: scompaiono ad esempio la necessità della limitatezza dei valori (giusto per capire: la teoria di Lebesgue non è sensibile a ciò che accade su insiemi trascurabili del dominio, sui quali la funzione può dunque avere qualunque comportamento, addirittura aver valore $+\infty$) e dell'insieme di integrazione (la trattazione non è più distinta tra integrabilità e integrabilità generalizzata, come accadeva nella teoria di Riemann). In effetti, per le funzioni, il ruolo che nell'integrale di Riemann era svolto dalla continuità viene qui svolto dalla “misurabilità” che, come la misurabilità degli insiemi, è estremamente debole e in pratica sempre soddisfatta. La costruzione di Lebesgue, che continua a mantenere ampio consenso anche nei nostri giorni⁽²⁶⁾, è in un certo senso il risultato della combinazione

⁽²⁵⁾ Attenzione: quando si dice “misurabile” si intende che eventualmente tale insieme può avere misura $+\infty$. Il problema della “non misurabilità” accade quando all'insieme non si riesce proprio a dare una misura, neppure $+\infty$, come accade ad esempio per l'insieme di Dirichlet nella teoria di Riemann.

⁽²⁶⁾ Va detto che, mentre con Lebesgue molti problemi sono risolti, alcuni altri sorprendentemente appaiono: ad esempio, come vedremo in seguito, la funzione di Dirichlet $\frac{\sin x}{x}$ non è Lebesgue-integrabile su $\mathbb{R}$ pur essendo Riemann-integrabile in senso generalizzato. Menzioniamo che in tempi recenti c'è stato, da parte di alcuni studiosi, un invito a lasciare l'integrale di Lebesgue per “ritornare” all'idea di quello di Riemann nella sua forma generalizzata di “integrale di gauge” (in italiano anche “integrale calibrato”)

di un processo di completamento di quella di Riemann (simile alla costruzione dei reali a partire dai razionali) e di un decisivo cambiamento di prospettiva, che sposta l'attenzione sul codominio più che sul dominio: mentre la teoria di Riemann prima decompone il dominio in intervalli e poi guarda i valori assunti su di essi, come vedremo quella di Lebesgue prima stratifica i valori e poi cerca di misurare gli insiemi dei punti del dominio nei quali sono assunti tali valori, insiemi che potrebbero essere anche molto irregolari.

- L'integrale di Lebesgue funziona molto meglio col limite rispetto a quello di Riemann: come vedremo, se si ha una successione di funzioni Lebesgue-integrabili f_n che converge puntualmente “quasi ovunque”⁽²⁷⁾ a una funzione f , in due casi molto frequenti (successione monotona, o dominata) anche f è Lebesgue-integrabile e $\int f = \lim \int f_n$. In particolare l'esempio con $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ viene sanato (la successione f_n converge in modo monotono a f , che è Lebesgue-integrabile e $0 = \int \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \lim \int f_n$), mentre, come previsto, l'esempio con la “dispersione di massa” continua a resistere (in effetti la successione f_n converge puntualmente a $f = 0$ ma ne' in modo monotono ne' in modo dominato).
- La teoria di Lebesgue è largamente indipendente da particolari proprietà (topologiche o altro) del dominio, e dunque si presta spontaneamente ad essere generalizzata a funzioni reali definite su domini qualunque: al punto che la sua presentazione in ambito generale sostanzialmente non offre maggiori difficoltà rispetto a quella in $\mathbb{R}^n$ (al contrario, perlopiù aiuta a capire meglio la situazione).⁽²⁸⁾
- A scanso di equivoci, va comunque detto che:
 - buona parte dei teoremi validi per la teoria di Lebesgue valgono anche per quella di Riemann: ma generalmente con ipotesi più onerose —e, in ultima analisi, inessenziali— che la maggior flessibilità di quella di Lebesgue permette di eliminare quasi sempre;
 - la teoria di Lebesgue ha grande importanza dal punto di vista teorico, mentre per il calcolo effettivo degli integrali essa si appoggia essenzialmente sui noti risultati di quella di Riemann (vedremo che una funzione integrabile alla Riemann lo è anche alla Lebesgue, e i due integrali coincidono).

Per quanto detto, dovrebbe essere chiaro che d'ora in poi converrà far riferimento alla teoria di Lebesgue, di cui presentiamo nel seguito gli aspetti fondamentali.

proposta negli ultimi anni '60 da J. Kurzweil e R. Henstock che, oltre a riprendere la filosofia di Riemann e a estendere l'integrabilità alla Lebesgue, riesce addirittura a risolvere alcuni problemi di quest'ultima, come il già citato integrale di Dirichlet. Tuttavia questa proposta non trova ancora —e chissà se lo troverà in futuro— un sufficiente interesse da parte della comunità scientifica: forse perché, se da un lato l'integrale di Kurzweil-Henstock recupera buona parte della semplicità formale di quello di Riemann, dall'altro appare meno naturale anche di quello di Lebesgue.

⁽²⁷⁾ovvero, come già detto in precedenza, “ovunque tranne un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla”: è evidentemente un tipo di convergenza piuttosto blanda.

⁽²⁸⁾Un esempio dell'utilità di questa indipendenza è riscontrabile nel moderno approccio alla Teoria della Probabilità, inaugurato da Kolmogorov attorno al 1930, il cui ambiente è un generico “spazio di probabilità”, un insieme dotato di una misura positiva (v. pag. 37) per la quale tutto l'insieme misuri 1.

2.1 Misura e integrale di Lebesgue

Sia X un insieme qualunque, e pensiamo di voler introdurre una *misura* μ dei suoi sottoinsiemi: ovvero, ad un $A \subset X$ si vuole associare la sua *misura* $\mu(A)$, che ci aspettiamo essere un numero ≥ 0 , eventualmente $+\infty$. Come fare? La prima esigenza è, da un lato, di poter misurare quanti più sottoinsiemi possibile di X ; ma, dall'altro, bisogna fare in modo che la misura abbia alcune proprietà sensatamente irrinunciabili, che ora elenchiamo.

- *Sufficiente stabilità per le operazioni insiemistiche*. Vorremmo che l'insieme dei sottoinsiemi μ -misurabili, oltre che ricco di elementi, fosse chiuso per le principali operazioni insiemistiche, in particolare per l'unione e l'intersezione (meglio se numerabili) e per la complementazione in X . In altre parole: se $A, B \subset X$ sono μ -misurabili vorremmo che lo fossero anche $A \cup B$, $A \cap B$ e $\mathbb{C}_X A = X \setminus A$; e che, se A_n è una famiglia numerabile di sottoinsiemi μ -misurabili, che tali fossero anche $\bigcap A_n$ e $\bigcup A_n$.⁽²⁹⁾
- *Isotonia*. Se $A \subset B$, vorremmo che $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- *Additività*. Vorremmo che la misura fosse additiva sulle unioni disgiunte, meglio se numerabili. In altre parole, se $A, B \subset X$ sono μ -misurabili e disgiunti, vorremmo che $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$; e che, meglio ancora, se A_n è una famiglia numerabile di sottoinsiemi μ -misurabili a due a due disgiunti, si avesse $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$.

In effetti, la teoria di Lebesgue viene sviluppata in tutta generalità (e senza problemi, casomai con maggior chiarezza) nell'ambito di uno *spazio di misura* $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ove X è un insieme qualunque, $\mathcal{M}$ è una collezione di parti di X che contiene lo stesso X ed è stabile per complementazione e unione numerabile,⁽³⁰⁾ e $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione non identicamente uguale a $+\infty$ e numerabilmente additiva, ovvero tale che data una famiglia numerabile $A_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti si abbia $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$.⁽³¹⁾ Si dirà che μ è una *misura* (positiva) su X , e gli elementi di $\mathcal{M}$ (detta una σ -algebra di parti di X) si diranno i μ -*misurabili* di X .

Spazio di misura

Misura

Insiemi misurabili

Esempi. **(0)** (*Misura nulla*) Il primo esempio è quello della misura che vale sempre 0. **(1)** (*Misura che conta gli elementi*) Scelto $\mathcal{M} = P(X)$, per $A \subset X$ si definisca $\mu(A)$ come il numero di elementi di A (ponendo $\mu(A) = +\infty$ se A non è finito). **(2)** (*Misura concentrata in un punto*) Scelto $\mathcal{M} = P(X)$ e fissato $x_0 \in X$, per $A \subset X$ si definisca $\mu(A) = 0$ se $x_0 \notin A$ e $\mu(A) = 1$ se $x_0 \in A$. **(3)** Negli esempi

⁽²⁹⁾La misurabilità delle unioni numerabili sarebbe un primo evidente progresso rispetto a Riemann: ricordiamo che i singoli punti sono elementarmente misurabili (con misura nulla), ma non lo è la loro unione numerabile $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

⁽³⁰⁾Come conseguenza c'è stabilità anche per intersezione numerabile (per la dualità di de Morgan) e ovviamente anche per unione e intersezione finita; ma anche per la differenza, in quanto $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

⁽³¹⁾È semplice dimostrare che, allora, si ha anche $\mu(\emptyset) = 0$, e che valgono anche l'additività finita (cioè se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ sono a due a due disgiunti allora $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$) e l'isotonia (cioè se $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$).

precedenti si è sempre scelta la σ -algebra più larga possibile, ovvero $P(X)$; tuttavia la famiglia delle possibili σ -algebre su X è molto ricca, ed è impossibile non notare analogie con la nozione astratta di topologia. Per iniziare, all'estremo opposto di $P(X)$ c'è la σ -algebra “banale” $\{\emptyset, X\}$; e in generale, data una qualsiasi famiglia $\mathcal{P} \subset P(X)$, si può parlare di σ -algebra “generata da $\mathcal{P}$ ” come della più piccola σ -algebra contenente $\mathcal{P}$ (equivalentemente, l'intersezione di tutte le σ -algebre contenenti $\mathcal{P}$), ovvero tutti i suoi elementi, i complementari, le unioni (e intersezioni) numerabili, ... che potrebbe essere sensibilmente più piccola di $P(X)$. Ad esempio, se $X = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{P} = \{\{1\}\}$ allora tale σ -algebra è $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$; se X è qualsiasi e $\mathcal{P}$ è la famiglia dei suoi sottoinsiemi finiti, la “ σ -algebra dei finiti” è $P(X)$ se X è al più numerabile, altrimenti è più piccola di $P(X)$. Un altro esempio molto importante è quello in cui X è già uno spazio topologico, perché allora si può considerare la σ -algebra generata dalla sua topologia (ovvero la famiglia degli aperti), che conterrà dunque tutti gli aperti e tutti i chiusi così come le loro unioni e intersezioni numerabili: tale σ -algebra si dirà “di Borel”⁽³²⁾, e i suoi elementi i “boreliani” di X . La σ -algebra di Borel è in generale più piccola di $P(X)$ (lo vedremo più tardi per $X = \mathbb{R}$, anche se la costruzione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non boreliano per la topologia euclidea non sarà molto facile).

Come gli esempi hanno illustrato, le nozioni di “ σ -algebra” e “sottoinsieme misurabile” hanno evidenti parallelismi con quelle di “topologia” e “sottoinsieme aperto” (più tardi, come già preannunciato, alla lista si aggiungeranno anche “funzione misurabile” da un lato e “funzione continua” dall'altro), e tali analogie si apprezzerrebbero particolarmente in una trattazione astratta della teoria di Lebesgue. Tuttavia d'ora in poi ci concentreremo su $X = \mathbb{R}^n$ (che penseremo dotato dell'usuale topologia euclidea), con lo scopo di costruirvi la *misura di Lebesgue* λ_n . In questo ambito più specifico, alle richieste precedenti dovremmo aggiungere anche le seguenti, che salvano gli aspetti più familiari della misura elementare di Riemann.

- *Estensione della misura elementare.* Vorremmo che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ elementarmente misurabili rimanessero λ_n -misurabili, e che per essi le due misure coincidessero. In particolare, per un intervallo limitato $I = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ (con o senza estremi) dovrebbe essere senz'altro $\lambda_n(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.
- *Invarianza per isometrie.* La misura di $A \subset \mathbb{R}^n$ non dovrebbe cambiare se ad A si applica una qualsiasi isometria di $\mathbb{R}^n$, ovvero una funzione di $\mathbb{R}^n$ in sé che conserva le distanze (ad esempio, una traslazione per un vettore fissato).

Iniziamo dunque la costruzione di λ_n (in particolare, della σ -algebra su cui è definita). Il primo passo è di definire λ_n sugli intervalli: se $I = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ (eventualmente semiaperto o anche chiuso; ed eventualmente degenerare), si pone $\lambda_n(I) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$, come ci si attende. Il secondo è, poi, di definire una quantità λ_n^* (detta *misura esterna*) che ha senso per ogni sottoinsieme: dato $A \subset \mathbb{R}^n$, si pone

Misura esterna

$$\lambda_n^*(A) := \inf_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_n(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ successione di intervalli di } \mathbb{R}^n \text{ tale che } A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k \right\}.$$

In altre parole, si considerano i vari ricoprimenti al più numerabili di A fatti di intervalli n -dimensionali, se ne calcolano le somme delle misure degli intervalli che li compongono,

⁽³²⁾dal matematico francese Emile Borel (1871-1956), che fu anche un insigne politico.

e poi si considera l'estremo inferiore di tali somme al variare dei possibili ricoprimenti.⁽³³⁾

Proposizione 2.1.1. *La misura esterna $\lambda_n^* : P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$:*

- (a) *rispetta la misura degli intervalli* (ovvero se I è un intervallo vale $\lambda_n^*(I) = \lambda_n(I)$);
- (b) *vale $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$* ;
- (c) *è isotona* (ovvero se $A \subset B$ vale $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(B)$);
- (d) *è numerabilmente subadditiva* (ovvero: data $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vale $\lambda_n^*(\bigcup A_k) \leq \sum \lambda_n^*(A_k)$).

Dimostrazione. (a) Poiché I ricopre se stesso vale $\lambda_n^*(I) \leq \lambda_n(I)$; il viceversa è basato sul fatto che la misura elementare *degli intervalli* è numerabilmente additiva, fatto che a dispetto delle apparenze ha una dimostrazione un po' macchinosa che omettiamo. (b) Ovvio ($\emptyset$ è ricoperto da un intervallo degenere). (c) Ovvio (l'insieme dei ricoprimenti di A contiene quelli di B). (d) Se per qualche k si ha $\lambda_n^*(A_k) = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Se invece $\lambda_n^*(A_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, preso $\varepsilon > 0$ consideriamo un ricoprimento $(I_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ di A_k tale che $\sum_j \lambda_n(I_{k,j}) \leq \lambda_n^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$: si ha allora che $(I_{k,j})_{(k,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di $\bigcup_k A_k$, e vale dunque $\lambda_n^*(\bigcup_k A_k) \leq \sum_{(k,j)} \lambda_n(I_{k,j}) = \sum_k (\sum_j \lambda_n(I_{k,j})) \leq \sum_k (\lambda_n^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon) = \sum_k \lambda_n^*(A_k) + \varepsilon$, da cui la tesi. $\square$

La misura esterna λ_n^* non è tuttavia numerabilmente additiva, in quanto esiste (ma non lo mostriamo) qualche esempio particolarmente tecnico di successione (A_k) di sottoinsiemi a due a due disgiunti per cui $\lambda_n^*(\bigcup A_k) < \sum \lambda_n^*(A_k)$. Poiché però rinunciare all'additività numerabile è impraticabile, l'idea è di restringere λ_n^* a una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ in cui le cose funzionino bene.

Teorema - Definizione 2.1.2. (Carathéodory) *Sia $\mathcal{M}_n$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che “decompone additivamente la misura esterna”:*

$$\mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : \lambda_n^*(E) = \lambda_n^*(E \cap A) + \lambda_n^*(E \setminus A) \text{ per ogni } E \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Allora:

- (a) $\mathcal{M}_n$ è una σ -algebra contenente tutti gli intervalli, tutti i sottoinsiemi di misura esterna nulla (tra cui quelli finiti o numerabili), e in generale tutti gli aperti e i chiusi euclidei (dunque i boreliani) di $\mathbb{R}^n$;
- (b) la restrizione di λ_n^* a $\mathcal{M}_n$ è una misura, in particolare è numerabilmente additiva (ovvero: data in $\mathcal{M}_n$ una famiglia numerabile $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti vale $\lambda_n^*(\bigcup A_k) = \sum \lambda_n^*(A_k)$). Tale misura estende quella di Peano-Jordan, ed è invariante per isometrie (in particolare per traslazioni).⁽³⁴⁾

Gli elementi di $\mathcal{M}_n$ sono detti i sottoinsiemi Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}^n$, e la restrizione di λ_n^* a $\mathcal{M}_n$ (denotata coerentemente con λ_n) è detta misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

Misurabili
secondo Lebesgue

Misura di Lebesgue

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione (non particolarmente difficile, ma un po' lunga e tecnica) che $\mathcal{M}_n$ è una σ -algebra contenente tutti gli intervalli, che la restrizione di λ_n^* a $\mathcal{M}_n$ è una misura (in particolare che è numerabilmente additiva) che estende quella di Peano-Jordan e che è invariante per isometrie. Per il resto, sia $\lambda^*(A) = 0$ e consideriamo un qualsiasi $E \subset \mathbb{R}^n$. Essendo $E \cap A \subset A$ si ha

⁽³³⁾Si noti che non serve richiedere che i ricoprimenti da considerare siano fatti con soli intervalli a due a due disgiunti (si potrebbe anche richiederlo, tanto poi, considerando l'inf, il risultato non cambierebbe).

⁽³⁴⁾Per la nozione di “isometria” si vada anche a pag. 48.

per isotonia $\lambda^*(E \cap A) \leq \lambda^*(A) = 0$ e dunque $\lambda_n^*(E) \leq \lambda_n^*(E \setminus A)$ per subadditività; d'altra parte vale sempre per isotonia $\lambda^*(E \setminus A) \leq \lambda^*(E)$, dunque $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \setminus A) = \lambda_n^*(E \cap A) + \lambda_n^*(E \setminus A)$. Ciò mostra che A è misurabile. Notiamo poi che in particolare i punti hanno misura esterna nulla, e che dunque per subadditività anche tutti gli insiemi finiti o numerabili hanno misura esterna nulla. Ogni aperto euclideo U di $\mathbb{R}^n$ è poi misurabile, in quanto esprimibile come unione numerabile di intervalli (per ogni suo punto a coordinate razionali si consideri un intervallo con lati di lunghezza razionali centrato in esso e contenuto in U : allora U è l'unione, numerabile, di tali intervalli), e di conseguenza ogni boreliano perché $\mathcal{M}_n$ è una σ -algebra. $\square$

La classe $\mathcal{M}_n$ dei sottoinsiemi Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}^n$ è come visto molto ampia, al punto che descrivere sottoinsiemi non misurabili è alquanto complicato: nella pratica la misurabilità è pressoché sempre verificata. Diamo comunque ora un classico esempio di insieme non misurabile.

Esempio. (Insieme di Vitali) A tutt'oggi, l'esempio più semplice e noto di insieme non Lebesgue-misurabile è il seguente $V \subset \mathbb{R}$ dovuto a Vitali, che fa ricorso all'assioma della scelta. Sia V un sottoinsieme di $[0, 1[$ costruito scegliendo esattamente un solo elemento per classe di congruenza modulo $\mathbb{Q}$ (dunque V è fatto da elementi a distanza irrazionale l'uno dall'altro, e per ogni elemento $x_0 \in [0, 1[$ ne esiste uno e uno solo in V a distanza razionale da x_0): un tale insieme esiste per l'assioma della scelta. Se V fosse misurabile, tale sarebbe ogni suo traslato $\alpha + V$, e si avrebbe $\lambda_1(\alpha + V) = \lambda_1(V)$ (la misura λ_1 è invariante per traslazioni). Sia ora $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap]-1, 1[$ una qualsiasi biiezione, e definiamo $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n + V)$: tale W è unione numerabile di insiemi a due a due disgiunti (infatti in questa unione i q_n sono razionali, e se fosse $(q_{n'} + V) \cap (q_{n''} + V) \neq \emptyset$ esisterebbero $x, y \in V$ tali che $q_{n'} + x = q_{n''} + y$, da cui $|x - y| = |q_{n'} - q_{n''}| \in \mathbb{Q}$, assurdo), e se V fosse misurabile lo sarebbe anche W , perciò per additività numerabile si avrebbe $\lambda_1(W) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1(q_n + V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_1(V)$. Ma allora, se fosse $\lambda_1(V) = 0$ si avrebbe $\lambda_1(W) = 0$, assurdo perché $[0, 1[\subset W$ (dunque per isotonia $\lambda_1(W) \geq 1$); e se fosse $\lambda_1(V) > 0$ si avrebbe $\lambda_1(W) = +\infty$, pure assurdo perché $W \subset]-1, 2[$ (dunque per isotonia $\lambda_1(W) \leq 3$). Si deve per forza concludere che V non è misurabile.

Di particolare importanza è il ruolo svolto dai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili con misura nulla, detti *Lebesgue-trascurabili* (oppure λ_n -trascurabili, o *trascurabili in $\mathbb{R}^n$* sottointendendo che si sta parlando della misura di Lebesgue). Una proprietà $P(x)$ dei punti x di un $E \subset \mathbb{R}^n$ si dirà essere vera *quasi ovunque* (spesso abbreviato in *q.o.*)⁽³⁵⁾ in E se l'insieme $\{x \in E : P(x) \text{ è falsa}\}$ è trascurabile.

Insiemi trascurabili

Quasi ovunque (q.o.)

Esempio. Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dirà “continua q.o. in E ” se l'insieme dei punti di discontinuità in E è trascurabile: tali sono ad esempio le funzioni “parte intera” e “parte frazionaria” in $\mathbb{R}$ (i punti di discontinuità sono quelli di $\mathbb{Z}$, che è trascurabile in $\mathbb{R}$).

Proposizione 2.1.3. *Valgono le seguenti proprietà degli insiemi trascurabili.*

- (a) *Un'unione numerabile di insiemi trascurabili in $\mathbb{R}^n$ è ancora trascurabile in $\mathbb{R}^n$.*
- (b) *Un sottoinsieme di un insieme trascurabile in $\mathbb{R}^n$ è ancora trascurabile in $\mathbb{R}^n$.*
- (c) *Le sottovarietà proprie (cioè di dimensione $\leq n - 1$) di $\mathbb{R}^n$ sono trascurabili in $\mathbb{R}^n$, così come le loro unioni finite o numerabili.*

⁽³⁵⁾in inglese *almost everywhere*, abbreviato *a.e.*.

Dimostrazione. (a) Segue dall'additività numerabile di λ_n . (b) Si tratta solo di vedere che un sottoinsieme di un insieme trascurabile sia misurabile: ma ciò segue dal Teorema 2.1.2, perché per isotonia ha anch'esso misura esterna nulla. (c) (cenno) Il sottospazio vettoriale $V_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k \leq n-1$ generato dai primi k vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ ha chiaramente misura nulla (è ricoperto da una famiglia numerabile di intervalli degeneri); più generalmente, l'idea è che una sottovarietà in $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k \leq n-1$ è localmente omeomorfa a V_k . L'affermazione sulla trascurabilità delle unioni finite o numerabili discende poi da (a). $\square$

Esempi. (1) Un singolo punto è trascurabile in $\mathbb{R}$, e lo stesso vale per le famiglie numerabili di punti (come $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$, o l'insieme di Dirichlet $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$). (2) In $\mathbb{R}^2$ sono trascurabili i singoli punti, le curve regolari, e loro unioni numerabili. (3) In $\mathbb{R}^3$ sono trascurabili i singoli punti, le curve regolari, le superfici regolari e le loro unioni numerabili.

Dalla Proposizione 2.1.3(a) segue che tutti i sottoinsiemi finiti o numerabili di $\mathbb{R}^n$ sono trascurabili. E il viceversa? Ovvero: un sottoinsieme trascurabile di $\mathbb{R}^n$ è necessariamente numerabile? Ora, se $n \geq 2$ la risposta è ovviamente no (si pensi a una curva in $\mathbb{R}^2$). Ma ciò è falso pure in $\mathbb{R}$, anche se trovare un esempio di insieme trascurabile non numerabile è in questo caso più delicato: quello che segue è forse il più celebre.

Esempio. (Insieme di Cantor) Nella retta reale sia C_1 ciò che si ottiene rimuovendo dall'intervallo $[0, 1]$ il terzo mediano aperto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, ovvero $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$; per $n \geq 2$ si ottenga poi C_n rimuovendo da C_{n-1} i terzi mediani aperti di ciascun intervallo che compone C_{n-1} (dunque ad esempio $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, e così via); si ponga infine $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. L'insieme di Cantor C è trascurabile: infatti C_n è un ricoprimento finito di C fatto da 2^n intervalli ciascuno di misura $\frac{1}{3^n}$, dunque per definizione si ha $\lambda_1^*(C) \leq 2^n \frac{1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$ per ogni $n \geq 1$, da cui $\lambda_1^*(C) = 0$, il che implica (Teorema 2.1.2(a)) che C è misurabile con misura nulla, ovvero trascurabile. D'altra parte C ha la cardinalità del continuo, essendo idempotente a $[0, 1]$. Infatti, consideriamo l'espressione in base 3 dei numeri in $[0, 1]$, ovvero $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0, 1, 2\}$, che scriveremo anche $0, a_1 a_2 a_3 \dots_{(3)}$.⁽³⁶⁾ Ora, per costruire C_1 si levano i numeri del tipo $0, 1**** \dots_{(3)}$, ove $**** \dots$ è una successione di elementi in $\{0, 1, 2\}$ diversa dagli estremi $0000 \dots$ e $2222 \dots$ (perché $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ non vanno tolti); poi per costruire C_2 si levano anche tutti i numeri del tipo $0, 01**** \dots_{(3)}$ e $0, 21**** \dots_{(3)}$, e così via: insomma, i numeri che restano in C sono quelli in cui $a_n \in \{0, 2\}$ per ogni $n \geq 1$, dunque C è in corrispondenza biunivoca con $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ (funzioni $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}$, ovvero successioni in $\{0, 2\}$), che a sua volta lo è con $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ma quest'ultimo insieme è in corrispondenza biunivoca con tutto l'intervallo $[0, 1]$, pensando stavolta all'espressione binaria. In conclusione C (sottoinsieme di $[0, 1]$) è in realtà in corrispondenza biunivoca con tutto $[0, 1]$ e dunque ha la sua cardinalità, che è quella del continuo.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ è detta *misurabile* se gli insiemi “di sopralivello”

Funzione misurabile

$$f^{-1}(] \alpha, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$$

⁽³⁶⁾ Ad esempio $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0,12_{(3)}$; $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 0,1111 \dots_{(3)}$; $\frac{1}{3} = 0,1_{(3)} = 0,0222 \dots_{(3)}$; $1 = 0,2222 \dots_{(3)}$ (che si scriverebbe anche $1,0_{(3)}$).

sono misurabili per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.⁽³⁷⁾ La vastità della famiglia degli insiemi misurabili fa ben comprendere come la classe delle funzioni misurabili sia molto estesa: praticamente lo sono tutte le funzioni con cui si ha a normalmente che fare. Il giudizio è rafforzato dalla seguente proposizione, che mostra l'elasticità della proprietà di misurabilità.

Proposizione 2.1.4. *Le funzioni misurabili godono delle seguenti proprietà.*

- (a) *La definizione di misurabilità può essere modificata, senza cambiare la classe delle funzioni che ne godono, sostituendo $>$ con $<$, $\geq$ oppure $\leq$, o anche richiedendo che l'antiimmagine di ogni aperto (o di ogni chiuso) di $\mathbb{R}$ sia misurabile.*
- (b) *Se f è misurabile, tali sono anche $|f|$, f^+ e f^- .*⁽³⁸⁾
- (c) *Se f e g sono misurabili e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $F(f(x), g(x))$ è misurabile. In particolare, $f + g$ e fg sono misurabili.*
- (d) *Se f_n è una successione di funzioni misurabili, tali sono anche $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.*⁽³⁹⁾ *In particolare, il limite di una successione puntualmente convergente di funzioni misurabili è misurabile.*

Dimostrazione. (a) Si ha $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_n \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha - \frac{1}{n}\}$; $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\} = \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n}(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\})$; eccetera. Gli intervalli aperti limitati sono intersezioni di semirette aperte, un aperto di $\mathbb{R}$ è unione arbitraria di intervalli aperti, e un chiuso di $\mathbb{R}$ è il complementare di un aperto di $\mathbb{R}$. (d) Posto $g(x) = \sup_n f_n(x)$ si ha $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > \alpha\} = \bigcup_n \{x \in \mathbb{R}^n : f_n(x) > \alpha\}$; si noti poi che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_m (\sup_{n \geq m} f_n(x))$. Stesse considerazioni per $\inf$ e $\liminf$. (b) Vale $|f| = \sup\{f, -f\}$, $f^+ = \sup\{f, 0\}$, $f^- = \sup\{-f, 0\}$, e si applichi (d). (c) Preso $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $U_\alpha = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : F(u, v) > \alpha\}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$, che dunque può essere espresso come unione numerabile di una famiglia di rettangoli aperti limitati $]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$. Si ha allora $\{x \in \mathbb{R}^n : F(f(x), g(x)) > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (f(x), g(x)) \in U_\alpha\} = \bigcup_n \{x \in \mathbb{R}^n : a_n < f(x) < b_n, c_n < g(x) < d_n\} = \bigcup_n \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) >$

⁽³⁷⁾Già a questo livello si nota come la teoria di Lebesgue, a differenza di quella di Riemann, punti l'attenzione più sul codominio che sul dominio: liberamente parlando, mentre Riemann divide il dominio in intervalli per poi approssimare il volume compreso tra essi e il grafico tramite rettangoli, Lebesgue divide il codominio a strati e, per ogni quota, cerca di misurare quanti sono gli elementi del dominio che vanno sopra tale quota. Come si può intuire, tali insiemi “di sopralivello” sono sottoinsiemi del dominio che possono assumere delle forme anche molto complicate, e dare loro una misura diventa ben più impegnativo che darla ai soli intervalli, o pluriintervalli: è dunque comprensibile che la prima preoccupazione di Lebesgue sia stata quella di estendere quanto possibile la classe degli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.

⁽³⁸⁾Viceversa, non è sempre vero che se $|f|$ è misurabile allora lo è anche f . Per vederlo, si prenda $V \subset \mathbb{R}$ non misurabile (ad esempio l'insieme di Vitali poco fa), e si definisca $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come $f = 2\chi_V - 1$ (ove χ_V è la funzione caratteristica di V): pertanto f , che vale 1 su V e -1 su $\mathbb{R} \setminus V$, è evidentemente non misurabile (infatti $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} = V$), mentre $|f|$ (la costante 1) è misurabile.

⁽³⁹⁾In generale, data una successione di numeri reali c_n , sia E_c l'insieme dei suoi “punti-limite” in $\widetilde{\mathbb{R}}$, ovvero $\gamma \in E_c$ quando esiste una sottosuccessione di c_n che ha come limite γ (si noti che E_c non è mai vuoto: infatti se la successione è illimitata esiste una sottosuccessione che diverge a uno tra $\mp\infty$, mentre se è limitata, come sappiamo, ammette almeno una sottosuccessione convergente): si pone allora $\limsup c_n := \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}} E_c$ e $\liminf c_n := \inf_{\widetilde{\mathbb{R}}} E_c$. A differenza del limite $\lim c_n$, che può non esistere, $\limsup c_n$ e $\liminf c_n$ esistono sempre, e anzi si ha che $\lim c_n$ esiste se e solo se $\limsup c_n = \liminf c_n$ (in tal caso esso coincide col loro valore comune, e ovviamente E_c è costituito dal solo limite). Si dimostra facilmente che $c^* := \limsup c_n$ ha le seguenti proprietà caratteristiche (a-b) (quelle di $c_* := \liminf c_n$ sono le analoghe speculari): (a) $c^* \in E_c$, (b) per ogni $x > c^*$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $c_n < x$ per ogni $n \geq N$. Inoltre ad esempio $\limsup(-c_n) = -\liminf c_n$, e se $c'_n \leq c''_n$ definitivamente allora $\liminf c'_n \leq \liminf c''_n$ e $\limsup c'_n \leq \limsup c''_n$. Diamo un paio di esempi: $\limsup(-1)^n = 1$ e $\liminf(-1)^n = -1$, $\limsup(\frac{n}{n+1} - 2\sin n) = 3$ e $\liminf(\frac{n}{n+1} - 2\sin n) = -1$.

$a_n\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < b_n\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > c_n\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < d_n\}$, e ognuno degli insiemi dentro le parentesi è misurabile. $\square$

Per definire l'integrale di Lebesgue si parte dalle *funzioni semplici*, che sono per definizione quelle che assumono solo un insieme finito di valori: le più facili sono le funzioni caratteristiche di un sottoinsieme, $\chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e tutte le altre sono loro combinazioni lineari, ovvero del tipo $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ (gli E_j possono anche non essere disgiunti: in tal caso, il valore assunto da s in un certo x sarà la somma degli α_j tali che $x \in E_j$).

Funzioni semplici

Proposizione 2.1.5. *Valgono i seguenti fatti.*

- (1) Una funzione semplice $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$, in cui gli α_j siano a due a due distinti e gli E_j a due a due disgiunti, è misurabile se e solo se tutti gli E_j sono misurabili.
- (2) Per ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ esiste una successione di funzioni semplici $s_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ che converge puntualmente a f . Se f è misurabile, si possono scegliere le s_m misurabili; e se $f \geq 0$ la successione s_m può essere scelta monotona crescente.

Dimostrazione. (1) Esercizio (basta applicare la definizione di misurabilità, e la stabilità degli insiemi misurabili per unione e differenza). (2) Se $f \geq 0$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $j = 1, \dots, m2^m$ si ponga $E_{m,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{j-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{j}{2^m}\}$, $F_m = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq m\}$ e $s_m = \sum_{j=1}^{m2^m} \frac{j-1}{2^m} \chi_{E_{m,j}} + m \chi_{F_m}$. Nel caso generale si ha $f = f^+ - f^-$: applicando il ragionamento precedente a f^+ e f^- si trovano due successioni di funzioni semplici $s_m^\pm$ che convergono puntualmente a $f^\pm$, e basta porre $s_m = s_m^+ - s_m^-$. Nei casi particolari evocati, questa successione ha le caratteristiche desiderate. $\square$

L'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ su un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ è allora definito per passaggi successivi, come segue.

- Se $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ è una funzione semplice in cui tutti gli E_j sono misurabili (in particolare, anche s è misurabile) e positiva⁽⁴⁰⁾ (cioè $\alpha_j \geq 0$ per ogni j), si pone

$$\int_E s(x) d\lambda_n := \sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_n(E_j \cap E)$$

(negli addendi si intende che $0 \cdot \infty = 0$; e il risultato potrebbe essere $+\infty$). L'additività di λ_n mostra che tale integrale è ben definito, cioè non dipende dalla particolare rappresentazione di s tramite funzioni caratteristiche.

- Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile e positiva, si pone

$$\int_E f(x) d\lambda_n := \sup \left\{ \int_E s(x) d\lambda_n : s \text{ semplice misurabile}, 0 \leq s \leq f \right\}$$

(si noti che se f è semplice, quest'ultima definizione ridà il risultato della precedente).

⁽⁴⁰⁾In questo capitolo, "positivo" viene generalmente usato come sinonimo di "non negativo", cioè " ≥ 0 ".

- Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione misurabile e almeno uno tra $\int_E f^+(x) d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x) d\lambda_n$ è finito, si pone

$$\int_E f(x) d\lambda_n := \int_E f^+(x) d\lambda_n - \int_E f^-(x) d\lambda_n$$

(tale valore potrebbe anche essere $+\infty$, oppure $-\infty$).

In particolare, f si dirà *integrabile su E* (alla Lebesgue) se entrambi $\int_E f^+(x) d\lambda_n$ e $\int_E f^-(x) d\lambda_n$ esistono finiti, e si scriverà $f \in L^1(E)$.

Funzione integrabile
Spazio $L^1(E)$

A livello di commento possiamo notare, come già accennato in precedenza, come l'integrale di Lebesgue, a differenza di quello di Riemann, punti l'attenzione più sul codominio che sul dominio. In effetti, mentre Riemann divide il dominio in intervalli per poi approssimare il volume compreso tra essi e il grafico tramite rettangoli, Lebesgue divide il codominio a strati e cerca di calcolare il volume di ciascuno strato: facendo leva, in questo procedimento, sulla sua vasta capacità di misurare sottoinsiemi del dominio.



Figura 2.1: (1) L'idea dell'integrale di Riemann. (2) L'idea dell'integrale di Lebesgue.

Elenchiamo ora diversi fatti di tipo teorico riguardanti l'integrale di Lebesgue. Al di là delle proprietà attese (come le tre —linearità, isotonia, disuguaglianza fondamentale— già note dall'integrale di Riemann), le cose più interessanti da notare sono la quasi ubiquità della condizione “q.o.” (ovvero “quasi-ovunque”, per la quale ci si accontenta che una proprietà puntuale sia valida almeno al di fuori di un insieme trascurabile) e i teoremi di passaggio al limite, molto più naturali ed efficienti di quelli di Riemann.

Proposizione 2.1.6. *Valgono le seguenti proprietà e risultati sull'integrale di Lebesgue.*

- (a) (Numerabile additività nel dominio) *Siano $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e si denoti $E = \bigcup_k E_k$. Se f è misurabile e positiva, o se $f \in L^1(E)$, allora*

$$\int_E f d\lambda_n = \sum_k \int_{E_k} f d\lambda_n.$$

- (b) (Linearità) *Dato un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$, l'insieme $L^1(E)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e l'integrale è una forma lineare su esso. In altre parole: se $f, g \in L^1(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha f + \beta g \in L^1(E)$, e vale*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\lambda_n = \alpha \int_E f d\lambda_n + \beta \int_E g d\lambda_n.$$

- (c) (Isotonia) Se $f, g \in L^1(E)$ e $f \leq g$ q.o. in E , allora $\int_E f d\lambda_n \leq \int_E g d\lambda_n$.
- (d) (Disuguaglianza fondamentale) Sia f misurabile. Allora si ha $f \in L^1(E)$ se e solo se $|f| \in L^1(E)$, e in tal caso vale $|\int_E f d\lambda_n| \leq \int_E |f| d\lambda_n$.
- (e) (Confronto) Siano f, g misurabili con $|f| \leq g$ q.o.. Se $g \in L^1(E)$ allora $f \in L^1(E)$. In particolare, se E ha misura finita e f è misurabile e limitata q.o. su E allora $f \in L^1(E)$.
- (f) (Integrale e trascurabilità) Vale $\int_E |f| = 0$ se e solo se f è nulla q.o. in E .
In generale, due funzioni misurabili che sono uguali q.o. hanno lo stesso integrale.⁽⁴¹⁾
- (g) (Integrale e limitatezza) Una funzione misurabile e limitata q.o. (ad esempio, continua su un compatto) è integrabile su ogni insieme di misura finita.
- (h) (Convergenza monotona per le funzioni positive) Sia E misurabile, e sia f_k una successione crescente di funzioni misurabili positive. Detto f il limite puntuale delle f_k ,⁽⁴²⁾ vale $\int_E f d\lambda_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k d\lambda_n$ (potrebbe essere $+\infty$).
- (i) (Convergenza monotona per le funzioni integrabili) Sia E misurabile, e sia f_k una successione monotona di funzioni integrabili. Allora la successione f_k converge puntualmente q.o. a una funzione f integrabile su E se e solo se la successione $\int_E f_k d\lambda_n$ è limitata; e in tal caso vale $\int_E f d\lambda_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k d\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- (l) (Convergenza dominata) Sia E misurabile, e sia f_k una successione di funzioni misurabili convergente q.o. a una funzione misurabile f . Se esiste $g \in L^1(E)$ tale che $|f_k| \leq g$ q.o., allora $f \in L^1(E)$ e vale $\int_E f d\lambda_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k d\lambda_n$.
- (m) (Integrazione di serie di funzioni positive) Sia E misurabile, e sia f_k una successione di funzioni misurabili positive. Posto $f(x) = \sum_k f_k(x)$ (eventualmente a valori estesi in $[0, +\infty]$), vale $\int_E f d\lambda_n = \sum_k \int_E f_k d\lambda_n$.

Dimostrazione. Omessa. □

Esaminiamo con maggior attenzione il rapporto con l'integrale di Riemann.

Proposizione 2.1.7. *Gli integrali di Riemann e di Lebesgue sono legati dai seguenti fatti.*

- (a) (Integrale su insiemi compatti) Sia K un compatto elementarmente misurabile di $\mathbb{R}^n$ –ad esempio, un intervallo, e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è Riemann-integrabile allora è anche Lebesgue-integrabile –ovvero $f \in L^1(K)$ – e i due integrali sono uguali.
Viceversa, se f è misurabile e limitata (dunque in particolare Lebesgue-integrabile), allora f è Riemann-integrabile se e solo se è continua q.o. in K .

⁽⁴¹⁾(Naturalmente quando l'integrale ha senso: dunque quando si sta parlando di funzioni positive, o più generalmente quando almeno uno tra gli integrali della parte positiva e negativa è finito.) Ciò che afferma l'enunciato è che, alterando una funzione misurabile su un insieme trascurabile del dominio (ponendo ad esempio ivi la funzione uguale a zero), il suo integrale non cambia. In effetti, per l'integrazione alla Lebesgue due funzioni uguali q.o. sono indistinguibili: un esempio evidente è quello della funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, che è nulla q.o. e dunque ha integrale nullo.

⁽⁴²⁾Il limite $f(x) := \lim_k f_k(x)$ esiste in $[0, +\infty]$ per ogni $x \in E$, perché $(f_k(x))_k$ è positiva e crescente.

- (b) (Integrale di Riemann generalizzato e integrale di Lebesgue) *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrabile. Allora f è Lebesgue-integrabile su I se e solo se è assolutamente Riemann-integrabile in senso generalizzato su I , e in tal caso l'integrale di Lebesgue di f su I è uguale all'integrale di Riemann generalizzato di f su I . In particolare, se f è Riemann-integrabile in senso generalizzato su I ma non assolutamente,⁽⁴³⁾ allora f non è Lebesgue-integrabile su I .*
- (c) (Teorema Fondamentale del Calcolo) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è Lebesgue-integrabile, posto $F(x) = \int_a^x f d\lambda_1$ vale $F'(x) = f(x)$ q.o. in $[a, b]$. Viceversa, sia $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a, b]$, e si ponga $f = F'$. Se f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$, allora vale $F(x) - F(a) = \int_a^x f d\lambda_1$.*

Dimostrazione. Omissa. □

Raduniamo ora i risultati più importanti per le applicazioni di calcolo. Negli enunciati che seguono si intende che $n = n' + n''$ con $n', n'' \in \mathbb{N}$, e

$$x = (x', x'') \quad \text{con} \quad x' = (x_1, \dots, x_{n'}) \in \mathbb{R}^{n'} \quad , \quad x'' = (x_{n'+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n''} ;$$

si denoteranno le proiezioni naturali di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}^{n'}$ e $\mathbb{R}^{n''}$ rispettivamente con

$$\pi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'} \quad , \quad \pi'(x) = x' \quad , \quad \pi'' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n''} \quad , \quad \pi''(x) = x'' ;$$

inoltre, dati un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, per $x' \in \mathbb{R}^{n'}$ si definiscono la x' -sezione di E e di f ponendo rispettivamente

$$E_{x'} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n''} : (x', x'') \in E\} \quad , \quad f_{x'} : E_{x'} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad f_{x'}(x'') = f(x', x'')$$

(analoghe definizioni si danno per $E_{x''}$ e $f_{x''} : E_{x''} \rightarrow \mathbb{R}$).

Proposizione 2.1.8. *Valgono i seguenti fatti.*

- (a) (Teorema di riduzione di Fubini) *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e f una funzione integrabile su E . Allora $f_{x'}$ è integrabile su $E_{x'}$ per q.o. $x' \in \pi'(E)$; la funzione (definita q.o. su $\pi'(E)$) data da $x' \mapsto \int_{E_{x'}} f(x', x'') d\lambda_{n''}(x'')$ è integrabile su $\pi'(E)$; e vale*

$$\int_E f d\lambda_n = \int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(x', x'') d\lambda_{n''}(x'') \right) d\lambda_{n'}(x') .$$

In particolare si intende che tutti gli integrali iterati al secondo membro al variare delle possibili decomposizioni $n = n' + n''$ e delle possibili sottofamiglie di variabili x' e x'' danno luogo al medesimo risultato.

- (b) (Teorema di integrabilità di Tonelli) *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e f una funzione misurabile su E . Se un qualsiasi integrale iterato del modulo*

$$\int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} |f(x', x'')| d\lambda_{n''}(x'') \right) d\lambda_{n'}(x')$$

esiste finito, allora f è integrabile su E (e per il calcolo si può applicare Fubini).

⁽⁴³⁾ad esempio, la funzione di Dirichlet $\frac{\sin x}{x}$ su $I = \mathbb{R}$.

- (c) (Cambio di variabili) Sia $\phi : A' \rightarrow A$ un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$, e sia E un sottoinsieme misurabile di A . Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, si ha che $f \in L^1(E)$ se e solo se $(f \circ \phi) |\det J_\phi| \in L^1(\phi^{-1}(E))$ (ove J_ϕ è lo jacobiano di ϕ), e vale

$$\int_E f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(x')) |\det J_\phi(x')| d\lambda_n(x') .$$

Dimostrazione. Omessa. □

Prima di dare qualche esempio, facciamo un paio di osservazioni.

- Il teorema di Fubini viene solitamente enunciato nella seguente notazione alternativa (che d'ora in poi useremo spesso e volentieri), in cui la misura λ_n su $\mathbb{R}^n$ viene indicata con dx e in cui è suggerito come essa sia in realtà interpretabile come “misura prodotto” delle misure $\lambda_{n'} = dx'$ su $\mathbb{R}^{n'}$ e $\lambda_{n''} = dx''$ su $\mathbb{R}^{n''}$:

$$\int_E f(x', x'') dx' dx'' = \int_{\pi'(E)} \left(\int_{E_{x'}} f(x', x'') dx'' \right) dx' .$$

Inoltre, per semplicità e rapidità è d'uso scrivere l'integrale iterato al secondo membro anche come

$$\int_{\pi'(E)} dx' \int_{E_{x'}} f(x', x'') dx'' ,$$

espressione in cui si intende che $f(x', x'')$ viene integrata prima rispetto a x'' su $E_{x'}$ (per un generico $x' \in \pi'(E)$) ottenendo così una funzione di x' che andrà poi integrata su $\pi'(E)$.

- Come già detto in precedenza, su un insieme di misura finita ogni funzione misurabile e limitata q.o. (ad esempio una funzione continua) è integrabile alla Lebesgue. Al di fuori di questo caso (dunque specialmente quando si ha a che fare con domini illimitati), il teorema di Tonelli costituisce il più utile criterio d'integrabilità alla Lebesgue: se l'integrale iterato del modulo della funzione esiste finito allora la funzione è integrabile, e per il calcolo del suo integrale si può applicare il teorema di Fubini. Va però fatta attenzione alla corretta applicazione del teorema di Tonelli (dunque usando il modulo), altrimenti si può incorrere in conclusioni errate: alcuni esempi sono mostrati più in basso.
- I cambi di variabile da tenere più presente sono senz'altro i seguenti.

- *Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$* . Posto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ con coordinate (x, y) , e $A' =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ con coordinate (r, θ) , si pone

$$(x, y) = \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) .$$

Vale dunque $J_\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$, e $\det J_\phi = r$.

Coordinate
polari

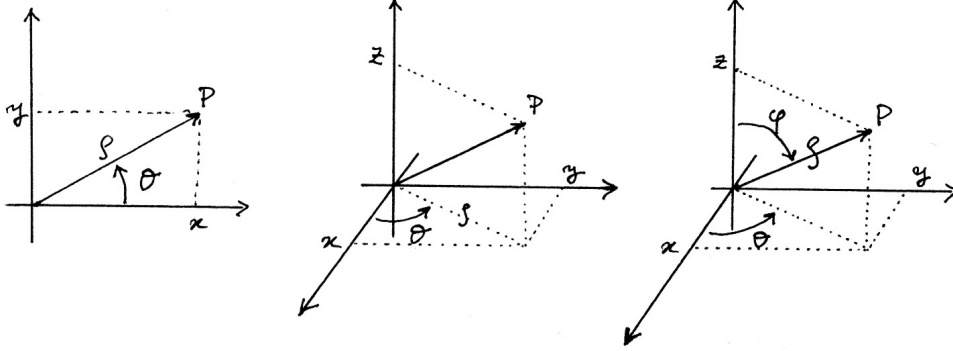


Figura 2.2: (a) Coordinate polari nel piano. (b) Coordinate cilindriche e (c) coordinate sferiche nello spazio.

- *Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$* . Posto $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$ con coordinate (x, y, z) , e $A' =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ con coordinate (r, θ, z) , si pone

Coordinate
cilindriche

$$(x, y, z) = \phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) .$$

$$\text{Vale } J_\phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } \det J_\phi = r .$$

- *Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$* . Posto $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$ con coordinate (x, y, z) , e $A' =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ con coordinate (r, θ, φ) , si pone

Coordinate
sferiche

$$(x, y, z) = \phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) .$$

$$\text{Vale } J_\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}, \text{ e } |\det J_\phi| = r^2 \sin \varphi .$$

- *Trasformazioni affini, isometrie, omotetie*. In uno spazio euclideo V ,⁽⁴⁴⁾ una “trasformazione affine” $T : V \rightarrow V$ è una funzione del tipo $T(v) = \alpha(v) + v_0$, ove $\alpha : V \rightarrow V$ è una funzione lineare (detta anche “parte lineare” di T) mentre v_0 è un vettore fissato che dà luogo a una traslazione. D’altra parte, un’ “isometria” è un autodiffeomorfismo $\phi : V \rightarrow V$ che conserva le distanze euclidee, ovvero tale che $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ per ogni $v, w \in V$: è noto che le isometrie sono tutte e sole le trasformazioni affini la cui parte lineare è una trasformazione ortogonale (dunque tale che $\alpha^t = \alpha^{-1}$)⁽⁴⁵⁾, che descrive una rotazione seguita eventualmente da una riflessione rispetto a un iperpiano di V . Un altro esempio notevole di trasformazione affine è dato dall’ “omotetia” di rapporto $\mu > 0$, ovvero $T_\mu = \mu \text{id}_V$: l’effetto è evidentemente quello di dilatare

Trasformazioni affini

Isometrie

⁽⁴⁴⁾ Si ricorda che “euclideo” significa che V è di dimensione finita ed è munito di un prodotto scalare.

⁽⁴⁵⁾ Data una funzione lineare $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$, la *funzione trasposta* $\alpha^t : V_2^* \rightarrow V_1^*$ è definita così: dato un covettore $\varphi \in V_2^*$ (ovvero una funzione lineare $\varphi : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$) si pone $\alpha^t(\varphi) := \varphi \circ \alpha \in V_1^*$. Se sia V_1 che V_2 sono spazi euclidei allora ci sono le già note identificazioni canoniche $V_1 \simeq V_1^*$ e $V_2 \simeq V_2^*$, tramite le quali si può interpretare la trasposta come una funzione lineare $\alpha^t : V_2 \rightarrow V_1$, quella che associa ad un vettore $v_2 \in V_2$ l’unico vettore $v_1 \in V_1$ tale che $v_1 \cdot v = \alpha(v) \cdot v_2$ per ogni $v \in V_1$: e in tal caso α^t è rappresentata in coordinate dalla matrice trasposta di quella di α , com’è lecito attendersi.

tutte le distanze di un fattore μ .

Passando in coordinate (pensando allora a $V = \mathbb{R}^n$ col consueto prodotto scalare euclideo) una trasformazione affine $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è dunque del tipo $T(x) = Ax + b$ ove b è un vettore fissato di $\mathbb{R}^n$ e A è una matrice $n \times n$: se E è un sottoinsieme misurabile limitato di $\mathbb{R}^n$ (dunque la sua misura $\lambda_n(E)$ è finita), per il cambio di variabili si ha $\lambda_n(T(E)) = |\det A| \lambda_n(E)$. Si ha un'isometria se e solo se $|\det A| = 1$, ovvero $\det A = \pm 1$: in tal caso il volume di E viene preservato. Nel caso invece dell'omotetia di rapporto μ si ha $\det A = \mu^n$, dunque $\lambda_n(T_\mu(E)) = \mu^n \lambda_n(E)$ (com'è lecito attendersi, se le distanze sono dilatate di un fattore μ allora i volumi n -dimensionali vengono dilatati di un fattore μ^n).

Esempi. (1) La funzione $f(x, y) = 3x^2y - 1$ è continua, dunque è integrabile su ogni compatto di $\mathbb{R}^2$: calcoliamone gli integrali sul rettangolo $D_1 = [-1, 2] \times [0, 1]$ e sul triangolo D_2 di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$. • La proiezione di D_1 su x è $[-1, 2]$, e per un generico $x \in [-1, 2]$ la x -sezione di D_1 su y è sempre $[0, 1]$: pertanto per Fubini si ha $\int_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 (3x^2y - 1) dy = \int_{-1}^2 (\frac{3}{2}x^2y^2 - y)_{y=0}^{y=1} dx = \int_{-1}^2 (\frac{3}{2}x^2 - 1) dx = (\frac{1}{2}x^3 - x)_{x=-1}^{x=2} = (2) - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Invertendo l'ordine delle integrazioni il risultato non deve cambiare: infatti la proiezione di D_1 su y è $[0, 1]$, e per un generico $y \in [0, 1]$ la y -sezione di D_1 su x è sempre $[-1, 2]$, e si trova $\int_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^2 (3x^2y - 1) dx = \int_0^1 (x^3y - x)_{x=-1}^{x=2} dy = \int_0^1 (9y - 3) dy = (\frac{9}{2}y^2 - 3y)_{y=0}^{y=1} = (\frac{3}{2}) - (0) = \frac{3}{2}$. • La proiezione di D_2 su y è $[0, 1]$, e per un generico $y \in [0, 1]$ la y -sezione di D_2 su x è $[y, 2 - y]$: si ha dunque per Fubini $\int_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (3x^2y - 1) dx = \int_0^1 (x^3y - x)_{x=y}^{x=2-y} dy = \int_0^1 (-2y^4 + 6y^3 - 12y^2 + 10y - 2) dy = (-\frac{2}{5}y^5 + \frac{3}{2}y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 2y)_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{10}$. Anche in questo caso proviamo a invertire l'ordine. La proiezione di D_2 su x è $[0, 2]$; per un generico $x \in [0, 1]$ la x -sezione di D_2 su y è $[0, x]$, mentre per un generico $x \in [1, 2]$ è $[0, 2 - x]$: si ottiene allora $\int_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x (3x^2y - 1) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (3x^2y - 1) dy = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^2y^2 - y)_{y=0}^{y=x} dx + \int_1^2 (\frac{3}{2}x^2y^2 - y)_{y=0}^{y=2-x} dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^4 - x) dx + \int_1^2 (\frac{3}{2}x^2(2-x)^2 - (2-x)) dx$, che a conti fatti darà ancora $-\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$. (2) (Area di una zona piana descritta in coordinate polari) Si consideri una zona di piano cartesiano in coordinate polari data da $D = \{(\rho, \theta) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)\}$ per certi $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ e certe funzioni $0 \leq \rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$. Usando il cambio di variabili polari si ottiene

$$\text{Area}(D) = \int_D dx dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho = \int_\alpha^\beta (\frac{1}{2}\rho^2)_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\rho_2(\theta)^2 - \rho_1(\theta)^2) d\theta.$$

Ad esempio, la *cardioide* (Figura 2.3(a)) è la curva polare nel piano data da $r(\theta) = a(1 + \cos \theta)$, ove $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$: l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva risulta pertanto $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2(1 + \cos \theta)^2 - 0^2) d\theta = \frac{1}{2} a^2 (\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta))_0^{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 ((3\pi) - (0)) = \frac{3}{2} a^2 \pi$. Altro esempio: la zona $E = \{(x, y) : 2ax \leq x^2 + y^2 \leq 2bx, 0 \leq y \leq x\}$, ove $0 \leq a < b$ (Figura 2.3(b)) è descrivibile polarmente come $\{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 2a \cos \theta \leq \rho \leq 2b \cos \theta\}$, dunque la sua area è $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((2b \cos \theta)^2 - (2a \cos \theta)^2) d\theta = 2(b^2 - a^2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 2(b^2 - a^2) \frac{1}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta)_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2})(b^2 - a^2)$. (3) (Volume del cilindro, del cono e della sfera) Usando le coordinate cilindriche, il volume del cilindro E e del cono F di raggio di base R e altezza h sono rispettivamente $\text{Vol}(E) = \int_E d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h dz = R^2 \pi h$ e $\text{Vol}(F) = \int_F d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^{h(1-\frac{r}{R})} dz = h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r(1 - \frac{r}{R}) dr = 2\pi h (\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3R}r^3)_0^R = \frac{1}{3} R^2 \pi h$, come ben noto dalla geometria elementare. Usando invece le coordinate sferiche, il volume della sfera S di raggio R è $\text{Vol}(S) = \int_S d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = (\theta)_0^{2\pi} (\frac{1}{3}r^3)_0^R (-\cos \varphi)_0^\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$. Naturalmente avremmo potuto effettuare questi calcoli anche in coordinate cartesiane: operando ad esempio per “z-fette” (ovvero sezioni a una certa quota z), denotando con $C(\ell)$ il disco di raggio ℓ (che ha area $\ell^2 \pi$) si riottiene $\text{Vol}(E) = \int_0^h dz \int_{C(R)} dx dy = \int_0^h (R^2 \pi) dz = R^2 \pi h$, $\text{Vol}(F) = \int_0^h dz \int_{C(R(1-\frac{z}{h}))} dx dy = \int_0^h (R^2(1 - \frac{z}{h})^2 \pi) dz = R^2 \pi (-\frac{h}{3}(1 - \frac{z}{h})^3)_0^h = \frac{1}{3} R^2 \pi h$ e $\text{Vol}(S) = \int_{-R}^R dz \int_{C(\sqrt{R^2-z^2})} dx dy = \int_{-R}^R ((R^2 - z^2) \pi) dz = \pi (R^2 z - \frac{1}{3} z^3)_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$. (4) (Sull'applicazione del criterio d'integrabilità di Tonelli) Ci si chiede per

quali $a > 0$ la funzione e^{-xy^2} è integrabile sulla striscia verticale illimitata $E(a) = [0, a] \times [0, +\infty[$, e di calcolare in tal caso l'integrale. Per rispondere circa l'integrabilità è qui il caso di usare il teorema di Tonelli che, essendo la funzione positiva su $E(a)$, ci darà direttamente il valore dell'eventuale integrale (quando finito) attraverso Fubini. Usando il cambio $u = y\sqrt{x}$ e il valore dell'integrale della gaussiana $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ (per il calcolo vedi più in basso) si ha $\int_0^a dx \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy = \int_0^a dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-u^2} du = (\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx) (\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (2\sqrt{x})_0^a = \sqrt{\pi a}$: tale valore è finito per ogni $a > 0$, dunque la risposta è che la funzione è integrabile su $E(a)$ per ogni $a > 0$ con valore $\sqrt{\pi a}$. D'altra parte, come detto bisogna porre attenzione ad applicare correttamente Tonelli, perché altrimenti si possono dare conclusioni sbagliate. Ad esempio, si consideri la funzione (misurabile perché continua q.o.) $f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ e da $f(0, 0) = 0$: se ad essa si applica uno dei due integrali iterati senza modulo si ottiene 0, ma in effetti essa non è integrabile su $[0, 1]^2$ (infatti l'integrale iterato non dà ivi valore finito, perché ad esempio $u(y) := \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx$ vale 0 per $y = 0$ e vale $-\frac{1}{2}(\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y})$ per $y > 0$, dunque $\int_0^1 u(y) dy$ non è finito) e perciò non può esserlo nemmeno su $[-1, 1]^2$, perché se lo fosse lo dovrebbe essere anche su ogni compatto dentro $[-1, 1]^2$, come è appunto $[0, 1]^2$. Qui l'errore è stato di non considerare il modulo nell'integrale iterato (che infatti col modulo non dà risultato finito, dunque Tonelli giustamente non si applica). Altro esempio classico è $g : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ e da $g(0, 0) = 0$: qui i due integrali iterati senza modulo danno valori diversi a seconda che si parta con x o con y (viene $\mp \frac{\pi}{4}$), dunque g non può essere integrabile su $[0, 1]^2$ perché, se lo fosse, per Fubini i due integrali iterati dovrebbero essere uguali. Coerentemente, anche in questo caso l'integrale iterato del modulo non è finito, dunque Tonelli non si applica e non c'è contraddizione. **(5) (Integrale di Dirichlet)** Come detto (vedi Proposizione 2.1.7), la funzione di Dirichlet $\frac{\sin x}{x}$, essendo Riemann-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ ma non assolutamente integrabile, non è Lebesgue-integrabile; tuttavia il valore dell'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ può essere calcolato come segue. Per iniziare, usando Tonelli mostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ è integrabile sulla striscia verticale $[0, 2k\pi] \times [0, +\infty[$: in effetti si ha $\int_0^{2k\pi} |\sin x| dx \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{2k\pi} |\sin x| (-\frac{e^{-xy}}{x})_{y=0}^{y=+\infty} dx = \int_0^{2k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$, che è finito (si noti che l'integrale in y è finito tranne che per $x = 0$, che è un punto e dunque ha misura nulla). Applicando allora Fubini si ottiene in modo simile $\int_{[0, 2k\pi] \times [0, +\infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, ma d'altra parte invertendo l'ordine d'integrazione si ha anche $\int_{[0, 2k\pi] \times [0, +\infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{2k\pi} e^{-xy} \sin x dx$; una primitiva rispetto a x della funzione $e^{-xy} \sin x$ si può calcolare facilmente per parti e vale $-\frac{1}{1+y^2} e^{-xy} (\cos x + y \sin x)$, dunque $\int_{[0, 2k\pi] \times [0, +\infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} (-\frac{1}{1+y^2} e^{-xy} (\cos x + y \sin x))_{x=0}^{x=2k\pi} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2} dy$. Confrontando le due uguaglianze si ottiene $\int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2} dy$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: passando allora al limite per $k \rightarrow +\infty$ e notando che $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2} dy \leq \int_0^{+\infty} e^{-2k\pi y} dy = \frac{1}{2k\pi}$ tende a zero, si ritrova il valore $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Altri risultati utili dal punto di vista pratico sono i seguenti.

Proposizione 2.1.9. *Valgono i seguenti fatti.*

- (a) (Integrazione di prodotti a variabili separate) *Siano $E' \subset \mathbb{R}^{n'}$ e $E'' \subset \mathbb{R}^{n''}$ misurabili, e si abbiano funzioni misurabili $g : E' \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : E'' \rightarrow \mathbb{R}$. Allora la funzione $f : E' \times E'' \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x', x'') = g(x') h(x'')$ è integrabile su $E' \times E''$ se e*

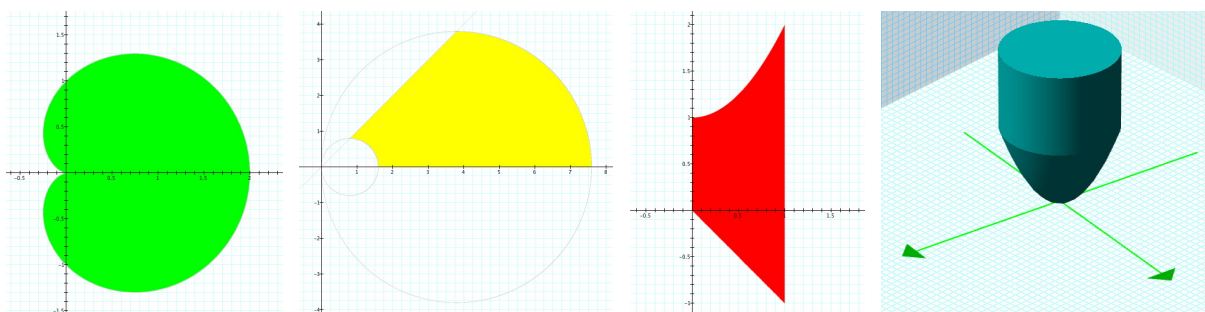


Figura 2.3: (a) Cardiode $\rho(\theta) \leq a(1 + \cos \theta)$. (b) $E = \{(x, y) : 2ax \leq x^2 + y^2 \leq 2bx, 0 \leq y \leq x\}$. (c) $E_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2 + 1\}$. (d) $E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \min\{z, a^2\}, 0 \leq z \leq b\}$.

solo se g e h sono integrabili rispettivamente su E' e E'' , e vale

$$\int_{E' \times E''} g(x') h(x'') d\lambda_n = \left(\int_{E'} g(x') d\lambda_{n'} \right) \left(\int_{E''} h(x'') d\lambda_{n''} \right).$$

- (b) (Simmetrie) Siano T un'isometria di $\mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ della forma (a meno di insiemi trascurabili) $E = E^+ \sqcup E^-$ ove E^+ e E^- sono misurabili tali che $T(E^\pm) = E^\mp$. Data $f \in L^1(E)$, se $f \circ T = f$ allora $\int_E f d\lambda_n = 2 \int_{E^+} f d\lambda_n$; se invece $f \circ T = -f$ allora $\int_E f d\lambda_n = 0$.

Dimostrazione. (a) Limitiamoci alla sufficienza. La funzione f è misurabile perché prodotto di funzioni misurabili; si può inoltre provare che $E' \times E''$ è misurabile. Essendo poi g e h integrabili su E' e E'' , tali sono $|g|$ e $|h|$: poiché l'integrale iterato $\int_{E'} (\int_{E''} |g(x') h(x'')| d\lambda_{n''}) d\lambda_{n'} = \int_{E'} (\int_{E''} |g(x')| |h(x'')| d\lambda_{n''}) d\lambda_{n'} = \int_{E'} (\int_{E''} |g(x')| d\lambda_{n''}) |h(x'')| d\lambda_{n''} = (\int_{E'} |g(x')| d\lambda_{n'}) (\int_{E''} |h(x'')| d\lambda_{n''})$ è finito, per Tonelli si ricava che $g(x') h(x'')$ è integrabile, e poi l'uguaglianza segue da Fubini ripetendo senza moduli il calcolo appena fatto. (b) Considerando il cambio di variabili dato da T si ottiene $\int_{E^-} f d\lambda_n = \pm \int_{E^+} f d\lambda_n$ a seconda che $f \circ T = \pm f$: poiché $\int_E f d\lambda_n = \int_{E^+} f d\lambda_n + \int_{E^-} f d\lambda_n$, l'affermazione è provata. $\square$

Esempi. (1) (Integrale della gaussiana) Ci proponiamo di calcolare l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$: poiché e^{-x^2} è (assolutamente) integrabile alla Riemann, essa lo sarà anche alla Lebesgue, con integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ uguale all'integrale generalizzato. Per il calcolo partiamo dall'integrale doppio $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2$: notando che $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$, per la Proposizione 2.1.9(a) tale integrale doppio è finito e vale $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy) = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2$. D'altra parte, usando coordinate polari si calcola facilmente $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = (\theta)_0^{2\pi} (-\frac{1}{2} e^{-r^2})_0^{+\infty} = \pi$, dunque si ricava $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. **(2)** (Simmetrie semplici) Consideriamo il quadrato $D = [1, 3] \times [-2, 2]$, e calcoliamo $\int_D f(x, y) d\lambda_2$ e $\int_D g(x, y) d\lambda_2$ con $f(x, y) = x(1 + y^2)$ e $g(x, y) = y(1 + x^2)$. L'insieme D è evidentemente simmetrico rispetto all'asse x : in altre parole, considerata l'isometria $T(x, y) = (x, -y)$ (che è la riflessione rispetto all'asse x) e la decomposizione $D = D^+ \sqcup D^-$ con $D^\pm = \{(x, y) \in D : y \gtrless 0\}$ (ove non si considera il segmento lasciato da D sull'asse x , che ha misura nulla) si ha $T(D^\pm) = D^\mp$. Poiché $f \circ T = f$ (infatti $f(x, -y) = f(x, y)$) possiamo dire che $\int_D f(x, y) d\lambda_2 = 2 \int_{D^+} f(x, y) d\lambda_2 = 2 \int_1^3 dx \int_0^2 x(1 + y^2) dy = 2(\frac{1}{2} x^2)_1^3 (y + \frac{1}{3} y^3)_0^2 = \frac{112}{3}$. D'altra parte invece si ha $g \circ T = -g$ (infatti $g(x, -y) = -g(x, y)$), dunque possiamo dire che $\int_D g(x, y) d\lambda_2 = 0$.

Se un corpo E occupa una zona misurabile e limitata (che denotiamo ancora con E) in $\mathbb{R}^3$ con densità di massa $\mu(x)$ (la massa totale è allora $m = \int_E \mu(x) d\lambda_3(x)$), il **baricentro** di

Baricentro

E è definito come il punto di coordinate $\frac{1}{m} \int_E x_j \mu(x) d\lambda_3(x)$ per $j = 1, 2, 3$, e il *momento d'inerzia* di E rispetto a una certa retta affine r è dato da $I = \int_E (\text{dist}_r(x))^2 \mu(x) d\lambda_3(x)$, ove $\text{dist}_r(x)$ è la funzione di distanza da r . Nel caso omogeneo (μ costante, dunque $m = \mu \lambda_3(E)$ ove $\lambda_3(E) = \int_E d\lambda_3(x)$ è il volume di E) si ottiene il *baricentro geometrico* di coordinate $\frac{1}{\lambda_3(E)} \int_E x_j d\lambda_3(x)$ per $j = 1, 2, 3$, e il momento d'inerzia diventa $I = \mu \int_E (\text{dist}_r(x))^2 d\lambda_3(x)$.

Momento
d'inerzia

Esercizio. Disegnare gli insiemi $E_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2 + 1\}$ e $E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \min\{z, a^2\}, 0 \leq z \leq b\}$ (ove $a, b > 0$ e $b > a^2$); calcolarne rispettivamente l'area e il volume; trovarne infine il baricentro e il momento d'inerzia rispetto a un generico asse verticale.

Risoluzione. E_1 è l'“ascia” della Figura 2.3(c). L'area è $\int_{E_1} dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2+1} dy = \int_0^1 [y]_{-x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \frac{11}{6}$. Il baricentro ha coordinate $x_G = \frac{1}{11/6} \int_{E_1} x dx dy = \frac{6}{11} \int_0^1 (x^3 + x^2 + x) dx = \frac{13}{22}$ e $y_G = \frac{1}{11/6} \int_{E_1} y dx dy = \frac{6}{11} \int_0^1 [\frac{1}{2} y^2]_{-x}^{x^2+1} dx = \frac{3}{11} \int_0^1 (x^4 + x^2 + 1) dx = \frac{23}{55}$. Detta μ la densità superficiale di massa, la massa totale è $m = \frac{11}{6} \mu$ e il momento d'inerzia rispetto all'asse y è $I_y = \mu \int_{E_1} x^2 dx dy = \mu \int_0^1 (x^4 + x^3 + x^2) dx = \frac{47}{60} \mu$; usando poi il teorema di Huygens-Steiner,⁽⁴⁶⁾ il momento d'inerzia I_{y, x_0} rispetto a un generico asse verticale $x = x_0$ sarà $I_{y, x_0} = I_{y, x_G} + m(x_0 - x_G)^2 = I_y - mx_G^2 + m(x_0 - x_G)^2 = I_y + mx_0(x_0 - 2x_G)$. • E_2 è la “pallottola” della Figura 2.3(d). Usando le coordinate cilindriche, il volume sarà $\int_{E_2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} dz \int_0^{\sqrt{z}} r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{a^2}^b dz \int_0^a r dr = \pi a^2 (b - \frac{1}{2} a^2)$. Per simmetria il baricentro starà senz'altro sull'asse z , ad altezza $z_G = \frac{1}{\pi a^2 (b - \frac{1}{2} a^2)} \int_{E_2} z dx dy dz = \frac{2}{\pi a^2 (2b - a^2)} (\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} z dz \int_0^{\sqrt{z}} r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{a^2}^b z dz \int_0^a r dr) = \frac{3b^2 - a^4}{3(2b - a^2)}$. Detta μ la densità di volume di massa, la massa totale è $m = \pi a^2 (b - \frac{1}{2} a^2) \mu$, e il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico z è $I_z = \mu \int_{E_2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \mu (\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} dz \int_0^{\sqrt{z}} r^2 r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{a^2}^b dz \int_0^a r^2 r dr) = \frac{1}{6} \pi \mu a^4 (3b - 2a^2)$; sempre per Huygens-Steiner,⁽⁴⁶⁾ il momento d'inerzia rispetto a un generico asse verticale $(x, y) = (x_0, y_0)$ sarà $I_z + m(x_0^2 + y_0^2)$.

È utile anche il seguente risultato per il calcolo dei volumi ottenuti ruotando un insieme piano limitato e misurabile attorno a un certo asse.

Proposizione 2.1.10. (Teorema di Guldino per i volumi di rotazione) *Dato un insieme piano misurabile e limitato D contenuto nel semipiano (x, z) con $x > 0$, lo si faccia ruotare di un angolo α attorno all'asse z . Allora il volume del solido disegnato in $\mathbb{R}^3$ da D durante la rotazione è $\alpha \int_D x d\lambda_2$, esprimibile anche come $\alpha \lambda_2(D) x_G$ ove G e $\lambda_2(D)$ sono rispettivamente il baricentro geometrico e l'area di D .*

Dimostrazione. In coordinate cilindriche (r, θ, z) , il solido di rotazione descritto sopra è dato da $\{(r, \theta, z) : (r, z) \in D, \theta \in [0, \alpha]\}$, dunque il volume è $\int_0^\alpha d\theta \int_D r dr dz = \alpha \int_D r dr dz$, come si voleva. Per il resto, basta ricordare la definizione di baricentro. □

Esempi. (1) (Volume della sfera) Il volume della sfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$ è già stato calcolato precedentemente come integrale di volume, con valore $\frac{4}{3} \pi R^3$. Proviamo a ricalcolarlo ora usando il teorema di Guldino, vedendo la sfera come descritta dalla rotazione attorno all'asse y del semidisco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R, x > 0\}$. Anziché calcolare subito l'integrale $\alpha \int_D x d\lambda_2$, iniziamo trovando per esercizio il baricentro geometrico di D , che per ragioni di simmetria starà sull'asse x : usando le coordinate polari si avrà

⁽⁴⁶⁾ Il teorema di Huygens-Steiner afferma che il momento d'inerzia di un corpo materiale in $\mathbb{R}^3$ rispetto a certo asse r è pari a $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_{r(G)} + md^2$, ove $\mathcal{I}_{r(G)}$ è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse $r(G)$ parallelo a r e passante dal baricentro, m è la massa totale del corpo e d è la distanza tra gli assi r e $r(G)$.

$x_G = \frac{1}{R^2\pi/2} \int_D x d\lambda_2 = \frac{1}{R^2\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R r \cos \theta r dr = \frac{2}{R^2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{R^2\pi} (\sin \theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1}{3}r^3) \Big|_0^R = \frac{4}{3\pi} R$, dunque il volume di una porzione di sfera di angolo α vale $\alpha \frac{4}{3\pi} R \frac{R^2\pi}{2} = \frac{2}{3} \alpha R^3$, e per $\alpha = 2\pi$ si ritrova il volume $\frac{4}{3}\pi R^3$. **(2) (Volume del toro)** (Figura 2.5, pag. 57) Siano $R > r > 0$. Facendo ruotare il disco di raggio r centrato in $(R, 0)$ di un giro attorno all'asse y si descrive un *toro*⁽⁴⁷⁾; il volume di una porzione di angolo α è $\alpha R (\pi r^2) = \pi R r^2 \alpha$, dunque il volume di tutto il toro risulta $2\pi^2 R r^2$.

2.2 Integrali di volume sulle varietà

Sia M una varietà (almeno di classe $\mathcal{C}^1$) di dimensione k in $\mathbb{R}^n$, e si abbia una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Come definire in modo opportuno una nozione di integrale k -dimensionale di f su M , appoggiando su quanto già fatto con l'integrazione multipla in $\mathbb{R}^k$? Nel caso $k = 1$ (in cui M è una curva) questo è già stato fatto con l'*integrale al differenziale d'arco*: si tratta dunque di generalizzare al caso di una varietà di dimensione qualunque.

L'idea dell'integrale di Riemann (raffinato poi da Lebesgue) in $\mathbb{R}^k$ è la seguente. Data una funzione a supporto compatto $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, ripartiamo $\mathbb{R}^k$ in cubi k -dimensionali costruiti lungo le k direzioni coordinate $e_1^{(k)}, \dots, e_k^{(k)}$, di lato 2^{-N} (la cui misura k -dimensionale è dunque $(2^{-N})^k = 2^{-kN}$); preso per ogni tale cubo C un punto di riferimento $x_C \in C$, definiamo

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x) d\lambda_k := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_C f(x_C) \lambda_k(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (2^{-kN} \sum_C f(x_C)).$$

Tale somma, fatta su tutti i cubi k -dimensionali di $\mathbb{R}^k$, è in realtà finita (perché f ha supporto compatto) e rappresenta l'integrale della funzione a scalino costruita con la scelta fatta dei punti di riferimento x_C : se f è Riemann-integrabile (ad esempio, se è continua) il limite esiste e non dipende da tale scelta, ed è quello che noi chiamiamo “integrale (di Riemann) di f ”. Cerchiamo dunque di riprodurre questa idea nel contesto più generale delle varietà.

Sia data $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a supporto compatto, e per semplicità M sia descritta —a meno di insiemi λ_k -trascurabili— da un'unica parametrizzazione $\gamma : V \rightarrow M$ con V aperto di $\mathbb{R}^k$: è allora naturale costruire $\int_M f(x) d\lambda_M(x)$ come $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_C f(\gamma(v_C)) \lambda_k(\gamma(C))$, ove la somma è fatta sui cubi C di lato 2^{-N} contenuti in V , v_C è un punto di riferimento in C e $\lambda_k(\gamma(C))$ rappresenta la misura k -dimensionale del trasformato di C tramite γ . Ora, poiché C è un piccolo cubo di lato 2^{-N} attorno v_C il cui j -esimo lato è parallelo a $e_j^{(k)}$, e poiché vicino v_C la mappa γ è approssimata efficacemente dal differenziale $d\gamma_{v_C}$, il trasformato $\gamma(C)$ può essere visto come il piccolo parallelogrammo il cui j -esimo lato è $d\gamma_{v_C}(e_1^{(k)}) = \frac{\partial \gamma}{\partial v_j}(v_C)$ moltiplicato per lo scalare 2^{-N} , dunque la sua misura $\lambda_k(\gamma(C))$ sarà

⁽⁴⁷⁾ dal latino *torus*, anello; da non confondere con *taurus*, l'animale toro.

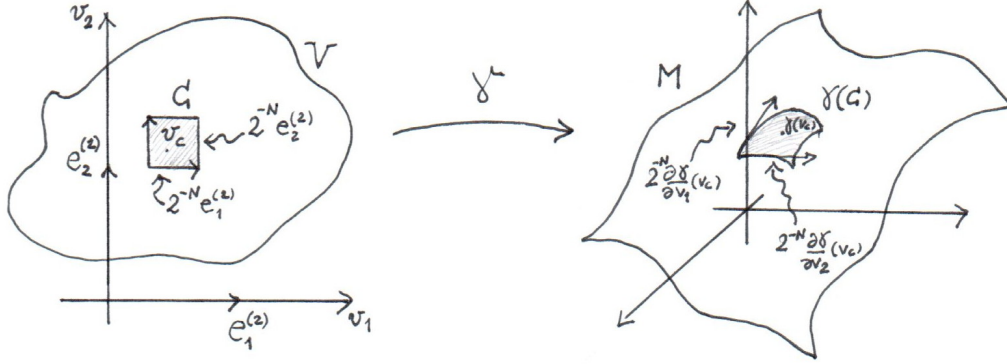


Figura 2.4: Integrale di volume sulle varietà.

2^{-kN} volte la misura di tale parallelogrammo. Serve perciò ricordare come calcolare la misura k -dimensionale del parallelogrammo generato da k vettori $u_1, \dots, u_k$ in $\mathbb{R}^n$, ovvero $\{x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k : 0 \leq \lambda_j \leq 1\}$.

Proposizione 2.2.1. Data una matrice quadrata $A \in M_k(\mathbb{R})$, la misura k -dimensionale del parallelogrammo generato in $\mathbb{R}^k$ dai k vettori-colonna di A è $|\det A|$.

Più in generale: data una matrice rettangolare $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ con $k \leq n$, la misura k -dimensionale del parallelogrammo generato in $\mathbb{R}^n$ dai k vettori-colonna di A è $\sqrt{\det(A^t A)}$, ove A^t denota la matrice trasposta di A .

Dimostrazione. Se i k vettori colonna della matrice quadrata $A \in M_k(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti allora la misura k -dimensionale del parallelogrammo da essi generato è nulla, e allo stesso tempo la matrice A è singolare e dunque $\det A = 0$. Se invece i vettori sono linearmente indipendenti, A rappresenta il cambio di coordinate lineare di $\mathbb{R}^k$ che manda ordinatamente i vettori della base canonica nei vettori colonna di A , e allora il risultato segue subito dal teorema del cambio di variabili negli integrali multipli. • Occupiamoci ora del caso generale. Data una matrice rettangolare $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ con $k \leq n$, siano $u_1, \dots, u_k$ i suoi vettori-colonna in $\mathbb{R}^n$. Preso un qualunque insieme ortonormale di vettori $w_1, \dots, w_k$ in $\mathbb{R}^n$ tali che $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, per quanto detto prima, la misura k -dimensionale del parallelogrammo generato in $\mathbb{R}^n$ dai vettori $u_1, \dots, u_k$ è $|\det B|$, ove $B \in M_k(\mathbb{R})$ è la matrice quadrata la cui colonna j -esima è fatta dalle componenti di u_j rispetto alla base ortonormale $w_1, \dots, w_k$ (in altre parole, $B_{i,j} = w_i \cdot u_j$). Poiché $\det B^t = \det B$ si può anche scrivere $|\det B| = \sqrt{\det(B^t B)}$: ma a questo punto basta notare che $(B^t B)_{i,j} = u_i \cdot u_j$ (il prodotto scalare non dipende dalla base ortonormale scelta), e dunque $B^t B = A^t A$. □

Se $u_1, \dots, u_k$ sono i k vettori-colonna in $\mathbb{R}^n$ della matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, la matrice quadrata $A^t A \in M_k(\mathbb{R})$ (detta *matrice di Gram* di $u_1, \dots, u_k$) ha elementi $u_i \cdot u_j$; il suo determinante è comunemente detto *gramiano* di $u_1, \dots, u_k$. È utile ricordare il seguente criterio per il calcolo del gramiano:

Matrice di Gram,
gramiano

Proposizione 2.2.2. (Identità di Cauchy-Binet) Il gramiano $\det(A^t A)$ è anche uguale alla somma dei quadrati dei determinanti di tutti i minori di ordine k di A .

Grazie alla Proposizione 2.2.1 abbiamo capito cosa deve essere la misura $\lambda_k(\gamma(C))$ della precedente discussione, e possiamo dare una definizione precisa di ciò che si intende per integrale di volume su M . Data una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, si dirà che f è *integrabile su M*

Integrale di volume
su una varietà

se $|f \circ \gamma| \sqrt{\det((J_\gamma)^t J_\gamma)}$ è integrabile su V (ove J_γ è la jacobiana di γ), e si porrà

$$(2.1) \quad \int_M f(x) d\lambda_M(x) := \int_V f(\gamma(v)) \sqrt{\det(J_\gamma(v)^t J_\gamma(v))} d\lambda_k(v).$$

La quantità $d\lambda_M(x) := \sqrt{\det(J_\gamma(v)^t J_\gamma(v))} d\lambda_k(v)$ (si usano a volte anche altre notazioni che richiamano l'idea di superficie, come $d\sigma$) è detta *elemento di volume* della varietà M nel suo punto $x = \gamma(v)$: se integrata su M (scegliendo dunque $f \equiv 1$) essa dovrebbe fornire l'usuale volume k -dimensionale di M , ove questo abbia senso. È doveroso verificare che:

Elemento di volume

Proposizione 2.2.3. *La definizione data di $\int_M f(x) d\lambda_M(x)$ non dipende dalla parametrizzazione scelta.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{\gamma} : \tilde{V} \rightarrow M$ un'altra parametrizzazione, e poniamo $\Phi := \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma : V \xrightarrow{\sim} \tilde{V}$ (dunque $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \Phi$). Si ha allora (usando nell'ultima uguaglianza il cambio di variabili per integrali multipli in $\mathbb{R}^k$):

$$\begin{aligned} \int_V f(\gamma(v)) \sqrt{\det(J_\gamma(v)^t J_\gamma(v))} d\lambda_k(v) &= \int_V f(\tilde{\gamma}(\Phi(v))) \sqrt{\det((J_{\tilde{\gamma}}(\Phi(v)) J_\Phi(v))^t J_{\tilde{\gamma}}(\Phi(v)) J_\Phi(v))} d\lambda_k(v) \\ &= \int_V f(\tilde{\gamma}(\Phi(v))) \sqrt{\det(J_{\tilde{\gamma}}(\Phi(v))^t J_{\tilde{\gamma}}(\Phi(v)))} |\det J_\Phi(v)| d\lambda_k(v) \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{v})) \sqrt{\det(J_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v})^t J_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v}))} d\lambda_k(\tilde{v}). \end{aligned}$$

□

Mettiamo in evidenza i seguenti casi particolari.

- (1) *Caso $k = 1$.* Come già detto, nel caso di una curva la definizione precedente ridà l'integrale al differenziale d'arco (e la lunghezza della curva).
- (2) *Caso $k = 2$ e $n = 3$.* M è una superficie in $\mathbb{R}^3$: detti $v = (v_1, v_2)$ i parametri di $V \subset \mathbb{R}^2$, l'elemento d'area è $\|\frac{\partial \gamma}{\partial v_1}(v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v_2}(v)\| dv_1 dv_2$, la norma del prodotto vettoriale delle due derivate (ortogonale a M in $x = \gamma(v)$).
- (3) *Caso dei grafici cartesiani.* Scritto $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, sia $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = f(x')\}$ per un'opportuna f : in questo caso la matrice jacobiana dell'ovvia parametrizzazione cartesiana $\gamma(x') = (x', f(x'))$ è $(\frac{1}{\nabla f})$, dunque l'elemento d'area è $\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} d\lambda_{n-1}(x')$. (Naturalmente la scelta di x_n come variabile dipendente è di comodo, la stessa conclusione vale per grafici delle altre componenti.)

Esempi. (1) (*Legge del coseno per le aree*) Sul piano $z = (\operatorname{tg} \alpha) x$ si abbia una regione limitata D_α che si proietti sulla regione limitata D del piano orizzontale (x, y) : vale allora $\operatorname{Area}(D) = \operatorname{Area}(D_\alpha) \cos \alpha$. Infatti D_α è il grafico sopra D di $f(x, y) = (\operatorname{tg} \alpha) x$, pertanto l'elemento d'area è $d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} dx dy$, dunque $\operatorname{Area}(D_\alpha) = \int_D \frac{1}{\cos \alpha} dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} \int_D dx dy = \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{Area}(D)$. **(2)** Calcoliamo la misura della *semisuperficie sferica di raggio R* usando tre parametrizzazioni diverse. (a) Con le coordinate polari $\gamma_1(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$, ove $(\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$. Si ha $J_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -R \sin \varphi \end{pmatrix}$, dunque l'elemento d'area è $R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ e l'area cercata risulta $\int_{]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[} R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2$ (come noto). (b) Con le coordinate cartesiane

$\gamma_2(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, ove (x, y) stanno nel disco D di centro $(0, 0)$ e raggio R . Questo si può interpretare come grafico $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, dunque l'elemento d'area è $\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$, e usando le coordinate polari nel piano si ottiene ancora una volta $\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{]0, 2\pi[\times]0, R[} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = 2\pi R(-\sqrt{R^2 - \rho^2})_0^R = 2\pi R^2$. (c) In coordinate cilindriche $\gamma_3(\theta, z) = (\sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta, \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta, z)$, ove $(\theta, z) \in]0, 2\pi[\times]0, R[$. Si ha $J_{\gamma_3} = \begin{pmatrix} -\sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta & -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \theta \\ \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta & -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dunque l'elemento d'area è $R d\theta dz$ e l'area risulta ancora una volta $\int_{]0, 2\pi[\times]0, R[} R d\theta dz = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz = 2\pi R^2$. (3) Detto D il disco di raggio r nel piano (x, y) , si considerino il cilindro e il cono retti di base D e altezza h lungo l'asse z . In coordinate cilindriche $(\theta, z) \in]0, 2\pi[\times]0, h[$ essi sono parametrizzati rispettivamente da $(R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ e $(R(1 - \frac{z}{h}) \cos \theta, R(1 - \frac{z}{h}) \sin \theta, z)$; gli elementi d'area sono $R d\theta dz$ e $\frac{R}{h} a(1 - \frac{z}{h}) d\theta dz$ (ove $a = \sqrt{R^2 + h^2}$ è l'apotema del cono), dunque le aree laterali di cilindro e cono risultano rispettivamente $2\pi Rh$ e $Ra\pi$, come noto dalla geometria elementare.

Anche nel contesto di superfici materiali in $\mathbb{R}^3$ si possono definire massa totale, baricentro e momento d'inerzia usando gli integrali appena definiti. Data una superficie M in $\mathbb{R}^3$ con una densità superficiale di massa $\mu(x)$ (la massa totale è allora $m = \int_M \mu(x) d\sigma$), il *baricentro* di M è definito come il punto di coordinate $\frac{1}{m} \int_M x_j \mu(x) d\sigma$ per $j = 1, 2, 3$, e il *momento d'inerzia* di M rispetto a una certa retta affine r è dato da $I = \int_M (\text{dist}_r(x))^2 \mu(x) d\sigma$, ove $\text{dist}_r(x)$ è la funzione di distanza da r . Nel caso omogeneo (μ costante) si ottiene il *baricentro geometrico* di coordinate $\frac{1}{\lambda_2(M)} \int_M x_j d\sigma$ per $j = 1, 2, 3$ (ove $\lambda_2(M) = \int_M d\sigma$ è l'area —cioè la misura 2-dimensionale— di M), e il momento d'inerzia diventa $I = \mu \int_M (\text{dist}_r(x))^2 d\sigma$.

Baricentro
Momento d'inerzia

Esempio. Per $\alpha \in [0, \pi]$ sia S_α la porzione di superficie sferica di raggio R con latitudine φ tra 0 e α , sulla quale la massa sia distribuita uniformemente con densità superficiale μ : calcoliamone il baricentro geometrico e il momento d'inerzia rispetto ad una qualsiasi retta parallela all'asse z . • Per evidenti ragioni di simmetria il baricentro di S_α si troverà sull'asse z , dunque l'unica sua coordinata da calcolare è la z . Parametrizzando S_α come $(R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$ si ha $\lambda_2(S_\alpha) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2(1 - \cos \alpha)$, da cui $\frac{1}{\lambda_2(S_\alpha)} \int_{S_\alpha} z d\lambda_2(x) = \frac{1}{2\pi R^2(1 - \cos \alpha)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha (R \cos \varphi) R^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1 + \cos \alpha}{2} R$. • In base al principio di Huygens-Steiner⁽⁴⁶⁾ il momento d'inerzia di S_α rispetto ad una retta parallela a distanza d dall'asse z è $I_z + md^2$, ove I_z denota il momento d'inerzia rispetto all'asse z : e quest'ultimo è $I_z = \mu \int_{S_\alpha} (x^2 + y^2) d\lambda_2(x) = \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha (R^2 \sin^2 \varphi) R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi \mu R^4 \int_0^\alpha \sin^3 \varphi d\varphi = 2\pi \mu R^4 (\frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi)_0^\alpha = \frac{2\pi}{3} \mu R^4 (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) = \frac{2 - \cos \alpha - \cos^3 \alpha}{3} m R^2$, ove si è introdotta la massa totale $m = \mu \lambda_2(S_\alpha) = 2\pi R^2(1 - \cos \alpha)\mu$.

C'è anche un analogo del Teorema di Guldino per volumi (Proposizione 2.1.10) che descrive l'area delle superfici ottenute ruotando una curva rettificabile attorno a un dato asse.

Proposizione 2.2.4. (Teorema di Guldino per le superfici di rotazione) *Data una curva piana rettificabile Γ contenuta nel semipiano (x, z) con $x > 0$, la si faccia ruotare di un angolo α attorno all'asse z . Allora l'area della superficie disegnata da Γ durante la rotazione è $\alpha \int_\Gamma x dl$, esprimibile anche come $\alpha x_G \ell(\Gamma)$ ove G e $\ell(\Gamma)$ sono rispettivamente il baricentro geometrico e la lunghezza di Γ .*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{x,z}^2$ una parametrizzazione di Γ , con $x(t) = \gamma_1(t) > 0$: allora la superficie di rotazione descritta è parametrizzata da $\phi : [a, b] \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\phi(t, \theta) = (\gamma_1(t) \cos \theta, \gamma_1(t) \sin \theta, \gamma_2(t))$. Vale $J_\phi = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cos \theta & -\gamma_1(t) \sin \theta \\ \gamma_1'(t) \sin \theta & \gamma_1(t) \cos \theta \\ 0 & \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$, con elemento d'area $|\gamma_1(t)| \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt d\theta = x(t) \|\gamma'(t)\| dt d\theta$, da cui l'area risulta $\int_{[a,b] \times [0,\alpha]} x(t) \|\gamma'(t)\| dt d\theta = \int_0^\alpha d\theta \int_a^b x(t) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_\Gamma x dl$. Per l'ultima affermazione basta ricordare la definizione di baricentro geometrico. $\square$

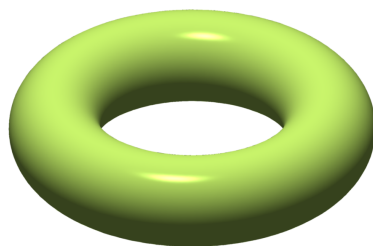


Figura 2.5: Un toro.

Esempi. (1) (*Superficie del toro*) (Figura 2.5) Siano $R > r > 0$, e consideriamo la circonferenza di raggio r centrata in $(R, 0)$. Facendo ruotare di un giro la circonferenza attorno all'asse y si ottiene la superficie esterna di un toro; l'area di una porzione di angolo α è $\alpha R (2\pi r) = 2\pi R r \alpha$, dunque l'area di tutto il toro è $4\pi^2 R r$. In alternativa potremmo usare la parametrizzazione data da $(x, y, z) = \phi(\theta, \psi) = ((R + r \cos \psi) \cos \theta, (R + r \cos \psi) \sin \theta, r \sin \psi)$: essendo $d\sigma = \sqrt{\det((J_\phi)^t J_\phi)} d\theta d\psi = r(R + r \cos \psi) d\theta d\psi$ si ottiene nuovamente $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \psi) d\psi = 2r\pi(R\psi + r \sin \psi)_0^{2\pi} = 4\pi^2 R r$. (2) Si faccia ruotare di un angolo α attorno all'asse y l'arco di sinusoidi $\Gamma = \{(x, y) : x = \cos y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. Posto $\sin y = \sinh \xi$ (da cui $\cos y dy = \cosh \xi d\xi$) si ha $\int_\Gamma x dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \sqrt{1 + \sin^2 y} dy = \int_0^{\log(\sqrt{2}+1)} \cosh^2 \xi d\xi = \left(\frac{\xi + \sinh \xi \cosh \xi}{2} \right)_0^{\log(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)}{2}$, dunque l'area ottenuta risulta $\frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)}{2} \alpha$.

Domande e risposte

01. D. Abbiamo visto che l'insieme di Dirichlet $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è trascurabile (perché numerabile), ovvero $\lambda_1(D) = 0$. Possiamo allora concludere che l'insieme D' dei numeri irrazionali dentro $[0, 1]$ ha misura 1 come quella di tutto l'intervallo?

R. Proprio così. Infatti $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è misurabile (perché trascurabile in quanto numerabile, e ha misura 0); dunque è misurabile anche il suo complementare $\mathbb{R} \setminus D$, dunque anche $D' = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus D)$ (ricordare che i Lebesgue-misurabili costituiscono una σ -algebra, dunque sono stabili per complementazione, intersezione numerabile, ...); e allora, essendo $[0, 1] = D \sqcup D'$, per additività si ha $1 = \lambda_1([0, 1]) = \lambda_1(D) + \lambda_1(D') = 0 + \lambda_1(D')$, da cui $\lambda_1(D') = 1$. Una delle migliori intuizioni della costruzione di Lebesgue è di aver preteso di costruire una misura che goda dell'additività *numerabile* (niente di più, niente di meno), riuscendo in questo modo a domare tutta una famiglia di insiemi “magri” (come sono appunto quelli numerabili) che però potevano essere comunque densi e perciò dare fastidio, come accadeva per l'appunto nella costruzione di Riemann.

02. D. La funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ non è continua q.o. (infatti il suo insieme di discontinuità, che è $[0,1]$, non è trascurabile), ma posso dire che è nulla q.o., vero?

R. Sì: infatti l'insieme su cui la funzione non si annulla è appunto quello di Dirichlet $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, che è trascurabile in quanto numerabile. Visto che ci siamo, metto in evidenza un esempio di funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua quasi ovunque (perciò, in particolare, Lebesgue-integrabile su ogni insieme di misura finita), esempio che è riportato anche sulle dispense in una nota circa a pag. 34: si ponga $f(x) = \frac{1}{q}$ se $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con p, q primi tra loro, e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. L'insieme di discontinuità di questa f è $\mathbb{Q}$, numerabile e dunque trascurabile.

03. D. Lei ha detto a lezione che le sottovarietà proprie di $\mathbb{R}^n$ sono λ_n -trascurabili: dunque, ad esempio, nel piano $\mathbb{R}^2$ lo sono le curve (e le loro unioni numerabili). D'altra parte ho sentito parlare di curve che, gira di qua gira di là, alla fine riescono a riempire tutta una regione piana, ad esempio un disco chiuso, o addirittura tridimensionale. Come si fa in tal caso a parlare di λ_n -trascurabilità, se riescono a riempire tutta una regione che non è λ_n -trascurabile? Non è una contraddizione?

R. Lei fa riferimento alle cosiddette *filling curves* (in italiano potremmo dire “curve riempitive”) di Peano-Hilbert: se vuole vedere rapidamente di cosa si tratta può dare un'occhiata in internet, ad esempio in http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve. Ma non c'è nessuna contraddizione: infatti le “filling curves” non sono sottovarietà (potremmo anche dire: “non sono curve regolari”) di $\mathbb{R}^n$, perché, lo ricordiamo, per essere tali bisognerebbe che per ogni loro punto esistesse un intorno aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che il tratto di curva che sta in quell'intorno fosse diffeomorfo a un intervallo aperto di $\mathbb{R}$: cosa che è evidentemente falsa per una “filling curve”, perché la porzione che ne entra nell'intorno di un suo punto è per l'appunto tutto l'intorno stesso, che non può essere diffeomorfo a un intervallo di $\mathbb{R}$ (se gli tolgo un punto resta connesso, mentre se tolgo un punto a un intervallo di $\mathbb{R}$ diventa sconnesso).

04. D. Se non ricordo male, a lezione lei ha detto che $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ sono Lebesgue-integrabili su $\mathbb{R}$, cioè che stanno in $L^1(\mathbb{R})$; che $h(x) = x^2$ ha integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}$ ma non è Lebesgue-integrabile su $\mathbb{R}$; e che $l(x) = x$ e $m(x) = \frac{\sin x}{x}$ non hanno integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}$ (in particolare, di certo non sono Lebesgue-integrabili su $\mathbb{R}$). Ho detto bene (se no, potrebbe correggermi)? E potrebbe rispiegare il motivo di queste affermazioni, che temo di non aver capito bene?

R. Bisogna ricordarsi le definizioni date. Se f è misurabile e positiva e $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora l'integrale di Lebesgue $\int_E f d\lambda_1$ (definito come estremo superiore degli integrali delle funzioni semplici positive che stanno sotto f) ha sempre senso come numero in $[0, +\infty]$, solo che potrebbe essere $+\infty$; nel caso in cui tale valore è finito si dirà che f è Lebesgue-integrabile su E , e si scriverà $f \in L^1(E)$. Questa nozione tiene anche quando f è misurabile e negativa, invertendo tutti i segni. Nel caso generale, in cui f sia misurabile ma non necessariamente di segno costante, abbiamo detto che per dare senso al simbolo $\int_E f d\lambda_1$ chiediamo espressamente che almeno uno tra $\int_E f^+ d\lambda_1$ e $\int_E f^- d\lambda_1$ (integrali di funzioni misurabili e positive) esista finito, e in tal caso definiamo $\int_E f d\lambda_1 := \int_E f^+ d\lambda_1 - \int_E f^- d\lambda_1$, che avrà senso come numero in $[-\infty, +\infty]$, eventualmente uguale a $\mp\infty$ (abbiamo infatti espressamente escluso l'eventualità di cadere nella forma indeterminata $+\infty - \infty$); nel caso in cui entrambi gli integrali $\int_E f^\pm d\lambda_1$ siano finiti (dunque anche $\int_E f d\lambda_1$ risulta finito) si dirà che f è Lebesgue-integrabile su E , e si scriverà $f \in L^1(E)$. Venendo ai casi che lei cita, tutti in modo corretto, nei quali $E = \mathbb{R}$ e tutte le funzioni sono misurabili (in quanto continue), si ha quanto segue.

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ sono positive, dunque di certo hanno integrale di Lebesgue, solo che potrebbe essere $+\infty$. Come appurarlo? Abbiamo visto che, su un insieme misurabile di $\mathbb{R}$, una funzione è Lebesgue-integrabile se e solo se essa è assolutamente Riemann-integrabile in senso generalizzato, con lo stesso valore di integrale: e le nostre funzioni sono (assolutamente) Riemann-integrabili in senso generalizzato su $\mathbb{R}$, con valori π e $\sqrt{\pi}$ rispettivamente. Dunque esse sono anche Lebesgue-integrabili su $\mathbb{R}$, con lo stesso valore di integrale.
- Anche $h(x) = x^2$ è positiva, dunque di certo ha integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}$, solo che potrebbe essere $+\infty$. E così è: ad esempio per il confronto, perché h sta sopra la funzione semplice che vale 0 per $|x| \leq 1$ e 1 per $|x| > 1$, il cui integrale è evidentemente $+\infty$.
- $l(x) = x$ non ha integrale di Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} x d\lambda_1$ (cioè questo simbolo non ha senso), perché sia $\int_{\mathbb{R}} x^+ d\lambda_1$ che $\int_{\mathbb{R}} x^- d\lambda_1$ valgono $+\infty$. Per quanto riguarda la funzione di Dirichlet $m(x) = \frac{\sin x}{x}$, già sappiamo che essa è R-integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente, dunque non sarà L-integrabile. Resta solo il dubbio se, per caso, non possa capitare che l'integrale di Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} m d\lambda_1$ abbia senso e valga ad esempio $+\infty$ (non può essere finito, altrimenti $m(x)$, essendo L-integrabile su $\mathbb{R}$, sarebbe anche assolutamente R-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$, e sappiamo che ciò non è vero), ovvero che $\int_{\mathbb{R}} m^+ d\lambda_1 = +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}} m^- d\lambda_1 < +\infty$. Può accadere una cosa simile? La risposta è no. Infatti, dire che $\int_{\mathbb{R}} m^- d\lambda_1 < +\infty$ implicherebbe che m^- sarebbe assolutamente R-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$, ovvero R-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ (perché $m^- \geq 0$), ma allora, poiché anche m è R-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$, tale dovrebbe essere anche $m^+ = m - m^-$, ma questo è falso (perché sarebbe come dire che m^+ è assolutamente R-integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$, ovvero L-integrabile su $\mathbb{R}$, falso perché $\int_{\mathbb{R}} m^+ d\lambda_1 = +\infty$).
- Aggiungo un ultimo esempio. La funzione $p(x) = xe^x$ non ha segno costante; tuttavia $\int_{\mathbb{R}} p^+ d\lambda_1 = +\infty$ (infatti p^+ sta sopra la funzione semplice che vale 0 per $x \leq 1$ e 1 per $x > 1$, il cui integrale è evidentemente $+\infty$) e $\int_{\mathbb{R}} p^- d\lambda_1 = 1 < +\infty$, pertanto l'integrale $\int_{\mathbb{R}} p d\lambda_1$ ha senso e vale $+\infty$.

05. D. Nella disuguaglianza fondamentale dell'integrale di Lebesgue lei scrive (cito): Si ha $f \in L^1(E)$ se e solo se $|f| \in L^1(E)$, e in tal caso vale $|\int_E f d\lambda_n| \leq \int_E |f| d\lambda_n$. Ma la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $2\chi_V - 1$ su $[0, 1]$ (ove $V \subset [0, 1]$ è l'insieme di Vitali, non misurabile alla Lebesgue) e come 0 altrove (in altre parole: $f(x) = 1$ su V , $f(x) = -1$ su $[0, 1] \setminus V$, e $f(x) = 0$ altrove) non costituisce una contraddizione? Infatti $f \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ con integrale 1. Può spiegare?

R. Come ho detto a lezione, tra le ipotesi è sottointeso che f debba essere misurabile, dunque il suo controesempio non è pertinente. Effettivamente sarebbe stato meglio ribadirlo nell'enunciato: lo aggiunga pure a penna sulle note del corso.

06. D. Lei a lezione ha calcolato l'area della superficie esterna del cono retto a base circolare di raggio R e altezza h usando la tecnica degli integrali superficiali, ritrovando correttamente $R\sqrt{R^2 + h^2}\pi$. Io invece ho provato a fare in un altro modo: per un certo $0 \leq z \leq h$ ho calcolato la lunghezza della circonferenza-sezione ad altezza z , che viene $2\pi R(1 - \frac{z}{h})$; e poi ho integrato in z tale lunghezza, trovando però un risultato diverso (e sballato) $Rh\pi$. Dov'è che ho sbagliato?

R. Lei ha proprio sbagliato il conto, perché il suo procedimento è ingiustificato: se ci pensa un attimo, non c'è nessun motivo per cui questo integrale superficiale dovrebbe decomporre come integrale iterato per z -fette, come se dovesse calcolare il volume del cono (infatti, in quel caso,

integrando in z l'area del disco-sezione ad altezza z ovvero $\pi R^2(1 - \frac{z}{h})^2$ si trova giustamente $\frac{1}{3}R^2h\pi$.

07. D. *Nelle sue note, l'enunciato di Tonelli è: Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e f una funzione misurabile su E . Se un qualsiasi integrale iterato del modulo $|f|$ esiste finito, allora f è integrabile su E . Ma non vale anche il viceversa? Cioè: non si potrebbe dire “ f è integrabile su E se e solo se un qualsiasi integrale iterato del modulo $|f|$ esiste finito”?*

R. Certo: infatti se f è integrabile su E allora tale è anche $|f|$, e per Fubini l'integrale di $|f|$ si calcola come un qualsiasi integrale iterato di $|f|$. Il motivo per cui non ho scritto il teorema in questa forma è duplice: da un lato, l'interesse di Tonelli è principalmente quello di passare dall'esistenza finita di un qualsiasi integrale iterato di $|f|$ all'esistenza finita dell'integrale multiplo di f , più che il viceversa; dall'altro lato, scrivendo il “se e solo se” avrei forse rischiato di instillare in qualche studente distratto l'errata sensazione che, se trovo un valore finito per un integrale iterato di $|f|$, quello sia anche il valore dell'integrale multiplo di f che sto cercando, il che è falso (per Fubini, per calcolare l'integrale multiplo di f dovrò infatti calcolare sì un integrale iterato: ma di f , non di $|f|$!).

08. D. *Finora abbiamo sempre parlato di integrazione di funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Mi chiedo se sia possibile generalizzare i concetti a funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ integrando componente per componente e se questa operazione abbia senso.*

R. Certamente. Data $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con componenti $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su un dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, l'integrale vettoriale $\int_E f d\lambda_n$ è definito come il vettore di $\mathbb{R}^m$ le cui componenti sono gli integrali $\int_E f_j d\lambda_n$. Ad esempio, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'identità (ovvero $f(x) = x$) e $E \subset \mathbb{R}^n$ è compatto, allora il vettore $\int_E f d\lambda_n$, diviso per la costante $\text{Vol}_n(E) = \lambda_n(E) = \int_E d\lambda_n$, individua il baricentro geometrico di E .

09. D. *Le scrivo per chiarire un mio dubbio. Ho letto che per dimostrare l'innumerabilità di $\mathbb{R}$ è stata dimostrata prima l'innumerabilità dell'intervallo $[0, 1]$, quindi di conseguenza tutta la retta reale è un insieme non numerabile. Ora, l'insieme caratteristico di $\mathbb{Q}$ su $\mathbb{R}$ nell'intervallo $[0, 1]$ ha detto avere dimensione di Lebesgue 0, quindi la sua misura è 0. Ma Lebesgue è in grado di misurare solo insiemi numerabili, e per quanto detto prima $[0, 1]$ non lo è. Qual è il passaggio che non colgo?*

R. Sinceramente non capisco cosa vuole dire. Ad esempio, non ho mai parlato di “dimensione” di Lebesgue (nozione che peraltro esiste, anche se noi non ce ne occupiamo) ma solo di “misura” di Lebesgue; inoltre temo che lei faccia confusione tra numerabilità e misurabilità (in particolare, quando dice che “Lebesgue è in grado di misurare solo insiemi numerabili” dice una cosa totalmente sbagliata: ciò che Lebesgue misura meglio di tutto sono gli intervalli, che sono notoriamente non numerabili). Se crede, può venire a chiedermi il suo dubbio direttamente a voce, così possiamo spiegarci meglio.

10. D. *Il mio dubbio riguarda la applicazione pratica della proprietà (g) della Proposizione 2.1.6 p. 44. Da come è formulata la proprietà, vale la relazione*

$$\text{funzione continua su } E \implies \text{limitata q.o. su } E;$$

è cioè sufficiente verificare che una certa funzione (misurabile) è ovunque continua su un insieme di misura finita E per poter concludere che ivi è anche Lebesgue integrabile.

La mia domanda riguarda l'affermazione:

$$(1) \quad \text{funzione continua q.o. su } E \implies \text{limitata q.o. su } E$$

è valida? Mi sembra di no, perchè porterebbe altrimenti alla seguente contraddizione:

- (esercizio 2 dell'ultima autoverifica) La funzione considerata è $f(x, y) = \frac{x-2y}{x^2+y^2}$ sul petalo di rodonea D (compatto del piano); la funzione non è definita nell'origine (che appartiene a D), ma altrove è continua. Questo mi porta ad affermare che:

$$(2) \quad f \text{ è continua q.o. su } D \text{ (su tutto } D \text{ eccetto il singolo punto-origine);}$$

- studiando se la funzione è limitata passo alle parametriche ottenendo: $g(\theta, r) = \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{r}$ che, quando mi avvicino all'origine, tende sempre (per ogni valore dell'angolo) ad infinito. Cioè: f non è limitata su D (infatti non esiste un valore di tetto per ogni punto di D); inoltre non è nemmeno limitata q.o. (non esiste un singolo punto (oppure insieme discreto di punti) di D tale che D privato di questo punto sia tale che f è su di lui limitata);
- se la (1) fosse corretta allora: $\text{non limitata q.o. su } E \implies \text{non continua q.o. su } E$ e quindi concluderei: la funzione f non è continua q.o. su E (cioè è discontinua in un insieme di misura non trascurabile),
- conclusione che è in netto contrasto con la (2).

R. Dato un insieme E di misura finita, l'implicazione (1) “funzione continua q.o. su $E \implies$ limitata q.o. su E ” è totalmente falsa. Senza scomodare l'esercizio 2 dell'autoverifica, basta pensare a $E = [-1, 1]$ e a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e da $f(0) = 0$; questa funzione è continua q.o. (perché lo è ovunque tranne che in $x = 0$); ma non è limitata q.o. (vorrebbe dire che esistono un insieme trascurabile $X \subset [-1, 1]$ e una costante $M > 0$ tali che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [-1, 1] \setminus X$, cosa chiaramente falsa nel nostro caso specifico). L'idea è che la limitatezza è una proprietà globale, dunque basta il comportamento anomalo all'intorno di un solo punto per mandarla gambe all'aria; e la morale è che, come tutte le proprietà matematiche, anche la “q.o.” va maneggiata con cautela.

Tra l'altro, anche l'implicazione che lei riferisce “funzione continua su $E \Rightarrow$ limitata q.o. su E ”, detta così è chiaramente falsa (ad esempio, posto $E =]0, 1]$ la funzione $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ data da $h(x) = \frac{1}{x}$ è continua su E ma non limitata q.o. su E); è invece vera quando E è compatto (o quando la chiusura $\overline{E}$ è compatta e la funzione si estende ad una funzione continua su tutta $\overline{E}$), grazie a Weierstrass.