

Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi di autoverifica sull'integrazione multipla

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

venerdì 25 ottobre 2024

Istruzioni generali. Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento, che sarà fornito mercoledì 30/10. Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 20 pt (5+4+6+5). **Ex. 2:** 20 pt (7+5+8). **Ex. 3:** 17 pt. **Ex. 4:** 23 pt (8+8+7). **Ex. 5:** 20 pt (5+5+5+5). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in due sedute da 3 ore).

- (*) Sia $E = \{(x, y) : 2x - 1 \geq |y - 1| - y, 0 \leq y \leq 5 - e^x\}$.
 - Disegnare E e determinarne l'area e il baricentro geometrico.
 - Scrivere gli integrali che danno i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare E attorno all'asse x , all'asse y , e alla retta $y = x + 4$, e se possibile calcolarli.
 - Dire per quali $r \in \mathbb{Z}$ esistono finiti $\int_E x^r dx dy$ e $\int_E (x-1)^{4-r} y dx dy$, e calcolarli per $r = 3$.
 - Trovare il momento d'inerzia del solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y (potrà servire uno degli integrali calcolati in (iii)).
- Sia D il petalo di *rodonèa* $r(\theta) \leq 2 \sin 2\theta$ per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e sia ∂D il suo bordo (disegnare).
 - Determinare, in forma parametrica e cartesiana, la retta ortogonale a ∂D nel suo punto dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$. Trovata poi (partendo dall'equazione polare) un'equazione cartesiana per ∂D , ricalcolare la suddetta retta ortogonale in modo alternativo.
 - Calcolare l'area e il baricentro geometrico di D .
 - Calcolare, se esistono finiti, gli integrali $\int_D \frac{1}{x-y} dx dy$, $\int_D \frac{x-2y}{x^2+y^2} dx dy$ e $\int_{\partial D} \frac{xy}{x^2+y^2} dl$.
- Disegnare $F = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq xy \leq 3, 0 \leq x - y \leq 2xy\}$, e determinarne l'area sia con le coordinate cartesiane (x, y) sia usando il cambio di variabili $(u, v) = (xy, \frac{1}{2}(x - y))$ (dimostrare che si tratta effettivamente di un cambio di variabili, e da dove a dove).
- (*) Disegnare nel piano (x, z) la mezza *cicloide* parametrizzata da $(a(t + \sin t), a(1 + \cos t))$ con $0 \leq t \leq \pi$ (ove $a > 0$), e sia C la superficie (cupola) ottenuta ruotando la curva attorno all'asse z .
 - Scritta una parametrizzazione per C , usarla per esprimere l'elemento d'area $d\sigma$ e il vettore normale esterno ν al variare del punto di C , e per calcolare il valore dell'area di C .

(*)Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

- (ii) Trovare il volume racchiuso tra C e il piano (x, y) .
- (iii) La cupola C poggia sul fondo del mare (l'origine del sistema di riferimento è dunque posta al livello del fondo), che ha profondità $h > 2a$: essa pertanto subisce sulla sua superficie la pressione idrostatica $p = p_0 + \delta g(h - z)$, ove p_0 è la pressione atmosferica, δ è la densità dell'acqua e g è l'accelerazione di gravità. Calcolare la forza di pressione idrostatica totale $F = - \int_C p \nu d\sigma$, ove ν è il suddetto versore normale uscente (naturalmente si tratta di un integrale vettoriale, ovvero il vettore formato dagli integrali delle tre componenti).
5. Disegnare $E_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq 2z \leq 4 - x - y\}$ e $E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + (y+1)^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$, e calcolare $\int_{E_{1,2}} xyz dx dy dz$ e $\int_{\partial E_{1,2}} (x + 2z) d\sigma$ (ove ∂ denota la frontiera).

Soluzioni.

1. (i) (Figura 1) L'area di $E = \{(x, y) : 2x - 1 \geq |y - 1| - y, 0 \leq y \leq 5 - e^x\}$ è data da $\int_E dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{5-e^x} dy + \int_1^{\log 5} dx \int_0^{5-e^x} dy = \int_0^1 ((5 - e^x) - (1 - x)) dx + \int_1^{\log 5} (5 - e^x) dx = [4x - e^x + \frac{1}{2}x^2]_0^1 + (5x - e^x) \Big|_1^{\log 5} = 5 \log 5 - \frac{9}{2} \sim 3,55$ (ovviamente uguale a $\int_0^{\log 5} (5 - e^x) dx - \frac{1}{2}$). Si ha poi $\int_E x dx dy = \int_0^1 x dx \int_{1-x}^{5-e^x} dy + \int_1^{\log 5} x dx \int_0^{5-e^x} dy = \int_0^1 x(4 - e^x + x) dx + \int_1^{\log 5} x(5 - e^x) dx = \frac{15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 23}{6}$ e $\int_E y dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{5-e^x} y dy + \int_1^{\log 5} dx \int_0^{5-e^x} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 ((5 - e^x)^2 - (1 - x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_1^{\log 5} (5 - e^x)^2 dx = \frac{5(15 \log 5 - 17)}{6}$, pertanto $x_G = \frac{1}{\text{Area } E} \int_E x dx dy = \frac{15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 23}{3(10 \log 5 - 9)} \sim 1,67$ e $y_G = \frac{1}{\text{Area } E} \int_E y dx dy = \frac{5(15 \log 5 - 17)}{3(10 \log 5 - 9)} \sim 0,64$.
- (ii) Converterà naturalmente usare Guldino: il volume del solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse x è $2\pi \int_E y dx dy = \frac{5(15 \log 5 - 17)}{3} \pi$, e quello del solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y è $2\pi \int_E x dx dy = \frac{15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 23}{3} \pi$. Quanto al solido ottenuto facendo ruotare E attorno alla retta $y = x + 4$, la distanza del baricentro da tale retta è $d = \frac{|x_G - y_G + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{5 \log 5 (\log 5 + 1)}{\sqrt{2} (10 \log 5 - 9)}$, pertanto sempre per Guldino (nella forma che usa la distanza del baricentro dall'asse di rotazione) il volume del solido è $2\pi d (\text{Area } E) = \frac{5 \log 5 (\log 5 + 1)}{\sqrt{2}} \pi$.
- (iii) La funzione x^r è positiva in E , dunque per Tonelli-Fubini passiamo direttamente all'integrale iterato: si ha $\int_E x^r dx dy = \int_0^1 x^r (4 - e^x + x) dx + \int_1^{\log 5} x^r (5 - e^x) dx$, integrale che converge quando $r > -1$, ovvero per $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Per $r = 1$ l'abbiamo calcolato prima; per $r = 3$ diventa $(x^4 - (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + \frac{1}{5}x^5) \Big|_0^1 + (\frac{5}{4}x^4 - (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x) \Big|_1^{\log 5} = \frac{5}{4} \log^4 5 - 5 \log^3 5 + 15 \log^2 5 - 30 \log 5 + \frac{479}{20}$. • La funzione $(x - 1)^{4-r} y$ potrebbe (se $4 - r$ è dispari) cambiare segno in E , dunque per Tonelli esaminiamo l'integrabilità dell'integrale iterato di $|x - 1|^{4-r} y$. Si ha $\frac{1}{2} \int_0^1 ((5 - e^x)^2 - (1 - x)^2) |x - 1|^{4-r} dx + \frac{1}{2} \int_1^{\log 5} (5 - e^x)^2 |x - 1|^{4-r} dx$, che converge se e solo se $4 - r \geq 0$, ovvero $r \leq 4$. Per $r = 3$ si ottiene per Fubini $\int_E (x - 1)^{4-r} y dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 ((5 - e^x)^2 - (1 - x)^2) (x - 1) dx + \frac{1}{2} \int_1^{\log 5} (5 - e^x)^2 (x - 1) dx$ (si omettono ulteriori calcoli).
- (iv) Sia \tilde{E} il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y . Usando coordinate cilindriche, denotando con δ la densità (costante) e usando l'integrale $\int_E x^3 dx dy$ calcolato prima, il momento d'inerzia cercato è $\delta \int_{\tilde{E}} (x^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_E r^2 r dr dy = 2\pi \int_E r^3 dr dy = 2\pi \delta (\frac{5}{4} \log^4 5 + 5 \log^3 5 + 15 \log^2 5 - 30 \log 5 + \frac{479}{20})$.
2. (i) (Figura 2) Il bordo della rodonea è parametrizzato da $\gamma(\theta) = (2 \sin 2\theta \cos \theta, 2 \sin 2\theta \sin \theta)$, con $\gamma'(\theta) = 2(2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta, 2 \cos 2\theta \sin \theta + 2 \sin 2\theta \cos \theta)$. Per $\theta = \frac{\pi}{6}$ si ottiene il punto $\gamma(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e il vettore tangente $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$. Un vettore normale è allora $(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, da cui la retta cercata ha forma parametrica $r = \{(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) + t(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{3+5t}{2}, \frac{\sqrt{3}(1-t)}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$; eliminando il parametro si ottiene poi la forma cartesiana $x\sqrt{3} + 5y - 4\sqrt{3} = 0$. • Da $r(\theta) = 2 \sin 2\theta$, moltiplicando per r^2

ambo i membri si ricava $r^3 = 4(r \sin \theta)(r \cos \theta)$, ovvero, elevando al quadrato, $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$, ovvero $g(x, y) := (x^2 + y^2)^3 - 16x^2y^2 = 0$. Si ricava $\nabla g = (6x(x^2 + y^2)^2 - 32xy^2, 6y(x^2 + y^2)^2 - 32x^2y)$, pertanto un vettore normale a ∂D in $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è $\nabla g(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (45, -9\sqrt{3})$, multiplo scalare di quello trovato prima.

(ii) L'area di D è $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin 2\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2 \psi d\psi = (\frac{\psi - \sin \psi \cos \psi}{2}) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$. Per simmetria il baricentro starà sulla bisettrice, dunque basta calcolarne una delle coordinate: si ha $\int_D x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin 2\theta} r \cos \theta r dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (r^3) \Big|_0^{2 \sin 2\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta \cos \theta d\theta = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta = \frac{64}{3} (-\frac{1}{5} \cos^5 \theta + \frac{1}{7} \cos^7 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}$, pertanto $x_G = \frac{1}{\text{Area } D} \int_D x dx dy = \frac{256}{105\pi} \sim 0,78$.

(iii) La funzione $\frac{1}{x-y}$ cambia segno (anzi, è addirittura antisimmetrica) in corrispondenza della bisettrice, rispetto alla quale D è simmetrica: sarebbe dunque un serio errore partire subito col calcolo dell'integrale iterato, perché darebbe zero ma potrebbe non essere il valore dell'integrale doppio. Più precisamente, possiamo dire che l'integrale doppio $\int_D \frac{1}{x-y} dx dy$ esisterà (e sarà nullo) se e solo se esisterà l'integrale su una delle due metà di D , su cui la funzione ha segno costante. Posto $D^- = D \cap \{x > y\}$ occupiamoci dunque di $\int_{D^-} \frac{1}{x-y} dx dy$, che per Tonelli e Fubini possiamo calcolare come integrale iterato: esso vale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2 \sin 2\theta} \frac{1}{r(\cos \theta - \sin \theta)} r dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} d\theta$, integrale che però diverge in $\frac{\pi}{4}$ in quanto $\frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \sim_{\frac{\pi}{4}}^* \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$ (alternativamente si poteva porre $\psi = \theta - \frac{\pi}{4}$ ottenendo $2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos 2\psi}{\sqrt{2} \sin \psi} d\psi$, e notare che $\frac{\cos 2\psi}{\sqrt{2} \sin \psi} \sim_0^* \frac{1}{\psi}$).

Dunque l'integrale doppio $\int_D \frac{1}{x-y} dx dy$ è privo di senso in quanto gli integrali delle sue parti positiva e negativa divergono entrambi a $+\infty$. • Similmente a prima, anche la funzione $\frac{x-2y}{x^2+y^2}$ cambia segno su D , con la differenza che ora non c'è più alcuna simmetria rispetto alla retta di cambio di segno $x = 2y$. Stavolta iniziamo portandoci in coordinate polari, ottenendo l'integrale doppio (non iterato, non si può ancora!)

$\int_{\{(r,\theta): 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \sin 2\theta\}} \frac{r(\cos \theta - 2 \sin \theta)}{r^2} r dr d\theta = \int_{\{(r,\theta): 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \sin 2\theta\}} (\cos \theta - 2 \sin \theta) dr d\theta$. A questo punto, usando Tonelli, controlliamo se l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin 2\theta} |\cos \theta - 2 \sin \theta| dr$ esiste finito, il che è evidentemente vero (la funzione integranda è continua, e il dominio è compatto): siamo perciò autorizzati a usare Fubini, per il quale l'integrale doppio cercato esiste finito ed è calcolabile come l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin 2\theta} (\cos \theta - 2 \sin \theta) dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \theta (\cos \theta - 2 \sin \theta) d\theta = \frac{2}{3} (-\cos^3 \theta - 2 \sin^3 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}$.

• La funzione integranda $\frac{xy}{x^2+y^2}$ è continua ovunque tranne che nell'origine (punto nel quale essa è discontinua qualunque valore le si attribuisca), ma al suo intorno essa è comunque limitata (è nulla sugli assi, e su $y = mx$ vale $\frac{m}{1+m^2}$, che in modulo è $\leq \frac{1}{2}$; alternativamente, in coordinate polari la funzione diventa $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$). Dunque l'integrale curvilineo su ∂D (curva compatta) certamente esiste finito. L'elemento d'arco è $\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = 2\sqrt{\sin^2 2\theta + 4 \cos^2 2\theta} d\theta = 2\sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta$, dunque l'integrale $\int_{\partial D} \frac{xy}{x^2+y^2} dl$ diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin 2\theta \cos \theta)(2 \sin 2\theta \sin \theta)}{(2 \sin 2\theta)^2} 2\sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta = [\text{posto } u = \cos 2\theta] \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 3u^2} du = [\text{posto } u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh \xi \text{ e } \alpha := \text{settsinh } \sqrt{3} = \log(2\sqrt{3} + \sqrt{13})] \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh^2 \xi d\xi = \frac{1}{4\sqrt{3}} (\xi + \sinh \xi \cosh \xi) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\alpha + 2\sqrt{3}) = \frac{\log(2\sqrt{3} + \sqrt{13})}{2\sqrt{3}} + 1$ (finito, come previsto).

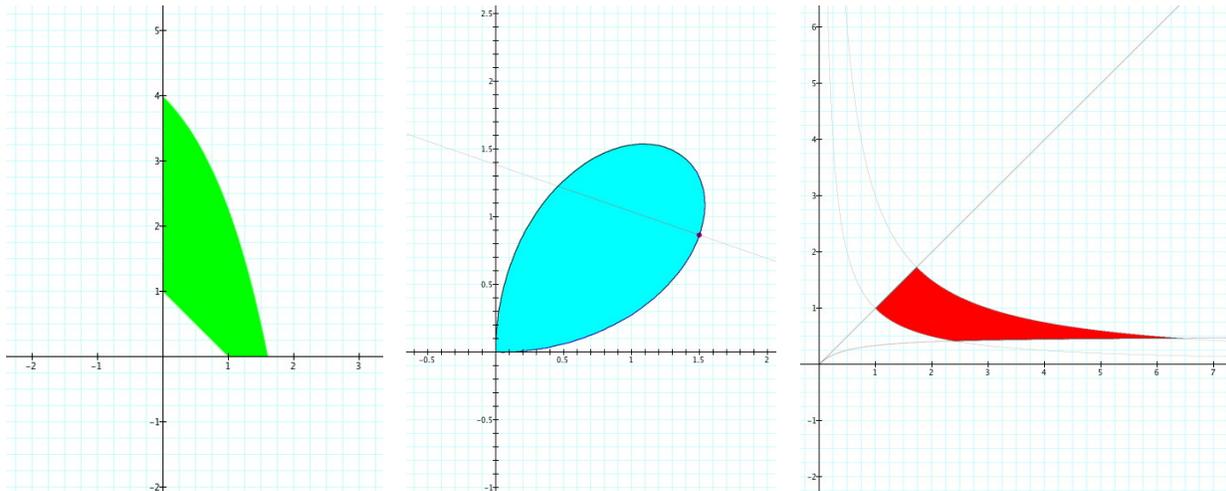
3. (Figura 3) Intersecando i quattro grafici $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $y = x$ e $y = \frac{x}{2x+1}$ che fanno da bordo a $F = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq xy \leq 3, 0 \leq x - y \leq 2xy\}$ si ottengono le ascisse dei quattro punti-vertice, che sono nell'ordine 1 (tra x e $\frac{1}{x}$), $\sqrt{3}$ (tra x e $\frac{3}{x}$), $\sqrt{2} + 1$ (tra $\frac{x}{2x+1}$ e $\frac{1}{x}$) e $3 + 2\sqrt{3}$ (tra $\frac{x}{2x+1}$ e $\frac{3}{x}$). Integrando per fili paralleli all'asse y si ricava allora $\text{Area}(F) = \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{1}{x}}^x dy + \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{3}{x}}^x dy + \int_{\sqrt{2}+1}^{3+2\sqrt{3}} dx \int_{\frac{x}{2x+1}}^{\frac{3}{x}} dy = (\frac{1}{2}x^2 + \log x) \Big|_1^{\sqrt{3}} + (3 \log x - \log x) \Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}} + (3 \log x - \frac{1}{4}(2x - \log(2x+1))) \Big|_{\sqrt{2}+1}^{3+2\sqrt{3}} = 3 \log(3+2\sqrt{3}) + \log(3+2\sqrt{2}) - \log(7+4\sqrt{3}) - \log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \sim 2,27$. • Da $(u, v) = (xy, \frac{1}{2}(x - y))$ si ricava $(x, y) = \phi(u, v) = (\pm\sqrt{u+v^2} + v, \pm\sqrt{u+v^2} - v)$, dunque ϕ è biiettiva da $A = \{(u, v) : u > -v^2\}$ a $B^+ = \{(x, y) : x + y > 0\}$ oppure $B^- = \{(x, y) : x + y < 0\}$ (a seconda che si scelga “ \pm ” in $\phi(u, v)$); scegliendo ai nostri fini il “ $+$ ” (infatti $F \subset B^+$), la matrice jacobiana $J_{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u+v^2}} + 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{u+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u+v^2}} - 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $-\frac{1}{\sqrt{u+v^2}}$, che è sempre < 0 , dunque effettivamente si tratta di un diffeomorfismo tra A e B^+ . Sostituendo $(x, y) = \phi(u, v)$ nella definizione di F si vede subito che $\phi^{-1}(F) = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq u\}$ (un trapezio); per il calcolo di $\text{Area}(F) = \int_{\phi^{-1}(F)} \frac{1}{\sqrt{u+v^2}} du dv$ converrà però effettuare l'integrale iterato a partire da u , ovvero $\text{Area}(F) = \int_0^1 dv \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u+v^2}} du + \int_1^3 dv \int_v^3 \frac{1}{\sqrt{u+v^2}} du = 2 \int_0^1 (\sqrt{v^2+3} - \sqrt{v^2+1}) dv + 2 \int_1^3 (\sqrt{v^2+3} - \sqrt{v^2+v}) dv = 2 \int_0^3 \sqrt{v^2+3} dv - 2 \int_0^1 \sqrt{v^2+1} dv - 2 \int_1^3 \sqrt{v^2+v} dv$. Una primitiva di $\sqrt{v^2+1}$ è $\frac{1}{2}(\log(\sqrt{v^2+1} + v) + v\sqrt{v^2+1})$,^(†) e dunque, con un ovvio cambio di variabile, una primitiva di $\sqrt{v^2+3}$ risulta $\frac{1}{2}(3 \log(\sqrt{v^2+3} + v) + v\sqrt{v^2+3})$; d'altra parte una primitiva di $\sqrt{v^2+1}$ è

^(†) La primitiva di $\sqrt{v^2+1}$ è già stata ricavata più volte negli esercizi precedenti (l'ultima volta poco fa, nell'esercizio 2), ponendo $v = \sinh \xi$ e così via; si ricordi in particolare che $\text{settsinh } v = \log(\sqrt{v^2+1} + v)$ (ove settsinh è l'inversa di \sinh). Una primitiva di $\sqrt{w^2-1}$ si ricava in modo simile, ponendo $w = \cosh \xi$ e ricordando che $\text{settcosh } w = \log(w + \sqrt{w^2-1})$.

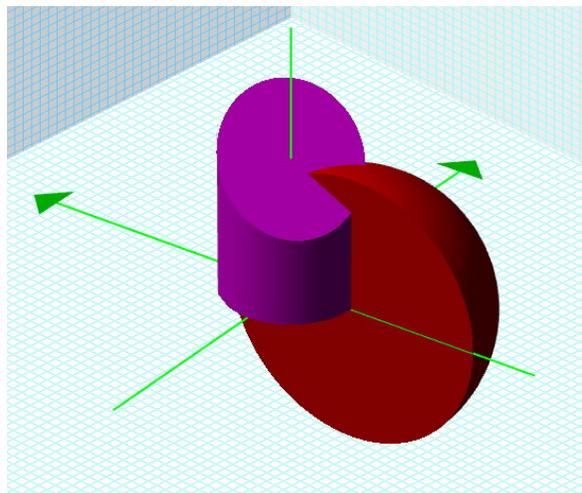
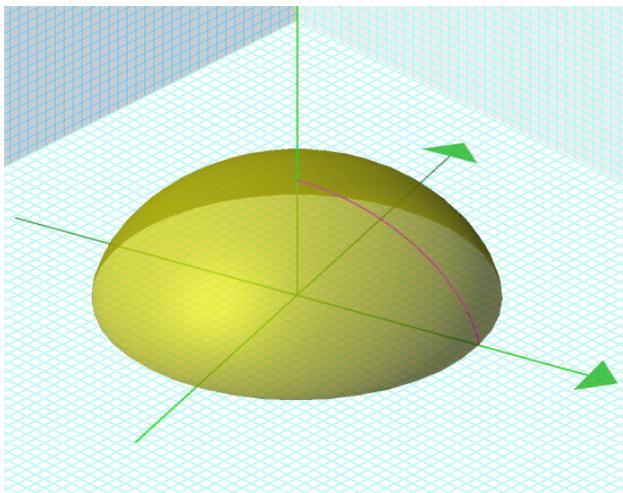
$\frac{1}{2}(w\sqrt{w^2-1} - \log(w + \sqrt{w^2-1}))$,^(†) dunque essendo $\sqrt{v^2+v} = \frac{1}{2}\sqrt{(2v+1)^2-1}$ si ricava che $\int \sqrt{v^2+v} dv = \frac{1}{8}(2(2v+1)\sqrt{v^2+v} - \log(2v+1+2\sqrt{v^2+v}))$. Se non sono stati commessi errori, calcolando queste primitive tra gli estremi indicati si dovrebbe riottenere il risultato precedente (si omettono ulteriori calcoli).

4. (i) (Figura 4) La parametrizzazione naturale della superficie-cupola C è quella che trasferisce in coordinate cilindriche la parametrizzazione della mezza cicloide, ovvero $\gamma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t, \theta) = (a(t + \sin t) \cos \theta, a(t + \sin t) \sin \theta, a(1 + \cos t))$. Lo spazio tangente nel punto $\gamma(t, \theta) \in C$ è generato dai vettori-colonna $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (a(1 + \cos t) \cos \theta, a(1 + \cos t) \sin \theta, -a \sin t)$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = (-a(t + \sin t) \sin \theta, a(t + \sin t) \cos \theta, 0)$, dunque un vettore normale è $\frac{\partial \gamma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = (a^2 \sin t(t + \sin t) \cos \theta, a^2 \sin t(t + \sin t) \sin \theta, a^2(1 + \cos t)(t + \sin t))$ (è uscente da C , perché ha la terza coordinata positiva), che ha modulo $\|\frac{\partial \gamma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\| = a^2(t + \sin t)\sqrt{2(1 + \cos t)}$: ne ricaviamo che il versore normale esterno è $\nu = \frac{(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}) / \|\frac{\partial \gamma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\|}{\sqrt{2(1 + \cos t)}}$, e che l'elemento d'area di C è $d\sigma = a^2(t + \sin t)\sqrt{2(1 + \cos t)} dt$. L'area risulta dunque $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^2(t + \sin t)\sqrt{2(1 + \cos t)} dt = 4\pi a^2 \int_0^\pi (t + \sin t) |\cos \frac{t}{2}| dt = 4\pi a^2 (\int_0^\pi t \cos \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} dt) = 4\pi a^2 ((2t \sin \frac{t}{2} + 2 \cos \frac{t}{2})|_0^\pi - \frac{4}{3}(\cos^3 \frac{t}{2})|_0^\pi) = \frac{8\pi(3\pi-4)}{3} a^2$ (allo stesso risultato si arriverebbe ovviamente usando Guldino).
- (ii) Per Guldino il volume cercato è $2\pi \int_D x dx dz$, ove D è la zona del piano (x, z) racchiusa tra la mezza cicloide e gli assi. Per il calcolo di $\int_D x dx dz$ possiamo ad esempio parametrizzare D come $(x, z) = \phi(r, t) = (ra(t + \sin t), ra(1 + \cos t))$ con $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq t \leq \pi$: il cambio di coordinate da (x, z) a (r, t) ha jacobiano $J_\phi(r, t) = \begin{pmatrix} a(t + \sin t) & ra(1 + \cos t) \\ a(1 + \cos t) & -ra \sin t \end{pmatrix}$, il cui determinante è $-ra^2(2 + 2 \cos t + t \sin t) < 0$, e otteniamo pertanto $\int_D x dx dz = \int_0^\pi dt \int_0^1 ra(t + \sin t) \cdot ra^2(2 + 2 \cos t + t \sin t) dr = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\pi (t + \sin t)(2 + 2 \cos t + t \sin t) dt = \frac{1}{3} a^3 (t^2 + 2t \sin t + 2 \cos t - t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t - 2 \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \sin 2t - \frac{1}{4} \cos 2t))|_0^\pi = (\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})a^3$. Pertanto il volume cercato è $2\pi(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})a^3$. • Vediamo un'alternativa di conto. Un'espressione cartesiana $z = z(x)$ della cicloide si otterrebbe componendo $z(t) = a(1 + \cos t)$ con l'inversa della $x(t) = a(t + \sin t)$: procedendo con l'integrale iterato si avrebbe allora $\int_D x dx dz = \int_0^{\pi a} x dx \int_0^{z(x)} dz = \int_0^{\pi a} x z(x) dx$. A questo punto siamo in una sola variabile: e operando il cambio $x(t) = a(t + \sin t)$ l'integrale diventa $\int_0^\pi a(t + \sin t) a(1 + \cos t) a(1 + \cos t) dt = a^3 \int_0^\pi (t + \sin t)(1 + \cos t)^2 dt$, che procedendo con i conti ridà il risultato precedente. • Citiamo un'ultima alternativa, basata sulla *formula di Green* (che incontreremo presto come conseguenza del teorema della divergenza di Gauss, a sua volta conseguenza del teorema di Stokes): in generale, date due funzioni lisce $f(x, z)$ e $g(x, z)$ definite in un intorno aperto di \bar{D} si ha che $\int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}) dx dz = \oint_{\partial D} (f dx + g dz)$, ove si intende che il bordo ∂D è orientato in modo indotto, cioè antiorario. Per ottenere il nostro integrale $\int_D x dx dz$ basta scegliere ad esempio $(f, g) = (0, \frac{1}{2}x^2)$, ottenendo pertanto $\int_D x dx dz = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x^2 dz$. Quest'ultimo integrale riceve contributo in realtà solo dal tratto di cicloide (percorsa a ritroso rispetto alla parametrizzazione), perché la forma integranda si annulla su entrambi i tratti rettilinei di ∂D : si ottiene dunque $\int_D x dx dz = -\frac{1}{2} \int_0^\pi a^2(t + \sin t)^2 (-a \sin t) dt = \frac{1}{2} a^3 \int_0^\pi (t + \sin t)^2 \sin t dt$, che a conti fatti ridà ancora una volta il risultato precedente.
- (iii) Per ovvie ragioni di simmetria l'unica componente di $F = -\int_C p \nu d\sigma$ a non annullarsi sarà quella lungo z , data da $F_3 = -\int_C p \nu_3 d\sigma = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi (p_0 + \delta g(h - a(1 + \cos t))) \frac{1 + \cos t}{\sqrt{2(1 + \cos t)}} a^2(t + \sin t) \sqrt{2(1 + \cos t)} dt = -2\pi a^2 \int_0^\pi (p_0 + \delta g(h - a(1 + \cos t)))(1 + \cos t)(t + \sin t) dt = -2\pi a^2 ((p_0 + \delta gh) \int_0^\pi (1 + \cos t)(t + \sin t) dt - \delta ga \int_0^\pi (1 + \cos t)^2(t + \sin t) dt)$. L'integrale $\int_0^\pi (1 + \cos t)(t + \sin t) dt$ è facile e vale $\frac{1}{2}\pi^2$, e l'integrale $\int_0^\pi (1 + \cos t)^2(t + \sin t) dt$ è già apparso prima, e valeva $\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3}$: otteniamo dunque $F = F_3 e_3 = -\pi a^2 ((p_0 + \delta gh)\pi^2 - 2\delta ga(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})) e_3$. • C'è un'intelligente maniera alternativa di procedere, basata sulla conoscenza della spinta idrostatica di Archimede. Immaginiamo che sotto la cupola ci sia una base piana circolare che ne sigilli lo spazio interno \tilde{C} . Se il mare fosse più profondo di modo che la cupola non posasse sul suo fondo, sulla cupola agirebbe la spinta di Archimede, pari a $\delta \text{Vol}(\tilde{C}) e_3 = 2\pi(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})\delta a^3 e_3$, che sarebbe la somma vettoriale della nostra F (la forza idrostatica su C) e della spinta idrostatica sul fondo, evidentemente pari a $(p_0 + \delta gh)(\pi a)^2 \pi e_3$ (ovvero: pressione a quota $z = 0$ per area della base circolare, che ha raggio πa). Ne ricaviamo che $F = 2\pi(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})\delta a^3 e_3 - (p_0 + \delta gh)(\pi a)^2 \pi e_3 = -\pi a^2 ((p_0 + \delta gh)\pi^2 - 2\delta ga(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3})) e_3$, come già trovato in precedenza.
5. (Figura 5) L'insieme $E_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq 2z \leq 4 - x - y\}$ è il tronco obliquo di cilindro rappresentato in figura, mentre $E_2 = \{(x, y, z) : x^2 + (y + 1)^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$ è la mezza palla di centro $(0, -1, 0)$ e raggio 2 che si trova nel semispazio delle $x \geq 0$; si tratta evidentemente (loro e le loro superfici esterne) di compatti di \mathbb{R}^3 su cui le funzioni integrande sono continue, dunque gli integrali richiesti esistono finiti. • Calcolando $\int_{E_1} xyz dx dy dz$ per fili paralleli all'asse z e poi in coordinate polari piane si ottiene $\int_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy \int_0^{\frac{1}{2}(4-x-y)} xyz dz = \frac{1}{8} \int_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq 1\}} xy(4-x-y)^2 dx dy = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta (4 - r \cos \theta - r \sin \theta)^2 r dr = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta (4 - r(\cos \theta + \sin \theta))^2 r dr = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (4 + \frac{1}{6}(\cos \theta + \sin \theta)^2 - \frac{8}{3}(\cos \theta + \sin \theta)) \sin \theta \cos \theta d\theta$ che, eliminando i termini che daranno senz'altro integrale nullo tra 0 e 2π , diventa $\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}(\cos \theta + \sin \theta)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{96} \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{96} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{96} (\frac{2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta}{4})|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{96}$. • L'integrale

$\int_{E_2} xyz \, dx \, dy \, dz$ è nullo: infatti E_2 è simmetrico rispetto a z , e la funzione è z -dispari. Non varrebbe dunque la pena di procedere col calcolo: comunque sia, visto che stiamo facendo esercizio, in coordinate sferiche adattate $(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, -1 + r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$ l'integrale sarebbe diventato $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi dr \int_0^\pi r \cos \theta \sin \varphi (-1 + r \sin \theta \sin \varphi) r \cos \varphi r^2 \sin \varphi \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi dr \int_0^\pi r^4 \cos \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi (r \sin \theta \sin \varphi - 1) \, d\varphi$, da cui si nota che già il primo integrale in φ si annulla. • La frontiera ∂E_1 è composta dalla base circolare S'_1 , dal coperchio obliquo S''_1 , e dalla porzione cilindrica laterale S'''_1 : l'integrale $\int_{\partial E_1} (x + 2z) \, d\sigma$ sarà dunque la somma dei tre contributi. Si ha $\int_{S'_1} (x + 2z) \, dx \, dy = \int_{S'_1} x \, dx \, dy = 0$ (perché S'_1 è x -simmetrico, e $z \equiv 0$ su S'_1), dunque non c'è contributo da S'_1 . Per la legge del coseno l'elemento d'area di S''_1 è $\sqrt{\frac{3}{2}} \, dx \, dy$, dunque $\int_{S''_1} (x + 2z) \, d\sigma = \int_{S''_1} x \sqrt{\frac{3}{2}} \, dx \, dy + \int_{S''_1} (4 - x - y) \sqrt{\frac{3}{2}} \, dx \, dy = \int_{S''_1} 4 \sqrt{\frac{3}{2}} \, dx \, dy = 2\sqrt{6} \pi$ (perché S''_1 è x - e y -simmetrico). Infine S'''_1 è parametrizzata da $(\cos \theta, \sin \theta, z)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq z \leq \frac{1}{2}(4 - \cos \theta - \sin \theta)$: l'elemento d'area è $d\theta \, dz$, dunque $\int_{S'''_1} (x + 2z) \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}(4 - \cos \theta - \sin \theta)} (\cos \theta + 2z) \, dz = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}(4 - \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta + \frac{1}{4}(16 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 8 \cos \theta - 8 \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta)) \, d\theta$ che, eliminando i termini che daranno senz'altro integrale nullo tra 0 e 2π , diventa $\int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{17}{4}) \, d\theta = \frac{1}{4}(17\theta - (\theta + \sin \theta \cos \theta)) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi$. Si ha dunque $\int_{\partial E_1} x^2 y \, d\sigma = 0 + 4\sqrt{2}\pi + 8\pi = 4(2 + \sqrt{2})\pi$. • La frontiera ∂E_2 è composta dal disco posteriore S'_2 nel piano $x = 0$ e dalla parte sferica S''_2 . Il disco S'_2 è z -simmetrico, e su esso si ha $x \equiv 0$: dunque il contributo dato all'integrale da S'_2 è nullo. Anche S''_2 è z -simmetrico, dunque alla fine si ha $\int_{\partial E_2} (x + 2z) \, d\sigma = \int_{S''_2} x \, d\sigma$: parametrizzando S''_2 in coordinate sferiche adattate $(x, y, z) = (2 \cos \theta \sin \varphi, -1 + 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi)$ con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\varphi \in [0, \pi]$ si ha che l'elemento d'area è $4 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi$, dunque si ottiene $\int_{S''_2} x \, d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi 2 \cos \theta \sin \varphi \cdot 4 \sin \varphi \, d\varphi = 8(\sin \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)) \Big|_0^\pi = 8\pi$.



(1) Ex. 1. (2) Ex. 2. (3) Ex. 3.



(4) Ex. 4. (5) Ex. 5.