Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)
Esercizi sui teoremi classici d'integrazione di campi

Si cerchi, in generale, di fare i calcoli richiesti in più modi, sia ricorrendo ai teoremi classici (Gauss-Green, formula di Kelvin-Stokes, ...) che alle definizioni dirette.

1. Disegnare e calcolare, sia direttamente che usando Green, l'area di $A_1 = \{(x,y) : x \le 0\,,\ -3(x+1) \le y \le 0\}$ e l'integrale (converge?) $\int_{A_1} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$. Stesse domande per $A_2 = \{(x,y) : 2ay \le x^2+y^2 \le 2by\,,\ 0 \le y \le x\,\mathrm{tg}\,\alpha\}$ (con $0 < a < b$ e $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$) e $A_3 = \{(x,y) : |x-1| \le \min\{y+2,\,1\}\,,\ x \ge y^2+3y+2\}$.

2. Nel piano (x,y) siano γ_1, γ_2 e γ_3 i cammini da $O(0,0)$ a $A(3,3)$ rispettivamente lungo il segmento, lungo l'arco di parabola $y(y-2) = x$ e lungo l'arco di circonferenza passante per $(3,0)$.

(a) Dato il campo $F(x,y) = (3xy - y^2\,,\ x^2+2y)$ calcolare $\int_{\gamma_j} F \cdot d\ell$ per $j = 1,2,3$, e dedurne che F non è conservativo (si poteva vederlo più rapidamente?). Trovare poi le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $G(x,y) = F(x,y) + (0, \varphi(x,y))$ diventi conservativo.

(b) Detta D la porzione di piano racchiusa tra γ_1 e γ_2, verificare la formula di Green per F e D. Infine, scelta una $\varphi(x,y)$ come sopra, calcolare gli integrali di linea $\int_{\gamma_j} G \cdot d\ell$ per $j = 1,2,3$.

3. Nel piano verticale (x,z) si disegni $B = \{z \ge \frac{1}{2a}x^2 - a\,,\ |z| \le \frac{1}{2}x\}$, ove $a > 0$.

(a) Calcolare area e baricentro di B, e il volume del solido D ottenuto ruotando B di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario attorno all'asse z.

(b) Sia S la superficie esterna di D, e sia S' la parte di S ottenuta ruotando l'arco di parabola. Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x-z,\,y,\,0)$ attraverso S, B e S'; se si vuole, calcolare anche il flusso attraverso le altre porzioni di superficie che costituiscono S.

(c) Calcolare la circuitazione di F lungo ∂B e $\partial S'$, se possibile in due modi.

4. Nel piano orizzontale (x,y) sia C la cardioide $\{(r,\theta) : r \le 2a(1+\cos\theta),\ \theta \in [0,2\pi]\}$, ove $a > 0$.

(a) Disegnata C, calcolarne l'area (sia direttamente che con Green) e la lunghezza del bordo.

(b) Dato $b > 0$, sia U la porzione con $0 \le z \le b$ del cono di base C e vertice $(0,0,2b)$. Mostrare che U è compatto, e calcolarne volume, baricentro e (per quanto possibile) l'area esterna.

(c) Calcolare il flusso uscente del campo $F(x,y,z) = (-y+z,\,-x-z,\,x)$ attraverso tutta la superficie esterna di U, la superficie laterale S e ciascuna delle due basi C (bassa) e C' (alta). Verificare poi la validità della formula di Kelvin-Stokes per S e F.

5. Disegnare i seguenti solidi D, calcolarne il volume ed esprimere il flusso uscente da $S = \partial D$ di un campo vettoriale $A = (A_x,\,A_y,\,A_z)$ sia con calcolo diretto che col teorema di Gauss, esaminando e commentando poi i casi particolari in cui $A_1 = \frac{1}{3}(x,y,z)$ oppure $A_2 = (a,b,c)$ (costante).

(a) $D_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \min\{z,\,2(6-z)\}\}$.

(b) D_2: il settore sferico centrato in $O(0,0,0)$ di raggio R e semiapertura $\alpha \in [0,\pi]$ lungo z.

(c) $D_3 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\,,\ z \ge a(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{a^2})\,,\ z \ge 0\}$, con $a > 0$.

(d) $D_4 = \{(x,y,z) : \frac{x^2+y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\,,\ (x-a)^2+y^2 \le a^2\}$, ove $a, c > 0$.

Soluzioni.

1. (Figura 1) L'area del triangolo A_1 è ovviamente $\frac{3}{2}$. Con Green (secondo cui $\int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dx\,dy = \int_{\partial D}(f\,dx + g\,dy)$ per ogni coppia di funzioni (f,g) di classe $\mathcal{C}^1$ in un aperto contenente D) si ha ad esempio $\text{Area}\,(A_1) = \oint_{\partial A_1} x\,dy$, ove il circuito ∂A_1 è percorso in verso antiorario, e lo pensiamo ottenuto, a partire da $O(0,0)$, come giunzione dei cammini ψ_1 (segmento orizzontale $(-x,\,0)$ con $0 \le x \le 1$), ψ_2 (segmento obliquo $(x, -3x-3)$ con $-1 \le x \le 0$) e ψ_3 (segmento verticale $(0,y)$ con $-3 \le y \le 0$). Vale $\int_{\psi_1} x\,dy = \int_{\psi_3} x\,dy = 0$ e $\int_{\psi_2} x\,dy = \int_{-1}^0 x(-3\,dx) = (-\frac{3}{2}x^2]_{-1}^0 = \frac{3}{2}$, da cui si riottiene $\oint_{\partial A_1} x\,dy = \int_{\psi_1} x\,dy + \int_{\psi_2} x\,dy + \int_{\psi_3} x\,dy = \frac{3}{2}$. L'integrale $\int_{A_1} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$ esiste finito (e negativo) perché $\frac{1}{y-1}$ è continua (e negativa) sul compatto A_1; e per Fubini vale $\int_{-3}^0 dy \int_{-\frac{1}{3}y-1}^0 \frac{1}{y-1}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^0 \frac{y+3}{y-1}\,dy = (\frac{1}{3}(y + 4\log|y-1|)]_{-3}^0 = (0) - (\frac{1}{3}(-3 + 8\log 2) = -(\frac{8}{3}\log 2 - 1)$. Volendo usare Green, per ottenere il nostro integrale doppio $\int_{A_1} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$ basta scegliere $(f,g) = (0, \frac{x}{y-1})$, ottenendo dunque $\int_{A_1} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy = \int_{\partial A_1} \frac{x}{y-1}\,dy$. Si ha ancora $\int_{\psi_1} \frac{x}{y-1}\,dy = \int_{\psi_3} \frac{x}{y-1}\,dy = 0$, mentre $\int_{\psi_2} \frac{x}{y-1}\,dy = \int_{-1}^0 \frac{x}{(-3x-3)-1}\,(-3\,dx) = 3\int_{-1}^0 \frac{x}{3x+4}\,dx = -(\frac{8}{3}\log 2 - 1)$, col che si riottiene il risultato precedente. • In coordinate polari si ha $A_2 = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \alpha\,,\ 2a\sin\theta \le r \le 2b\sin\theta\}$, dunque (usando l'espressione dell'area in coordinate polari $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(r_2(\theta)^2 - r_1(\theta)^2)\,d\theta$) si ottiene $\text{Area}\,(A_2) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (4b^2\sin^2\theta - 4a^2\sin^2\theta)\,d\theta = 2(b^2-a^2)\int_0^\alpha \sin^2\theta\,d\theta = 2(b^2-a^2)(\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)]_0^\alpha = (b^2-a^2)(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$. Con Green si ha $\text{Area}\,(A_2) = \oint_{\partial A_2} x\,dy$, ove il circuito ∂A_2 è percorso in verso antiorario, e lo pensiamo ottenuto, a partire da $O(0,0)$, come giunzione di γ_1 (arco di circonferenza grande, dato da $(2b\sin\theta\cos\theta,\, 2b\sin^2\theta)$ con $0 \le \theta \le \alpha$), γ_2 (segmento, dato dal cammino inverso di $(r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)$ con $2a\sin\alpha \le r \le 2b\sin\alpha$: una volta calcolato l'integrale della forma $x\,dy$ basterà cambiare segno al risultato) e γ_3 (arco di circonferenza piccola che torna in O, ottenuto dal cammino inverso di $(2a\sin\theta\cos\theta,\, 2a\sin^2\theta)$ con $0 \le \theta \le \alpha$). Vale $\int_{\gamma_1} x\,dy = \int_0^\alpha 2b\sin\theta\cos\theta\,4b\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2b^2\int_0^\alpha \sin^2 2\theta\,d\theta = b^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha)$; similmente si avrà allora $\int_{\gamma_3} x\,dy = -a^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha)$; e $\int_{\gamma_2} x\,dy = -\int_{2a\sin\alpha}^{2b\sin\alpha} r\cos\alpha\,\sin\alpha\,dr = -2(b^2-a^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\alpha$, da cui si riottiene $\oint_{\partial A_2} x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy = (b^2-a^2)(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$. Passiamo ora all'integrale doppio $\int_{A_2} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$, che per Tonelli esisterà finito se (e solo se) esisterà finito l'integrale iterato $\int_0^2 dx \int_{(A_2)_x} \frac{1}{|y-1|}\,dy$, ove $(A_2)_x$ denota la x-sezione di A_2 sopra $x \in \pi_1(A_2) = [0,2]$. Ma tale integrale diverge perché la funzione positiva $\frac{1}{|y-1|}$ non è integrabile (alla Riemann in senso generalizzato, dunque alla Lebesgue) in $y = 1$. Nemmeno il teorema di Green ha senso in questo caso: infatti, per poterlo applicare, le funzioni f e g dovrebbero esistere ed essere di classe $\mathcal{C}^1$ in tutto un intorno aperto di A_2, cosa che nel nostro caso non è possibile (le funzioni f e g dovrebbero essere scelte di modo che $\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y-1}$).[(*)] • Integrando per fili paralleli all'asse x si ottiene $\text{Area}\,(A_3) = \int_{A_3} dx\,dy = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-y-1}^{y+3} dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^2+3y+2}^2 dx = \int_{-2}^{-1}(y+3-(-y-1))\,dy + \int_{-1}^0 (2-(y^2+3y+2))\,dy = (y^2+4y]_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2]_{-1}^0 = \frac{13}{6}$. Con Green si ha $\text{Area}\,(A_3) = \oint_{\partial A_3} x\,dy$, ove il circuito ∂A_3 lo pensiamo ottenuto, a partire da $(0,-1)$ girando in verso antiorario, come giunzione di quattro cammini: parametrizzando tali cammini con y si ha allora $\text{Area}\,(A_3) = \int_{-1}^{-2}(-y-1)\,dy + \int_{-2}^{-1}(y+3)\,dy + \int_{-1}^0 2\,dy + \int_0^{-1}(y^2+3y+2)\,dy = \frac{13}{6}$. Passando poi all'integrale $\int_{A_3} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$, come per A_1 esso esiste finito (e negativo) perché $\frac{1}{y-1}$ è continua (e negativa) sul compatto A_3; e per Fubini vale $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-y-1}^{y+3} \frac{1}{y-1}\,dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^2+3y+2}^2 \frac{1}{y-1}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{(y+3)-(-y-1)}{y-1}\,dy + \int_{-1}^0 \frac{(2)-(y^2+3y+2)}{y-1}\,dy = (2y + 6\log|y-1|]_{-2}^{-1} + (-\frac{1}{2}y^2 - 4y - 4\log|y-1|]_{-1}^0 = -(\frac{3}{2} + 6\log 3 - 10\log 2)$. Volendo usare Green, similmente a prima si tratta di calcolare $\int_{-1}^{-2} \frac{-y-1}{y-1}\,dy + \int_{-2}^{-1} \frac{y+3}{y-1}\,dy + \int_{-1}^0 \frac{2}{y-1}\,dy + \int_0^{-1} \frac{y^2+3y+2}{y-1}\,dy$, che dovrebbe ridare il risultato precedente (si omettono questi calcoli).

2. (a) (Figura 2) Che il campo $F(x,y) = (3xy - y^2\,,\ x^2 + 2y)$ non sia conservativo si nota dal fatto che non è irrotazionale, in quanto $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3x - 2y \ne \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x$; comunque si nota anche dalla diversità dei tre integrali di linea, che valgono rispettivamente $\int_{\gamma_1} F\cdot d\ell = \int_0^3 ((3x^2-x^2)(1) + (x^2+2x)(1))\,dx = (x^3+x^2]_0^3 = 36$,

[(*)] Questa risoluzione contiene in realtà una falsa presunzione, cioè che A_2 arrivi sempre a tagliare la quota $y = 1$ con un segmento di misura positiva: ciò però non è vero quando $b < \frac{1}{2}$ per ogni α, o quando $b \ge \frac{1}{2}$ ma $\alpha \le \text{arccotg}\,(2b-1)$, perché in tali casi A_2 sta tutto sotto tale quota, eventualmente lambendola con un solo vertice nei casi estremali $b \ge \frac{1}{2}$ e $\alpha = \text{arccotg}\,(2b-1)$. Se A_2 sta tutto sotto tale quota l'integrale $\int_{A_2} \frac{1}{y-1}\,dx\,dy$ esisterà ovviamente finito (perché $\frac{1}{y-1}$ è continua sul compatto A_2) e per Tonelli e Fubini si può calcolare come iterato (perché $\frac{1}{y-1}$ è ivi negativa), ma è di difficile calcolo preciso; i casi estremali $b \ge \frac{1}{2}$ e $\alpha = \text{arccotg}\,(2b-1)$ vanno invece esaminati a parte, vedendo se l'integrale iterato converge (esercizio).

$\int_{\gamma_2} F\cdot d\ell = \int_0^3((3y^2(y-2)-y^2)(2y-2)+(y^2(y-2)^2+2y)(1))\,dy = (\frac{7}{5}y^5-6y^4+6y^3+y^2]_0^3 = \frac{126}{5}$ e, in coordinate polari adattate $(x,y) = (\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\theta,\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta)$, $\int_{\gamma_3} F\cdot d\ell = \frac{3}{2}\sqrt{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(3(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\theta)(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta)-(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta)^2)\cos\theta+((\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\theta)^2+2(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta))\sin\theta)\,d\theta = \dots$ (si omettono ulteriori calcoli). Il campo $G = F+(0,\varphi) = (3xy-y^2\,,\ x^2+2y+\varphi(x,y))$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque la conservatività equivale a $\frac{\partial G_x}{\partial y} = 3x-2y = \frac{\partial G_y}{\partial x} = 2x+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, ovvero $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x-2y$, da cui $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2-2xy+\psi(y)$ per una qualsiasi $\psi(y)$ di classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Intendendo nella formula di Green $(f(x,y),g(x,y)) = F(x,y) = (3xy-y^2\,,\ x^2+2y)$ si ha $\oint_{\partial D}(f\,dx+g\,dy) = \int_{\gamma_1}F\cdot d\ell-\int_{\gamma_2}F\cdot d\ell = 36-\frac{126}{5} = \frac{54}{5}$: si tratta di dimostrare che questo è anche il valore dell'integrale doppio $\int_D(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})\,dx\,dy = \int_D(2x-(3x-2y))\,dx\,dy = \int_D(2y-x)\,dx\,dy$, che per Fubini vale $\int_0^3 dy\int_{y(y-2)}^y(2y-x)\,dx = \int_0^3(2xy-\frac{1}{2}x^2]_{y(y-2)}^y\,dy = (\frac{1}{10}y^5-y^4+\frac{5}{2}y^3]_0^3 = \frac{54}{5}$, come previsto. Scegliamo infine $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2-2xy$ (ovvero $\psi(y)=0$): una primitiva $\alpha(x,y)$ di $G(x,y) = (3xy-y^2\,,\ \frac{3}{2}x^2+2y-2xy)$ è data da $(\frac{\partial\alpha}{\partial x},\frac{\partial\alpha}{\partial y}) = (3xy-y^2\,,\ \frac{3}{2}x^2+2y-2xy)$, e si ricava $\alpha(x,y) = \frac{3}{2}x^2y-xy^2+y^2+k$ al variare di $k\in\mathbb{R}$: pertanto, essendo G conservativo, i tre integrali richiesti $\int_{\gamma_j}G\cdot d\ell$ sono uguali e valgono $\alpha(3,3)-\alpha(0,0) = \frac{45}{2}$.

3. (a) (Figura 3) Nel piano (x,z) la parabola $z\ge\frac{1}{2a}x^2-a$ e il grafico $|z|\le\frac{1}{2}x$ si incontrano nei punti $(a,-\frac{1}{2}a)$ e $(2a,a)$, dunque si ha $\text{Area}\,(B) = \int_B dx\,dz = \int_0^a dx\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x}dz+\int_a^{2a}dx\int_{\frac{1}{2a}x^2-a}^{\frac{1}{2}x}dz = \int_0^a x\,dx+\int_a^{2a}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2a}x^2+a)\,dx = \frac{13}{12}a^2$; in modo simile si ricava $\int_B x\,dx\,dz = \frac{9}{8}a^3$ e $\int_B z\,dx\,dz = \frac{11}{60}a^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\text{Area}\,(B)}\int_B x\,dx\,dz = \frac{27}{26}a$ e $z_G = \frac{1}{\text{Area}\,(B)}\int_B z\,dx\,dz = \frac{11}{65}a$. Usando Guldino, il volume del solido D ottenuto ruotando B di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario attorno all'asse z è dato da $\text{Vol}\,(D) = \frac{\pi}{2}\,x_G\,\text{Area}\,(B) = \frac{9\pi}{16}a^3$.

(b) Per calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (x-z,\,y,\,0)$ attraverso S usiamo il teorema di Gauss: essendo $\nabla\cdot F = 1+1+0 = 2$, il flusso è pari a $\Phi_S(F) = \int_D(\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = 2\,\text{Vol}\,(D) = \frac{9\pi}{8}a^3$. Per il flusso attraverso B, notiamo che nel piano $y=0$ (in cui B è contenuta) il campo F è parallelo all'asse x e dunque a B: perciò $\Phi_B(F) = 0$. Per il flusso attraverso S' usiamo la definizione: parametrizzando S' con $(r\cos\theta,\,r\sin\theta,\,\frac{1}{2a}r^2-a)$ con $a\le r\le 2a$ e $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, otteniamo $\Phi_{S'}(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{2a}\det\begin{pmatrix} r\cos\theta-\frac{1}{2a}r^2+a & \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & \frac{1}{a}r & 0\end{pmatrix}dr = -\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{2a}r^2(r+(a-\frac{1}{2a}r^2)\cos\theta)\,dr = -\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{3}(a\cos\theta)r^3-\frac{1}{10a}(\cos\theta)r^5]_{r=a}^{r=2a}\,d\theta = -\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{15}{4}-\frac{23}{30}\cos\theta)a^4\,d\theta = -(\frac{15\pi}{8}-\frac{23}{30})a^3$. Gli altri flussi di F sono calcolabili sempre attraverso la definizione: per la porzione conica inferiore si avrà la parametrizzazione $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,-\frac{1}{2}\rho)$ con $0\le\rho\le a$ e $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; per la porzione conica superiore si avrà $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\frac{1}{2}\rho)$ con $0\le\rho\le 2a$ e $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; per l'altra faccia verticale sul piano $x=0$ si avrà $(0,y,z)$ con $-\frac{1}{2}y\le z\le\frac{1}{2}y$ se $0\le y\le a$, e con $\frac{1}{2a}y^2-a\le z\le\frac{1}{2}y$ se $a\le y\le 2a$. Naturalmente alla fine andrà verificato che la somma di tutti i flussi del campo attraverso le singole porzioni dia nuovamente il già calcolato flusso totale del campo attraverso S.

(c) Converrà usare la formula di Kelvin-Stokes: il rotore di F è $\nabla\times F = (0,-1,0)$, pertanto $\oint_{\partial B}F\cdot d\ell = \Phi_B(\nabla\times F) = \int_B\det\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}dx\,dz = \text{Area}\,(B) = \frac{13}{12}a^2$. Anche col calcolo diretto si ottiene $\oint_{\partial B}F\cdot d\ell = \int_0^a((x-(-\frac{x}{2}))(1))\,dx+\int_a^{2a}((x-(\frac{1}{2a}x^2-a))(1))\,dx+\int_{2a}^0((x-(\frac{x}{2}))(1))\,dx = \int_0^a\frac{3}{2}x\,dx+\int_a^{2a}(x-\frac{1}{2a}x^2+a)\,dx+\int_{2a}^0\frac{x}{2}\,dx = \frac{13}{12}a^2$. • Sempre con Kelvin-Stokes si ottiene $\oint_{\partial S'}F\cdot d\ell = \Phi_{S'}(\nabla\times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{2a}\det\begin{pmatrix}0&\cos\theta&-r\sin\theta\\-1&\sin\theta&r\cos\theta\\0&\frac{1}{a}r&0\end{pmatrix}dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{2a}\frac{1}{a}r^2\sin\theta\,dr = \frac{1}{a}(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{3}r^3]_a^{2a} = \frac{7}{3}a^2$. Anche qui si può verificare il risultato col calcolo diretto: le parametrizzazioni del bordo che danno luogo all'orientazione positiva di $\partial S'$ sono (nell'ordine, partendo dal vertice $(2a,0,a)$): l'arco di circonferenza alta $(2a\cos\theta,2a\sin\theta,a)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; il segmento parabolico sul piano $x=0$, dato da $(0,y,\frac{1}{2a}y^2-a)$ con $a\le y\le 2a$, percorso all'inverso; l'arco di circonferenza bassa $(a\cos\theta,a\sin\theta,-\frac{1}{2}a)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, percorso all'inverso; e il segmento parabolico sul piano $y=0$, dato da $(x,0,\frac{1}{2a}x^2-a)$ con $a\le x\le 2a$.

4. (a) (Figura 4) L'area della cardiode $C = \{(r,\theta) : r\le 2a(1+\cos\theta),\ \theta\in[0,2\pi]\}$ è data (nella solita formula in coordinate polari) da $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}4a^2(\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)]_0^{2\pi} = 6\pi a^2$; con Green si ritrova $\oint_{\partial C}x\,dy = \int_0^{2\pi}2a(1+\cos\theta)\cos\theta\,d(2a(1+\cos\theta)\sin\theta) = 4a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta(\cos\theta+\cos2\theta)\,d\theta = 4a^2\int_0^{2\pi}(2\cos^4\theta+3\cos^3\theta-\cos\theta)\,d\theta = 8a^2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta = 8a^2\,\frac{1}{4}(\cos^3\theta\sin\theta+3\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{2\pi} = 6\pi a^2$. Quanto alla lunghezza del bordo, l'elemento d'arco (sempre in coordinate polari) si scrive come $d\ell = \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta = 2\sqrt{2}\,a\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$, dunque si ha $\int_{\partial C}d\ell = 2\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|\,d\theta = 8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 16a$.

(b) U è compatto perché chiuso (definito da disuguaglianze late di funzioni continue) e limitato (infatti in coordinate cilindriche si ha $r\le 4a$ e $0\le z\le b$). La z-fetta di U ha dimensioni lineari che decrescono linearmente con z dal valore $2a$ per $z=0$ al valore 0 per $z=2b$, dunque il bordo di tale fetta è caratterizzato (sempre in coordinate cilindriche) da $r(\theta,z) = a(2-\frac{z}{b})(1+\cos\theta)$: pertanto, rimpiazzando $2a$ con $a(2-\frac{z}{b})$ nell'area trovata in precedenza, si ha che l'area della z-fetta di U risulta $\frac{3}{2}\pi(2-\frac{z}{b})^2a^2$, e il volume di U si trova

integrando in z tale area, dunque $\mathrm{Vol}\,(U) = \int_0^b \frac{3}{2}\pi(2-\frac{z}{b})^2 a^2\,dz = \frac{7\pi}{2}a^2 b$. Quanto al baricentro, per simmetria si avrà $y_G = 0$; poi $x_G = \frac{2}{7\pi a^2 b}\int_U x\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{7\pi a^2 b}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dz \int_0^{a(2-\frac{z}{b})(1+\cos\theta)} r\cos\theta\, r\,dr = \frac{2a}{21\pi b}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta \int_0^b (2-\frac{z}{b})^3\,dz = \frac{75}{56}a$ e $z_G = \frac{2}{7\pi a^2 b}\int_U z\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{7\pi a^2 b}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dz \int_0^{a(2-\frac{z}{b})(1+\cos\theta)} z\,r\,dr = \frac{1}{7\pi b}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \int_0^b z(2-\frac{z}{b})^2\,dz = \frac{11}{28}b$. Infine, vediamo cosa si può dire per la superficie esterna di U. Le aree delle basi sono rispettivamente $6\pi a^2$ (quella inferiore C) e $\frac{3}{2}\pi a^2$ (quella inferiore C'). Una parametrizzazione della superficie laterale S di U è data da quella in θ della z-fetta più la coordinata z, ovvero da $(x,y,z) = (r(\theta,z)\cos\theta,\ r(\theta,z)\sin\theta,\ z)$: con essa si potrebbe procedere al calcolo dell'area di S con la consueta tecnica dell'integrale superficiale (elemento d'area ecc.), ma i calcoli risultano complicati.

(c) Per calcolare il flusso uscente $\Phi_{\partial U}(F)$ del campo $F(x,y,z) = (-y+z,\,-x-z,\,x)$ attraverso tutta la superficie esterna di U converrà usare il teorema di Gauss: essendo $\nabla\cdot F = 0$ si avrà $\Phi_{\partial U}(F) = \int_U (\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = 0$. Il flusso uscente da C è facile da calcolare con la definizione: infatti il versore normale uscente è $-e_3$ e l'elemento d'area è $dx\,dy$, dunque si ottiene $\Phi_C(F) = \int_C F\cdot(-e_3)\,dx\,dy = -\int_C x\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2a(1+\cos\theta)} r\cos\theta\, r\,dr = -\frac{8}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta = -\frac{8}{3}a^3\int_0^{2\pi}(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)\,d\theta =$ [eliminando i termini a integrale nullo] $-\frac{8}{3}a^3(3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta) = -\frac{8}{3}a^3(3\pi+\frac{3}{4}\pi) = -10\pi a^3$. Idem per il flusso uscente dalla base superiore C': il versore normale uscente è e_3, dunque si ottiene $\Phi_{C'}(F) = \int_{C'} F\cdot e_3\,dx\,dy = \int_{C'} x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\cos\theta\,r\,dr = \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta = \frac{5}{4}\pi a^3$. A questo punto, essendo $\Phi_{\partial U}(F) = \Phi_S(F)+\Phi_C(F)+\Phi_{C'}(F)$, si ricava subito $\Phi_S(F) = \Phi_{\partial U}(F) - \Phi_C(F) - \Phi_{C'}(F) = 0-(-10\pi a^3)-(\frac{5}{4}\pi a^3) = \frac{35}{4}\pi a^3$. • Procediamo ora con la verifica della formula di Kelvin-Stokes per S e F. Calcoliamo il flusso uscente di $\nabla\times F$ attraverso S: si ha $\nabla\times F = e_1$, dunque usando la parametrizzazione di S descritta sopra si ricava $\Phi_S(\nabla\times F) = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^b \det\begin{pmatrix} 1 & -a(2-\frac{z}{b})(1+2\cos\theta)\sin\theta & -\frac{a}{b}(1+\cos\theta)\cos\theta \\ 0 & a(2-\frac{z}{b})(1-2\cos\theta)(1+\cos\theta) & -\frac{a}{b}(1+\cos\theta)\sin\theta \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^b a(2-\frac{z}{b})(1-2\cos\theta)(1+\cos\theta)\,dz = a\int_0^{2\pi}(-\cos 2\theta-\cos\theta)\,d\theta\int_0^b(2-\frac{z}{b})\,dz = 0$. D'altra parte il bordo ∂S è costituito dall'unione disgiunta del bordo di C orientato in senso antiorario e del bordo di C' orientato in senso orario. Ora, ∂C è parametrizzata da $(2a(1+\cos\theta)\cos\theta,\ 2a(1+\cos\theta)\sin\theta,\ 0)$, dunque il vettore tangente è $(2a(-\sin\theta-\sin 2\theta),\ 2a(\cos\theta+\cos 2\theta),\ 0)$: pertanto $\int_{\partial C} F\cdot d\ell = \int_0^{2\pi}((-2a(1+\cos\theta)\sin\theta)(2a(-\sin\theta-\sin 2\theta)) + (-2a(1+\cos\theta)\cos\theta)(2a(\cos\theta+\cos 2\theta)))\,d\theta = -4a^2\int_0^{2\pi}(4\cos^4\theta+6\cos^3\theta-\cos^2\theta-4\cos\theta-1)\,d\theta = 0$ (infatti $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi}\cos^4\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $\int_0^{2\pi}\cos\theta = \int_0^{2\pi}\cos^3\theta = 0$). Allo stesso modo si mostra che $\int_{\partial C'} F\cdot d\ell = 0$, dunque $\oint_{\partial S} F\cdot d\ell = \int_{\partial C} F\cdot d\ell - \int_{\partial C'} F\cdot d\ell = 0$, e la formula di Kelvin-Stokes è verificata.

5. (a) (Figura 5) Il solido $D_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le \min\{z,\,2(6-z)\}\}$ è la zona compresa tra i due paraboloidi $z = x^2+y^2$ (sotto) e $z = 6-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (sopra). I due paraboloidi si intesecano a quota data da $z = 2(6-z)$, ovvero $z = 4$, dunque la proiezione di D_1 sul piano orizzontale è il disco $x^2+y^2\le 4$: il volume di D_1 è dato (per fili paralleli all'asse z) da $\int_{\{x^2+y^2\le 4\}}(6-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-(x^2+y^2))\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2(6-\frac{3}{2}r^2)\,r\,dr = 2\pi(3r^2-\frac{3}{8}r^4]_0^2 = 12\pi$, o alternativamente (per z-fette) da $\int_0^4 z\pi\,dz + \int_4^6 2(6-z)\pi\,dz = 8\pi+4\pi = 12\pi$. Il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x,\,A_y,\,A_z)$ uscente da ∂D_1 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_1}(A) = \int_{D_1}(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y})\,dx\,dy\,dz$; in alternativa, con la definizione diretta, il flusso uscente dalla calotta inferiore è (col segno meno per ottenere la normale uscente) $\Phi_{\partial D_1^-}(A) = -\int_{\{x^2+y^2\le 4\}} \det\begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & 2x & 2y\end{pmatrix}\Big|_{z=x^2+y^2} dx\,dy = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}} (2x\,A_x + 2y\,A_y - A_z)|_{z=x^2+y^2}\,dx\,dy$, mentre quello uscente dalla calotta superiore è $\Phi_{\partial D_1^+}(A) = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}} \det\begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & -x & -y\end{pmatrix}\Big|_{z=6-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}} (x\,A_x + y\,A_y + A_z)|_{z=6-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, e $\Phi_{\partial D_1}(A) = \Phi_{\partial D_1}(A)+\Phi_{\partial D_1}(A)$. • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x,y,z)$, secondo Gauss tale flusso dovrebbe ricalcolare il volume di D_1, e infatti si ottiene $\Phi_{\partial D_1}(A_1) = \frac{1}{3}\int_{\{x^2+y^2\le 4\}}(2x^2+2y^2-(x^2+y^2)+x^2+y^2+6-\frac{1}{2}(x^2+y^2))\,dx\,dy = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}}(\frac{1}{2}(x^2+y^2)+2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2(\frac{1}{2}r^2+2)r\,dr = 2\pi(\frac{1}{8}r^4+r^2]_0^2 = 12\pi$. • Invece per $A_2 = (a,b,c)$, sempre secondo Gauss tale flusso dovrebbe essere nullo, e infatti si trova $\Phi_{\partial D_1}(A_2) = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}}(2ax+2by-c+ax+by+c)\,dx\,dy = 3\int_{\{x^2+y^2\le 4\}}(ax+by)\,dx\,dy = 3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2(ar\cos\theta+br\sin\theta)r\,dr = 0$.

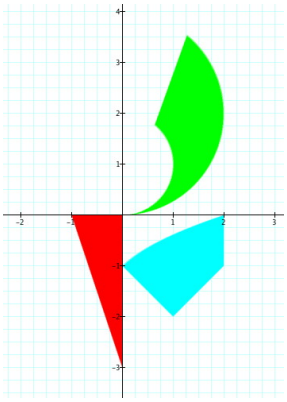
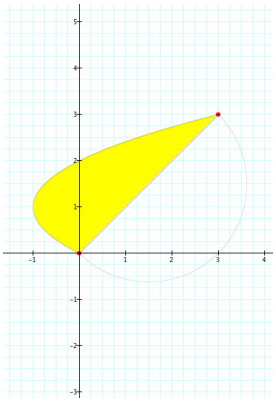
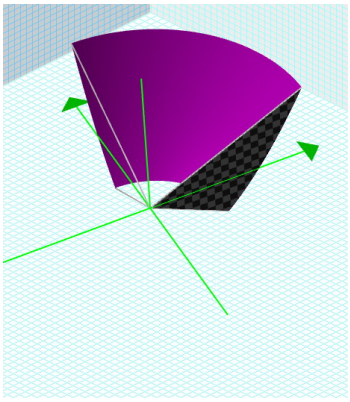
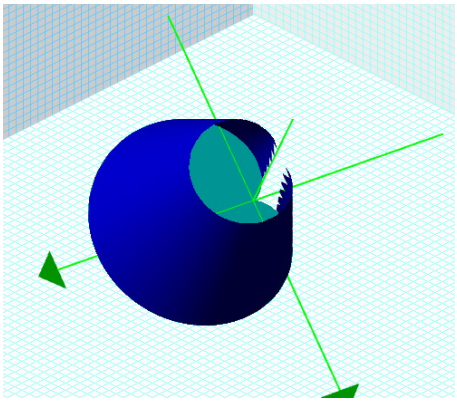
(b) (Figura 6) Il volume del settore sferico D_2 è facilmente calcolabile in coordinate sferiche come l'integrale $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\alpha d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\,dr = \frac{2}{3}\pi(1-\cos\varphi)R^3$. Il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x,\,A_y,\,A_z)$ uscente da ∂D_2 si può sempre calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_2}(A) = \int_{D_2}(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y})\,dx\,dy\,dz$; con la definizione diretta, il flusso uscente dalla superficie sferica superiore è dato dall'integrale $\Phi_{\partial D_2^+}(A) = -\int_{[0,2\pi]\times[0,\alpha]} \det\begin{pmatrix} A_x & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ A_y & R\cos\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \\ A_z & 0 & -R\sin\varphi\end{pmatrix} d\theta\,d\varphi = \int_{[0,2\pi]\times[0,\alpha]} R^2\sin\varphi(A_1\cos\theta\sin\varphi + A_2\sin\theta\sin\varphi + A_3\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi$, mentre quello uscente dalla superficie conica inferiore (data da $(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{cotg}\,\alpha)$) è $\Phi_{\partial D_2^-}(A) = \int_{\{x^2+y^2\le R^2\sin^2\alpha\}} \det\begin{pmatrix} A_x & 1 & 0 \\ A_y & 0 & 1 \\ A_z & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{cotg}\,\alpha & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix} dx\,dy = -\int_{\{x^2+y^2\le R^2\sin^2\alpha\}}(\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,A_1+$

$y\,A_2) - A_3)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^{R\sin\alpha}((A_1\cos\theta + A_2\sin\theta)\,\mathrm{cotg}\,\alpha - A_3)\,r\,dr$. • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x,y,z)$ i flussi diventano $\Phi_{\partial D_2^+}(A_1) = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^{\alpha} R^3\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi(1-\cos\varphi)R^3$ e $\Phi_{\partial D_2^-}(A_1) = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^{R\sin\alpha}(r\mathrm{cotg}\,\alpha - r\mathrm{cotg}\,\alpha)\,r\,dr = 0$ (prevedibile, visto che il campo A_1 è parallelo alla superficie conica), dunque il flusso totale è $\Phi_{\partial D_2}(A_1) = \Phi_{\partial D_2}(A_1^+) + \Phi_{\partial D_2}(A_1^-) = \frac{2}{3}\pi(1-\cos\varphi)R^3$, che come prescrive Gauss ridà il volume di D_2. • Invece per $A_2 = (a,b,c)$ i flussi diventano $\Phi_{\partial D_2^+}(A_2) = \int_{[0,2\pi]\times[0,\alpha]} R^2\sin\varphi(a\cos\theta\sin\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi = \pi c\sin^2\alpha\,R^2$ e $\Phi_{\partial D_2^+}(A_2) = \int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^{R\sin\alpha}((a\cos\theta + b\sin\theta)\,\mathrm{cotg}\,\alpha - c)\,r\,dr = -\pi c\sin^2\alpha\,R^2$, dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_2}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.

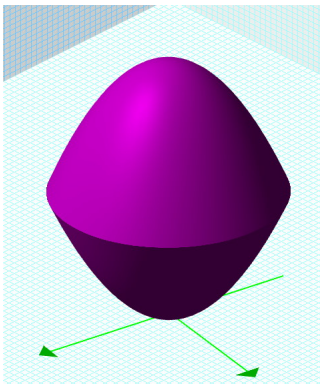
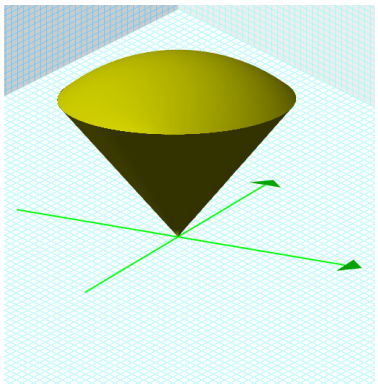
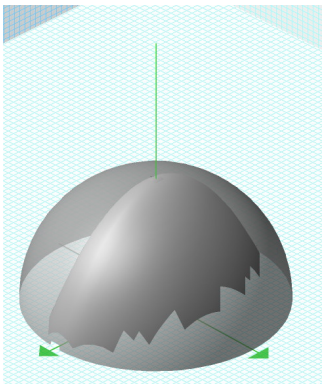
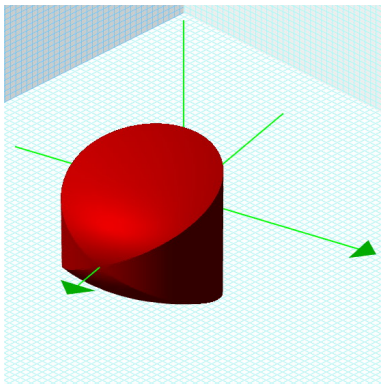
(c) (Figura 7) Il luogo $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ rappresenta la palla chiusa di centro l'origine e raggio a, mentre il luogo $z = a(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{a^2})$ è il paraboloide di z-sezione ellittica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2} = 1-\frac{z}{a}$ (con semiassi rispettivamente $a\sqrt{1-\frac{z}{a}}$ e $\frac{1}{2}a\sqrt{1-\frac{z}{a}}$, dunque con area $\frac{1}{2}\pi a^2(1-\frac{z}{a})$); pertanto il solido $D_3 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\,,\ z \ge a(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{a^2})\,,\ z\ge 0\}$ è fatto dai punti della mezza palla superiore che sono esterni al paraboloide. Il volume di D_3 converrà calcolarlo per differenza: il volume interno al paraboloide si trova integrando l'area della z-sezione tra 0 e a, ovvero $\int_0^a \frac{1}{2}\pi a^2(1-\frac{z}{a})\,dz = \frac{1}{2}\pi a^2(z-\frac{1}{2a}z^2]_0^a = \frac{1}{4}\pi a^3$, pertanto $\mathrm{Vol}\,(D_3) = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{1}{4}\pi a^3 = \frac{5\pi}{12}a^3$. Come in precedenza, il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x,\,A_y,\,A_z)$ uscente da ∂D_3 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_3}(A) = \int_{D_3}(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y})\,dx\,dy\,dz$. Con la definizione diretta, dette S_1 la superficie sferica esterna, S_2 la superficie ellittica interna e S_3 la superficie piana di base, si ha che il versore normale uscente per S_1 è $\frac{1}{a}(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})$ e l'elemento d'area è $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$, da cui $\Phi_{S_1}(A) = \int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}(\frac{x\,A_1+y\,A_2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+A_3)\,dx\,dy$ oppure, in coordinate sferiche (θ,φ) (nelle quali il versore normale uscente per S_1 è $(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$ e l'elemento d'area è $a^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$) si ha anche $\Phi_{S_1}(A) = \int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A_1\cos\theta\sin\varphi + A_2\sin\theta\sin\varphi + A_3\cos\varphi)a^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$; si può poi parametrizzare S_2 con $(x,y,a(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{a^2}))$, da cui $\Phi_{S_2}(A) = -\int_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\le 1\}}\det\begin{pmatrix} A_x & 1 & 0\\ A_y & 0 & 1\\ A_z & -\frac{2x}{a} & -\frac{8y}{a}\end{pmatrix}dx\,dy = -\int_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\le 1\}}(\frac{2x}{a}\,A_x + \frac{8y}{a}\,A_y + A_z)\,dx\,dy$; infine il flusso uscente da S_3 è dato da $\Phi_{S_3}(A) = -\int_{\{x^2+y^2\le a^2\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\ge 1\}} A_3|_{z=0}\,dx\,dy$. • Per $A_1 = \frac{1}{3}(x,y,z)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A_1) = \frac{1}{3}\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \sqrt{a^2-x^2-y^2})\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^a\frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr = \frac{2\pi}{3}a^2(-\sqrt{a^2-r^2}]_0^a = \frac{2\pi}{3}a^3$, poi $\Phi_{S_2}(A_1) = -\frac{1}{3}\int_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\le 1\}}(\frac{2x^2}{a}+\frac{8y^2}{a}+a(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{a^2}))\,dx\,dy =$ [posto $(x,y) = (a\rho\cos\psi, \frac{1}{2}a\rho\sin\psi)$] $-\frac{1}{6}a^3\int_0^{2\pi}\,d\psi\int_0^1(\rho^2+1)\rho\,d\rho = -\frac{1}{3}a^3\pi(\frac{1}{4}(\rho^2+1)^2]_0^1 = -\frac{1}{4}\pi a^3$, e infine $\Phi_{S_3}(A_1) = 0$, così che il flusso totale è $\Phi_S(A_1) = \Phi_{S_1}(A_1) + \Phi_{S_2}(A_1) + \Phi_{S_3}(A_1) = \frac{5\pi}{12}a^3$, che come prescrive Gauss ridà il volume di D_3. • Invece per $A_2 = (\alpha,\beta,\gamma)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A_2) = \int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}(\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\gamma)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^a(\frac{\alpha r\cos\theta+\beta r\sin\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}+\gamma)\,r\,dr =$ [eliminando i termini nulli nell'integrazione in θ] $\int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^a\gamma\,r\,dr = \pi\gamma a^2$, poi $\Phi_{S_2}(A_2) = -\int_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\le 1\}}(\frac{2x}{a}\,\alpha+\frac{8y}{a}\,\beta+\gamma)\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi}\,d\psi\int_0^1(2\alpha\rho\cos\theta+4\beta\rho\sin\theta+\gamma)\frac{1}{2}a^2\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\pi\gamma a^2$ e $\Phi_{S_3}(A_2) = -\int_{\{x^2+y^2\le a^2\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}\ge 1\}}\gamma\,dx\,dy = -\gamma\,\mathrm{Area}\,(S_3) = -\frac{1}{2}\pi\gamma a^2$: dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_3}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.

(d) (Figura 8) Il luogo $\frac{x^2+y^2}{4a^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ rappresenta l'ellissoide di centro l'origine e semiassi rispettivamente $2a$, $2a$ e c, mentre il luogo $(x-a)^2+y^2 \le a^2$ è il cilindro retto di base il cerchio nel piano orizzontale (x,y) di centro $(a,0,0)$ e raggio r (cerchio tutto contenuto nell'ellissoide) e illimitato in direzione z: e il solido D_4 è l'intersezione tra i due. Integrando per fili paralleli all'asse z, e notando che in coordinate polari nel piano (x,y) il cerchio $(x-a)^2+y^2 \le a^2$ è descritto come $0 \le r \le 2a\cos\theta$ con $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$, si ha che $\mathrm{Vol}\,(D_4) = \int_{\{(x-a)^2+y^2\le a^2\}}(\int_{-\frac{c}{2a}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\frac{c}{2a}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dz)\,dx\,dy = \frac{c}{a}\int_{\{(x-a)^2+y^2\le a^2\}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{c}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr = \frac{c}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{2a\cos\theta}\,d\theta = \frac{c}{3a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8a^3(1-|\sin\theta|^3)\,d\theta = \frac{16a^2c}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{16a^2c}{3}(\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^2c}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$. Come al solito, il flusso del campo campo vettoriale $A = (A_x,\,A_y,\,A_z)$ uscente da ∂D_4 si può calcolare col teorema di Gauss come $\Phi_{\partial D_4}(A) = \int_{D_4}(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y})\,dx\,dy\,dz$. Usiamo ora la definizione diretta, chiamando S_1 la porzione di superficie esterna sull'ellissoide e S_2 quella sul cilindro. Parametrizziamo la superficie dell'ellissoide usando delle coordinate sferiche adattate, ovvero $(x,y,z) = (2a\cos\theta\sin\varphi,\ 2a\sin\theta\sin\varphi,\ c\cos\varphi)$ con $(\theta,\varphi)\in[-\pi,\pi]\times[0,\pi]$: la condizione $(x-a)^2+y^2 \le a^2$ diventa allora (fatte le sostituzioni) $\cos\theta \ge \sin\varphi$, ovvero $|\theta| \le |\arccos(\sin\varphi)| = |\varphi-\frac{\pi}{2}|$, da cui (mettendo il segno per assicurare la normale esterna) $\Phi_{S_1}(A) = -\int_0^{\pi}\,d\varphi\int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|}\det\begin{pmatrix} A_x & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi\\ A_y & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi\\ A_z & 0 & -c\sin\varphi\end{pmatrix}d\theta = 2a\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|}(c(A_x\cos\theta + A_y\sin\theta)\sin\varphi + 2a\,A_z\cos\varphi)\,d\theta$. Parametrizzando poi la superficie del cilindro in coordinate cilindriche tramite $(x,y,z) = (a(1+\cos\alpha),\,a\sin\alpha,\,z)$ con $(\alpha,z)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$, e la

condizione $\frac{x^2+y^2}{4a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ diventa $|z|\le c\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=c\sin\frac{\alpha}{2}$ (si noti che $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ perché si è scelto $\alpha\in[0,2\pi]$), da cui $\Phi_{S_2}(A)=\int_0^{2\pi}d\alpha\int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}}\det\begin{pmatrix}A_x & -a\sin\alpha & 0\\ A_y & a\cos\alpha & 0\\ A_z & 0 & 1\end{pmatrix}dz=a\int_0^{2\pi}d\alpha\int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}}(A_x\cos\alpha+A_y\sin\alpha)\,dz$ • Per $A_1=\frac{1}{3}(x,y,z)$ i flussi diventano $\Phi_{S_1}(A)=\frac{2}{3}a\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|}(c((2a\cos\theta\sin\varphi)\cos\theta+(2a\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta)\sin\varphi+2a\,(c\cos\varphi)\,\cos\varphi)\,d\theta=\frac{2}{3}a\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|}2ac\,d\theta=\frac{8}{3}a^2c\int_0^{\pi}|\varphi-\frac{\pi}{2}|\sin\varphi\,d\varphi=$ [posto $\psi=\varphi-\frac{\pi}{2}$] $\frac{8}{3}a^2c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\psi|\cos\psi\,d\psi=\frac{16}{3}a^2c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi\cos\psi\,d\psi=\frac{16}{3}a^2c(\psi\sin\psi+\cos\psi]_0^{\frac{\pi}{2}}\psi\cos\psi\,d\psi=\frac{16}{3}a^2c(\frac{\pi}{2}-1)$ e $\Phi_{S_2}(A_1)=\frac{1}{3}a\int_0^{2\pi}d\alpha\int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}}(a(1+\cos\alpha)\cos\alpha+a\sin^2\alpha)\,dz=\frac{2}{3}a^2c\int_0^{2\pi}(1+\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha=\frac{16}{9}a^2c$, così che il flusso totale è $\Phi_{\partial D_4}(A_1)=\Phi_{S_1}(A_1)+\Phi_{S_2}(A_1)=\frac{16a^2c}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$, che per Gauss ridà Vol (D_4). • Invece per $A_2=(h,k,l)$ (costante) si ha $\Phi_{S_1}(A_2)=2a\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_{-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{|\varphi-\frac{\pi}{2}|}(c(h\cos\theta+k\sin\theta)\sin\varphi+2al\cos\varphi)\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sin\varphi(\,c(h\sin\theta-k\cos\theta)\sin\varphi+2al\theta\cos\varphi]_{\theta=-|\varphi-\frac{\pi}{2}|}^{\theta=|\varphi-\frac{\pi}{2}|}d\varphi=4a\int_0^{\pi}(ch\sin|\varphi-\frac{\pi}{2}|\sin\varphi+al|\varphi-\frac{\pi}{2}|\cos\varphi)\,\sin\varphi\,d\varphi=$ [posto $\psi=\varphi-\frac{\pi}{2}$] $4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ch\sin|\psi|\cos\psi-al|\psi|\sin\psi)\,\cos\varphi\,d\psi=$ [sfruttando le (dis)parità] $8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}ch\sin\psi\cos^2\psi\,d\psi=8ach(-\frac{1}{3}\cos^3\psi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}ach$ e $\Phi_{S_2}(A_2)=a\int_0^{2\pi}d\alpha\int_{-c\sin\frac{\alpha}{2}}^{c\sin\frac{\alpha}{2}}(h\cos\alpha+k\sin\alpha)\,dz=2ac\int_0^{2\pi}(h\cos\alpha+k\sin\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha=$ [posto $\beta=\frac{\alpha}{2}$] $4ac\int_0^{\pi}(h(2\cos^2\beta-1)+2k\sin\beta\cos\beta)\sin\beta\,d\beta=4ac(h(-\frac{2}{3}\cos^3\beta+\cos\beta)+\frac{2}{3}k\sin^3\beta]_0^{\pi}=-\frac{8}{3}ach$: dunque il flusso totale uscente $\Phi_{\partial D_4}(A_2)$ è nullo, come prescrive Gauss.

(1) Ex. 1. **(2)** Ex. 2. **(3)** Ex. 3. **(4)** Ex. 4.

(5) Ex. 5a. **(6)** Ex. 5b. **(7)** Ex. 5c. **(8)** Ex. 5d.