3 Integrazione dei campi vettoriali

Abbiamo finora trattato —con Riemann prima e Lebesgue poi— una teoria di integrazione "non orientata", nella quale il fatto che lo spazio base ($\mathbb{R}^n$ o la varietà) su cui si stava integrando una funzione reale fosse o meno orientato (nel senso che preciseremo tra poco) non aveva alcuna rilevanza. Ci proponiamo ora di studiare una teoria di integrazione sensibile all'orientazione dello spazio base, nella quale gli oggetti naturalmente portati ad essere integrati (perché ne portano traccia dentro di sè) non saranno più le funzioni ma le *forme differenziali*. D'altra parte, con questa doppia natura dell'integrazione bisognava prima o dopo fare i conti: l'esistenza di due diversi integrali (uno non orientato e l'altro sì) era già stata fatta accettare allo studente senza troppe spiegazioni quando, nello studio dell'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$, si era passati dal simbolo $\int_{[a,b]} f$ (integrale "non orientato", definito come elemento separatore delle somme superiori e inferiori) al simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ (integrale "orientato", basato come definizione sul precedente ma sensibile all'ordine in cui vengono citati a e b). In effetti, nel linguaggio che andremo a precisare nel seguito e che all'epoca non conoscevamo, nel secondo integrale non stavamo più integrando la funzione f ma la forma differenziale lineare $f(x)\,dx$.

Le forme differenziali sono l'aspetto duale dei *campi vettoriali* e delle loro costruzioni tensoriali, e per certi versi le due teorie sono analoghe; tuttavia l'uso delle forme rispetto a quello dei vettori assicura un netto vantaggio in termini di naturalità della costruzione delle operazioni e degli enunciati, come si vedrà ad esempio nella formula del cambio di variabili (il "pull-back") e nella sua compatibilità "funtoriale" con la differenziazione, l'integrazione, il prodotto esterno. D'altra parte è però innegabile che l'approccio tramite i campi vettoriali sia ancora quello preferito nelle scienze applicate, perché un vettore ha un'immediata rappresentabilità visiva e una forma no, dunque i risultati classici di integrazione vettoriale (teorema della divergenza di Gauss-Green, formula di Kelvin-Stokes) sono enunciati e conosciuti soprattutto in quel linguaggio. Pertanto, l'insegnamento di questi argomenti può seguire due diverse strategie: scegliendo la prima si illustrano i risultati classici nel consueto linguaggio dei campi vettoriali con un rapido accenno finale a una loro sottostante unitarietà, previlegiando la consuetudine e la comprensibilità immediata a scapito di una reale consapevolezza di quanto sta dietro a tutto; scegliendo invece la seconda si introducono la teoria dell'integrazione delle forme differenziali sulle varietà fino al risultato generale (teorema di Stokes) per poi mostrare come i teoremi classici si possano tutti dedurre da questo come casi particolari, mettendo in risalto l'unitarietà matematica che governa il tutto ma col rischio di disorientare gli studenti —soprattutto all'inizio— con un linguaggio fatalmente più astratto. Il primo approccio è di gran lunga il più diffuso, e in queste note per opportunità didattica daremo la precedenza ad esso; tuttavia, considerando il secondo culturalmente più appagante, abbiamo scelto di presentarlo comunque nella parte finale della sezione, dando modo agli studenti interessati di godere della bellezza di una teoria tanto semplice[(48)] quanto potente.

[(48)] Diciamo *semplice* non nel senso di "facile" ovvero "che si può fare senza difficoltà" ma nel senso etimologico, ovvero "non complicato, univoco" (dal latino *semel*, "una volta").

Organizzeremo perciò l'esposizione come segue.

- Inizieremo parlando delle varietà con bordo regolare, del concetto di orientazione e di partizioni dell'unità, in preparazione ai teoremi classici di integrazione vettoriale che, come spiegato in precedenza, approcceremo in due modi diversi.
- *Primo approccio.* Enunceremo e dimostreremo i teoremi classici nel linguaggio dei campi vettoriali.
- *Secondo approccio.* Costruiremo lo spazio delle forme differenziali di grado qualsiasi (che chiameremo k-forme, ove k è il grado: ad esempio, le 0-forme sono le funzioni, e le 1-forme sono le già note forme differenziali lineari) con le loro operazioni di differenziale, prodotto esterno, "pull-back" (immagine inversa) e integrale; lo faremo in primo luogo sugli aperti di $\mathbb{R}^n$, poi sulle varietà. Quindi enunceremo e dimostreremo il teorema di Stokes, e subito dopo ne daremo l'interpretazione in termini di campi vettoriali, trovando nuovamente i risultati classici di integrazione vettoriale.

3.1 Varietà differenziali: bordo, orientazione, partizioni dell'unità

Ricordiamo la già nota definizione di varietà differenziale affine (vedi pag. 14).

Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ si dirà essere una varietà di dimensione m (con $0 \le m \le n$) se "localmente assomiglia a un aperto di $\mathbb{R}^m$", cioè se ogni suo punto ha un intorno in X (ottenuto intersecando X con un intorno nello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$) diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$. Più precisamente, X è una *varietà di dimensione m e classe $\mathcal{C}^k$* (ove $0 \le k \le \infty$ e $0 \le m \le n$) se ammette una delle seguenti tre descrizioni equivalenti. **Varietà (classica)**

(1) (*Forma parametrica*: X è localmente $\mathcal{C}^k$-diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^m$)

Per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di x, un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ ed un $\mathcal{C}^k$-diffeomorfismo (detto *carta locale* di X vicino a x) $\varphi : W \cap X \xrightarrow{\sim} V$.[49] L'inversa $\gamma : V \to W \cap X \subset \mathbb{R}^n$ si dirà *parametrizzazione locale* di X vicino a x.

(2) (*Forma grafico*: X è localmente il grafico di una funzione $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$)

[49] Si ricorda che una funzione $\phi : M \to N$ tra due sottoinsiemi qualsiasi $M \subset \mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ si dirà essere "di classe $\mathcal{C}^k$" quando ϕ è ottenuta restringendo a M una funzione $\widetilde{\phi} : U \to V$ di classe $\mathcal{C}^k$ tra due intorni aperti $U \subset \mathbb{R}^p$ e $V \subset \mathbb{R}^q$ rispettivamente di M e N tale che $\widetilde{\phi}(M) \subset N$; e che $\phi : M \to N$ è un "diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$" se è un omeomorfismo (cioè biiettiva, continua e con inversa continua, cosa che ha senso anche su sottoinsiemi qualunque muniti della topologia indotta) di classe $\mathcal{C}^k$ e anche l'inversa $\phi^{-1} : N \to M$ è di classe $\mathcal{C}^k$. Dunque, nel caso di nostro interesse, una carta locale è in concreto una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ definita su *tutto* un aperto W di $\mathbb{R}^n$ e a valori in un aperto V di $\mathbb{R}^m$, che diventa biiettiva quando ristretta a $U := W \cap X$ e tale che la funzione inversa $\gamma := \phi^{-1} : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ è di classe $\mathcal{C}^k$ (nel significato usuale, visto che il dominio V è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e il codominio è $\mathbb{R}^n$, dunque si tratta una funzione di m variabili e n componenti).

Per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di x ed m variabili $x' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ tali che, scritte le rimanenti come $x'' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}})$ e denotata con $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proiezione $\pi(x) = x'$, si ha $W \cap X = \{x \in U : x'' = \phi(x')\}$ per un'opportuna funzione $\phi = (\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_{n-m}}) : \pi(W) \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$.

(3) (*Forma cartesiana*: X è localmente il luogo degli zeri di una sommersione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$)

Per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di x ed una funzione $g = (g_1, \dots, g_{n-m}) : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ di classe $\mathcal{C}^k$ tale che $W \cap X = g^{-1}(0_{n-m}) = \{x \in W : g_1(x) = \cdots = g_{n-m}(x) = 0\}$ e che, in tali punti, g sia sommersiva.

Una varietà potrebbe non essere descrivibile dappertutto con un'unica carta, perché, pur essendo *localmente* diffeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}^m$, potrebbe non esserlo *globalmente*: in generale bisogna ricorrere a un *atlante*, cioè una famiglia $\{\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ di carte locali tra loro compatibili, ovvero tali che, ogniqualvolta due di esse si sovrappongono anche parzialmente (cioè $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$), la relativa *funzione di transizione* $\Phi_{\lambda,\mu} :=: \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ sia un diffeomorfismo $\mathcal{C}^k$ tra gli aperti di $\mathbb{R}^m$ dati da $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ e $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ (corrispondenti alle parti sovrapposte delle due carte). D'altra parte va detto però che spesso si riesce a trovare una sola carta che copre X "quasi dappertutto", nel senso di "a meno di insiemi λ_m-trascurabili" (ad esempio, a meno di sottovarietà proprie di X, che hanno dimensione inferiore): e per certe esigenze, come il calcolo di integrali m-dimensionali su X, questo è già sufficiente, dunque in pratica si riesce di frequente a lavorare con una sola carta.

Esempio. La circonferenza $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, perché essa è localmente diffeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}$. Tuttavia essa non è globalmente diffeomorfa a un aperto di $\mathbb{R}$: il modo più semplice per vederlo è il seguente. Se per assurdo ci fosse un diffeomorfismo tra $\mathbb{S}^1$ e un aperto A di $\mathbb{R}$ (allora A sarà necessariamente un intervallo, perché $\mathbb{S}^1$ è connessa), detti $N = (0, 1)$ (il polo nord di $\mathbb{S}^1$) e x_0 il punto di A corrispondente a N dovrebbe rimanere indotto un diffeomorfismo tra $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ e $U \setminus \{x_0\}$, il che è assurdo perché $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ resta connessa mentre $A \setminus \{x_0\}$ no. Dunque una sola carta non può bastare a coprire tutto $\mathbb{S}^1$. Le scelte più frequenti di carte per $\mathbb{S}^1$ sono le seguenti. • (1) Data la mappa di avvolgimento $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ con $f(t) = (\cos t, \sin t)$, si possono considerare le carte $\varphi_\pi := (f|_{]-\pi,\pi[})^{-1} : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \xrightarrow{\sim}]-\pi, \pi[$ oppure $\varphi_0 := (f|_{]0,2\pi[})^{-1} : \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\} \xrightarrow{\sim}]0, 2\pi[$. • (2) La *proiezione stereografica* di $\mathbb{S}^1$ dal polo nord $N = (0, 1)$ è la funzione $\varphi_N : \mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ che associa ad un punto P di $\mathbb{S}^1$ diverso da N l'unico punto $\varphi_N(P)$ dell'asse delle ascisse ottenuto intersecando l'asse con la semiretta uscente da N e passante per P: se $P(x, y)$ (con $x^2 + y^2 = 1$ e $y \neq 1$) si calcola che $\varphi_N(P) = \frac{x}{1-y}$, con inversa $(\varphi_N)^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ data da $(\varphi_N)^{-1}(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{1-t^2}{1+t^2})$. Analogamente, la proiezione stereografica dal polo sud $S = (0, -1)$ è la funzione $\varphi_S : \mathbb{S}^1 \setminus \{S\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ data da $\varphi_S(P) = \frac{x}{1+y}$, con inversa $(\varphi_S)^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ data da $(\varphi_S)^{-1}(u) = (\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2})$. • (3) Detti $U_\mp = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y \gtrless 0\}$ (i semicerchi con y positivo e negativo), si hanno le parametrizzazioni cartesiane $\gamma_\mp^{(x)} :]-1, 1[\xrightarrow{\sim} U_\mp$ date da $\gamma_\mp^{(x)}(t) = (t, \mp\sqrt{1-t^2})$, e le carte locali sono le loro inverse $\varphi_\mp^{(x)} = (\gamma_\mp^{(x)})^{-1} : U_\mp \xrightarrow{\sim}]-1, 1[$, date dalla prima proiezione $\varphi_\mp^{(x)}(x, y) = x$. In modo analogo si possono considerare le carte parametrizzazioni $\varphi_\mp^{(y)}$ fatte usando i semipiani con x positivo e negativo. • Si noti che le carte in (1-2) coprono tutta la circonferenza tranne un punto, che è un sottoinsieme λ_1-trascurabile. • Per avere un atlante di $\mathbb{S}^1$ basta scegliere due delle carte precedenti che coprano tutto $\mathbb{S}^1$. Ad esempio, se scegliamo φ_N e φ_S, queste si

sovrappongono su tutto $\mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\}$, che corrisponde in entrambi i casi a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: e il calcolo dice che la funzione di transizione $\Phi = \varphi_S \circ (\varphi_N)^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è data da $u = \Phi(t) = \frac{1}{t}$. Altro esempio: scegliendo le carte φ_π e $\varphi_-^{(y)}$, queste si sovrappongono sull'unione disgiunta dei quadranti aperti II e III, che corrispondono da un lato a $]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ e dall'altro a $]-1, 0[\cup]0, 1[$, e la funzione di transizione è $\Phi = \varphi_-^{(y)} \circ (\varphi_\pi)^{-1} :]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\xrightarrow{\sim}]-1, 0[\cup]0, 1[$ con $y = \Phi(t) = \sin t$.

Varietà con bordo

La definizione di varietà data in precedenza è quella classica, in cui ogni punto ha un intorno diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$. Più in generale possiamo considerare delle *varietà con bordo (regolare)*, o *varietà bordate*, in cui si tollera la presenza di alcuni punti estremali (detti "di bordo") attorno ai quali l'insieme non assomigli a un vero e proprio aperto di $\mathbb{R}^m$, ma piuttosto a un aperto di $\mathbb{R}^m$ al quale si aggiunga un tratto di frontiera. Per capirci (vedi Figura 3.1), il segmento aperto $I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ e il disco aperto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ sono varietà in $\mathbb{R}^2$ nel senso classico (di dimensioni rispettivamente 1 e 2), mentre il segmento chiuso $\overline{I} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\}$ e il disco chiuso $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ non lo sono più, perché ad esempio attorno al loro punto $(1, 0)$ esse non sono più diffeomorfe rispettivamente a un intervallo aperto o a una palla aperta, ma a un intervallo semichiuso o a un semidisco aperto cui si aggiungano i punti interni del diametro. È per trattare questi oggetti più generali che andiamo a introdurre la definizione che segue.

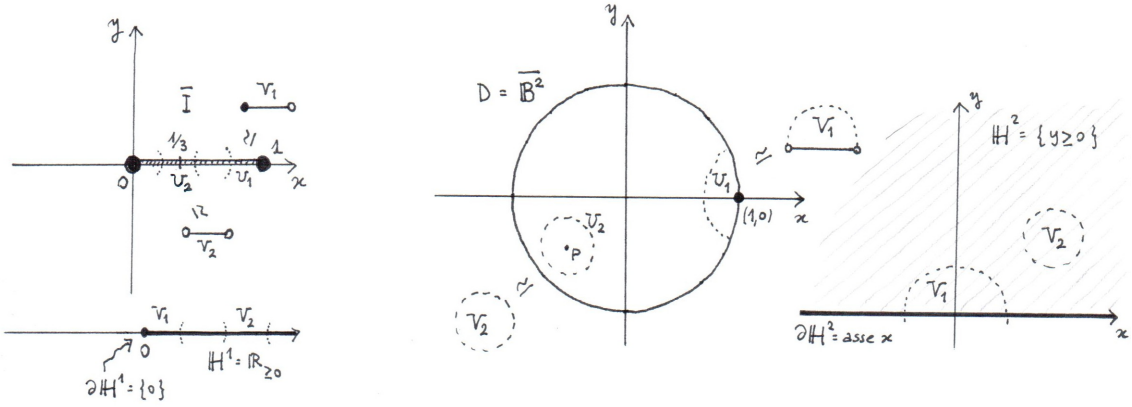


Figura 3.1: In $\overline{I}$ il punto $(1, 0)$ è di bordo, $(\frac{1}{3}, 0)$ è interno. In $D = \overline{\mathbb{B}^2}$ il punto $(1, 0)$ è di bordo, P è interno.

Consideriamo

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^m &= \{v \in \mathbb{R}^m : v_m \ge 0\} \qquad \text{(semispazio chiuso di } \mathbb{R}^m\text{)}, \\ \partial\mathbb{H}^m &= \{v \in \mathbb{R}^m : v_m = 0\} \qquad \text{(iperpiano di bordo di } \mathbb{H}^m\text{)}. \end{aligned}$$

Per estendere la nozione classica di varietà a quella di varietà bordata chiederemo che X "assomigli localmente a un aperto di $\mathbb{H}^m$" anziché di $\mathbb{R}^m$: ovvero, nella definizione (1)

sostituiamo $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{H}^m$.[49] Ora, gli aperti di $\mathbb{H}^m$ (ottenuti intersecando con $\mathbb{H}^m$ gli aperti di $\mathbb{R}^m$) possono essere di due tipi, come si può osservare nella Figura 3.1: usuali aperti di $\mathbb{R}^m$ (se non contengono punti dell'iperpiano di bordo $\partial\mathbb{H}^m$) oppure aperti "bordati da un lato" (se essi contengono tratti di $\partial\mathbb{H}^m$): dunque, oltre ai soliti punti attorno cui X assomiglia a un aperto di $\mathbb{R}^m$, ora si tollerano anche punti "di bordo" attorno ai quali X assomiglia a un aperto di $\mathbb{R}^m$ bordato da un lato. Data una varietà con bordo X, distingueremo dunque i suoi punti tra il sottoinsieme $\dot{X}$ di quelli di primo tipo (detto "interno" di X) e il sottoinsieme ∂X di quelli di secondo tipo (detto "bordo" di X).[50] D'ora in poi, una varietà nel senso classico potrà essere detta anche "varietà senza bordo", o "varietà con bordo vuoto".

Esempi. **(1)** Gli intervalli aperti $]a,b[$ sono varietà (nel senso classico) di dimensione 1 in $\mathbb{R}$. Invece gli intervalli semichiusi o chiusi del tipo $[a,b[$, $]a,b]$ oppure $[a,b]$ sono varietà bordate di dimensione 1 in $\mathbb{R}$: il loro bordo è fatto rispettivamente da $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$. Similmente, un tratto di elica cilindrica senza estremi $\{P(z) = (r\cos z, r\sin z,\ z) : a < z < b\}$ è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^3$, mentre ad esempio $\{P(z) = (r\cos z, r\sin z,\ z) : a \le z < b\}$ è una varietà bordata di dimensione 1 in $\mathbb{R}^3$ con bordo dato dal solo punto $\{P(a)\}$. **(2)** Il disco aperto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ è una varietà (nel senso classico) di dimensione 2 in $\mathbb{R}^2$; invece il disco chiuso $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ è una varietà bordata di dimensione 2 in $\mathbb{R}^2$, con bordo $\partial D = D \setminus B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (la circonferenza $\mathbb{S}^1$). **(3)** In $\mathbb{R}^3$, la sfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è una superficie regolare (ovvero, una varietà di dimensione 2) senza bordo. Invece l'emisfero $\mathbb{S}^2_+ = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, z \ge 0\}$ e la palla chiusa $\mathbb{B}^3 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ sono varietà bordate di dimensione rispettivamente 2 e 3, i cui bordi sono la circonferenza del piano orizzontale $\partial\mathbb{S}^2_+ = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$ e la sfera $\partial\mathbb{B}^3 = \mathbb{S}^2$.

È importante notare che, data una varietà bordata X, il suo bordo ∂X e il suo interno $\dot{X}$ sono a loro volta delle varietà, e senza bordo:

Proposizione 3.1.1. *Se X è una varietà bordata di classe $\mathcal{C}^k$ e dimensione m, il suo interno $\dot{X}$ e il suo bordo ∂X sono varietà* senza bordo *di classe $\mathcal{C}^k$ e dimensione rispettivamente m e $m-1$.*

Dimostrazione. Il fatto che l'interno $\dot{X}$ sia una varietà senza bordo di classe $\mathcal{C}^k$ e dimensione m è ovvio (attorno ai suoi punti non è cambiato nulla rispetto alla definizione già nota di varietà senza bordo); occupiamoci allora del bordo ∂X. Sia $x \in \partial X$, e siano U un intorno aperto di x in X, V un aperto di $\mathbb{H}^m$ (con bordo ∂V sottoinsieme aperto di $\partial\mathbb{H}^m \simeq \mathbb{R}^{m-1}$) e $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ una carta locale di X attorno a x, in cui sarà dunque $\varphi(x) \in \partial V$: essendo però $\varphi(U \cap \partial X) = \partial V$ (tramite il diffeomorfismo φ, punti del bordo ∂X devono andare in punti del bordo ∂V e viceversa per definizione di bordo) basterà allora considerare la restrizione $\varphi|_{U\cap\partial X} : U \cap \partial X \xrightarrow{\sim} \partial V$ per ottenere una carta locale di ∂X all'intorno di x. L'ultima cosa da vedere è che le funzioni di transizione tra una carta e l'altra inducano delle funzioni di transizione tra i rispettivi bordi, ma questo discende dal seguente Lemma 3.1.2. □

Lemma 3.1.2. *Un auto-diffeomorfismo $F : \mathbb{H}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$* (ovvero, un auto-omeomorfismo che si estende ad un diffeomorfismo $\mathcal{C}^k$ su qualche intorno aperto di $\mathbb{H}^m$)

[50] Chiaramente i termini "interno" e "bordo" non sono da interpretarsi nella topologia di $\mathbb{R}^n$ (infatti, ad esempio per quanto riguarda "interno", se $m < n$ non è possibile che tutta una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ sia contenuta in X), ma nella topologia indotta su X da quella di $\mathbb{R}^n$.

induce un auto-diffeomorfismo $f : \partial\mathbb{H}^m \xrightarrow{\sim} \partial\mathbb{H}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$. Inoltre, se F ha determinante jacobiano ovunque positivo, ciò vale anche per f.

Dimostrazione. Per il teorema di inversione locale in $\mathbb{R}^m$ si ha che $F(\partial\mathbb{H}^m) = \partial\mathbb{H}^m$ (dev'essere $F^{-1}(\dot{\mathbb{H}}^m) \subset \dot{\mathbb{H}}^m$, dunque $F(\partial\mathbb{H}^m) \subset \partial\mathbb{H}^m$, e analogamente per l'inversa F^{-1}) da cui la prima affermazione con $f = F|_{\partial\mathbb{H}^m}$. Dimostriamo la seconda per $m = 2$, il caso generale essendo simile. Siano (y_1, y_2) coordinate nel dominio, e sia $F = (F_1, F_2)$: allora $f(y_1) = F_1(y_1, 0)$. Per ipotesi vale $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1,0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(y_1,0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(y_1,0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1,0) \end{pmatrix} > 0$ per ogni y_1. Essendo $F_2(y_1, 0) \equiv 0$ si ha $\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(y_1, 0) \equiv 0$; inoltre, poiché $F(\dot{\mathbb{H}}^m) \subset \dot{\mathbb{H}}^m$, si ha $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(y_1, 0) = \lim_{t\to 0+} \frac{F_2(y_1,t)-F_2(y_1,0)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{F_2(y_1,t)}{t} > 0$. Dunque $f'(y_1) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y_1, 0) > 0$. □

Orientazione

Parliamo ora di *orientazione* su una varietà, partendo dal caso più semplice, ovvero dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$. Orientare $\mathbb{R}^m$ significa fissare in esso una base ordinata di riferimento, detta "positiva": si dirà poi che un'altra base ordinata è "positivamente orientata" se la trasformazione lineare che la porta nell'ordine in quella di riferimento ha determinante positivo, "negativamente orientata" nel caso opposto.[(51)] Naturalmente su $\mathbb{R}^m$ c'è una base previlegiata data dai versori canonici $e_1, \dots, e_m$: si parlerà in tal caso di "orientazione canonica" di $\mathbb{R}^m$.

Un cambio di base è un esempio assai speciale di auto-diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$; vediamo cosa accade più in generale con un qualsiasi cambio di coordinate, ovvero un diffeomorfismo $\phi : V' \xrightarrow{\sim} V$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ tra aperti connessi V' e V di $\mathbb{R}^m$. Siano $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ le coordinate rispettivamente in V' e in V: si intende dunque $x_i = \phi_i(x')$. Poiché ϕ è un diffeomorfismo, la funzione $\det(\mathsf{J}_\phi(x'))$ non si annulla mai e dunque, essendo continua, il suo segno (che indicheremo con $\operatorname{sign}\phi$) sarà costante su V'. Si dirà che ϕ *preserva* (risp. *inverte*) *l'orientazione* se $\operatorname{sign}\phi = 1$ (risp. se $\operatorname{sign}\phi = -1$). Tale definizione si estende naturalmente ai diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{H}^m$: infatti, per definizione, essi sono indotti da diffeomorfismi tra intorni aperti in $\mathbb{R}^m$ di tali sottoinsiemi.

Esempi. **(1)** Il cambio di variabile dato da $x = \phi(x') := \frac{1}{x'}$ può essere visto tra $]0, +\infty[$ e se stesso, o tra $]-\infty, 0[$ e se stesso. In entrambi i casi, essendo $\phi'(x') = -\frac{1}{(x')^2} < 0$, esso inverte l'orientazione. **(2)** La funzione $(x, y) = \phi(x', y') := (x'y', \frac{y'}{x'})$ è un cambio di variabile nel primo quadrante: l'inversa è $(x', y') = \phi^{-1}(x, y) := (\sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt{xy})$ e, essendo $\det(\mathsf{J}_\phi)(x', y') = \frac{2y'}{x'} > 0$, il cambio ϕ preserva l'orientazione.

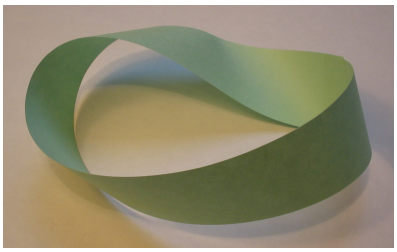
Passiamo ora alle varietà: sia dunque X una varietà $\mathcal{C}^\infty$ (eventualmente con bordo) di dimensione m. Orientare X significa, quando possibile, orientare ciascuno spazio tangente T_xX [(52)] in modo continuo al variare di $x \in X$. Più precisamente, X si dirà *orientabile* se esiste un atlante $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ di X "orientato", ovvero tale che tutte le funzioni di

[(51)] In termini più precisi: nella famiglia delle basi ordinate di $\mathbb{R}^m$, la relazione secondo cui la trasformazione lineare che porta una base nell'altra ha determinante positivo è chiaramente un'equivalenza, che divide la famiglia in due classi, e un'orientazione di $\mathbb{R}^m$ è una di queste due classi.

[(52)] cosa che sappiamo fare perché T_xX è uno spazio vettoriale di dimensione m, e dunque, come detto, si tratta di scegliere in esso una base ordinata positiva.

transizione $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ preservino l'orientazione di $\mathbb{R}^m$; e si dirà *orientata* se è esplicitamente associata ad un suo atlante orientato.
In particolare, notiamo allora che una varietà parametrizzata da una sola carta è sempre orientabile, e gli spazi tangenti nei suoi vari punti risultano orientati tramite (il differenziale del)la parametrizzazione $\gamma : V \to X \subset \mathbb{R}^n$, nel senso che per un certo $x = \gamma(u) \in X$ una base positiva per T_xX sarà l'immagine tramite $d\gamma_v : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} T_xX \subset \mathbb{R}^n$ di una base positiva di $\mathbb{R}^m$ (tipicamente la base canonica). I problemi possono sorgere quando si tratta di incollare le orientazioni date da diverse carte: per alcune varietà questa operazione può risultare impossibile, come segnaliamo negli esempi qui sotto.

Esempi. **(0)** Per $m = 0$, una varietà di dimensione 0 è una famiglia discreta di punti $X = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$: in questo caso, orientare X significa assegnare ad ogni punto un numero ± 1. **(1)** Per $m = 1$, una varietà di dimensione 1 è una curva regolare; e orientare una curva regolare significa essenzialmente scegliere in che verso percorrerla. Ad esempio, orientare $X = \mathbb{S}^1$ equivale a scegliere un verso di rotazione (solitamente l'antiorario, vedi Esempio a pag. 69). **(2)** Per $m = n-1$, una varietà di dimensione $n-1$ è un'ipersuperficie; e orientare un'ipersuperficie significa essenzialmente scegliere un verso positivo per il vettore normale ad essa (vedi Esempio a pag. 69 con $\{x \in W : h(x) = 0\}$ ove W è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $h : W \to \mathbb{R}$ è sommersiva nei suoi zeri). **(3)** In generale non è detto che una varietà sia orientabile, ovvero che si riesca a orientarne in modo continuo tutti gli spazi tangenti: il piano proiettivo reale, il nastro di Möbius, la bottiglia di Klein (vedi Figura 3.2) sono tre classici esempi di varietà non orientabili.



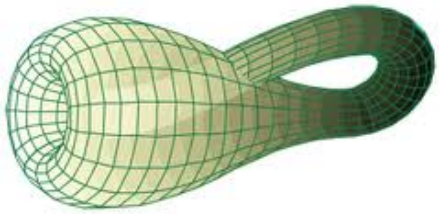


Figura 3.2: Il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein, due esempi classici di varietà non orientabili.

Nelle varietà con bordo, abbiamo visto che il bordo è a sua volta una varietà (senza bordo) di dimensione inferiore di uno: una cosa assai importante da notare è che un'orientazione sulla varietà induce in modo naturale un'orientazione sul suo bordo.

Proposizione 3.1.3. *Se X è una varietà orientabile, tale è anche il suo bordo ∂X; inoltre, un'orientazione di X induce naturalmente un'orientazione di ∂X.*

Dimostrazione. Il bordo $\partial\mathbb{H}^m = \{v \in \mathbb{R}^m : v_m = 0\}$ ha un'orientazione indotta da quella standard di $\mathbb{H}^m$ (ovvero di $\mathbb{R}^m$, data dalla base canonica $(e_1, \dots, e_m)$), che descriviamo come segue: identificando $\partial\mathbb{H}^m$ con lo spazio generato dai primi $m-1$ vettori $e_1, \dots, e_{m-1}$, possiamo vedere $-e_m$ come il versore normale a $\partial\mathbb{H}^m$ uscente da $\mathbb{H}^m$, e per definizione diremo che la base ordinata $(e_1, \dots, e_{m-1})$ di $\partial\mathbb{H}^m$ è positiva quando la base ordinata $(-e_m, e_1, \dots, e_{m-1})$ è positiva per $\mathbb{H}^m$, ovvero per $\mathbb{R}^m$, e questo accade quando m è pari; e negativa altrimenti, e questo accade per m dispari. A questo punto, data una varietà bordata orientata X, se $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ è un suo atlante orientato allora in base alla seconda parte del Lemma 3.1.2 l'atlante ristretto $\{(U_\lambda \cap \partial X, \varphi_\lambda|_{U_\lambda \cap \partial X}) : \lambda \in \Lambda\}$ è un atlante orientato per il bordo ∂X: in altre

parole, se X è orientabile tale è anche il suo bordo ∂X. E l'orientazione indotta su ∂X è per l'appunto quella ereditata da $\partial\mathbb{H}^m$ tramite le carte ristrette: il modo più semplice per descriverla è di ricorrere alla definizione cartesiana. Dato $x_0 \in \partial X$ siano W un intorno aperto di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e

$$g = (g_1, \dots, g_{n-m}) : W \to \mathbb{R}^{n-m}\,, \qquad\qquad h : W \to \mathbb{R}$$

due funzioni tali che g e (g,h) siano sommersive e che vicino a x_0 si abbia

$$\begin{aligned} \partial X &= \{x \in W : g_1(x) = 0\,,\ \dots\,,\ g_{n-m}(x) = 0\,,\ h(x) = 0\}\,, \\ X &= \{x \in W : g_1(x) = 0\,,\ \dots\,,\ g_{n-m}(x) = 0\,,\ h(x) \le 0\}\,. \end{aligned}$$

Dunque $T_{x_0}X$ è lo spazio dei vettori ortogonali ai gradienti $\nabla g_1(x_0)$, ..., $\nabla g_{n-m}(x_0)$; e $T_{x_0}(\partial X)$ è l'iperpiano di $T_{x_0}X$ fatto dai vettori che sono ortogonali anche a $\nabla h(x_0)$. Si è allora in una situazione analoga a quella di $\partial\mathbb{H}^m$ dentro $\mathbb{H}^m$ (in quel caso si pensava a $n = m$, dunque g non c'era, e $h(v) = -v_m$), solo che ora il ruolo del versore normale uscente $-e_m$ è svolto dal versore n_{x_0} della proiezione di $\nabla h(x_0)$ su $T_{x_0}X$, orientato analogamente alla proiezione stessa: una base $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ di $T_{x_0}(\partial X)$ sarà detta positiva quando la base $\{n_{x_0}, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ di $T_{x_0}X$ è positiva per l'orientazione su X. □

D'ora in poi, data una varietà orientata X si intenderà tacitamente che il suo bordo ∂X è orientato in modo indotto da X. Ripetendo grossomodo il contenuto della dimostrazione della Proposizione 3.1.3, tale orientazione indotta può essere descritta come segue. Dato $x \in \partial X$, per capire se una base di $T_x(\partial X)$ è positiva le si aggiunga in testa il versore tangente a X in x normale a ∂X e di verso uscente da X: si dovrà in questo modo ottenere una base positiva di T_xX.

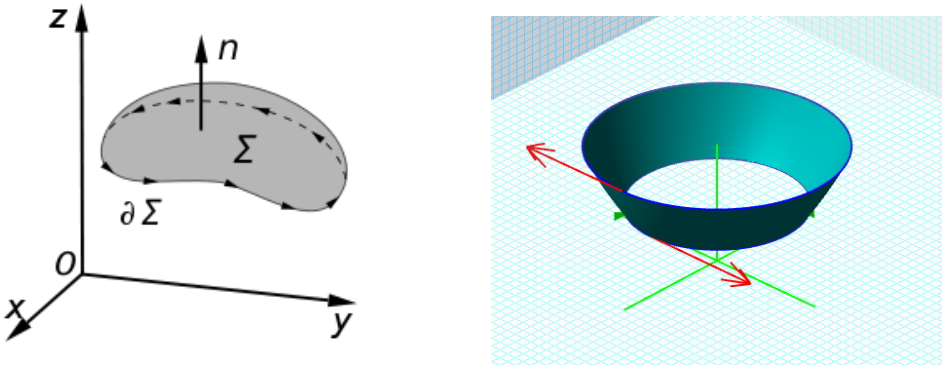


Figura 3.3: Superfici bordate in $\mathbb{R}^3$.

Esempi. **(1)** Siano W un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $h : W \to \mathbb{R}$ una funzione di definizione cartesiana, ovvero una funzione $\mathcal{C}^\infty$ sommersiva nei suoi zeri (altrimenti detto, il sistema dato da $h(x) = 0$ e $dh(x) = 0$ non abbia soluzioni): allora il chiuso $X = \{x \in W : h(x) \le 0\}$ è una varietà con bordo $\partial X = \{x \in W : h(x) = 0\}$, l'ipersuperficie di W definita da h. La varietà X è naturalmente munita dell'orientazione data da $\mathbb{R}^n$, e tutti gli spazi tangenti nei vari punti $x \in X$ coincidono con $\mathbb{R}^n$; come detto, l'orientazione indotta sull'ipersuperficie-bordo ∂X è quella in base a cui, ponendo in testa a una base di $T_x(\partial X)$ il versore normale a ∂X uscente da X, si deve ottenere una base positiva di $T_xX = \mathbb{R}^n$. Vediamo alcuni esempi. • In $\mathbb{R}$, se $X =]-\infty, b]$ l'orientazione indotta su $\partial X = \{b\}$ è $+1$ (in questo caso $h(x) = x - b$); analogamente, se $X = [a, +\infty[$ l'orientazione indotta su $\partial X = \{a\}$ è -1 (in questo caso $h(x) = a - x$). • In $\mathbb{R}^2$, se X è la ragione di piano racchiusa da un circuito semplice e liscio (che diventa dunque il suo bordo ∂X),

l'orientazione indotta sul circuito-bordo è quella antioraria. Ad esempio, se X è il disco chiuso di centro l'origine e raggio R allora il suo bordo ∂X, ovvero la circonferenza di centro l'origine e raggio R, è orientato positivamente in senso antiorario (in questo caso $h(x,y) = x^2+y^2-R^2$). • In $\mathbb{R}^n$ sia $h(x) = x_1^2+\cdots+x_n^2-1$: si ha $X = \mathbb{B}^n$, $\partial X = \mathbb{S}^{n-1}$, $\nabla h(x_0) = 2(x_{0,1},\ldots,x_{0,n})$; indicando con N e S i poli nord e sud di $\mathbb{S}^{n-1}$, si ha $T_N\mathbb{S}^{n-1} = T_S\mathbb{S}^{n-1} = \langle e_1,\ldots,e_{n-1}\rangle$; tuttavia, in base a quanto detto, una base positiva per $T_N\mathbb{S}^{n-1}$ è $(-1)^{n-1}(e_1,\ldots,e_{n-1})$, mentre una base positiva per $T_S\mathbb{S}^{n-1}$ è $(-1)^n(e_1,\ldots,e_{n-1})$. Con questa notazione si intende che se n è pari (ad esempio, per la circonferenza $\mathbb{S}^1$ nel piano $\mathbb{R}^2$) allora $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ è una base positiva in S e negativa in N (fatto già noto per $\mathbb{S}^1$, visto che è orientata positivamente in verso antiorario); mentre se n è dispari (ad esempio, per la superficie sferica $\mathbb{S}^2$ nello spazio $\mathbb{R}^3$) allora $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ è una base negativa in S e positiva in N. **(2)** È importante riflettere anche sul caso di superfici bordate in $\mathbb{R}^3$ (vedi Figura 3.3): ovvero, data una superficie bordata orientata Σ in $\mathbb{R}^3$, come determinare l'orientazione indotta sulla curva-bordo $\partial\Sigma$? Di solito una superficie Σ di $\mathbb{R}^3$ si interpreta a sua volta come frontiera topologica di un aperto W di $\mathbb{R}^3$ (se si vuole usare il linguaggio delle varietà, Σ si può interpretare anche come bordo del chiuso $\overline{W}$), dunque possiamo pensare almeno localmente che Σ sia definita da una funzione sommersiva $g(x,y,z) = 0$ di modo che W sia dato da $g(x,y,z) < 0$. La condizione di bordatura di Σ è poi espressa usualmente da una disequazione lata del tipo $h(x,y,z) \le 0$, di modo che la curva-bordo $\partial\Sigma$ sia definita da $g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0$. In questa situazione, preso un punto x della curva-bordo $\partial\Sigma$, un vettore tangente v in x a $\partial\Sigma$ darà il verso di percorrenza positivo di $\partial\Sigma$ quando, detto, ν il versore tangente a Σ in x diretto normalmente alla curva $\partial\Sigma$ e in direzione uscente da Σ (ovvero, verso i valori $h > 0$), la base ordinata (ν, v) è positiva per $T_x\Sigma$; a sua volta, detto $\vec{n} = \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$ il versore normale a Σ in x diretto in direzione uscente da W (ovvero, verso i valori $g > 0$), quest'ultima cosa accade quando la base ordinata $(\vec{n}, \nu, v)$ di $\mathbb{R}^3$ è positiva per l'orientazione canonica, fatto che notoriamente può essere valutato con l'uso delle tre dita della mano destra. Mostriamo un paio di esempi concreti. • Nella situazione della Figura 3.3(a), rispetto al versore $\vec{n}$ personificato il verso di percorrenza della curva-bordo deve apparire antiorario. • La superficie bordata $\Sigma = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ 1 \le z \le 2\}$ (la porzione di superficie esterna del paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa tra le quote $z = 1$ e $z = 2$, Figura 3.3(b)) ha come bordo $\partial\Sigma$ l'unione disgiunta delle circonferenze $C_- = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z = 1\}$ e $C_+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z = 2\}$; in base a quanto detto, le orientazioni indotte su C_- e C_+ sono quelle in cui esse appaiono percorse rispettivamente in senso antiorario e orario a un osservatore che le guardi dall'alto dell'asse z.

Si è visto che una varietà si ottiene incollando tra loro informazioni locali sugli aperti di un suo ricoprimento, tramite le carte di un suo atlante e le funzioni di transizione. Uno strumento utile per decomporre un oggetto globale (tipo una funzione —o più in generale una forma differenziale— definita su tutta la varietà) in vari oggetti locali su ciascuno degli aperti del ricoprimento; o, viceversa, per incollare tra loro degli oggetti locali (tipo una famiglia di forme differenziali ciascuna definita su un singolo aperto) e trovare un oggetto globale, è quello della *partizione dell'unità*, ovvero una famiglia di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ positive su tutta la varietà che però siano nulle al di fuori di uno solo degli aperti del ricoprimento e che abbiano somma totale 1. Tutto parte da questo fatto in $\mathbb{R}^m$:

Partizione dell'unità

Lemma 3.1.4. *Esiste una funzione $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ con $0 \le h \le 1$, tale che*

$h(x) \equiv 1 \;\; se \;\; \|x\| \leq 1 \;\; e \;\; h(x) \equiv 0 \;\; se \;\; \|x\| \geq 2\,.$

Dimostrazione. La funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = e^{-1/t}$ se $t > 0$ e da $\alpha(t) \equiv 0$ se $t \leq 0$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (basta notare che le derivate fatte per $t > 0$ hanno tutte limite 0 per $t \to 0^+$) e per $t > 0$ è strettamente positiva (compresa tra 0 e 1). Di conseguenza la funzione $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\beta(t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t)+\alpha(1-t)}$ è ancora di classe $\mathcal{C}^\infty$ (il denominatore non si annulla mai), vale $\beta(t) \equiv 0$ per $t \leq 0$ e $\beta(t) \equiv 1$ per $t \geq 1$. Allora $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = \beta(4 - \|x\|)$ ha le proprietà richieste. □

Sia ora X una varietà $\mathcal{C}^k$. Una *partizione dell'unità* è una famiglia $\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ di funzioni $\mathcal{C}^k$ non negative tali che

(a) $\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è localmente finita, ovvero per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U \subset X$ di x tale che $\rho_\lambda|_U \neq 0$ solo per un numero finito di $\lambda \in \Lambda$;

(b) vale $\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda \equiv 1$, ovvero $\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(x) = 1$ per ogni $x \in X$.

Appoggiando sul Lemma 3.1.4 si dimostra che, in effetti, considerato un qualsiasi ricoprimento aperto di una varietà $\mathcal{C}^\infty$, esistono delle partizioni dell'unità ben adattate agli aperti del ricoprimento; evidentemente a noi interesserà soprattutto il caso del ricoprimento fatto dagli aperti sui quali sono definite le singole carte locali di un atlante della varietà. (Ricordiamo che il *supporto* $\mathrm{supp}(f)$ di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è la chiusura in X dell'insieme dei punti sui quali f non è nulla.)

Teorema 3.1.5. *Sia X una varietà $\mathcal{C}^\infty$, $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste allora una partizione dell'unità $\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ "subordinata a $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$", ovvero tale che $\mathrm{supp}(\rho_\lambda) \subset U_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$* (in particolare, ρ_λ è nulla al di fuori di U_λ). *Esistono inoltre una partizione dell'unità $\{\rho_\mu : \mu \in M\}$ di funzioni a supporto compatto, ed una funzione $\gamma : M \to \Lambda$, tali che $supp(\rho_\mu) \subset U_{\gamma(\mu)}$ per ogni $\mu \in M$.*

Facciamo qualche commento al Teorema 3.1.5.

- Si noti che le funzioni della partizione $\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ hanno il vantaggio di essere associate a ciascun U_λ (l'insieme Λ degli indici è lo stesso) ma potrebbero non essere a supporto compatto. Se invece vogliamo una partizione dell'unità fatta da funzioni a supporto compatto contenuto in qualcuno degli U_λ, possiamo trovarla ma dobbiamo accettare il fatto che le funzioni $\{\rho_\mu : \mu \in M\}$ potrebbero essere molto più numerose degli aperti del ricoprimento.

  Esempio. (Vedi Figura 3.4) Dato il ricoprimento di $\mathbb{R}$ con i due aperti $U_1 =]-\infty, 1[$ e $U_2 =]-1, +\infty[$ e considerate le funzioni $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $\rho_1(t) = \beta(2t)$ e $\rho_2(t) = 1 - \beta(2t)$ (ove β è quella della dimostrazione del Lemma 3.1.4; si noti che ρ_1 vale 0 per $x \leq 0$ e vale 1 per $x \geq \frac{1}{2}$, dunque ρ_1 vale 1 per $x \leq 0$ e vale 0 per $x \geq \frac{1}{2}$), la famiglia $\{\rho_1, \rho_2\}$ costituisce una partizione dell'unità subordinata a $\{U_1, U_2\}$ (qui $\Lambda = \{1, 2\}$) ma tali funzioni ovviamente non sono a supporto compatto. Si ponga invece $\tilde\rho_k(t) := 1 - \beta(2x - k) - \beta(-(2x - k))$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$: si noti che $\tilde\rho_k$ è $\mathcal{C}^\infty$, nulla al di fuori dell'intervallo unitario aperto $]\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}[$, sull'intervallo è positiva e compresa tra 0 e 1 ed è simmetrica rispetto al punto medio $x = \frac{k}{2}$, in cui vale 1; inoltre la somma di tutte le $\tilde\rho_k$ (in realtà

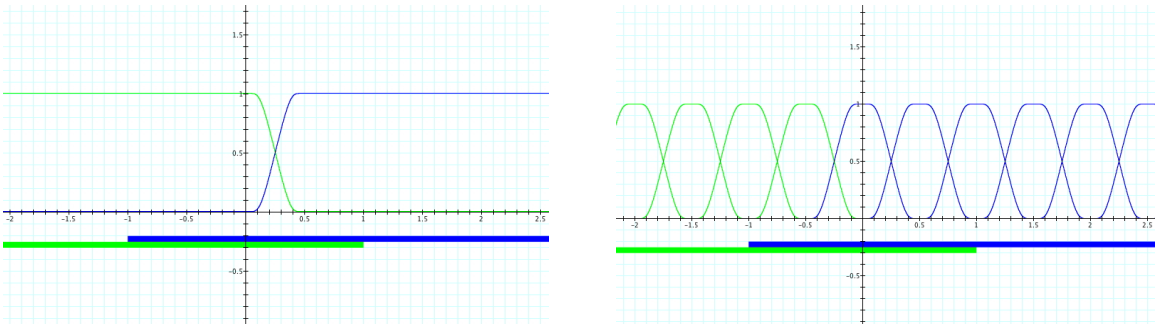


Figura 3.4: Partizioni dell'unità subordinate al ricoprimento di $\mathbb{R}$ dato da $U_1 =]-\infty, 1[$ e $U_2 =]-1, +\infty[$.

per ogni punto di $\mathbb{R}$ ve ne sono alpiù due che non si annullano in quel punto) vale identicamente 1. Dunque la famiglia $\{\tilde{\rho}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è un'altra partizione dell'unità subordinata a $\{U_1, U_2\}$, nel senso che ognuna delle $\tilde{\rho}_k$ ha il supporto contenuto in U_1 oppure U_2 (qui $M = \mathbb{Z}$ e $\lambda = \{1, 2\}$, e la funzione $\gamma : M \to \Lambda$ è $\gamma(k) = 1$ per $k < 0$ e $\gamma(k) = 2$ per $k \geq 0$; in realtà in questo caso anche $\gamma(0) = 1$ andrebbe bene), e abbiamo guadagnato nel fatto che si tratta di funzioni a supporto compatto; ma abbiamo perduto nel fatto che il numero delle funzioni è passato da due a un'infinità numerabile.

- Vediamo in concreto l'utilità della nozione di partizione dell'unità. Sia X una varietà $\mathcal{C}^\infty$, con un dato atlante $\{\varphi_\lambda : U_\lambda \xrightarrow{\sim} V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$: dunque X ha un ricoprimento fatto dagli aperti U_λ ciascuno identificato da φ_λ con l'aperto V_λ di $\mathbb{R}^m$. Scegliamo una partizione dell'unità $\{\rho_\lambda : X \to \mathbb{R} : \lambda \in \Lambda\}$ subordinata al ricoprimento $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.
  - *(Decomposizione di un dato globale in somma di dati locali)* Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$ (o più in generale una forma differenziale su X), possiamo scrivere $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(f\rho_\lambda)(x)$,[53], col vantaggio che ciascuna $f\rho_\lambda : X \to \mathbb{R}$ è ancora $\mathcal{C}^k$ ma è nulla al di fuori di U_λ: abbiamo dunque decomposto il dato globale f in vari dati locali $f\rho_\lambda$ su ciascuno degli aperti U_λ.[54]
  - *(Creazione di un dato globale da dati locali)* D'altra parte potremmo avere dati locali, ad esempio funzioni $f_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}$ (o più in generale, forme differenziali su ciascun U_λ), che potrebbero anche comportarsi male (ad esempio, tendere a ∞) avvicinandosi al bordo di U_λ: se consideriamo invece la funzione prodotto $f_\lambda\rho_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}$, la moltiplicazione per ρ_λ fa spegnere dolcemente (come funzione $\mathcal{C}^\infty$) f_λ avvicinandosi al bordo di U_λ (si ricordi che ρ_λ ha supporto contenuto in U_λ), così che si può pensare direttamente a $f_\lambda\rho_\lambda : X \to \mathbb{R}$ prolungandola come funzione nulla fuori U_λ; definendo $f : X \to \mathbb{R}$ come $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda\rho_\lambda)(x)$, a partire da dati $\mathcal{C}^\infty$ su ciascun U_λ si ottiene un dato $\mathcal{C}^\infty$ su tutto X.

[53] infatti per ciascun x c'è solo un numero finito di indici per cui $\rho_\lambda(x) \neq 0$, dunque la somma ha senso; e $\sum_{\lambda\in\Lambda}(f\rho_\lambda)(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(x)\rho_\lambda(x) = f(x)\sum_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda(x) = f(x)$.

[54] Ad esempio, possiamo definire l'integrale $\int_X f\, d\lambda_M$ come $\sum_{\lambda\in\Lambda}\int_{U_\lambda}(f\rho_\lambda)(x)\, d\lambda_{U_\lambda}$ (tale scrittura non dipende ne' dalla scelta dall'atlante ne' da quella della partizione dell'unità, si veda l'analoga Proposizione 3.3.10 per le forme), e ciascuno degli integrali addendi $\int_{U_\lambda}(f\rho_\lambda)(x)\, d\lambda_{U_\lambda}$ si può calcolare come descritto a pag. 53 nel caso di varietà date da una singola parametrizzazone: ovvero, considerata la parametrizzazione $\gamma_\lambda = (\varphi_\lambda)^{-1} : V_\lambda \xrightarrow{\sim} U_\lambda$, si pone $\int_{U_\lambda}(f\rho_\lambda)(x)\, d\lambda_{U_\lambda} = \int_{V_\lambda}(f\rho_\lambda)(\gamma_\lambda(v))\sqrt{\det(\mathsf{J}_{\gamma_\lambda}(v)^t\,\mathsf{J}_{\gamma_\lambda}(v))}\, d\lambda_k(v)$.

3.2 Campi vettoriali e teoremi classici di integrazione vettoriale

Ricordiamo che un *campo vettoriale* su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è una funzione che associa ad ogni punto di A un vettore di $\mathbb{R}^n$: **Campo vettoriale**

$$F : A \to \mathbb{R}^n\,, \qquad F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))\,;$$

e che, data una curva $\gamma : [a,b] \to A$, l'*integrale di linea* di F lungo γ è il numero reale **Integrale di linea**

$$\int_\gamma F \cdot dx \;:=\; \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))\, dt \;=\; \int_a^b \big(F_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\,\gamma_n'(t)\big)\, dt\,.$$

Come noto, la teoria dei campi vettoriali è canonicamente corrispondente a quella delle *forme differenziali lineari* (campi "covettoriali") tramite la seguente associazione, che manda la base canonica di $\mathbb{R}^n$ nella sua base duale:

$$\text{campo} \quad F = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{forma} \quad \omega_F = F_1(x)\,dx_1 + \cdots + F_n(x)\,dx_n\,.$$

Nelle scienze applicate, particolarmente in Fisica, tradizionalmente si preferisce operare con i campi vettoriali, perché offrono una visualizzazione immediata e suggestiva delle grandezze vettoriali (forze, velocità, ...) che rappresentano. Tuttavia l'uso delle forme ha

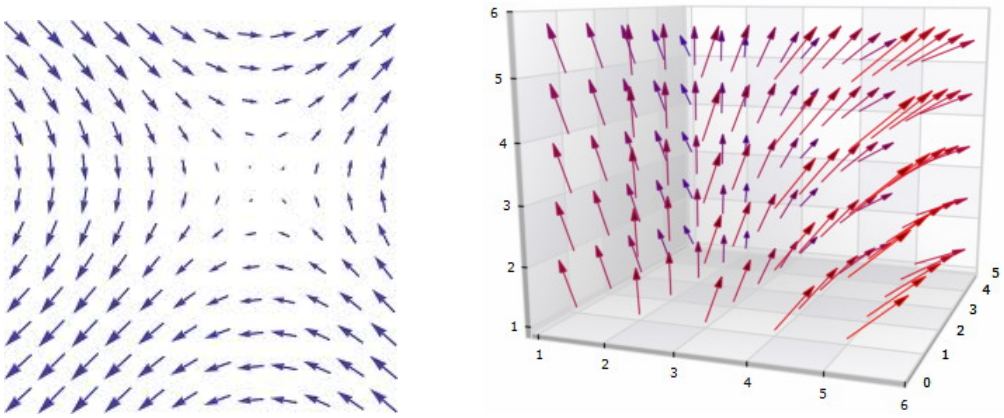


Figura 3.5: Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

il vantaggio di offrire un quadro unitario dal punto di vista teorico (esse permettono di raggiungere risultati generali di enunciato pulito in dimensione qualunque, come vedremo col teorema di Stokes, che forniscono un inquadramento comune a vari risultati particolari) ed efficiente dal punto di vista pratico (ad esempio, per la sua compatibilità con i cambi di coordinate). Ad esempio, la nozione per i campi che corrisponde a quella di forma chiusa è quella di *campo irrotazionale*, ovvero un campo $F = (F_1, \dots, F_n) : A \to \mathbb{R}^n$ tale che **Campo irrotazionale**

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \qquad \text{per ogni } 1 \le j < k \le n;$$

e a una forma esatta corrisponde un *campo conservativo*, ovvero un campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ per il quale **Campo conservativo**

$$\text{esiste una funzione } f : A \to \mathbb{R} \text{ per cui } F = \nabla f.$$

La funzione f, definita a meno di una costante additiva se A è connesso, è detta *potenziale (scalare)* di F; ma, specie nel caso dei campi di forze, è di maggior interesse la funzione opposta $E = -f$, detta *energia potenziale* di F [55] per la quale si ha dunque $F = -\nabla E$. **(Energia) potenziale**
La ricerca di un potenziale per un campo conservativo $F = (F_1, \dots, F_n) : A \to \mathbb{R}^n$ equivale alla ricerca di una primitiva per la corrispondente forma differenziale lineare esatta $\omega_{_F} = F_1(x)\,dx_1 + \cdots + F_n(x)\,dx_n$.

Useremo dunque il seguente dizionario nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ per passare da un punto di vista vettoriale (campi) a un punto di vista covettoriale (forme differenziali lineari):

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$	$\longleftrightarrow$	Spazio vettoriale duale $(\mathbb{R}^n)^*$
Vettore (vettore-colonna)	$\longleftrightarrow$	Covettore (vettore-riga)
Campo vettoriale	$\longleftrightarrow$	Forma differenziale lineare
Gradiente di una funzione	$\longleftrightarrow$	Differenziale di una funzione
(Energia) potenziale	$\longleftrightarrow$	Primitiva
Integrale di linea di un campo	$\longleftrightarrow$	Integrale di una forma
Campi conservativi	$\longleftrightarrow$	Forme esatte
Campi irrotazionali	$\longleftrightarrow$	Forme chiuse

Elenchiamo allora nel linguaggio dei campi vettoriali alcuni fondamentali risultati che già conosciamo in quello delle forme differenziali lineari.

Proposizione 3.2.1. *Sia dato un campo vettoriale $F : A \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$.*

(a) (Integrale di linea di un campo conservativo) *Se F è un campo conservativo e $\gamma : [a, b] \to A$ è una curva, detto f un potenziale di F (dunque $F = \nabla f$) si ha*

$$\int_\gamma F \cdot dx \;=\; f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \;.$$

In particolare l'integrale di linea di un campo conservativo dipende esclusivamente dagli estremi della curva.

(b) *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *Il campo F è conservativo.*
(ii) *L'integrale di linea di F dipende* solo *dagli estremi della curva.*[56]

[55] A volte si usa il termine *potenziale* di F, specie nel caso in cui si consideri una versione "specifica" (cioè indipendente dalle caratteristiche del corpo che ne risente, come accade nel campo elettrostatico con la carica di prova) del campo di forze.
[56] E, se $F = \nabla f$, tale integrale è calcolabile come in (a).

(iii) *L'integrale di linea di F su ogni circuito in A è nullo.*

In tali ipotesi, fissato a piacere un punto $x_0 \in A$, un potenziale di F in A è

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_\circ,x}} F \cdot dx\,,$$

ove $\gamma_{x_\circ,x}$ è una qualsivoglia *curva da x_0 a x in A.*

(c) *L'integrale di linea di un campo irrotazionale è invariante per omotopie di curve a estremi fissati, o per omotopie di circuiti (non necessariamente con punto base fissato). In particolare, un campo irrotazionale su un aperto semplicemente connesso è conservativo.*

(d) *Sia A non semplicemente connesso, e si consideri una famiglia massimale di circuiti semplici in A non nullomotopi e non omotopi tra loro.*[57] *Se un campo irrotazionale ha integrale di linea nullo lungo ogni circuito della famiglia, allora esso è conservativo.*

Esempi. **(1)** I campi a variabili separate (ovvero quelli del tipo $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, che corrispondono alle forme $F_1(x_1)\,dx_1 + \cdots + F_n(x_n)\,dx_n$) e i campi radiali a simmetria sferica (ovvero del tipo $\alpha(r)\frac{x-\tilde{x}}{r}$, ove $\tilde{x}$ è un prefissato punto e $r = (\sum(x_j - \tilde{x}_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ è la funzione di distanza da $\tilde{x}$, che corrispondono alle forme del tipo $\alpha(r)\,dr = \frac{\alpha(r)}{r}\sum(x_j - \tilde{x}_j)\,dx_j$) sono conservativi, con primitive date rispettivamente da $\sum_j \int F_j(x_j)\,dx_j$ e $\int \alpha(r)\,dr$. **(2)** Dato nello spazio fisico tridimensionale un campo di forze $F = (F_x, F_y, F_z)$, la corrispondente forma differenziale $dL = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$ è detta *lavoro elementare* compiuto dal campo. Dire che il campo F è conservativo, ovvero che il lavoro elementare è una forma esatta, significa, come detto, individuare l'esistenza di un'energia potenziale (l'opposto di una primitiva) $E(x, y, z)$ tale che $F = -\nabla E$: in tal caso, come vedremo tra breve, il lavoro compiuto dal campo durante un qualsiasi spostamento da un punto (x_0, y_0, z_0) a un altro punto (x_1, y_1, z_1) è sempre pari alla perdita di energia potenziale dalla partenza all'arrivo, ovvero $U(x_0, y_0, z_0) - U(x_1, y_1, z_1)$. Esempi di campi di forze conservativi sono, come noto, il campo di gravità terrestre $(0, 0, -mg)$ (costante, con energia potenziale mgz) e i vari campi centrali a simmetria radiale: ad esempio, il campo gravitazionale generato da un pianeta di massa M posto in $\tilde{x}$ e il campo di forza elastica generato da una molla di costante k con polo in $\tilde{x}$ e lunghezza a riposo ℓ sono rispettivamente quelli con $\alpha_{\rm gr}(r) = -\frac{GM}{r^2}$ (campo specifico per unità di massa) e $\alpha_{\rm el}(r) = k(\ell - r)$ (il primo campo di forze è attrattivo, mentre il secondo è attrattivo per $r > \ell$ e repulsivo per $r < \ell$), con energie potenziali date da $-\frac{GM}{r}$ e $k(\frac{1}{2}r^2 - \ell r)$.

Esercizio. *Risolvere i seguenti problemi su irrotazionalità e conservatività dei campi vettoriali.*

(1) Il campo $F(x, y) = (\frac{3x-y-1}{x^2+(y+1)^2}\,,\ \frac{x+3y+3}{x^2+(y+1)^2})$ è conservativo nel suo dominio?

(2) Dire se esiste una funzione $\varphi(x)$ tale che il campo

$$F(x, y, z) = \left(yz\,\varphi(x) + \frac{1}{x - 2z} - 3x\,,\ z\,\varphi(x)\,,\ y\,\varphi(x) - \frac{2}{x - 2z}\right)$$

sia irrotazionale. In tal caso, F è conservativo?

[57] Una curva parametrica si dice "semplice" se è iniettiva. Con "massimale" si intende poi che una tale famiglia non può essere ulteriormente allargata con l'aggiunta di altri elementi preservando il fatto che due qualsiasi elementi rimangano non nullomotopi e non omotopi tra loro: in sostanza, "per ogni singolarità del dominio si sceglie un circuito semplice che le giri attorno una volta" (spesso la scelta sarà quella più comoda, tipicamente una circonferenza).

Risoluzione. (1) F è irrotazionale, perché $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{3x-y-1}{x^2+(y+1)^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x+3y+3}{x^2+(y+1)^2}) = \frac{-x^2-6xy+y^2+2y+1}{(x^2+(y+1)^2)^2}$; tuttavia il dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$ non è semplicemente connesso, dunque non si può concludere che F sia conservativo. Proviamo allora a integrarlo lungo un circuito semplice che gira attorno al punto $(0,-1)$: la scelta più ovvia è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, -1 + \sin 2\pi t)$ con $t \in I$, e risulta $\int_\gamma F \cdot dx = \int_0^1 \big(\frac{3\cos 2\pi t - \sin 2\pi t}{1}(-2\pi \sin 2\pi t) + \frac{\cos 2\pi t - 3\sin 2\pi t}{1}(2\pi \cos 2\pi t)\big)\, dt = 2\pi \int_0^1 (1 - 3\sin 4\pi t)\, dt = 2\pi \neq 0$. Dunque il campo non è conservativo.[58] (2) Il rotore $\nabla \times F = (0,\, y(\varphi(x) - \varphi'(x)),\, z(\varphi(x) - \varphi'(x)))$ si annulla se e solo se $\varphi'(x) = \varphi(x)$, ovvero $\varphi(x) = k\, e^x$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Poiché il dominio di F è dato dall'unione disgiunta dei due semispazi $x \gtrless 2z$, che sono semplicemente connessi, su ciascuno di essi F sarà conservativo: troviamo una primitiva $f(x,y,z)$ ad esempio su $x > 2z$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = kz\, e^x$ si ricava $f(x,y,z) = kyz\, e^x + u(x,z)$ per un'opportuna funzione u; da $\frac{\partial f}{\partial z} = ky\, e^x + \frac{\partial u}{\partial z}(x,z) = ky\, e^x - \frac{2}{x-2z}$ si ha poi $\frac{\partial u}{\partial z}(x,z) = \log(x-2z) + v(x)$ per un'opportuna funzione v; infine, da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(kyz\, e^x + \log(x-2z) + v(x)) = kyz\, e^x + \frac{1}{x-2z} + v'(x) = kyz\, e^x + \frac{1}{x-2z} - 3x$ si ricava $v'(x) = -3x$, da cui $v(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Le primitive di ω su $x > 2z$ sono dunque $f(x,y,z) = kyz\, e^x + \log(x-2z) - \frac{3}{2}x^2 + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Dato un campo vettoriale $G = (G_1, \dots, G_n) : A \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$, si definisce la *divergenza* (ingl. *divergence*) di G, denotata anche con $\nabla \cdot G$, come la funzione

Divergenza

$$\operatorname{div} G : A \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{div} G \;=\; \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\,.$$

Un campo G tale che $\operatorname{div} G \equiv 0$ è detto *solenoidale*.[59]

Campo solenoidale

Nel caso tridimensionale, dato un campo $F = (F_1, F_2, F_3) : A \to \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$, si definisce il *rotore* di F (ingl. *curl*)[60], denotato anche con $\nabla \times F$, come il campo

Rotore

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \;=\; \big(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z},\; \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x},\; \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y}\big).$$

Per un campo F, la proprietà $\operatorname{rot} F \equiv 0$ equivale all'irrotazionalità definita in precedenza.

Proposizione 3.2.2. *Gli operatori appena introdotti godono delle seguenti proprietà.*

(a) (Un gradiente è sempre irrotazionale, e un rotore sempre solenoidale) *Sia A aperto in $\mathbb{R}^3$.*
Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, allora $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.
Se $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^2$, allora $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

[58] Con un po' di occhio si poteva notarlo anche subito, perché $F(x,y) = (-\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\,,\; \frac{x}{x^2+(y+1)^2}) - 3(\frac{x}{x^2+(y+1)^2}\,,\; \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2})$: il primo campo è la solita forma argomento $\omega_{\arg}$ traslata in $(0,-1)$, e il secondo è il gradiente di $\frac{1}{2}\log(x^2+(y+1)^2)$.

[59] L'appellativo *solenoidale* è riferito al fatto che tale proprietà è posseduta dal campo magnetico generato da un solenoide.

[60] Il termine inglese *curl* significa "ricciolo": questa nomenclatura fa riferimento al fatto che un campo non irrotazionale (ovvero il cui rotore non è nullo) ha tipicamente delle linee che si arricciano.

(b) (Laplaciano) *Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, allora* $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.[61]

(c) (Moltiplicazione per un campo scalare) *Se $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ e $u : A \to \mathbb{R}$ è una funzione (ovvero un campo scalare) di classe $\mathcal{C}^1$, si ha*

$$\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F\,, \qquad \operatorname{rot}(uF) = \nabla u \times F + u \operatorname{rot} F\,.$$

(d) (Definizione intrinseca di rotore) *Se $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$, allora* $\operatorname{rot} F$ *è il campo vettoriale univocamente determinato dalla proprietà*[62]

$$dF_{\vec{x}}(v) \cdot w - dF_{\vec{x}}(w) \cdot v = \operatorname{rot} F(\vec{x}) \times v \cdot w \qquad \text{per ogni } \vec{x} \in A \text{ e ogni } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrazione. Facili conti in coordinate, che lasciamo per esercizio. Ad esempio, per (c.1): $\operatorname{div}(uF) = \frac{\partial(uF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(uF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(uF_3)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}F_1 + u\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}F_2 + u\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}F_3 + u\frac{\partial F_3}{\partial z} = (\frac{\partial u}{\partial x}F_1 + \frac{\partial u}{\partial y}F_2 + \frac{\partial u}{\partial z}F_3) + u(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$. Oppure, per (d): grazie alla linearità è sufficiente dimostrarlo quando $v = e_j$ e $w = e_k$ con $1 \le j < k \le 3$, ad esempio $dF_{\vec{x}}(e_1) \cdot e_2 - dF_{\vec{x}}(e_2) \cdot e_1 = \nabla F_1(\vec{x}) \cdot e_2 - \nabla F_2(\vec{x}) \cdot e_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}) = (\operatorname{rot} F(\vec{x}))_3 = \operatorname{rot} F(\vec{x}) \times e_1 \cdot e_2$. □

Dati un aperto A di $\mathbb{R}^n$, un'ipersuperficie orientata S in A (come detto, orientare un'ipersuperficie equivale a scegliere in modo continuo un verso positivo per il vettore normale $\vec{n}$ in ogni suo punto) e un campo vettoriale $G : A \to \mathbb{R}^n$, si definisce il *flusso di G attraverso S* come l'integrale

Flusso di un campo

$$\Phi_S(G) = \int_S (G \cdot \vec{n})\, d\lambda_S\,.$$

[61] L'operatore $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è detto *operatore di Laplace* o *laplaciano*, e una funzione f di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $\Delta f \equiv 0$ è detta *funzione armonica*. Le funzioni armoniche godono di importanti proprietà, per le quali rimandiamo a trattazioni specifiche: tra esse citiamo la regolarità (una funzione armonica è necessariamente di classe $\mathcal{C}^\infty$), il principio del massimo (una funzione armonica su un compatto raggiunge gli estremi assoluti sul bordo del compatto, e di conseguenza su un dominio aperto connesso non può assumere estremi locali tranne nel caso banale in cui sia costante) e il principio del valor medio (una funzione armonica $u : B_x(\varepsilon) \to \mathbb{R}$ su una palla $B_x(\varepsilon)$ di $\mathbb{R}^n$ assume nel centro x il valor medio nella palla $\frac{1}{\operatorname{Vol}_n(B_x(\varepsilon))}\int_{B_x(\varepsilon)} u(\xi)\, d\lambda_n(\xi)$, o anche il valor medio nella superficie della palla $\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial B_x(\varepsilon))}\int_{\partial B_x(\varepsilon)} u(\xi)\, d\sigma(\xi)$). Ad esempio le funzioni olomorfe $u(z)$ (ovvero funzioni $u : D \to \mathbb{C}$ definite su un aperto $D \subset \mathbb{C}$ che in ogni punto $z \in D$ ammettono la derivata complessa $u'(z) := \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \in \mathbb{C}$), se viste come funzione di $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, sono armoniche.

[62] Scrivendo "definizione intrinseca" si intende una definizione che non usa l'espressione in coordinate ma solo una simbologia in termini di operazioni; e scrivendo "univocamente determinato" si intende che $\operatorname{rot} F$ è individuato come campo vettoriale dalla proprietà esposta ed è l'unico campo vettoriale che la soddisfa. In essa, il simbolo $dF_{\vec{x}}$ al primo membro denota il differenziale nel punto $\vec{x} \in A$ del campo F visto come funzione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, ovvero, in coordinate $F = (F_1, F_2, F_3)$, la funzione lineare associata allo jacobiano $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{x}) \end{pmatrix}$; e il secondo membro è calcolabile come $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\vec{x}) & v_1 & w_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\vec{x}) & v_2 & w_2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{x}) & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$.

In sostanza il flusso — terminologia che deriva dal naturale caso di base descritto nell'esempio che segue — misura l'entità del passaggio del campo attraverso l'ipersuperficie, e dipende dunque non solo dall'intensità del campo e dall'ampiezza dell'ipersuperficie ma anche e soprattutto dalla loro inclinazione reciproca: se il campo è parallelo alla superficie il flusso è nullo, e cresce quanto più il campo è trasversale alla superficie stessa.

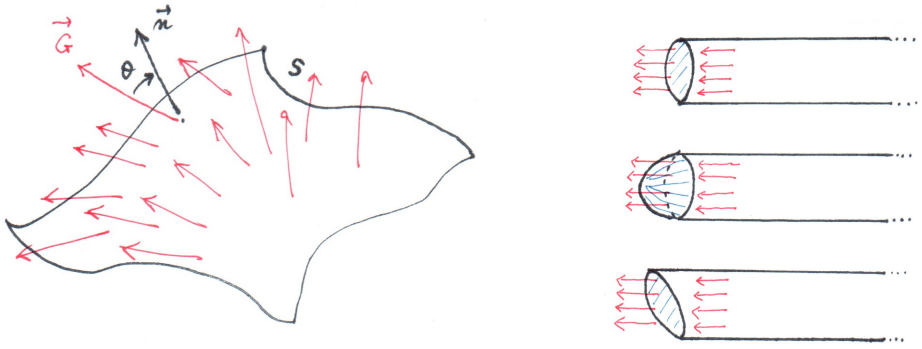


Figura 3.6: **(a)** Flusso di G attraverso S. **(b)** Conduttura a scorrimento costante: il flusso non cambia nei tre casi.

Esempio. Se G è il campo delle velocità di un fluido (in m/sec), il flusso $\Phi_S(G)$ misura la portata media (in m^3/sec), ovvero la quantità di fluido che transita attraverso la superficie nell'unità di tempo.
Vediamo un semplice esempio di calcolo. Nella Figura 3.6(b) appare una condotta a sezione circolare di raggio R, percorsa da un fluido con velocità costante v, e consideriamo tre diverse sezioni interne della condotta: una S_1 con un taglio piano normale, una S_2 secondo una superficie semisferica e una terza S_3 con un taglio piano inclinato di un certo angolo α. Il buonsenso ci dice che, in un caso costante come questo, i flussi attraverso le tre superfici dovranno essere tutti e tre uguali a $\pi R^2 v$ (portata media, data dalla velocità del fluido moltiplicata per l'area della sezione normale della condotta), e vediamo che in effetti è così pensando, per comodità di calcolo, alla condotta avente l'asse x come asse centrale e al campo di velocità $G = v\,e_1$ con $v > 0$ costante. • Detto $D = \{(y,z) : y^2 + z^2 \le R^2\}$ (disco di raggio R e centro $(0,0)$) si ha $S_1 = \{(0,y,z) : (y,z) \in D\}$, con vettore normale costante $\vec{n} = e_1$, e dunque $\Phi_{S_1}(G) = \int_D (v\,e_1 \cdot e_1)\,dy\,dz = v \operatorname{Area} D = \pi R^2 v$. • Si ha $S_2 = \{(x,y,z) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi) : |\theta| \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$ (con elemento d'area $d\sigma = R^2 \sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$), e il vettore normale in $(x,y,z) \in S_2$ è $\vec{n}_2 = \frac{1}{R}(x,y,z)$, da cui $\Phi_{S_2}(G) = \int_{\{(\theta,\varphi):|\theta|\le\frac{\pi}{2},\,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}} (v\,e_1 \cdot \frac{1}{R}(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi))\,R^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi = R^2 v \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi$, che dà nuovamente $R^2 v (\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}]_0^{\pi} = \pi R^2 v$. • Infine, anche S_3 è parametrizzata da D come $S_3 = \{(z\operatorname{tg}\alpha, y, z) : (y,z) \in D\}$, con elemento d'area $d\sigma = \frac{1}{\cos\alpha}\,dy\,dz$ (legge del coseno); da $g(x,y,z) = x - z\operatorname{tg}\alpha = 0$ si ricava $\nabla g = (1, 0, -\operatorname{tg}\alpha)$ da cui $\vec{n}_3 = \frac{1}{\|\nabla g\|}\nabla g = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}(1,0,-\operatorname{tg}\alpha) = (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha)$ (costante), e dunque $\Phi_{S_3}(G) = \int_D (v\,e_1 \cdot (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha))\,\frac{1}{\cos\alpha}\,dy\,dz = \int_D (v\cos\alpha\,\frac{1}{\cos\alpha})\,dy\,dz = v \operatorname{Area} D = \pi R^2 v$.

Negli esempi trattati la descrizione del vettore normale alla superficie è piuttosto semplice, ma ovviamente questo non rappresenta la situazione generale: è dunque utile esprimere il flusso in termini più operativi per il calcolo, ad esempio a partire da una data parametrizzazione di S. Supponiamo allora che S sia parametrizzata come varietà orientata da $\gamma : V \xrightarrow{\sim} S$, ove V è aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$ con variabili $v = (v_1, \dots, v_{n-1})$: con questo si intende

che $(\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v))$ è una base positiva per lo spazio tangente T_xS in $x = \gamma(v)$.

Proposizione 3.2.3. *Il flusso di G attraverso S è dato dall'integrale*

$$\begin{aligned} \Phi_S(G) &= \int_V \det\big(G(\gamma(v)), \mathsf{J}_\gamma(v)\big)\, dv_1 \cdots dv_{n-1} \\ &= \int_V \det \begin{pmatrix} G_1(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v_1}(v) & \cdots & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v_{n-1}}(v) \\ G_2(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v_1}(v) & \cdots & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v_{n-1}}(v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_n(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_n}{\partial v_1}(v) & \cdots & \frac{\partial\gamma_n}{\partial v_{n-1}}(v) \end{pmatrix} dv_1 \cdots dv_{n-1} \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Denotato con $\vec{n}(x)$ il vettore normale a S in $x = \gamma(v)$ orientato in modo coerente all'orientazione di S (ovvero di modo che $(\vec{n}(x), \frac{\partial\gamma}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}})$ sia una base positiva per $\mathbb{R}^n$) si ha

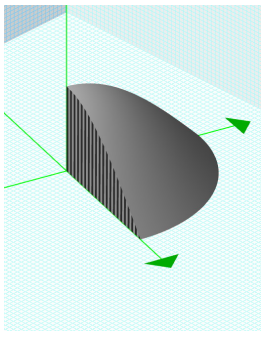
$$\big(G(\gamma(v)) \cdot \vec{n}(\gamma(v))\big)\ \sqrt{\det(\mathsf{J}_\gamma(v)^t\, \mathsf{J}_\gamma(v))} \;=\; \det\big(G(\gamma(v)), \mathsf{J}_\gamma(v)\big)\,,$$

perché il valore assoluto del secondo membro (che rappresenta il volume del parallelogrammo individuato dai vettori $G(\gamma(v))$, $\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v)$, ..., $\frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v)$) è uguale al valore assoluto del primo membro (che è uguale all'area $\sqrt{\det(\mathsf{J}_\gamma(v)^t\, \mathsf{J}_\gamma(v))}$ della sua base generata dagli $n-1$ vettori $\frac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v)$, ..., $\frac{\partial\gamma}{\partial v_{n-1}}(v)$ moltiplicata per la relativa altezza $|G(\gamma(v)) \cdot \vec{n}(\gamma(v))|$), e togliendo i valori assoluti il segno dei due membri è lo stesso. Si ha dunque $(G \cdot \vec{n})\, d\lambda_S \;=\; \det\big(G(\gamma(v)), \mathsf{J}_\gamma(v)\big)\, dv_1 \cdots dv_{n-1}$, e il risultato ne segue. □

In particolare, nell'importante caso di una superficie S di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\gamma : V \xrightarrow{\sim} S$ con V aperto di $\mathbb{R}^2$, il flusso di $G = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso S risulta

$$\begin{aligned} \Phi_S(G) &= \int_V \big(G(\gamma(v)) \times \tfrac{\partial\gamma}{\partial v_1}(v) \cdot \tfrac{\partial\gamma}{\partial v_2}(v)\big)\, dv_1\, dv_2 \\ &= \int_V \det \begin{pmatrix} G_1(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v_1}(v) & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v_2}(v) \\ G_2(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v_1}(v) & \frac{\partial\gamma_2}{\partial v_2}(v) \\ G_3(\gamma(v)) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial v_1}(v) & \frac{\partial\gamma_3}{\partial v_2}(v) \end{pmatrix} dv_1\, dv_2 \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esercizio. *Sia D la porzione nel primo quadrante del piano (x, z) sottesa dal grafico di $z = \cos x$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, e sia L il solido ottenuto ruotando D di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario attorno all'asse z. Dette S, S_x, S_y e S_z le superfici porzioni di ∂L nel primo ottante e sui piani $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ orientate nel verso uscente da L, calcolare il flusso attraverso esse dei campi vettoriali $G_1 = (x, -y, 0)$ e $G_2 = (x, y, 0)$.*



Risoluzione. I campi G_1 e G_2 sono ovunque paralleli al piano orizzontale $z = 0$, e nei punti dei piani verticali $x = 0$ e $y = 0$ sono anche paralleli ai piani stessi: pertanto i loro flussi attraverso S_x, S_y e S_z sono tutti nulli. Restano solo da valutare i flussi attraverso S, parametrizzata da $\gamma(x, \theta) = (x\cos\theta, x\sin\theta, \cos x)$ con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, che valgono rispettivamente

$$\Phi_S(G_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} x\cos\theta & \cos\theta & -x\sin\theta \\ -x\sin\theta & \sin\theta & x\cos\theta \\ 0 & -\sin x & 0 \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = 0$$

$$\Phi_S(G_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} x\cos\theta & \cos\theta & -x\sin\theta \\ x\sin\theta & \sin\theta & x\cos\theta \\ 0 & -\sin x & 0 \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \frac{\pi(\pi-2)}{2} \,.$$

Tra breve conosceremo il *teorema della divergenza*, che dice che il flusso totale uscente da ∂L di un campo G è pari all'integrale su L della divergenza $\nabla \cdot G$. In questo caso si ha $\nabla \cdot G_1 = 1 - 1 = 0$ e, coerentemente, come visto il flusso totale uscente da ∂L di G_1 è nullo. D'altra parte si ha $\nabla \cdot G_2 = 1+1 = 2$, dunque $\int_L \nabla \cdot G_2 \, dx\, dy\, dz = 2 \operatorname{Vol} L$, pertanto dovrà necessariamente essere $2 \operatorname{Vol} L = \frac{\pi(\pi-2)}{2} + 0 + 0 + 0$, ovvero $\operatorname{Vol} L = \frac{\pi(\pi-2)}{4}$: sarà vero? In effetti, usando Guldino calcoliamo che $\operatorname{Vol} L = \frac{\pi}{2} \int_D x \, dx\, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} x \, dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} (x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi(\pi-2)}{4}$, e tutto torna!

Possiamo trattare ora i teoremi classici di integrazione dei campi vettoriali iniziando dal fondamentale *teorema della divergenza*, dovuto a Gauss[(63)], che lega il calcolo di un flusso (integrale d'ipersuperficie) al calcolo di un integrale di volume.

Teorema della divergenza

Teorema 3.2.4. (Teorema della divergenza, o di Gauss) *Siano W un aperto di $\mathbb{R}^n$, $A \subset W$ un aperto tale che $\overline{A}$ sia varietà bordata in W, e $G : W \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\overline{A} \cap \operatorname{supp} G$ sia compatto[(64)]. Allora il flusso totale di G uscente da ∂A è pari all'integrale di volume su A della divergenza di G:*

$$\Phi_{\partial A}(G) \;=\; \int_A (\nabla \cdot G)\, d\lambda_n \,. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Proviamo il teorema nei due casi particolari in cui A sia (a) un parallelepipedo oppure (b) una palla chiusa.

(a) Supponiamo che A sia un parallelepipedo $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$. Le facce orizzontali superiore $\partial A(c_2)$ e inferiore $\partial A(c_1)$ di ∂A hanno versore normale uscente $\pm e_3$, dunque il flusso totale di $G = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso esse (denotando $A_{x,y} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ e usando a rovescio il teorema di riduzione di Fubini) è

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A(c_2) \sqcup \partial A(c_1)} (G \cdot \vec{n})\, d\lambda_{\partial A} \;&=\; \int_{A_{x,y}} G_3(x,y,c_2)\, dx\, dy - \int_{A_{x,y}} G_3(x,y,c_1)\, dx\, dy \;=\; \int_{A_{x,y}} \big(G_3(x,y,c_2) - G_3(x,y,c_1)\big)\, dx\, dy \\
&=\; \int_{A_{x,y}} \Big(\int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz\Big)\, dx\, dy \;=\; \int_A \frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \,.
\end{aligned}$$

Facendo il conto analogo per le altre due coppie di facce e sommando si ottiene (3.3).

(b) Supponiamo che A sia una palla chiusa di raggio R centrata in un punto di $\mathbb{R}^3$, che a meno di un cambio di coordinate possiamo supporre essere l'origine. Scriviamo $G = G' + G'' + G''$ dove $G' = (G_1, 0, 0)$, $G'' = (0, G_2, 0)$ e $G''' = (0, 0, G_3)$, e iniziamo facendo il conto ad esempio per G'''. Il versore normale uscente da ∂A è $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z) = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$: parametrizzando cartesianamente i due emisferi superiore e inferiore $E^{\pm}$ tramite $\gamma : D \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(x, y) = (x, y, \pm z_{x,y})$ (ove $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R\}$ e $z_{x,y} := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$) si ha che l'elemento di volume sulla sfera è $\sqrt{1 + |\nabla z_{x,y}|^2}\, dx\, dy = \frac{R}{z_{x,y}}\, dx\, dy$: usando ancora una volta a

---

(63) Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 aprile 1777 - Gottinga, 23 febbraio 1855)

(64) Ricordiamo che $\operatorname{supp} G = \{x \in W : G(x) \neq 0\}$ denota il *supporto* di G; quando $\overline{A}$ è compatto la condizione che $\overline{A} \cap \operatorname{supp} G$ sia compatto è sempre soddisfatta.

rovescio Fubini si ottiene così

$$\begin{aligned}\int_{\partial A}(G'''\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A} &= \int_{E^+}(G'''\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A}+\int_{E^-}(G'''\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A}\\ &= \int_D \frac1R\,G_3(x,y,z_{x,y})\,z_{x,y}\,\frac{R}{z_{x,y}}\,dx\,dy+\int_D\frac1R\,G_3(x,y,-z_{x,y})\,(-z_{x,y})\,\frac{R}{z_{x,y}}\,dx\,dy\\ &= \int_D\big(G_3(x,y,z_{x,y})-G_3(x,y,-z_{x,y})\big)\,dx\,dy \;=\; \int_D\left(\int_{-z_{x,y}}^{z_{x,y}}\frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy\\ &= \int_A\frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.\end{aligned}$$

Si ha insomma $\int_{\partial A}(G'''\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A}=\int_A\frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; conti simili danno $\int_{\partial A}(G'\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A}=\int_A\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ e $\int_{\partial A}(G''\cdot\vec n)\,d\lambda_{\partial A}=\int_A\frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Sommando membro a membro le tre uguaglianze si ottiene (3.3). □

La divergenza rappresenta, in sostanza, l'entità dell'emissione del campo nel punto: la quantità totale di campo emesso in A (tra punti "sorgenti" che emettono e punti "tombini" che assorbono) è quella che poi transiterà (uscendo o entrando) dal bordo di A.

Si noti che, scegliendo il campo G di modo che $\nabla\cdot G\equiv 1$ (ad esempio $G(x)=\frac1n x$, o $G(x)=x_{j_\circ}$ per qualche j_0 fissato) si ottiene il *volume n-dimensionale* di A:

$$\lambda_n(A)\;=\;\frac1n\int_{\partial A}\big(x\cdot\vec n\big)\,d\lambda_{\partial A}\;=\;\int_{\partial A}\big(x_{j_\circ}\vec n_{j_\circ}\big)\,d\lambda_{\partial A}\,.$$

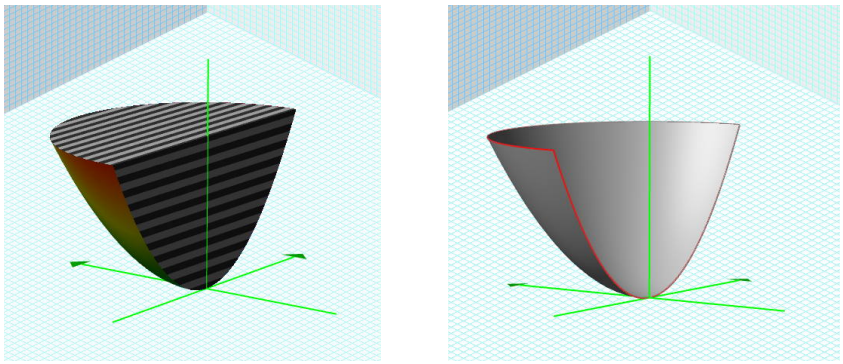


Figura 3.7

Esercizio. *Disegnare il solido* $E=\{(x,y,z):x^2+y^2\le z\le 1\,,\ y\ge 0\}$ *e calcolarne il volume. Verificare poi la validità del teorema di Gauss per* E *e il campo vettoriale* $F=(z-x,3y,y^2+z)$.

Risoluzione. Il solido E è quello della Figura 3.7(1). Calcolandone il volume per (x,y)-fili, detto $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\,,\ y\ge 0\}$ (la proiezione di E sul piano orizzontale $z=0$) si ha $\mathrm{Vol}(E)=\int_D(1-x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_0^\pi d\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr=\int_0^\pi(\frac12 r^2-\frac14 r^4]_0^1\,d\theta=\frac\pi4$; calcolandolo invece per z-fette si ha $\mathrm{Vol}(E)=\int_0^1\frac12 z\pi\,dz=\frac\pi2(\frac12 z^2]_0^1=\frac\pi4$. Per verificare la validità del teorema di Gauss dobbiamo provare che l'integrale di volume della divergenza di F su E è pari al flusso di F uscente dal bordo ∂E. La divergenza è $\nabla\cdot F=3$, dunque $\int_E(\nabla\cdot F)\,d\lambda_3=3\,\mathrm{Vol}(E)=\frac{3\pi}4$. D'altra parte il bordo ∂E è costituito (a meno di insiemi superficialmente trascurabili) dalla porzione di superficie di paraboloide S (Figura 3.7(2)), dalla porzione

parabolica S' nel piano $y=0$ e dal semidisco S'' nel piano $z=1$. La naturale superficie parametrizzazione di S tramite D fornisce l'orientazione opposta a quella desiderata (che deve esibire S come bordo di E, dunque la normale positiva è quella uscente che punta verso il basso): ne segue che il flusso di F uscente da S è $-\int_D \det\begin{pmatrix} (x^2+y^2)-x & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \\ y^2+(x^2+y^2) & 2x & 2y \end{pmatrix} dx\,dy = \int_D ((2x-3)(x^2+y^2)+7y^2)\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (2r\cos\theta - 3 + 7\sin^2\theta)\, r^3\, dr = \int_0^\pi (\frac{2}{5}\cos\theta + \frac{1}{4}(7\sin^2\theta - 3))\, d\theta = (\frac{2}{5}\sin\theta + \frac{1}{4}(\frac{7}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) - 3\theta)]_0^\pi = \frac{\pi}{8}$. Sul piano $y=0$ il campo è parallelo al piano stesso (si noti che $F_y = 0$ se $y=0$), dunque il flusso di F uscente da S' è nullo. Infine, usando la definizione stessa, il flusso di F uscente da S'' è $\int_D (z-x, 3y, y^2+z)_{z=1} \cdot (0,0,1)\,dx\,dy = \int_D (y^2+1)\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r^2\sin^2\theta + 1)\, r\, dr = \int_0^\pi (\frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{2})\, d\theta = (\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{2}\theta]_0^\pi = \frac{5\pi}{8}$. Pertanto il flusso di F uscente dal bordo ∂E è $\frac{\pi}{8} + 0 + \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$, come atteso.

Tra le immediate conseguenze del teorema della divergenza si contano la *formula di Green* e il *teorema del gradiente*, di cui diamo conto qui di seguito.

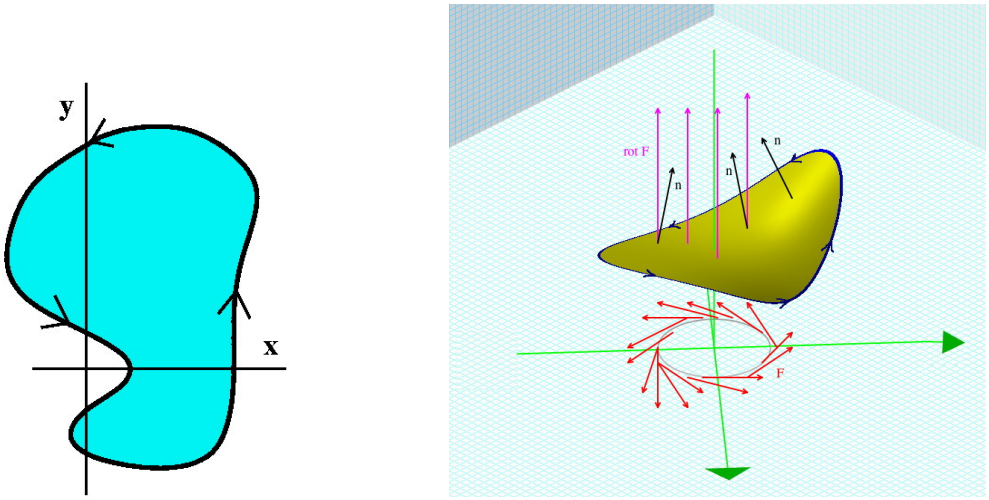


Figura 3.8: **(a)** La formula di Green. **(b)** La formula di Kelvin-Stokes.

La formula di Green è niente altro che il teorema della divergenza nel piano, ma la sua formulazione risulta utile perché lega il calcolo di una circuitazione (integrale di linea) al calcolo di un integrale d'area.

Teorema 3.2.5. (Formula di Green nel piano) *Siano W un aperto di $\mathbb{R}^2$, Γ un circuito in W che sia il bordo regolare di un aperto A, e $(f,g): W \to \mathbb{R}^2$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$ Allora la circuitazione di (f,g) lungo Γ è pari all'integrale di area su A di $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$:* **Formula di Green**

$$\oint_\Gamma (f,g)\cdot dx \;=\; \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy\,. \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema di Gauss (3.3) al campo $G = (g, -f)$ che ha divergenza $\nabla\cdot G = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$. In effetti, il flusso $\int_{\partial A} (G\cdot\vec{n})\, d\lambda_{\partial A}$ è uguale alla circuitazione lungo ∂A del campo (f,g) ortogonale a G: se $\alpha: I \to W$ parametrizza ∂A con l'orientazione richiesta (antioraria), da (3.9) si ha $\int_{\partial A} (G\cdot\vec{n})\, d\lambda_{\partial A} = \int_I \det\begin{pmatrix} g(\alpha(t)) & \alpha_1'(t) \\ -f(\alpha(t)) & \alpha_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_I \big(f(\alpha(t))\alpha_1'(t) + g(\alpha(t))\alpha_2'(t)\big)\, dt = \oint_{\partial A} (f,g)\cdot dx$. □

Anche qui, per $(f,g) = (0,x)$ o $(f,g) = (-y,0)$ si ottiene una formula per l'*area* di A:

$$\lambda_2(A) \;=\; \oint_\Gamma x\,dy \;=\; -\oint_\Gamma y\,dx\;.^{(65)}$$

Esempi. Ricalcoliamo, usando la formula di Green, l'area dell'ellisse di semiassi a e b e della cardiode $r(\theta) = a(1+\cos\theta)$ (vedi Figura 2.3(a)). • L'ellisse si parametrizza tramite $(x,y) = (a\cos\psi, b\sin\psi)$ con $\psi \in [0,2\pi]$. Si ha perciò $\oint_\Gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos\psi\, d(b\sin\psi) = ab\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi = ab(\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{2\pi} = \pi ab$. • Per la cardioide, usando la naturale parametrizzazione polare $(x,y) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$ con $\theta\in[0,2\pi]$ si ottiene $\oint_\Gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta\, d(a(1+\cos\theta)\sin\theta) = a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta(\cos\theta+\cos 2\theta)\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(2\cos^4\theta + 3\cos^3\theta - \cos\theta)\,d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta = 2a^2\,\frac14(\cos^3\theta\sin\theta + 3\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{2\pi} = \frac32 a^2\pi$, come già visto in precedenza.

Passiamo ora al *teorema del gradiente*, versione vettoriale del teorema della divergenza.

Teorema del gradiente

Teorema 3.2.6. (Teorema del gradiente) *Siano W un aperto di $\mathbb{R}^n$, $A \subset W$ un aperto tale che $\overline{A}$ sia varietà bordata in W, e $u : W \to \mathbb{R}$ un campo scalare di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\overline{A} \cap \operatorname{supp} u$ sia compatto. Allora vale*

$$\int_{\partial A} u(x)\,\vec{n}(x)\,d\lambda_{\partial A} \;=\; \int_A \nabla u(x)\,d\lambda_n\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Applicando (3.3) ai campi $G_j = u\,e_j$ si ha $\int_{\partial A} u(x)\,n_j(x)\,d\lambda_{\partial A} = \int_A \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\,d\lambda_n$; basta allora moltiplicare ambo i membri per il vettore e_j e sommare membro a membro. □

Esempio. *(Principio di Archimede)* La pressione in un fluido aumenta tipicamente in modo lineare con la profondità, ovvero con una legge $p(x,y,z) = p_0 - \delta g z$ ove δ è la densità di massa del fluido, g è l'accelerazione di gravità e p_0 è la pressione in $z=0$, pensando all'asse z verticale ascendente, con l'origine messa in un punto conveniente (ad esempio, nel caso dell'acqua, sulla superficie esterna a contatto con l'atmosfera, così che p_0 è la pressione atmosferica: dunque la zona immersa è data da $z<0$). Un corpo D immerso nel fluido subisce una forza totale data dai contributi della pressione superficiale sui vari elementi di superficie, forza (compressiva) che risulta dunque $-\int_{\partial A} p\,\vec{n}(x)\,d\lambda_{\partial A}$: per il Teorema del gradiente (3.5), questa forza è anche $-\int_D \nabla p\,d\lambda_n = -\int_D(-\delta g\,e_3)\,d\lambda_n = \delta g\,\mathrm{Vol}(D)\,e_3$, il che esprime il noto "principio di Archimede", secondo cui il corpo subisce una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato.

Trattiamo infine la *formula di Kelvin-Stokes*, detta anche *teorema del rotore*, che generalizza la formula di Green al caso di superfici bordate orientate compatte in $\mathbb{R}^3$: penseremo che S sia parametrizzata da un aperto limitato del piano, e che il bordo ∂S sia un circuito, con l'orientazione indotta da quella di S (ad esempio la situazione rappresentata per $S = \Sigma$ nelle Figure 3.3(a) o 3.8(b)).

$^{(65)}$Si noterà che, nel caso in cui il circuito Γ sia dato dalla giunzione di tratti di grafico $y = f_j(x)$ con $x \in [a_j, b_j]$, l'espressione $\lambda_2(A) = -\oint_\Gamma y\,dx$, significhi semplicemente integrare ciascuna funzione f_j tra i due estremi a_j e b_j, percorrendo Γ in senso negativo (cioè orario): era quanto si era detto parlando di calcolo di aree piane con l'integrale di Riemann in una variabile.

Formula di Kelvin-Stokes (teorema del rotore)

Teorema 3.2.7. (Formula di Kelvin-Stokes nello spazio tridimensionale) *Siano W un aperto in $\mathbb{R}^3$, $S \subset W$ una superficie bordata orientata compatta di classe $\mathcal{C}^2$ e $F : W \to \mathbb{R}^3$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$. Allora la circuitazione di F lungo ∂S è pari al flusso del rotore $\nabla \times F$ attraverso S:*[66]

$$\oint_{\partial S} F \cdot dx \;=\; \Phi_S(\nabla \times F)\,. \tag{3.6}$$

Dimostrazione. L'idea è di ricondursi al caso piano usando una parametrizzazione per S, e poi applicare la formula di Green. Supponiamo dunque, per semplicità, che S sia descritta da un'unica parametrizzazione $\gamma : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ (ove $V \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto del piano) come $S = \gamma(D)$ per un certo compatto $D \subset V$, e che il circuito bordo ∂D sia a sua volta descritto da un'unica parametrizzazione $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(a) = \alpha(b)$ che rispetti l'orientazione (antioraria) di ∂D: allora $\gamma \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizza il bordo ∂S. Detti (u,v) i parametri di V si ha allora

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} F \cdot dx &= \int_a^b F(\gamma(\alpha(t))) \cdot (\gamma(\alpha(t)))'\, dt \;=\; \int_a^b F(\gamma(\alpha(t))) \cdot (d\gamma_{\alpha(t)}(\alpha'(t)))\, dt \\
&= \int_a^b F(\gamma(\alpha(t))) \cdot \big(\tfrac{\partial\gamma}{\partial u}(\alpha(t))\,\alpha_1'(t) + \tfrac{\partial\gamma}{\partial v}(\alpha(t))\,\alpha_2'(t)\big)\, dt \\
&= \int_a^b \big[\big(F(\gamma(\alpha(t)) \cdot \tfrac{\partial\gamma}{\partial u}(\alpha(t))\big)\,\alpha_1'(t) + \big(F(\gamma(\alpha(t)) \cdot \tfrac{\partial\gamma}{\partial v}(\alpha(t))\big)\,\alpha_2'(t)\big]\, dt \\
&= \oint_{\partial D} \big((F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial u},\, (F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial v}\big)\cdot(du, dv).
\end{aligned}$$

Poiché l'ultimo è un integrale di linea nel piano possiamo applicare la formula di Green, ottenendo

$$\begin{aligned}
&= \int_D \big[\tfrac{\partial}{\partial u}\big((F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial v}\big) - \tfrac{\partial}{\partial v}\big((F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial u}\big)\big]\, du\, dv \\
&= \int_D \big[\tfrac{\partial(F\circ\gamma)}{\partial u}\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial v} + (F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial v\partial u} - \tfrac{\partial(F\circ\gamma)}{\partial v}\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial u} - (F\circ\gamma)\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial u\partial v}\big]\, du\, dv \\
&= \int_D \big[\tfrac{\partial(F\circ\gamma)}{\partial u}\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial v} - \tfrac{\partial(F\circ\gamma)}{\partial v}\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial u}\big]\, du\, dv \;=\; \textstyle\int_D \big[dF_{\gamma(u,v)}(\tfrac{\partial\gamma}{\partial u})\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial v} - dF_{\gamma(u,v)}(\tfrac{\partial\gamma}{\partial v})\cdot\tfrac{\partial\gamma}{\partial u}\big]\, du\, dv \\
&= \int_D \big[(\nabla\times F)(\gamma(u,v)) \;\times\; \tfrac{\partial\gamma}{\partial u}(u,v) \;\cdot\; \tfrac{\partial\gamma}{\partial v}(u,v)\big]\, du\, dv \;=\; \Phi_S(\nabla\times F),
\end{aligned}$$

(qui dF denota il differenziale di F visto come funzione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$), ove la quartultima uguaglianza segue dal teorema di Schwarz (γ è supposta essere di classe $\mathcal{C}^2$), la penultima segue dalla Proposizione 3.2.2(d) e l'ultima dalla Proposizione 3.2. □

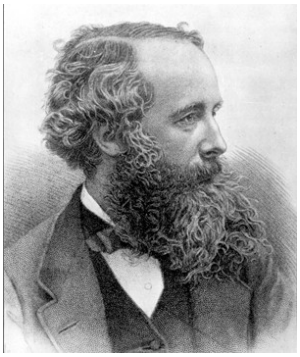
In altre parole, il rotore di un campo dà l'idea di quanto il campo ruoti attorno a un certo asse: infatti se il rotore non si annulla spuntano circuitazioni non nulle, e questo accade tipicamente quando le linee del campo si arricciano attorno all'asse.

Esempio. Verifichiamo la formula di Kelvin-Stokes nel caso in cui $F = (y - z,\, 1,\, -2xy)$ e la superficie S è quella dell'Esercizio a pag. 81, ovvero la porzione della superficie di paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \le 1$ e $y \ge 0$ rappresentata nella Figura 3.7(2) (dunque ∂S è la giunzione della semicirconferenza C_1 data da $x^2 + y^2 = 1$ con $y \ge 0$ nel piano $z = 1$ e del tratto di parabola C_2 dato da $z = x^2$ con $|x| \le 1$ nel piano $y = 0$; i punti angolosi nelle giunzioni non danno proccupazioni in vista del conto degli integrali di linea). Come già detto in precedenza, la scelta per S della parametrizzazione data da

[66] Si noti che, nel caso in cui S è contenuta nel piano (x,y) e si ha un campo piano $F = (f, g, 0)$ (dunque $\nabla \times F = (0, 0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$ e $\vec{n} = (0,0,1)$), la formula di Kelvin-Stokes ridà la formula di Green.

$\phi : D \to \mathbb{R}^3$ con $\phi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$ (ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ è il disco unitario chiuso piano) implica la scelta, come normale positiva a S, di quella che punta verso l'interno del paraboloide: pertanto ∂S (che va orientata vedendone la percorrenza come antioraria dal vettore normale a S positivo) sarà orientata percorrendo C_1 dal punto $(1,0,1)$ al punto $(-1,0,1)$ e poi C_2 da $(-1,0,1)$ a $(1,0,1)$. Parametrizzando allora C_1 tramite $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ con $\theta \in [0,\pi]$, e C_2 tramite $(x,0,x^2)$ con $x \in [-1,1]$, si ha $\oint_{\partial S} F \cdot dx = \int_{C_1} F \cdot dx + \int_{C_2} F \cdot dx = \int_0^\pi (\sin\theta - 1,\ 1,\ -2\cos\theta\sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta + \int_{-1}^1 (-x^2, 1, 0) \cdot (1,0,2x)\, dx = \int_0^\pi (-\sin^2\theta + \sin\theta + \cos\theta)\, d\theta + \int_{-1}^1 (-x^2)\, dx = (-\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) - \cos\theta + \sin\theta]_0^\pi + (-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = (2 - \frac{\pi}{2}) + (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}$. D'altra parte il rotore di F è $\nabla \times F = (-2x,\ 2y-1,\ -1)$, e dunque si ha $\int_S \big((\nabla \times F) \cdot \vec{n}\big)\, d\lambda_S = \int_D \det \begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ 2y-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2x & 2y \end{pmatrix} dx\, dy = \int_D (4x^2 - 4y^2 + 2y - 1)\, dx\, dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2\sin^2\theta + 2\rho\sin\theta - 1)\rho\, d\rho = \int_0^\pi (\cos^2\theta - \sin^2\theta + \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{1}{2})\, d\theta = (\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{2}\theta]_0^\pi = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}$, lo stesso risultato trovato poco fa.

Le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico. Il teorema della divergenza e la formula di Kelvin-Stokes costituiscono la base attorno cui si passa dalla formulazione integrale a quella differenziale delle equazioni di Maxwell[67] per il campo elettromagnetico nel vuoto.



• La *legge di Gauss* afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa: in termini integrali, se la superficie S è vista come bordo del corpo L e ρ rappresenta la densità di carica elettrica in L allora $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_L \rho\, d\lambda_3$, ove ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto. D'altra parte per il teorema della divergenza si ha anche $\Phi_S(\vec{E}) = \int_L (\nabla \cdot \vec{E})\, d\lambda_3$, dunque per generalità di L si ha $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, prima legge di Maxwell.

• L'assenza di monopòli magnetici implica che il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo: ancora una volta il teorema della divergenza dà $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, seconda legge di Maxwell.

• La *legge di induzione di Faraday* dice che la variazione temporale del flusso di un campo magnetico attraverso una superficie racchiusa da un circuito dà luogo a una forza elettromotrice di segno opposto lungo il circuito stesso: ricordando che per campi elettrici indotti la forza elettromotrice è la circuitazione del campo elettrico stesso, se Γ è il circuito e S la superficie racchiusa ciò si esprime in termini integrali come $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot dx = -\frac{d}{dt}\Phi_S(\vec{B}) = \Phi_S(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$ (nell'ultima uguaglianza si è derivato sotto il segno d'integrazione). D'altra parte la formula di Kelvin-Stokes dice che il primo integrale è anche uguale a $\Phi_S(\nabla \times \vec{E})$, dunque per la generalità di S si conclude che $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, terza legge di Maxwell.

• Infine, la *legge di Ampère-Maxwell* afferma che, a loro volta, flussi di correnti elettriche e variazioni di flusso del campo elettrico attraverso una superficie racchiusa da un circuito danno luogo a un campo magnetico lungo il circuito stesso secondo la formula integrale $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot dx = \mu_0\Phi_S(\vec{J}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\Phi_S(\vec{E})$, ove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e $\vec{J}$ è il vettore di densità superficiale di corrente elettrica. Derivando ancora sotto il segno d'integrale ciò dà $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot dx = \mu_0\Phi_S(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$; d'altra parte la formula di Kelvin-Stokes dice che il primo integrale è anche uguale a $\Phi_S(\nabla \times \vec{B})$, dunque anche stavolta per la generalità di S si conclude che $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$, quarta legge di Maxwell.

[67] James Clerk Maxwell (Edinburgh, 13 giugno 1831 - Cambridge, 5 novembre 1879)

3.3 Forme differenziali, teorema di Stokes e teoremi classici

Passiamo ora al secondo approccio ai teoremi classici di integrazione vettoriale, nel linguaggio delle forme differenziali.

Il teorema di Stokes[68], cui miriamo per poi trarne le conseguenze classiche, avrà un enunciato pulito e una comprensibilità immediata: in due parole, l'integrale della derivata di una forma differenziale su una varietà è uguale all'integrale della forma sul "bordo" della varietà (come se, nel calcolo dell'integrale, "la derivata passasse dalla forma differenziale alla varietà"). La sua versione più semplice la conosciamo già, perché non è altro che il Teorema Fondamentale del Calcolo, ovvero $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$: qui si intende che la varietà è l'intervallo $[a, b]$, la forma è la funzione f (si tratta di una 0-forma, e la sua derivata $f'(x)\,dx$ è una 1-forma, ovvero una forma differenziale lineare), il bordo di $[a, b]$ è fatto dai due estremi a e b, e il secondo membro (la differenza tra i valori di f in b e in a) va inteso come integrale della 0-forma f sull'insieme-bordo $\{a, b\}$. Tuttavia, quasi a dispetto della sua pulizia e comprensibilità, il teorema di Stokes richiede, per poter essere enunciato nella sua versione generale, una paziente descrizione delle forme differenziali di ordine superiore e delle loro operazioni.

---

k-forma

Dato uno spazio vettoriale reale V, una *k-forma* su V è una funzione $V^k \to \mathbb{R}$ che sia multilineare (ovvero, lineare separatamente in ciascuno dei suoi k argomenti) e alternante (ovvero, che si annulli quando calcolata su una k-upla di vettori linearmente dipendenti).[69] L'insieme $(\bigwedge^k V)^*$ delle k-forme su V ha una struttura di spazio vettoriale reale (perché combinazioni lineari di k-forme sono ancora k-forme); quando $k = 1$ si ha evidentemente $(\bigwedge^1 V)^* = V^*$ (il duale di V); si pone poi per definizione $(\bigwedge^0 V)^* = \mathbb{R}$ e $(\bigwedge^k V)^* = \{0\}$ quando $k < 0$.

Esempio. Se $V = \mathbb{R}$, la funzione $V^k \to \mathbb{R}$ data da $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ è multilineare (si faccia attenzione a non confondere la nozione di "multilineare" con quella di "funzione lineare di V^k in $\mathbb{R}$") ma non è una k-forma su V, tranne nel caso banale in cui $k = 1$.

Concentrandosi sul caso $V = \mathbb{R}^n$, come sono fatte le k-forme su $\mathbb{R}^n$? Intanto è chiaro che per $k > n$ si avrà $(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^* = \{0\}$: infatti in tal caso k vettori in $\mathbb{R}^n$ sono sempre linearmente dipendenti. Visto che i casi $k = 0$ e $k = 1$ sono già stati chiariti in precedenza, restano da capire i soli casi con $1 < k \leq n$. Un esempio, in cui si sfrutta la multilinearità

[68] George Gabriel Stokes (Skreen, 13 agosto 1819 - Cambridge, 1 febbraio 1903)

[69] A dire il vero, "alternante" vorrebbe dire che si annulla quando due dei suoi argomenti sono uguali; ma è facile verificare che, in presenza di multilinearità, questo è equivalente al fatto che si annulla anche quando calcolata su una k-upla di vettori linearmente dipendenti.

e alternanza dei determinanti, è il seguente: presi (in qualunque modo, anche ripetuti) k indici $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, definiamo la k-forma $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ [(70)] tramite

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}, \qquad (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} v_{1,i_1} & \cdots & v_{k,i_1} \\ v_{1,i_2} & \cdots & v_{k,i_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,i_k} & \cdots & v_{k,i_k} \end{pmatrix} .$$

In altre parole, nella matrice $n \times k$ fatta coi vettori-colonna $v_1, \dots, v_k$ si considera la matrice quadrata di ordine k ottenuta scegliendo nell'ordine le righe di indici $i_1, \dots, i_k$, e se ne calcola il determinante. Ora, è chiaro che tale k-forma è nulla se ci sono due indici uguali, e che essa cambia segno quando due di essi vengono invertiti: pertanto, usando la notazione dei multiindici (ordinati) $I = (i_1, \cdots, i_k)$ in cui $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, ci si può limitare alle sole k-forme $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, che sono $\binom{n}{k}$. Anzi:

Proposizione 3.3.1. *Le k-forme dx_I, al variare del multiindice I, costituiscono una base per $(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^*$, che avrà perciò dimensione $\binom{n}{k}$:*

$$(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^* = \left\{ \sum\nolimits_{|I|=k} \lambda_I \, dx_I : \lambda_I \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dimostrazione. Se $\sum_{|I|=k} \lambda_I \, dx_I \equiv 0$ allora, preso un qualsiasi multiindice $J = (j_1, \cdots, j_k)$, si ha $0 = (\sum_{|I|=k} \lambda_I \, dx_I)(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \sum_{|I|=k} \lambda_I \, dx_I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \lambda_J$. Dunque le k-forme dx_I sono linearmente indipendenti. D'altra parte, multilinearità e alternanza implicano che una qualsiasi k-forma $\phi \in (\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^*$ è determinata dai suoi valori sulle k-uple del tipo $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ al variare del multiindice $I = (i_1, \cdots, i_k)$: dunque, se per ogni tale multiindice I si pone $\lambda_I := \phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ allora si ha $\phi = \sum_{|I|=k} \lambda_I \, dx_I$. In altre parole, le k-forme dx_I generano tutto $(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^*$. □

Ad esempio: le 1-forme linearmente indipendenti sono n, e sono $dx_1 = e_1^*$, ..., $dx_n = e_n^*$, in cui $e_j^* = \pi_j$ è il covettore che corrisponde al j-esimo vettore canonico e_j (ovvero, $e_j^*(v) = v_j$); e, a meno di scalari, c'è un'unica n-forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, che manda una n-upla $v_1, \dots, v_n$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ nel determinante della matrice quadrata in cui essi appaiono come vettori-colonna.

Costruiamo ora un prodotto per forme. Il *prodotto esterno*[(71)] di una k-forma ω e di una l-forma η è la $(k+l)$-forma $\omega \wedge \eta$ data da **Prodotto esterno**

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sign}(\sigma) \, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \, \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,l}} \operatorname{sign}(\sigma) \, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \, \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \ , \end{aligned}$$

[(70)] Se dovessimo restare pienamente coerenti alle notazioni usate finora per i differenziali di funzioni, secondo la quale si denota con e_j^* o con π_j il covettore di $(\mathbb{R}^n)^*$ duale di e_j (ovvero la funzione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che manda un vettore di $\mathbb{R}^n$ nella sua j-esima componente) e con dx_j il differenziale di tale funzione e non la funzione stessa (dunque dx_j è il campo di covettori costantemente uguale a π_j), anche qui dovremmo denotare la k-forma con $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$, o con $\pi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi_{i_k}$, riservando la notazione $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ per quando tra breve parleremo di campi di tali oggetti. Per semplicità scegliamo tuttavia di denotare fin da subito tale k-forma con $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, invitando gli studenti a non fare confusione con la notazione finora usata.

[(71)] in inglese *wedge product*.

ove $\mathfrak{S}_{k+l}$ è il gruppo delle permutazioni di $k+l$ elementi, mentre $\mathfrak{S}_{k,l}$ è il suo sottogruppo fatto da quelle permutazioni tali che $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(l)$.[(72)]

Proposizione 3.3.2. *Il prodotto esterno è:*

- *bilineare* (cioè $(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) \wedge \eta = \alpha_1\, \omega_1 \wedge \eta + \alpha_2\, \omega_2 \wedge \eta$ per $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, e idem per η)*;*
- *associativo* (cioè $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$, dunque si scrive $\omega \wedge \eta \wedge \theta$ senza equivoci)*;*
- *commutativo a meno del segno* (cioè $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl}\, \omega \wedge \eta$).

Inoltre il prodotto esterno delle 1*-forme* dx_{i_1} *, ...,* dx_{i_k} *è proprio la* k*-forma* $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ *, dunque non c'è alcun conflitto di notazione.*

Dimostrazione. La bilinearità è ovvia dalla definizione. • Per l'associatività, sfruttando la bilinearità basta dimostrare che, dati due multiindici $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_l)$ e detto $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ (il multiindice ottenuto saldando I e J, non necessariamente a indici ordinati) si ha $dx_I \wedge dx_J = dx_{IJ}$; a sua volta, per questo sarà sufficiente verificare che i due membri danno lo stesso risultato quando calcolati in una qualsiasi $(k+\ell)$-upla di vettori canonici $(e_{h_1}, \dots, e_{h_{k+\ell}})$. Sia $H = (h_1, \dots, h_{k+\ell})$ il relativo multiindice: distinguiamo alcuni casi. Se H ha un indice ripetuto o se H contiene qualche indice al di fuori di IJ, è facile rendersi conto che ambo i membri danno zero: dunque l'unico caso interessante è quello in cui H è una permutazione di IJ e non vi sono indici ripetuti. Se H è proprio IJ, a destra risulta 1, mentre a sinistra nella somma $\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sign}(\sigma)\, dx_I(e_{h_{\sigma(1)}}, \dots, e_{h_{\sigma(k)}})\, dx_J(e_{h_{\sigma(k+1)}}, \dots, e_{h_{\sigma(k+\ell)}})$ sopravvivono solo i termini in cui $\sigma = \tau\varepsilon$ in cui $\tau \in \mathfrak{S}_k$ permuta $\{1, \dots, k\}$ e $\varepsilon \in \mathfrak{S}_\ell$ permuta $\{k+1, \dots, k+\ell\}$, ottenendo dunque $\frac{1}{k!l!} \sum_{(\tau,\eta) \in \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l} \operatorname{sign}(\tau) \operatorname{sign}(\varepsilon)\, dx_I(e_{h_{\tau(1)}}, \dots, e_{h_{\tau(k)}})\, dx_J(e_{h_{\varepsilon(k+1)}}, \dots, e_{h_{\varepsilon(k+\ell)}}) = \big(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sign}(\tau)\, dx_I(e_{h_{\tau(1)}}, \dots, e_{h_{\tau(k)}})\big)\big(\frac{1}{l!} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{S}_\ell} \operatorname{sign}(\varepsilon)\, dx_J(e_{h_{\varepsilon(k+1)}}, \dots, e_{h_{\varepsilon(k+\ell)}})\big) = 1 \cdot 1 = 1$; se invece H si ottiene da IJ tramite una permutazione $\eta \in \mathfrak{S}_{k+l}$, ragionamenti simili mostrano che ambo i membri sono uguali a $\operatorname{sign}(\eta)$. • Per la commutatività a meno del segno, ci si può sempre ridurre al caso di $\omega = dx_I$ e $\eta = dx_J$ per due multiindici $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_l)$; ma allora, stante l'associatività dimostrata poco fa, tutto si riduce a ricordare che per uno scambio semplice si ha $dx_i\, dx_j = -dx_j\, dx_i$, e notare che per scambiare tra loro dx_I e dx_J ne servono per l'appunto kl. □

D'ora in poi, per brevità ometteremo spesso il segno di prodotto esterno: ad esempio, scrivendo $dx_1\, dx_2\, dx_3$ intenderemo $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Esempio. In $\mathbb{R}^3$, date la 1-forma $\omega = 2\,dx - dy + 3\,dz$ e la 2-forma $\eta = 2\,dx\,dy - dx\,dz$ si ottiene la 3-forma $\omega \wedge \eta = 4\,dx\,dx\,dy - 2\,dx\,dx\,dz - 2\,dy\,dx\,dy + dy\,dx\,dz + 6\,dz\,dx\,dy - 3\,dz\,dx\,dz$. Ma $dx\,dx\,dy = dx\,dx\,dz = dy\,dx\,dy = dz\,dx\,dz = 0$ (per alternanza, visto che ci sono indici ripetuti), $dy\,dx\,dz = -dx\,dy\,dz$ e $6\,dz\,dx\,dy = -6\,dx\,dz\,dy = 6\,dx\,dy\,dz$ (sempre per alternanza, ogni trasposizione comporta un cambio di segno): dunque in definitiva $\omega \wedge \eta = 5\,dx\,dy\,dz$.

Finora abbiamo parlato di k-forme su spazi vettoriali, ritrovando con le 1-forme i covettori. È allora naturale pensare a una generalizzazione della nozione di forma differenziale lineare (ovvero, un campo di 1-forme), passando a esaminare i campi di k-forme.

[(72)] Il gruppo $\mathfrak{S}_{k+l}$ delle permutazioni di $k+l$ elementi ha ordine $(k+l)!$, mentre il suo sottogruppo $\mathfrak{S}_{k,l}$ ha ordine $\frac{(k+l)!}{k!l!} = \binom{k+l}{k}$. $\mathfrak{S}_{k,l}$ è detto il sottogruppo delle "mischiate di tipo (k,l)" (in inglese (k,l)*-shuffles*). Pensando ai $k+l$ elementi da permutare come a delle carte da gioco, una permutazione di $\mathfrak{S}_{k,l}$ è una di quelle in cui si prendono k carte e le si infila nelle restanti l durante una mischiata: dopo quell'azione l'ordine relativo di quelle k carte viene preservato, così come quello delle restanti l.

Dato un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, una *k-forma differenziale su U* è l'assegnazione liscia di una k-forma per ogni punto di U, ovvero una funzione $\omega : U \to (\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^*$ di classe $\mathcal{C}^\infty$.[73] Una k-forma ω su U può dunque essere scritta in uno e un solo modo come

k-forma differenziale

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I(x)\, dx_I\,,$$

ove $f_I : U \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ per ogni multiindice $I = (i_1, \dots, i_k)$. Indicheremo con $\Omega^k(U)$ l'insieme delle k-forme differenziali (o, per brevità, ancora una volta "k-forme") su U, che è in modo naturale un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Notiamo allora i seguenti casi particolari, in cui le identificazioni con i campi vettoriali sono fatte usando il prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^n$ come già spiegato.

- $\Omega^0(U)$ è semplicemente $\mathcal{C}^\infty(U)$, spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ di U in $\mathbb{R}$;
- $\Omega^1(U)$ è il già noto spazio delle forme differenziali lineari; una 1-forma

  $$\omega = f_1(x)\, dx_1 + \cdots + f_n(x)\, dx_n$$

  corrisponde al campo vettoriale $F : U \to \mathbb{R}^n$ dato da $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
- $\Omega^{n-1}(U)$ sono le $(n-1)$-forme, che possono essere scritte come

  $$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} g_j(x)\, dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n$$

  (il simbolo $\widehat{\dots}$ significa che il termine corrispondente viene rimosso); ω verrà fatta corrispondere al campo vettoriale $G : U \to \mathbb{R}^n$ dato da $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$.[74]
- $\Omega^n(U)$ sono le n-forme del tipo $\omega = h(x)\, dx_1 \cdots dx_n$, data dalla funzione $h(x)$. In particolare, se $h(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$ (dunque, se U è connesso, poiché h è continua essa avrà segno costante su U) si dirà che ω è una *forma volume* su U.

Forma volume

Proposizione 3.3.3. *Orientare $\mathbb{R}^n$ equivale a scegliere una forma volume su esso.*

Dimostrazione. Nella famiglia delle forme volume di $\mathbb{R}^n$, la relazione secondo cui $\omega \sim \theta$ se e solo se $\theta = f\omega$ con $f > 0$ su $\mathbb{R}^n$ è un'equivalenza, che divide la famiglia in due classi, corrispondenti rispettivamente alle orientazioni di $\mathbb{R}^n$ tramite le basi ordinate. L'orientazione di $\mathbb{R}^n$ data dalla forma volume "canonica" $dx_1 \cdots dx_n$ corrisponde a quella canonica data dalla base ordinata canonica. □

---

[73] ove si identifica $(\bigwedge^k \mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

[74] Tecnicamente, a un campo vettoriale $G = (g_1, \dots, g_n)$ su $\mathbb{R}^n$ (pensato dotato del prodotto scalare euclideo) si associa la $(n-1)$-forma ω_G ottenuta contraendo G con la n-forma canonica $dx_1 \cdots dx_n$, detta anche forma volume euclidea: questo significa che $\omega_G(v_1, \dots, v_{n-1}) := (dx_1 \cdots dx_n)(G, v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} g_1 & v_{1,1} & \cdots & v_{n-1,1} \\ g_2 & v_{1,2} & \cdots & v_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & v_{1,n} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$. Infatti, scritta $\omega_G = \sum_{i=1}^n \omega_i\, dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$, si ottiene $\omega_j = \omega_G(e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n) = (dx_1 \cdots dx_n)(G, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n) = (-1)^{j-1} g_j$. Tuttavia, al di là di questa spiegazione formale, la naturalità di questa corrispondenza un po' obliqua apparirà ben presto chiara, quando descriveremo la situazione in $\mathbb{R}^3$.

- Per esempio, in $\mathbb{R}^2$ le suddette identificazioni fanno corrispondere
  - alla 1-forma $f\,dx + g\,dy$ il campo vettoriale (f, g);
  - alla 2-forma $u\,dx\,dy$ la funzione u.

  E in $\mathbb{R}^3$ fanno corrispondere:
  - alla 1-forma $f\,dx + g\,dy + h\,dz$ il campo vettoriale (f, g, h);
  - alla 2-forma $u\,dy\,dz - v\,dx\,dz + w\,dx\,dy$ il campo vettoriale (u, v, w);
  - alla 3-forma $r\,dx\,dy\,dz$ la funzione r.
- Al di là di queste identificazioni tra forme e campi dovuta alla struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$, va comunque posta attenzione alla diversa natura degli oggetti: ad esempio, le conseguenze di un cambio di coordinate su forme e su campi sono diverse, come vedremo presto parlando di *pull-back*.

Il prodotto esterno di forme differenziali viene definito punto per punto: se $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\eta \in \Omega^l(U)$ si definisce $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(U)$ ponendo $(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x$ per ogni $x \in U$.

Introduciamo ora il *differenziale* d, che manda una k-forma ω in una $(k+1)$-forma $d\omega$: ovvero una funzione (in realtà morfismo lineare) $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$. **Differenziale**

- Iniziamo da $k = 0$: se $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ (ovvero una $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$), si definisce la 1-forma df come il già noto differenziale di f:

$$df \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx_j \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,dx_n\ .$$

- Nel caso generale, se $\omega = \sum_{|I|=k} f_I\,dx_I \in \Omega^k(U)$ si pone

$$d\omega \;=\; \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I \;=\; \sum_{|I|=k}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\,dx_j \right) \wedge dx_I \quad \in \Omega^{k+1}(U)\,.$$

Proposizione 3.3.4. *Il differenziale $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ha le seguenti proprietà.*

(1) (Regola di Leibniz) *Date $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\eta \in \Omega^l(U)$, vale*

$$d(\omega \wedge \eta) \;=\; d\omega \wedge \eta \;+\; (-1)^k\,\omega \wedge d\eta\ .$$

(2) (Proprietà di complesso) *Vale $d \circ d = 0$: ovvero $d(d\omega) = 0$.*

Dimostrazione. (1) Per linearità possiamo supporre che $\omega = f_I\,dx_I$ e $\eta = g_J\,dx_J$ per due soli multiindici $I = (i_1, \ldots, i_k)$ e $J = (j_1, \ldots, j_l)$: vale allora $d(\omega \wedge \eta) = d(f_I g_J\,dx_I\,dx_J) = (\sum_j \frac{\partial (f_I g_J)}{\partial x_j}\,dx_j)\,dx_I\,dx_J$ e $d\omega \wedge \eta + (-1)^k\,\omega \wedge d\eta = (\sum_j \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\,dx_j) dx_I\,g_J\,dx_J + (-1)^k f_I\,dx_I (\sum_j \frac{\partial g_J}{\partial x_j}\,dx_j)\,dx_J = (\sum_j \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\,g_J\,dx_j) dx_I\,dx_J + (-1)^k (-1)^k (\sum_j f_I \frac{\partial g_J}{\partial x_j}\,dx_j)\,dx_I\,dx_J = \big(\sum_j (\frac{\partial f_I}{\partial x_j}\,g_J + f_I \frac{\partial g_J}{\partial x_j})\,dx_j\big) dx_I\,dx_J = (\sum_j \frac{\partial (f_I g_J)}{\partial x_j}\,dx_j)\,dx_I\,dx_J$, dunque i due membri sono uguali. (2) Anche qui, per linearità possiamo supporre che $\omega = f_I\,dx_I$ per un

solo multiindice $I = (i_1, \dots, i_k)$: allora si ottiene $d(d\omega) = d((\sum_j \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\, dx_j) dx_I) = \sum_j d(\frac{\partial f_I}{\partial x_j})\, dx_j\, dx_I = \sum_j (\sum_i \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i)\, dx_j\, dx_I = (\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j)\, dx_I$, e l'ultima somma in parentesi è nulla grazie al teorema di Schwarz (ricordare che $dx_i\, dx_i = 0$, e che $dx_j\, dx_i = -dx_i\, dx_j$ quando $i \neq j$). □

Abbiamo dunque ottenuto una sequenza di funzioni lineari tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$$0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^1(U) \;\xrightarrow{d}\quad \cdots \quad\xrightarrow{d}\; \Omega^{n-1}(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^n(U) \;\to\; 0$$

(ove si è scritto direttamente $\mathcal{C}^\infty(U)$ al posto di $\Omega^0(U)$), detta *complesso di de Rham* in U, nella quale ad ogni passo si ha $d \circ d = 0$.

Complesso di de Rham

Vediamo ora a cosa corrisponde la costruzione appena fatta nel caso particolare di $\mathbb{R}^3$.

- Data una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$, il campo vettoriale che corrisponde al differenziale $df \in \Omega^1(U)$ è il *gradiente* $\operatorname{grad} f$ (denotato anche ∇f).
- Data una 1-forma $\omega = f\, dx + g\, dy + h\, dz$ (cui corrisponde il campo vettoriale $F = (f, g, h)$) si calcola la 2-forma

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ &= (\tfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}\, dz)\, dx + (\tfrac{\partial g}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial g}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial g}{\partial z}\, dz)\, dy + \\ &\qquad + (\tfrac{\partial h}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial h}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial h}{\partial z}\, dz)\, dz \\ &= (\tfrac{\partial h}{\partial y} - \tfrac{\partial g}{\partial z})\, dy\, dz - (\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial h}{\partial x})\, dx\, dz + (\tfrac{\partial g}{\partial x} - \tfrac{\partial f}{\partial y})\, dx\, dy\ , \end{aligned}$$

  cui corrisponde, come campo, il *rotore* $\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_x & \frac{\partial}{\partial x} & f \\ e_y & \frac{\partial}{\partial y} & g \\ e_z & \frac{\partial}{\partial z} & h \end{vmatrix}$ (scritto anche $\nabla \times F$).
- Data una 2-forma $\omega = u\, dy\, dz - v\, dx\, dz + w\, dx\, dy$ (cui corrisponde il campo vettoriale $G = (u, v, w)$), si calcola la 3-forma

$$\begin{aligned} d\omega &= du \wedge dy \wedge dz - dv \wedge dx \wedge dz + dw \wedge dx \wedge dy \\ &= (\tfrac{\partial u}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial u}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial u}{\partial z}\, dz)\, dy\, dz + (\tfrac{\partial v}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial v}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial v}{\partial z}\, dz)\, dx\, dz + \\ &\qquad + (\tfrac{\partial w}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial w}{\partial y}\, dy + \tfrac{\partial w}{\partial z}\, dz)\, dx\, dy \\ &= (\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial v}{\partial y} + \tfrac{\partial w}{\partial z})\, dx\, dy\, dz\ , \end{aligned}$$

  che è data dalla funzione *divergenza* $\operatorname{div} G = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ (scritta anche $\nabla \cdot G$).

Dunque il complesso di de Rham per $U \subset \mathbb{R}^3$

$$0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^1(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^2(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^3(U) \;\to\; 0\ ,$$

se tradotto nel linguaggio dei campi vettoriali (indichiamo con $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ lo spazio dei campi vettoriali $\mathcal{C}^\infty$ su U) diventa

$$0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{\text{grad}}\; \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \;\xrightarrow{\text{rot}}\; \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \;\xrightarrow{\text{div}}\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\to\; 0\ ,$$

e la condizione di complesso $d \circ d = 0$ si legge come $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ ("un gradiente è sempre irrotazionale") e $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ ("un rotore è sempre solenoidale"), come già mostrato nella Proposizione 3.2.2(a). Quanto abbiamo appena visto mostra dunque che queste classiche operazioni vettoriali (gradiente, rotore, divergenza) non sono altro che diverse espressioni dello stesso principio, e nel contempo dà una giustificazione operativa dell'identificazione un po' obliqua tra $(n-1)$-forme e campi vettoriali.

Nel discorso introduttivo abbiamo detto che lo scopo principale delle forme differenziali è di essere integrate; e se sono k-forme, il dominio su cui vanno integrate dovrà essere una varietà orientata di dimensione k. Iniziamo dalle n-forme, che andranno dunque integrate su aperti di $\mathbb{R}^n$: data $\omega = f\,dx_1 \dots dx_n \in \Omega^n(U)$, definiamo

Integrale di n-forma

$$\int_U \omega := \int_U f(x)\,d\lambda_n ,$$

ove l'integrale al secondo membro è quello di Lebesgue. Si tratta in effetti di un integrale orientato: se si cambia l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ ad esempio scambiando tra loro le prime due coordinate, si ha $\omega = f\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = (-f)\,dx_2\,dx_1 \dots dx_n$ e dunque l'integrale $\int_U \omega$ cambia segno.
Dovremmo ora parlare dell'integrale di k-forme con $k < n$: prima di poterlo fare dobbiamo però vedere come si comportano le forme differenziali per cambi di coordinate, ovvero diffeomorfismi; anzi, questo possiamo farlo più in generale per una qualsiasi mappa $\mathcal{C}^\infty$, ed è proprio qui che l'uso delle forme differenziali mostra tutto il suo vantaggio in termini di elasticità e naturalità rispetto a quello dei campi, per i quali ha senso parlare solo di trasformazione tramite diffeomorfismi.[(75)]

Sia $\omega = \sum_{|I|=k} f_I\,dx_I$ una k-forma su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $\phi : V \to U$ è una mappa $\mathcal{C}^\infty$ da un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$, scritta $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ definiamo il *pull-back* di ω su V come

Pull-back

[(75)] Questa affermazione, per essere illustrata adeguatamente, va spiegata nell'ambito generale delle varietà e usando il linguaggio dei fibrati: ne diamo qui un rapido accenno nel caso delle 1-forme, rimandando per maggiori approfondimenti a corsi e testi di geometria differenziale. Ricordiamo che se X è una varietà liscia (cioè $\mathcal{C}^\infty$, o perlomeno $\mathcal{C}^1$), il *fibrato tangente* a X è la "varietà degli spazi tangenti" $TX = \{(x, v) : x \in X\,,\ v \in T_xX\}$ con la sua proiezione naturale $\pi_X : TX \to X$ data da $\pi_X(x, v) = x$; e il *fibrato cotangente* a X è la "varietà degli spazi cotangenti", o "tangenti duali" $T^*X = \{(x, \phi) : x \in X\,,\ \phi \in (T_xX)^*\}$ con la sua proiezione naturale $\pi_X^* : T^*X \to X$ data da $\pi_X^*(x, \phi) = x$. In questo linguaggio, un campo vettoriale su X non è altro che una "sezione" di π_X, ovvero una funzione $F : X \to TX$ tale che $\pi_X \circ F = \mathrm{id}_X$ (in altre parole, F assegna a ogni $x \in X$ un certo vettore tangente $v = F(x) \in T_xX$), mentre una forma differenziale (lineare) su X non è altro che una "sezione" di π_X^*, ovvero una funzione $\omega : X \to T^*X$ tale che $\pi_X^* \circ \omega = \mathrm{id}_X$ (in altre parole, ω assegna a ogni $x \in X$ un certo covettore tangente $\phi = \omega(x) \in (T_xX)^*$). Ora, date due varietà liscie X e Y e una mappa liscia $f : X \to Y$, sappiamo che da un lato resta definita nella stessa direzione la mappa tangente (o differenziale) $df : TX \to TY$, ovvero un morfismo di spazi vettoriali $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ per ogni $x \in X$; e dall'altro in direzione inversa la mappa cotangente (la trasposta del differenziale) $df^t : T^*Y \to T^*X$, ovvero $df_x^t : T^*_{f(x)}Y \to T^*_xX$ per ogni $x \in X$. Pertanto, data una forma differenziale ω su Y (cioè $\omega : Y \to T^*Y$) si può definire il suo *pull-back* $f^*\omega : X \to T^*X$ in modo naturale tramite composizione, ponendo $f^*\omega := df^t \circ \omega \circ f$ (e ovviamente questa definizione naturale coinciderà, anche se non lo dimostriamo, con la definizione di pull-back che stiamo dando in queste pagine); mentre, dato un campo vettoriale $F : Y \to TY$, questo è possibile se e solo se la mappa tangente $df : TX \to TY$ può essere invertita per poter andare da TY a TX, ovvero se e solo se f è un diffeomorfismo.

la seguente k-forma su V:

$$\phi^*\omega = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \phi)\, d\phi_I\,,$$

ove $d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k}$ e ciascun $d\phi_{i_j}$ è l'usuale differenziale di funzione.

Proposizione 3.3.5. *Il pull-back* $\phi^* : \Omega^k(U) \to \Omega^k(V)$ *ha le seguenti proprietà.*

(1) (Compatibilità col differenziale e col prodotto esterno) *Vale*

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega) \qquad e \qquad \phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)\ .$$

(2) (Funtorialità) *Se* $\psi : W \to V$ *è un'altra mappa liscia, vale* $(\phi \circ \psi)^*(\omega) = \psi^*(\phi^*\omega)$.

Dimostrazione. Verifiche dirette (come quelle della Proposizione 3.3.4), che lasciamo per esercizio. □

Esempi. **(0)** Se ω è una 0-forma (ovvero una funzione liscia $f : U \to \mathbb{R}$), il pull-back è semplicemente la funzione composta $f \circ \phi : V \to \mathbb{R}$. **(1)** Se $m = 1$ (ovvero se $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ è una curva parametrica), data una k-forma $\omega = \sum_{|I|=k} f_I\, dx_I$ su U si ha $\phi^*\omega = 0$ se $k > 1$, e se $\omega = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$ si ha $\phi^*\omega = \sum_{j=1}^n f_j(\phi(t))\, \phi_j'(t)\, dt$. **(2)** Se $m = n$, V è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenuto in U e ϕ è la mappa di immersione di V in U, allora $\phi^*\omega$ non è altro che la restrizione di ω a V. Più in generale, se ϕ è una mappa $\mathcal{C}^\infty$ tra aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\omega = f\, dx_1 \dots dx_n$ è una n-forma su U, detta $y = (y_1, \dots, y_n)$ la variabile di V si ha $\phi^*\omega = (f \circ \phi)\, d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_n = f(\phi(y)) \det \mathrm{J}_\phi(y)\, dy_1 \dots dy_n$. **(3)** Se $m < n$ possiamo pensare a $\mathbb{R}^m$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa di immersione $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ data da $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Così, se V è un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenuto in U e ϕ è la mappa di immersione di V in U (le cui ultime $n-m$ componenti sono dunque nulle) allora $\phi^*\omega$ è ancora la restrizione di ω a V, ed in essa, scritta $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I\, dx_I$, spariscono tutti gli addendi che compongono ω contenenti qualche dx_j con $j > m$. Ad esempio, se $V = \mathbb{R}$ e $U = \mathbb{R}^2$ si ha $\phi^* dx_1 = dx_1$ e $\phi^* dx_2 = 0$. **(4)** Se $m > n$ possiamo pensare a $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, ovvero a $x \in \mathbb{R}^m$ come $x = (x', x'')$, con $x' \in \mathbb{R}^n$ e $x'' \in \mathbb{R}^{m-n}$. Se $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è la proiezione canonica $\phi(x', x'') = x'$ si ha $\phi^*\omega = \omega$, ove stavolta però ω è pensata come una forma "costante lungo le fibre di ϕ". Ad esempio, il pull-back tramite la proiezione canonica $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (data da $\phi(x, y, z) = (x, y)$) della funzione (cioè, della 0-forma) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ su $U = \mathbb{R}^2$ è la funzione $\phi^* f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ su $V = \mathbb{R}^3$ data da $(\phi^* f)(x, y, z) = f(x, y)$, che in effetti è costante rispetto a z (la variabile delle fibre di ϕ). **(5)** Sia $U = \mathbb{R}^3$, e consideriamo la 2-forma $\omega = (xz + y)\, dy\, dz - 3x\, dx\, dz + (2z^2 + y)\, dx\, dy$. • Se $V =]0, 1[$ e $\phi : V \to U$ è data da $\phi(t) = (t - 1, t^2, -e^t)$, già sappiamo che sarà $\phi^*\omega = 0$, perché una 2-forma su un aperto di $\mathbb{R}$ è per forza nulla: se vogliamo fare comunque il calcolo, si ottiene $\phi^*\omega = ((t-1)(-e^t) + t^2)\, d(t^2)\, d(-e^t) - 3(t-1)\, d(t-1)\, d(-e^t) + (2(-e^t)^2 + t^2)\, d(t-1)\, d(t^2) = (t^2 - e^t(t-1))\, 2t\, dt\, (-e^t)\, dt - 3(t-1)\, dt\, (-e^t)\, dt + (2e^{2t} + t^2)\, dt\, 2t\, dt = \big(-2te^t(t^2 - e^t(t-1)) + 3e^t(t-1) + 2t(2e^{2t} + t^2)\big)\, dt\, dt = 0$ (perché $dt \wedge dt = 0$). • Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\phi : V \to U$ è data da $\phi(u, v) = (1, u - v, u^2)$, si ha $\phi^*\omega = (1(u^2) + (u-v))\, d(u-v)\, d(u^2) - (3 \cdot 1)\, d(1)\, d(u^2) + (2(u^2)^2 + (u-v))\, d(1)\, d(u-v) = (u^2 + u - v)\, (du - dv)\, 2u\, du - 3 \cdot 0 \cdot 2u\, du + (2u^4 + u - v) \cdot 0 \cdot (du - dv) = 2u(u^2 + u - v)(du\, du - dv\, du) = 2u(u^2 + u - v)\, du\, dv$ (perché $du \wedge du = 0$ e $-dv \wedge du = du \wedge dv$).

Possiamo allora vedere il comportamento dell'integrale di n-forme per pull-back tramite cambi di variabile (diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$), che mostra ancora una volta la naturalità della costruzione: l'integrale viene preservato, a meno del segno nel caso in cui il diffeomorfismo inverta l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.3.6. *Dati due aperti $V, U \subset \mathbb{R}^n$, un diffeomorfismo $\phi : V \to U$ e una n-forma ω su U, vale*

$$\int_V \phi^*\omega = (\operatorname{sign}\phi) \int_U \omega \ .$$

Dimostrazione. Scritta $\omega = f\,dx_1 \dots dx_n$ e detta $y = (y_1, \dots, y_n)$ la variabile di V si ha $\int_V \phi^*\omega = \int_V f(\phi(y)) \det \mathsf{J}_\phi(y)\, dy_1 \dots dy_n = (\operatorname{sign}\phi) \int_V f(\phi(y)) |\det \mathsf{J}_\phi(y)|\, dy_1 \dots dy_n = (\operatorname{sign}\phi) \int_U \omega$, ove nell'ultima uguaglianza si è usato il teorema sul cambio di variabile nell'integrale di Lebesgue. □

Il pull-back ci permette però soprattutto di definire l'integrale di una m-forma su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ descritto da m parametri (dunque, in particolare, su una varietà parametrica di dimensione m). Dati una m-forma $\omega = \sum_{|I|=m} f_I\, dx_I$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e una mappa liscia (cioè $\mathcal{C}^\infty$) $\gamma : V \to U$ da un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$, definiamo

Integrale di forme su insiemi a parametri

$$\int_\gamma \omega \ := \ \int_V \gamma^*\omega \ . \tag{3.7}$$

Esempi. **(0)** Per $m = 0$ si ha $V = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, e una funzione $\gamma : V \to U$ è semplicemente un punto $x_0 := \gamma(0) \in U$: dunque, data una 0-forma $\omega \in \Omega^0(U)$ (ovvero una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$) si ha $\int_\gamma f = f(x_0)$. **(1)** Per $m = 1$ si ha una 1-forma $\omega = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$: dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una mappa liscia (dunque un cammino) $\gamma : I \to U$ si ha $\int_\gamma \omega = \int_I (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\, dt$, che è il già noto integrale di una forma differenziale lineare. In termini dell'associato campo vettoriale $F = (f_1, \dots, f_n)$ questo integrale si esprime come $\int_I F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, l'integrale di linea. **(2)** Sul caso $m = n - 1$ torneremo meglio più tardi; vediamo comunque un esempio concreto. Si abbia la 2-forma $\omega = (3xy^2 - z)\, dx\, dz$ su $U = \mathbb{R}^3$; posto $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1,\ v > 0\}$ e $\gamma : V \to U$ data da $\gamma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ (si noti che $\gamma(V) \subset U = \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie di paraboloide $z = x^2 + y^2$ contenuta nel semispazio $y > 0$), si ha $\int_\gamma \omega = \int_V (3uv^2 - u^2 - v^2)\, du\, d(u^2 + v^2) = \int_V (3uv^2 - u^2 - v^2)\, du\, (2u\, du + 2v\, dv) = \int_V 2v(3uv^2 - u^2 - v^2)\, du\, dv$, che in coordinate polari diventa $\int_0^\pi d\theta \int_0^1 2\rho \sin\theta (3\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta - \rho^2)\rho\, d\rho = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (6\rho^5 \cos\theta \sin^3\theta - 2\rho^4 \sin\theta)\, d\rho = \int_0^\pi (\rho^6 \cos\theta \sin^3\theta - \frac{2}{5}\rho^5 \sin\theta)]_0^1\, d\theta = \int_0^\pi (\cos\theta \sin^3\theta - \frac{2}{5}\sin\theta)\, d\theta = (\frac{1}{4}\sin^4\theta + \frac{2}{5}\cos\theta]_0^\pi = -\frac{4}{5}$.

È importante notare che l'integrale di una m-forma su un insieme a m parametri appena introdotto è invariante per riparametrizzazioni che rispettino l'orientazione di $\mathbb{R}^m$:

Proposizione 3.3.7. *Siano ω una m-forma su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma : V \to U$ una mappa liscia da un aperto $V \subset \mathbb{R}^m$. Se $\varphi : V' \to V$ è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^m$ che conserva l'orientazione, vale $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega$.*

Dimostrazione. Vale $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_{V'} (\gamma \circ \varphi)^*\omega = \int_{V'} \varphi^*(\gamma^*\omega) = \int_V \gamma^*\omega = \int_\gamma \omega$ (nella seconda uguaglianza si è usata la Proposizione 3.3.5, e nella terza la Proposizione 3.3.6). □

Il teorema di Stokes, nella sua formulazione generale che vedremo più tardi, afferma che se X è una varietà bordata orientata di dimensione n con bordo ∂X orientato in modo indotto, e ω è una $(n-1)$-forma su X a supporto compatto, si ha che $\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega$. Prima di poterlo affrontare in questa generalità dobbiamo attendere ancora un po'; tuttavia, arrivati a questo punto possiamo già enunciarne e provarne due versioni di base che ci saranno utile più avanti nel ridurre il caso generale. Nella prima scegliamo $X = \mathbb{R}^n$,

che ha bordo $\partial X = \varnothing$ e dunque ci aspettiamo che $\int_X d\omega = 0$; nella seconda è invece $X = \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ e dunque il bordo ∂X è l'iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, orientato con la base $(-1)^n(e_1, \dots, e_{n-1})$: nel linguaggio delle forme volume, detta $\phi : H \to \mathbb{H}^n$ la mappa $\phi(x') = (x', 0)$ che dà luogo all'iperpiano H come bordo di $\mathbb{H}^n$, vale $\phi^*(dx_1 \dots dx_{n-1}) = (-1)^n dx_1 \dots dx_{n-1}$.

Lemma 3.3.8. (Stokes, base I) *Data una $(n-1)$-forma ω a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$ (ovvero tutti i suoi coefficienti sono funzioni a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$), vale $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$.*

Dimostrazione. Scriviamo come al solito (per la convenzione che abbiamo adottato per le $(n-1)$-forme) $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n$, ove le funzioni coefficienti $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono a supporto compatto: si ha allora $d\omega = (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}) \, dx_1 \cdots dx_n$. Per provare il risultato ci proponiamo di mostrare che $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \cdots dx_n = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$: per semplicità di notazione controlliamolo per $j = n$, ma il ragionamento vale in generale. Per Fubini si ha $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_n \big) \, dx_1 \cdots dx_{n-1}$, che è nullo in quanto $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_n = 0$: infatti, essendo f_n a supporto compatto e grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo in una variabile, per $M > 0$ abbastanza grande tale che $[-M, M]$ contenga il supporto di f_n (dunque anche di $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$) in direzione x_n si ha $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_j = \int_{-M}^{M} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_n = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, M) - f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, -M) = 0 - 0 = 0$. □

Lemma 3.3.9. (Stokes, base II) *Data una $(n-1)$-forma ω a supporto compatto su $\mathbb{H}^n$ (ovvero tutti i suoi coefficienti sono funzioni la cui parte di supporto contenuta in $\mathbb{H}^n$ è compatta), vale $\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_\phi \omega$.*

Dimostrazione. Scriviamo ancora $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n$, ove le funzioni coefficienti $f_j : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ sono a supporto compatto in $\mathbb{H}^n$ (nel senso spiegato nell'enunciato), dunque $d\omega = (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}) \, dx_1 \cdots dx_n$. Per provare il risultato ci proponiamo di mostrare che (a) $\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_1 \cdots dx_n = \int_\phi \omega$, e che (b) $\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \cdots dx_n = 0$ per ogni $j < n$. (a) Per $j = n$, ragionando come nel caso I si ha $\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \, dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, dx_n \big) \, dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (0 - f_n(x', 0)) \, dx_1 \cdots dx_{n-1} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x', 0) \, dx_1 \cdots dx_{n-1}$; d'altra parte, essendo $\phi(x') = (x', 0)$ (e dunque $d\phi_n \equiv 0$) ricaviamo che vale $\int_\phi \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (-1)^{n-1} f_n(x', 0) \, d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_{n-1} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x', 0) \, (-1)^n \, dx_1 \cdots dx_{n-1} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x', 0) \, dx_1 \cdots dx_{n-1}$ (la penultima uguaglianza segue da quanto detto sull'orientazione indotta su H), come si voleva. (b) Prendiamo ora un qualsiasi $1 \leq j \leq n-1$: denotata con $\mathbb{H}^n_j$ la proiezione di $\mathbb{H}^n$ sul sottospazio $\langle e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n \rangle$ di $\mathbb{R}^n$ si ha $\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{H}^n_j} \big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j \big) \, dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n$, che è nullo perché $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j = 0$ per gli stessi argomenti del caso base I (Lemma 3.3.8). □

Passiamo ora alle varietà.

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una varietà bordata orientata di dimensione k col bordo ∂X (che è una varietà senza bordo di dimensione $k-1$) orientato in modo indotto, e sia $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ un atlante orientato per X: ricordiamo che ciò significa che gli U_λ sono degli aperti di X, e le $\varphi_\lambda : U_\lambda \xrightarrow{\sim} V_\lambda$ dei diffeomorfismi $\mathcal{C}^\infty$ su degli aperti V_λ del semipiano chiuso $\mathbb{H}^k$ tali che, ogniqualvolta $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, le mappe di transizione

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \xrightarrow{\sim} \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

sono diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{H}^k$ che preservano l'orientazione.

Forme differenziali su varietà

Una *k-forma differenziale* ω su X è una famiglia di k-forme differenziali $\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ su ciascun $V_\lambda \subset \mathbb{H}^k$ che siano compatibili tra loro nelle eventuali intersezioni tra carte: ovvero, tali che, ogniqualvolta $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, si abbia $\omega_\lambda = (\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})^* \omega_\mu$ su $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$.[(76)] Denotiamo con $\Omega^k(X)$ lo spazio vettoriale delle k-forme differenziali su X; le nozioni di prodotto esterno $\wedge$, differenziale d e pull-back ϕ^* (ove $\phi : Y \to X$ è una mappa $\mathcal{C}^\infty$ di varietà) si trasferiscono naturalmente al livello di varietà operando, tramite ciascuna carta, nei corrispondenti aperti di $\mathbb{R}^k$ (andrà verificato per esercizio che le necessarie compatibilità sono soddisfatte).

Esempio. Sulla circonferenza $\mathbb{S}^1$ si consideri l'atlante dato dalle carte $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\} \to]-\pi,\pi[$ e $\varphi_2 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\} \to]0,2\pi[$ ottenute invertendo localmente la mappa di avvolgimento $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ data da $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. La mappa di transizione è in questo caso $\Phi = \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1} :]-\pi,0[\cup]0,\pi[\xrightarrow{\sim}]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$ con $\Phi(t) = t + 2\pi$ (se $t \in]-\pi,0[$) e $\Phi(t) = t$ (se $t \in]0,\pi[$). Una forma differenziale sulla circonferenza sarà del tipo $h_1(t)\,dt$ su $]-\pi,\pi[$ e del tipo $h_2(t)\,dt$ su $]0,2\pi[$; imponendo che $\Phi^*(h_2(t)\,dt) = h_1(t)\,dt$ si ottiene che $h_2(t) = h_1(t)$ per $t \in]0,\pi[$, e $h_2(t) = h_1(t-2\pi)$ per $t \in]\pi,2\pi[$. Ciò significa in sostanza che h_1 e h_2 sono indotte entrambe da una stessa funzione periodica $h(t)$ su $\mathbb{R}$ di periodo 2π, e vale in effetti $f^*\omega = h(t)\,dt$.

Siamo ora in grado di definire l'*integrale di una k-forma su una varietà k-dimensionale orientata*: visto che abbiamo definito una forma differenziale su X come una famiglia di forme su ciascun aperto di $\mathbb{R}^k$ cui X è localmente diffeomorfa, la tentazione sarebbe di fare gli integrali (che già abbiamo definito) di ciascuna di queste forme sul relativo aperto, e poi di fare la somma di questi integrali. Tuttavia, come facilmente intuibile, se le carte si sovrappongono otterremmo in questo modo un risultato quasi certamente errato a causa della ripetizione dei contributi. Serve dunque un modo per "temperare" ciascuno di questi contributi nelle sovrapposizioni affinché il risultato finale sia corretto, e lo strumento naturale per farlo è quello delle partizioni dell'unità (vedi pag. 70).[(77)]

Siano dunque $X \subset \mathbb{R}^n$ una varietà (eventualmente bordata) orientata di dimensione k e $\omega = (\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una k-forma su X, nelle notazioni e nel senso appena spiegati. Consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_\lambda : X \to \mathbb{R} : \lambda \in \Lambda\}$ subordinata al ricoprimento dell'atlante (ovvero, ciascuna funzione ρ_λ ha il supporto tutto contenuto in U_λ): allora ciascuna funzione $\rho_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}$ avrà il supporto tutto contenuto in V_λ. La forma ω si dirà *integrabile su* X se la somma $\sum_{\lambda\in\Lambda} \int_{V_\lambda} |(\rho_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1})\,\omega_\lambda|$ converge, e in tal caso si porrà

Integrale di forme su varietà

$$\int_X \omega := \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_{V_\lambda} (\rho_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1})\,\omega_\lambda\,.$$

[(76)] Questa compatibilità va richiesta per cura del caso generale; tuttavia, come già detto, nella pratica si lavorerà spesso con una sola carta che copre "quasi tutta" la varietà X.

[(77)] Una definizione al contempo rigorosa e abbastanza comprensibile della situazione generale non può prescindere da questi ragionamenti: però va ribadito ancora una volta che in moltissimi casi concreti la varietà sarà coperta da una sola carta (eventualmente a meno di insiemi λ_k-trascurabili, tipo sottovarietà chiuse di X di dimensione inferiore) e allora, visto che ciò non provoca problemi nel calcolo degli integrali, si potrà lavorare con una sola carta evitando la noia delle sovrapposizioni di carte e conseguente necessità di usare partizioni dell'unità.

Nel frequente caso concreto in cui si lavora con una sola carta $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ (ove U è un aperto della varietà X tale che $X \setminus U$ è λ_k-trascurabile) la nostra ω è già a tutti gli effetti una forma su V e dunque si definirà semplicemente $\int_X \omega := \int_V \omega$.

Proposizione 3.3.10. *L'integrale $\int_X \omega$ non dipende ne' dalla scelta dall'atlante orientato ne' da quella della partizione dell'unità subordinata all'atlante.*

Dimostrazione. Siano $\{(U'_\mu, \varphi'_\mu) : \mu \in M\}$ un altro atlante di X analogamente orientato, e $\{\rho'_\mu : \mu \in M\}$ una partizione dell'unità ad esso subordinata: ricordando che $\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda = \sum_{\mu\in M} \rho'_\mu = 1$, che $(\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\lambda$ ha supporto in $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U'_\mu)$ (e analogamente $(\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\mu$ ha supporto in $\varphi'_\mu(U_\lambda \cap U'_\mu)$) e che $\operatorname{sign}(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}) = 1$ ogniqualvolta $U_\lambda \cap U'_\mu \neq \varnothing$, usando la Proposizione 3.3.6 si ottiene $\int_{V_\lambda} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\lambda = \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\lambda = \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U'_\mu)} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\lambda = \int_{\varphi'_\mu(U_\lambda \cap U'_\mu)} (\varphi_\lambda \circ {\varphi'_\mu}^{-1})^* (\rho_\lambda \chi_\mu \omega)_\lambda = \int_{\varphi'_\mu(U_\lambda \cap V_\mu)} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\mu = \int_{\varphi'_\mu(V_\mu)} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\mu = \int_{V'_\mu} \rho_\lambda \rho'_\mu \omega$, da cui $\sum_{\lambda\in\Lambda} \int_{V_\lambda} (\rho_\lambda \omega)_\lambda = \sum_{\lambda,\mu} \int_{V_\lambda} (\rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\lambda = \sum_{\lambda,\mu} (\int_{V'_\mu} \rho_\lambda \rho'_\mu \omega)_\mu = \sum_{\mu\in M} \int_{V'_\mu} (\rho'_\mu \omega)_\mu$. □

Sarebbe ora il caso di vedere cosa significa in concreto l'integrale appena introdotto perlomeno nei casi più maneggevoli, ovvero quelli con $k = 0,\ 1,\ n-1,\ n$; tuttavia, poiché siamo sul punto di poter enunciare e provare il teorema di Stokes, scegliamo di ritardare questa esemplificazione all'inizio del prossimo paragrafo, che sarà tutto dedicato al ricavare e studiare le importanti conseguenze di Stokes nei suddetti casi particolari. Torniamo dunque ancora per poco alla teoria generale.

In (3.7) avevamo definito, data una m-forma ω su un aperto U di $\mathbb{R}^n$, l'integrale di ω su un sottoinsieme a m parametri di U, definito dall'immagine di una mappa liscia $\gamma : V \to U$ con V aperto di $\mathbb{R}^m$, semplicemente usando il pull-back tramite ϕ. Ora che abbiamo definito l'integrale di una forma su una varietà possiamo generalizzare questa definizione: data una varietà X di dimensione n, una m-forma ω su X e una mappa liscia $\phi : Y \to X$ ove Y è una varietà *orientata* di dimensione m, se $\phi^*\omega$ è integrabile su Y possiamo definire

$$\int_\phi \omega \ := \ \int_Y \phi^* \omega \, .$$

In particolare Y potrebbe essere una m-sottovarietà orientata di X e $\phi : Y \to X$ la mappa d'immersione, così che $\phi^*\omega$ rappresenta semplicemente la restrizione della forma ω a Y. Ad esempio —ed è il caso che più ci interessa in vista dell'enunciato ormai imminente del teorema di Stokes— se X è una varietà bordata orientata di dimensione k allora il suo bordo ∂X è una varietà (senza bordo) di dimensione $k-1$, che penseremo munita dell'orientazione indotta: denotata con $\iota : \partial X \hookrightarrow X$ la mappa d'immersione, data una $(k-1)$-forma ω su X porremo $\int_{\partial X} \omega \ := \ \int_\iota \omega \ = \ \int_{\partial X} \iota^* \omega \, .$

Teorema 3.3.11. (Stokes) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ una varietà bordata orientata $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione k, U un aperto di X, $\partial U = U \cap \partial X$. Allora per ogni $(k-1)$-forma ω a supporto compatto su U (ovvero tutti i suoi coefficienti sono funzioni la cui parte di supporto contenuta in U è compatta) vale*

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega \ .$$

Dimostrazione. Sia $\{\varphi_\lambda : U_\lambda \xrightarrow{\sim} V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un atlante di X, ove i V_λ sono aperti di $\mathbb{R}^k$ che (a meno di aumentare il numero delle carte, ricoprendone il dominio con sottoinsiemi aperti diffeomorfi a palle aperte di $\mathbb{R}^k$ del tipo $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < r\}$ o, nel caso di punti di bordo, a semipalle aperte contenenti l'iperpiano diametrale, del tipo $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < r\,,\ x_k \geq 0\}$) possiamo fin da subito supporre siano tutti diffeomorfi allo stesso $\mathbb{R}^k$ o al semispazio chiuso $\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$. Scriviamo $\omega = \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda\omega$, ove $\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è una partizione dell'unità subordinata all'atlante: è importante notare che in realtà gli addendi significativi nella somma sono in numero finito perché, essendo la partizione dell'unità localmente finita, solo un numero finito di ρ_λ ha il dominio U_λ che riesce a intersecare non banalmente $\mathrm{supp}(\omega)\cap U$, che per ipotesi è compatto. Vale dunque $\int_U d\omega = \int_U d(\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda\omega) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_U d(\rho_\lambda\omega) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_{U_\lambda} d(\rho_\lambda\omega) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_{V_\lambda} d(\rho_\lambda\omega)_\lambda$ (abbiamo usato il fatto che la somma è finita e dunque non ci sono problema nello scambiarla con l'integrale, il fatto che d è lineare e il fatto che $\rho_\lambda\omega$ ha il supporto contenuto in U_λ), dunque il teorema sarebbe dimostrato se riuscissimo a dimostrarlo per ciascuno degli addendi. Ma essendo i V_λ diffeomorfi a $\mathbb{R}^k$ o a $\mathbb{H}^k$, questo è quanto abbiamo dimostrato proprio nelle versioni base I e II di Stokes (Lemmi 3.3.8 e 3.3.9). □

A questo punto, quello che ci resta da fare è capire cosa dice il teorema di Stokes nei casi particolari di nostro interesse.

Iniziamo vedendo qual è il significato concreto dell'integrale di k-forme su varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ nei casi $k = 0,\ 1,\ n-1,\ n$, con particolare riguardo ai casi $n = 2,\ 3$.

- *Integrale di* 0*-forme.* Una 0-forma su un aperto W di $\mathbb{R}^n$ è una funzione liscia $f : W \to \mathbb{R}$. Una varietà 0-dimensionale in W è una famiglia discreta di suoi punti $T = \{x_\iota : \iota \in I\}$ (connessa solo se c'è un solo punto), e si orienta assegnando a ciascun punto x_ι un segno $\sigma_\iota = \mp 1$. Dire che f ha supporto compatto in T significa che il supporto di f contiene solo un numero finito di punti di T: se essi sono $x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_r}$, l'integrale è $\int_T f = \sum_{j=1}^r \sigma_{\iota_j} f(x_{\iota_j})$ (la somma dei valori di f su tali punti, ciascun valore contato col segno che compete al relativo punto).

- *Integrale di* 1*-forme.* Una 1-forma su un aperto W di $\mathbb{R}^n$ è del tipo $\omega = f_1(x)\,dx_1 + \cdots + f_n(x)\,dx_n$, ove i coefficienti $f_j : W \to \mathbb{R}$ sono funzioni lisce: ricordiamo che la forma ω è associata al campo vettoriale $F : W \to \mathbb{R}^n$ dato da $F = (f_1, \ldots, f_n)$. Come già visto, data una curva derivabile $\gamma : [a,b] \to W$ si ha $\int_\gamma \omega = \int_a^b f_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,dt = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$, che è l'integrale curvilineo $\int_\gamma F \cdot dx$. Aggiungendo la condizione che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ (il che rende γ una varietà 1-dimensionale orientata in W, perlomeno localmente vicino a ciascun valore del parametro) possiamo scrivere $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\,v(t)$, ove $v(t)$ è il versore tangente alla curva in $\gamma(t)$ nell'orientazione data da γ: così l'ultimo integrale diventa anche $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot v(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt$ che, detto $\Gamma = \gamma([a,b])$, è l'integrale al differenziale d'arco $\int_\Gamma (F \cdot v)\,d\lambda_\Gamma$.

- *Integrale di* $(n-1)$*-forme.* Un po' più delicata è la questione delle $(n-1)$-forme in $\mathbb{R}^n$, da integrare dunque su ipersuperfici di $\mathbb{R}^n$ (a noi interesserà soprattutto il caso di $n = 3$, ovvero quello delle 2-forme da integrare su superfici di $\mathbb{R}^3$). Come detto,

una $(n-1)$-forma su un aperto W di $\mathbb{R}^n$ può essere scritta come

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}g_j(x)\,dx_1\cdots\widehat{dx_j}\cdots dx_n \\ &= g_1(x)\,dx_2\,dx_3\cdots dx_n - g_2(x)\,dx_1\,dx_3\cdots dx_n + \cdots + (-1)^{n-1}g_n(x)\,dx_1\cdots dx_{n-1}\end{aligned}$$

(il simbolo $\widehat{\ldots}$ significa che il termine corrispondente viene rimosso), e viene fatta corrispondere al campo vettoriale $G : W \to \mathbb{R}^n$ dato da $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$.

Proposizione 3.3.12. *Se X è un'ipersuperficie orientata in W, l'integrale di ω su X è pari al flusso di G attraverso S:*

$$\int_X \omega \;=\; \Phi_X(G)\,. \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Supponiamo che X sia parametrizzata come varietà orientata da $\phi : V \to W$, ove V è aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$ con variabili $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})$: con questo si intende che $(\frac{\partial\phi}{\partial v_1}(v), \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial v_{n-1}}(v))$ è una base positiva per lo spazio tangente T_xX a X in $x = \phi(v)$. Si ha allora

$$\int_X \omega \;=\; \int_V \phi^*\omega \;=\; \int_V \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}g_j(\phi(v))\,d\phi_1\cdots\widehat{d\phi_j}\cdots d\phi_n\ .$$

Dobbiamo ora chiarire cosa significa l'ultimo integrale. Sviluppando i differenziali e facendo i conti si ottiene $d\phi_1\cdots\widehat{d\phi_j}\cdots d\phi_n = \det \mathsf{J}_{\phi,\widehat{j}}(v)\ dv_1\cdots dv_{n-1}$, ove $\mathsf{J}_{\phi,\widehat{j}}$ è la matrice jacobiana di ϕ privata della j-esima riga: ricaviamo dunque

$$\int_X \omega \;=\; \int_V \det\bigl(G(\phi(v)), \mathsf{J}_\phi(v)\bigr)\ dv_1\cdots dv_{n-1}\,, \tag{3.9}$$

ove $\bigl(G(\phi(v)), \mathsf{J}_\phi(v)\bigr)$ è la matrice $n\times n$ la cui prima colonna è data dalle componenti di G (calcolate in $x = \phi(v)$) e le altre $n-1$ dalle derivate parziali $\frac{\partial\phi}{\partial v_j}(v)$. Ma questa è l'espressione parametrica del flusso di G attraverso X (vedi (3.1)). □

- *Integrale di n-forme.* Una n-forma su un aperto W di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come $\omega = f(x)\,dx_1\cdots dx_n$, ove $f : W \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia: data una varietà n-dimensionale in W, ovvero un aperto A di $\mathbb{R}^n$ contenuto in W, si ha semplicemente $\int_A \omega = \int_A f(x)\,d\lambda_n$.

Siamo ora in grado di vedere che nei casi particolari di maggior interesse il teorema di Stokes ci ridà i risultati classici di integrazione vettoriale visti in precedenza.

- *Teorema Fondamentale del Calcolo* (caso $k = 0$). Sia $f : W \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto W di $\mathbb{R}^n$: alla 1-forma df è allora associato il campo vettoriale ∇f (gradiente di f). Se $\gamma : [a,b] \to W$ è una curva liscia regolare in W (cioè tale che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t), il supporto $\Gamma = \gamma([a,b])$ è una varietà bordata 1-dimensionale in W, e il suo bordo $\partial\Gamma = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$ è un insieme discreto (cioè, una 0-varietà) orientata assegnando i segni $+1$ all'estremo finale $\gamma(b)$ e -1 all'estremo

iniziale $\gamma(a)$. Grazie a Stokes otteniamo dunque $\int_\Gamma df = \int_{\partial\Gamma} f = (+1)f(\gamma(b)) + (-1)f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, mentre d'altra parte abbiamo detto prima che $\int_\Gamma df = \int_\gamma \nabla f \cdot dx$. Riotteniamo dunque il Teorema Fondamentale del Calcolo nella sua forma generalizzata:

$$\int_\gamma \nabla f \cdot dx \;=\; f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

- *Teorema della divergenza* (caso $k = n-1$). Sia W un aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $A \subset W$ un aperto tale che $\overline{A}$ sia varietà bordata (ovvero, il bordo ∂A è un'ipersuperficie liscia). Una $(n-1)$-forma $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} g_j(x)\, dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n$ è associata al campo vettoriale $G = (g_1, \ldots, g_n)$, e il suo differenziale è $d\omega = \big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\big)\, dx_1 \cdots dx_n = \big(\nabla \cdot G\big)\, dx_1 \cdots dx_n$ ove $\nabla \cdot G = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ è la divergenza del campo G. Supponendo che la parte di supporto di ω contenuta in $\overline{A}$ sia compatta, grazie alla Proposizione 3.3.12 il teorema di Stokes ridà il teorema di Gauss (Teorema 3.2.4):

$$\Phi_{\partial A}(G) \;=\; \int_A (\nabla \cdot G)\, d\lambda_n\,.$$

- *Formula di Kelvin-Stokes* (caso $n = 3$, $k = 1$). Sia ora W un aperto di $\mathbb{R}^3$, e si consideri una superficie bordata orientata compatta S contenuta in W il cui bordo ∂S sia un circuito orientato in modo indotto da S. Come detto, una 1-forma $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ è associata al campo $F = (f, g, h)$, e il suo differenziale $d\omega = (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})\, dy\, dz - (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x})\, dx\, dz + (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\, dx\, dy$ è associato al campo rotore $\nabla \times F = (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$: sempre grazie alla Proposizione 3.3.12 il teorema di Stokes stavolta ridà la formula di Kelvin-Stokes (Teorema 3.2.7):

$$\oint_{\partial S} F \cdot dx \;=\; \Phi_S(\nabla \times F)\,.$$

Domande e risposte

01. D. *Le mie domande/chiarificazioni riguardano la definizione di diffeomorfismo e omeomorfismo e il teorema delle immersioni/sommersioni.*

1. *Da ciò che ho capito mi sembra che "diffeomorfismo" implichi "omeomorfismo", quindi ad esempio per una varietà il fatto che l'intorno di ogni suo punto sia diffeomorfo ad un aperto del dominio implica in particolare che sia omeomorfo. (Citando le sue dispense lei definisce un diffeomorfismo tra insiemi qualunque come un omeomorfismo differenziabile k-volte con continuità). Perciò, se tutto ciò è vero, in pratica quando lei per dimostrare che la curva-otto oppure l'insieme dei due assi cartesiani non sono delle varietà di dimensione* 1*, usa solo il fatto che l'intorno di* $(0,0)$ *e l'intorno di* 0 *non sono omeomorfi e di conseguenza non diffeomorfi.*

2. *Mi pare di capire da questi due teoremi che in pratica una f sommersiva/immersiva in x_0 sia una restrizione ad un particolare aperto di un diffeomorfismo locale a questo punto su ogni punto dell' aperto centrato in x_0. Cioè, ad esempio, che f immersiva in x_0 sia un diffeomorfismo locale tra A in $\mathbb{R}^n$ e $f(A)$ in $\mathbb{R}^m$ e invece una sommersione sia un diffeomorfismo tra A e $f(A)$ però ristretto in pratica a dimensione m essendo il diffeomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ e la funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Giusto?*

R. 1. Osservazioni corrette. Devo però fare un'osservazione sulla definizione di "diffeomorfismo tra insiemi qualunque" che lei riporta non proprio esattamente: la cosa giusta che io ho detto e scritto è quella che segue. Primo: una funzione tra due insiemi qualunque $D \subset \mathbb{R}^p$ e $E \subset \mathbb{R}^q$ si dirà essere "di classe $\mathcal{C}^k$" in un punto $t_0 \in D$ se è indotta da una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ definita in un intorno aperto "grasso" di t_0 (ove "grasso" significa un aperto di $\mathbb{R}^p$). Secondo: un "diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ tra insiemi qualunque" è un omeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ tra essi, tale che anche la sua inversa sia di classe $\mathcal{C}^k$. Ad esempio, consideriamo la circonferenza $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ e poniamo $D = \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (l'emisfero inferiore) e $E =]-1,1[\subset \mathbb{R}$. Allora la proiezione stereografica dal polo nord $\varphi_N : D \to E$ data da $\varphi_N(x,y) = \frac{x}{1-y}$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$: infatti è un omeomorfismo (è biiettiva e continua, e tale è anche l'inversa $\varphi_N^{-1} : E \to D$ data da $\varphi_N^{-1}(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{1-t^2}{1+t^2})$) indotto dalla funzione $\varphi_N(x,y) = \frac{x}{1-y}$ che ha come dominio connesso non solo D, ma tutto l'aperto "grasso" $\{(x,y) : y < 1\}$, ed è evidentemente $\mathcal{C}^\infty$.

2. Rispondo per quanto posso capire da quanto lei scrive. Mi pare che l'osservazione sull'immersione sia corretta: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è immersiva in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (dunque $n \le m$, si va dal piccolo al grande) allora f dipinge diffeomorficamente un intorno aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 sulla sua immagine $f(A)$ di $f(x_0)$: ma attenzione, $f(A)$ non è aperto in $\mathbb{R}^m$ (tranne il caso in cui $n = m$). Ad esempio, la parametrizzazione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ della curva-otto, data da $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$, è un'immersione perché $\gamma'(t) \neq (0,0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e infatti per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ esiste un intornino di t_0 che viene disegnato su un segmentino della curva-otto. Invece una sommersione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dunque $n \ge m$, si va dal grande al piccolo) non va pensata come una funzione che "se ristretta a qualcosa di dimensione m (ma a cosa poi?) diventa un diffeomorfismo", ma come una "proiezione" in cui l'immagine di f in $\mathbb{R}^m$ viene ricoperta di "fibre uniformi", tutte varietà di dimensione $n-m$, sopra i suoi punti. Il prototipo di sommersione è la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\pi(x,y) = x$: tramite essa, la fibra sopra ogni punto del codominio $\mathbb{R}$ è una retta (varietà di dimensione 1). Invece la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = x^2+y^2$ ha immagine $[0,+\infty[$, ma mentre la fibra di f sopra $\alpha > 0$ è la circonferenza $x^2+y^2 = \alpha$ (varietà di dimensione 1), quella sopra 0 è il solo punto $(0,0)$ (varietà di dimensione 0). Non sorprende dunque che f non sia sommersiva in $(0,0)$ (infatti $df_{(0,0)} = 0$).

02. D. *Desideravo affrontare il discorso relativo al bordo ed all'orientazione delle varietà in $\mathbb{R}^n$.*

1. Nel Lemma 3.1.2 (pag. 66), alla 2a riga della dimostrazione, è scritto che "... $F(\partial\mathbb{H}^m)$ è sottoinsieme di $\partial\mathbb{H}^m$ e analogamente per l'inversa F^{-1}..."). Non sono riuscito a trovare un nesso tra il fatto che se $F(\partial\mathbb{H}^m)$ è sottoinsieme di $\partial\mathbb{H}^m$ e $F^{-1}(\partial\mathbb{H}^m)$ è sottoinsieme di $\partial\mathbb{H}^m$, allora $F(\partial\mathbb{H}^m) = \partial\mathbb{H}^m$. Quale (piccolo?) tassello debbo inserire nel mezzo del ragionamento, per completarlo ed arrivare alla tesi in questione?

2. In secondo luogo, riguardo a come determinare l'orientazione del bordo ∂X di una varietà X di dimensione m, non capisco se il versore $\vec{n}$ che si prende per "uscente da" giace nel T_xX (dove x è punto di X) o se giace semplicemente in $\mathbb{R}^n$. A tal proposito, vorrei precisare i miei dubbi: a pag. 63, nella dimostrazione della Proposizione 4.1.3, dopo che introduce le funzioni g, h e caratterizza, di conseguenza, X e ∂X, lei osserva come ∂X sia lo spazio generato dai vettori

ortogonali a ∇h. Ma perché poi parla di "ruolo del versore normale uscente svolto dal versore $\vec{n}$ della proiezione di ∇h su T_xX..."? Intendo dire: perché debbo proiettare ∇h su T_xX? A questo punto non mi risultano chiari la direzione ed il verso di uscita di ∇h dalla varietà e rispetto alla base di T_xX; non dovrebbero essere la direzione ed il verso delle "h crescenti", come detto a lezione?

3. In ultimo, mi riferisco all'esempio (1) della pag. 63: se h è funzione di definizione cartesiana, mi aspetto che vada da W sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-m}$. Se h, nell'esempio 1, va da W a $\mathbb{R}$, la X - del resto è scritto all'inizio di pag. 64 - è una ipersuperficie, quindi di dimensione $n-1$. Ma allora perchè subito dopo è scritto che X è munita dell'orientazione di $\mathbb{R}^n$? Non dovrebbe essere munita dell'orientazione dello spazio T_xX, generato da $n-1$ vettori in $\mathbb{R}^n$?

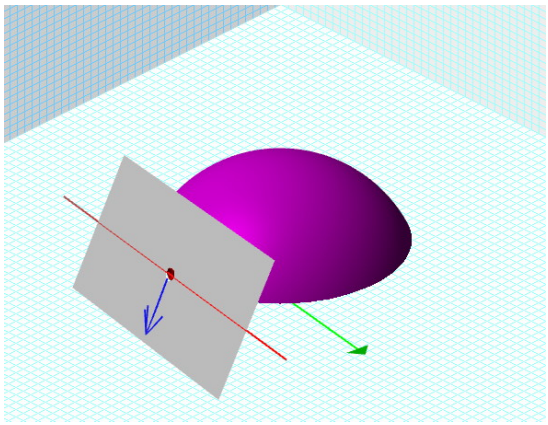
R. 1. Se $F^{-1}(\partial\mathbb{H}^m) \subset \partial\mathbb{H}^m$, applicando F ad ambo i membri si ottiene che $\partial\mathbb{H}^m \subset F(\partial\mathbb{H}^m)$. Se inoltre si sa che $F(\partial\mathbb{H}^m) \subset \partial\mathbb{H}^m$, i due saranno uguali (uno è contenuto nell'altro, e viceversa).

2. Prima ricordo brevemente quello che ho scritto sulle dispense, dopo do un esempio concreto. • Se $x \in \partial X$, lo spazio tangente "piccolo" $T_x(\partial X)$ è un iperpiano dello spazio tangente "grande" T_xX. Il versore $\vec{n}$ è quello contenuto in T_xX ortogonale a $T_x(\partial X)$ e diretto nel verso uscente da X, e si ottiene come segue: descritte X come $\{g_1 = \cdots = g_{n-m} = 0\,,\ h \le 0\}$ e ∂X come $\{g_1 = \cdots = g_{n-m} = 0\,,\ h = 0\}$, per avere $\vec{n}$ si tratta di proiettare ∇h su T_xX dividendo poi per il modulo. • Veniamo ora all'esempio, nel caso $n = 3$ e $m = 2$ (vedi figura). Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ date rispettivamente da $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$ e da $h(x,y,z) = 1 - z$: allora $X = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\,,\ h(x,y,z) \le 0\}$ è la calotta sferica superiore ottenuta tagliando la superficie sferica di raggio $\sqrt{5}$ col piano orizzontale $z = 1$, mentre $\partial X = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\,,\ h(x,y,z) = 0\}$ è la circonferenza-bordo di quella calotta; e il "verso delle h crescenti" è quello verso il basso, ovvero –giustamente– quello uscente da X. Prendiamo ora il punto $P(2,0,1) \in \partial X$: allora lo spazio tangente T_PX è il piano ortogonale a $\nabla g(P) = (4,0,2)$ ovvero $2x + z = 0$ (nella figura si vede il corrispondente spazio tangente affine $P + T_PX$ in grigio) e, dentro T_PX, lo spazio tangente $T_P(\partial X)$ è dato dall'ulteriore ortogonalità a $\nabla h(P) = (0,0,-1)$, ovvero $T_P(\partial X)$ è la retta $\left\{ \begin{smallmatrix} 2x+z=0 \\ z=0 \end{smallmatrix} \right.$, ovvero $x = z = 0$, cioè l'asse y (nella figura si vede il corrispondente spazio tangente affine $P + T_P(\partial X)$ in rosso). Proiettando $\nabla h(P) = (0,0,-1)$ ortogonalmente sul piano $T_PX = \{2x + z = 0\}$ si ottiene il vettore $(\frac{2}{5}, 0, -\frac{4}{5})$, che diviso per il suo modulo dà il versore $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ (in blu nella figura). A questo punto l'operazione di orientare $T_P(\partial X)$ a partire dall'orientazione del semispazio superiore di T_PX è del tutto analoga a quella di orientare $\partial\mathbb{H}^2$ a partire dall'orientazione di $\mathbb{H}^2$, il ruolo del versore $\vec{n}$ essendo lo stesso di quello del versore $-e_m$ per $\partial\mathbb{H}^2$ rispetto a $\mathbb{H}^2$: ne risulta che l'orientazione indotta su ∂X è quella antioraria se osservata dall'alto.

3. No, lei si sta confondendo: nell'esempio (1) l'ipersuperficie non è X, ma il suo bordo ∂X. È infatti ∂X ad essere definito da $h(x) = 0$, mentre X è dato dalla disuguaglianza $h(x) \le 0$. In altre parole X è la chiusura di un aperto di $\mathbb{R}^n$, che sarebbe quello dato da $h(x) < 0$: e, in quanto tale, eredita l'orientazione di $\mathbb{R}^n$, come fosse per appunto un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per esempio: se $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è data $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, allora $X = \{(x,y) : h(x,y) \le 0\}$ è il disco chiuso (chiusura del disco aperto), che eredita naturalmente l'orientazione del piano, mentre $\partial X = \{(x,y) : h(x,y) = 0\}$ è la circonferenza $\mathbb{S}^1$, ipersuperficie di $\mathbb{R}^2$.

03. D. *Io continuo a non capire il teorema di Gauss. Ma come si fa a ricostruire la struttura di un campo vettoriale dentro un corpo tridimensionale solo a partire dal suo flusso attraverso la superficie? Non c'è molta meno informazione in quest'ultimo?*

R. Beh, andiamoci un po' piano: col teorema di Gauss, a partire dal flusso uscente attraverso la



superficie non si ricostruisce "la struttura di un campo vettoriale dentro un corpo tridimensionale", ma solo il computo globale delle sue emissioni/assorbimenti all'interno del corpo, che è molto meno. Mi spiego con un esempio. Lei ponga di avere la sua stanza disseminata di rubinetti che possono far uscire l'acqua, e di tombini (ma anche altri oggetti, come materassi, coperte, etc.) che possono farla scomparire o immettendola in altre condotte o perché ne restano inzuppati. Se lei, dopo aver azionato i rubinetti, si mette a sedere sulla porta della sua stanza e misura l'acqua che esce da lì, lei mica riesce a ricostruire quanta acqua sta uscendo dal rubinetto A o dal rubinetto B o quanta acqua viene inghiottita dal tombino C o viene assorbita dal suo materasso: ciò che lei riesce a misurare è semplicemente il computo globale di queste azioni. Ciò detto, per quanto semplice possa essere, l'idea del teorema non è comunque male: se quello che mi interessa è solo un conto globale, anziché andare a spulciare all'interno del corpo basta che io mi metta ad osservare ciò che succede all'uscita del corpo stesso. E diventa particolarmente suggestiva, a mio avviso, nel caso in cui io usi questo trucco per calcolare il volume di un corpo: anziché entrare nel corpo e misurarne accuratamente le dimensioni, io istruisco ogni molecola del corpo a emettere verso l'esterno una gocciolina d'acqua, così poi misurando quanta acqua mi esce dalla frontiera riesco a capire quanto grande è il corpo.

04. D. *Come si inquadra nel suo contesto il discorso del "potenziale vettore", che in Fisica è spesso usato in riferimento al campo magnetico? In una delle lezioni ne ha fatto un rapido accenno, ma non ho capito molto bene.*

R. A lezione abbiamo visto che, per un aperto U di $\mathbb{R}^3$, il complesso di de Rham

$$0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^1(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^2(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^3(U) \;\to\; 0\;,$$

se tradotto nel linguaggio dei campi vettoriali (indichiamo con $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ lo spazio dei campi vettoriali $\mathcal{C}^\infty$ su U) diventa

$$(*) \qquad 0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{\text{grad}}\; \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \;\xrightarrow{\text{rot}}\; \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \;\xrightarrow{\text{div}}\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\to\; 0\;,$$

in cui la proprietà di complesso $d\circ d = 0$ si legge come $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ ("un gradiente è sempre irrotazionale") e $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ ("un rotore è sempre solenoidale"). D'altra parte, come spiegato anche nella risposta alla domanda n. 31, sappiamo che, dato un campo vettoriale $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ tale che $\operatorname{rot}(F) = 0$ non esiste sempre una funzione "potenziale" $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tale che $\operatorname{grad} f = F$ (in altre parole, un campo irrotazionale in U non è sempre conservativo in U): ma ciò accade certamente se si suppone che U abbia opportune proprietà topologiche (come sappiamo, se si

suppone che U sia semplicemente connesso), e in tal caso l'integrale di linea (il "lavoro") di F lungo un cammino si può calcolare facilmente come differenza dei valori del potenziale f tra i punti di arrivo e di partenza del cammino stesso.

Quanto appena detto riguarda il "livello 1" del complesso (*), quello posto tra il gradiente e il rotore: un discorso del tutto simile può essere svolto per il "livello 2" del complesso (*), quello posto tra il rotore e la divergenza. Dato un campo vettoriale $G \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ tale che $\operatorname{div}(F) = 0$ non esiste sempre un campo "potenziale vettore" $A \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ tale che $\operatorname{rot} A = G$ (in altre parole, un campo solenoidale in U non è sempre il rotore di un altro campo in U). Ma ciò accade certamente se si suppone che U abbia un'opportuna proprietà topologica, più precisamente se si assume che U sia "superficialmente semplicemente connesso": stavolta si chiede non che ogni circuito possa essere deformato a un solo punto sempre restando dentro U, ma che lo possa essere ogni superficie chiusa regolare dentro U (si chiede cioè che non ci siano buchi in U: altrimenti detto, che se la frontiera regolare di un aperto di $\mathbb{R}^3$ è contenuta in U allora tutto l'aperto stesso deve essere contenuto in U). In tal caso, l'"integrale di superficie" (che, come visto, corrisponde al "flusso") di F attraverso una superficie bordata di $\mathbb{R}^3$ si può calcolare alternativamente come circuitazione del potenziale vettore A lungo il bordo della superficie stessa (questa è niente altro che la formula di Kelvin-Stokes): è per questa ragione che un campo che ammette potenziale vettore è detto anche "conservativo per il flusso", similmente al fatto che un campo che ammette potenziale scalare è detto "conservativo". Va anche detto che, così come il potenziale scalare di un campo conservativo è determinato a meno di una costante additiva, anche il potenziale vettore di un campo conservativo per il flusso ha una indeterminazione additiva, essendo determinato a meno del gradiente di un altro campo qualsiasi (infatti se $\operatorname{rot}(A) = G$, allora per un qualsiasi altro campo F si ha pure $\operatorname{rot}(A + \operatorname{grad}(F)) = \operatorname{rot}(A) + \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(F)) = \operatorname{rot}(A) + 0 = G$): in Fisica, tale libertà è denominata come la scelta di un *gauge* (di solito la scelta è fatta in modo che anche il potenziale vettore risulti solenoidale: si tratta della cosiddetta *gauge di Gauss*).

L'esempio più naturale (vedi anche la risposta alla domanda n. 31) di campo solenoidale che non è conservativo per il flusso è il campo dell'angolo solido $F(\underline{r}) = \underline{r}/r^3$, definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, che ha un buco nell'origine: infatti se tale campo —che si verifica facilmente essere solenoidale[(78)]— fosse il rotore di un altro campo, esso dovrebbe avere (in base alla formula di Stokes) flusso nullo attraverso ogni superficie chiusa, mentre si può direttamente facilmente che il suo flusso attraverso una superficie sferica centrata nell'origine è 4π, la misura in steradianti dell'angolo solido intero[(79)].

In Fisica, l'uso classico del potenziale vettore è in riferimento al campo magnetico: poiché quest'ultimo è solenoidale (è una delle equazioni di Maxwell), per quanto appena detto esso ammetterà potenziale vettore su ogni aperto superficialmente semplicemente connesso del suo dominio. Ma per maggiori informazioni su questo vi rimando a quanto vi dirà (o vi ha già detto) il mio collega di Fisica.

05. D. *Nella prima parte del corso, facendo esercizio sulle forme differenziali lineari, avevo integrato* $\omega = f\,dx + g\,dy = \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y^2}{x^2+y^2}\,dy$ *lungo la circonferenza* γ *di centro l'origine e raggio* 1*, ottenendo* 2π*; ora, appresa la formula di Green* $\int_\gamma f\,dx + g\,dy = \int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dx\,dy$ *(ove* D *è il disco di raggio* 1*) io speravo di trovare lo stesso risultato integrando* $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ *su* D*, ma questa funzione mi risulta non integrabile (ad esempio su* $D^+ = \{(x,y) \in D : x > 0\}$*, dov'è*

[(78)] infatti ad esempio $\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial (x/r^3)}{\partial x} = \frac{r^3 - x\,3r^2(x/r)}{r^6} = \frac{r^2-3x^2}{r^5}$, dunque $\operatorname{div}(F) = \frac{r^2-3x^2}{r^5} + \frac{r^2-3y^2}{r^5} + \frac{r^2-3z^2}{r^5} = \frac{3r^2-3r^2}{r^5} = 0$.

[(79)] infatti, detta S_R la superficie sferica, si ha $\Phi_{S_R}(F) = \int_{S_R} \frac{r}{R^3} \cdot \frac{r}{R}\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{R^2}{R^4} R^2 \sin\varphi\,d\varphi = 4\pi$.

positiva, l'integrale iterato vale $+\infty$). Dov'è sta l'errore?

R. L'errore sta nel fatto che la formula di Green non è applicabile in questo caso: per esserlo, infatti, le funzioni f e g dovrebbero essere di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente $\overline{D}$ (dunque sia D che il suo bordo γ), mentre invece qui non lo sono (non sono definite in $(0,0)$).
A titolo di curiosità, noti che nel suo esempio si ha $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dove $\omega_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ è la solita forma-angolo (chiusa ma non esatta), e $\omega_2 = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dy$ (non chiusa, ma comunque si calcola $\int_\gamma \omega_2 = 0$), dunque si capisce che venga $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 = 2\pi$; invece nel conto $\int_D (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dx\,dy$ la forma ω_1 scompare perché chiusa, e resta la sola $d\omega_2 = \frac{4x-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ che però non è integrabile su D.

06. D. *Rileggendo le sue dispense sulle forme differenziali mi è sorto il dubbio se sia vero il seguente enunciato: "Sia ω una k-forma, e ψ una $(k-1)$-forma; allora $\omega = d\psi$ se e solo se $d\omega = 0$ " ? Un verso dell'affermazione dovrebbe equivalere alla proprietà di complesso, il dubbio è sull'altro verso. A naso direi che la proposizione è falsa.*

R. La proposizione, detta in questi termini generali, è falsa. Ma lei ha intuito una questione-chiave, che è una delle applicazioni di maggior successo delle forme differenziali: in effetti, la risposta dipende da come è fatta la varietà su cui sto studiando le forme differenziali (cioè: considerate le forme su una certa varietà, per certi k sarà vero e per altri no), e fornisce, tramite la teoria che ne scaturisce (coomologia di de Rham), una delle descrizioni più efficienti e rappresentative delle proprietà topologiche della varietà stessa. Per capirci, ecco un esempio ormai familiare: la presenza di un buco nel piano bucato $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ viene rivelata dall'esistenza della "forma-argomento" $\omega_{\arg} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, che come ricordiamo è chiusa ma non esatta in X. In modo simile, la presenza di un buco in una varietà k-dimensionale può essere indovinata dalla presenza di una $(k-1)$-forma chiusa ma non esatta nella varietà stessa: così sarà, come vedremo tra breve, ad esempio per una corona sferica (una palla di $\mathbb{R}^3$ privata all'interno di una palla più piccola).

Cerco di dare un rapido cenno alla questione, rimandando per maggiori dettagli a testi più specifici. Prendiamo per semplicità un aperto $X = U$ di $\mathbb{R}^n$ (ma tutto potrebbe essere fatto per una varietà X qualsiasi), e sia $\Omega^k(U) = \{\sum_{|I|=k} f_I(x)\,dx_I\}$ lo spazio delle k-forme su U: tramite il differenziale d abbiamo costruito il complesso di de Rham

$$0 \;\to\; \mathcal{C}^\infty(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^1(U) \;\xrightarrow{d}\; \cdots \;\xrightarrow{d}\; \Omega^{n-1}(U) \;\xrightarrow{d}\; \Omega^n(U) \;\to\; 0$$

(ricordiamo che $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$). Per un certo k tra 0 e n, chiamiamo *k-forme chiuse* quelle k-forme il cui differenziale è nullo, ovvero l'insieme

$$Z^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) : d\omega = 0\}\,;$$

e *k-forme esatte* quelle k-forme che sono il differenziale di una forma di grado inferiore, ovvero l'insieme

$$B^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) : \omega = d\psi \;\text{ per qualche } (k-1)\text{-forma } \psi \in \Omega^{k-1}(U)\}\,.$$

(Nel caso $k = 1$ ovviamente ritroviamo le già note definizioni di 1-forma chiusa e 1-forma esatta.) Sia $Z^k(U)$ che $B^k(U)$ sono sottospazi vettoriali di $\Omega^k(U)$; inoltre $B^k(U)$ è un sottospazio di $Z^k(U)$, perché se $\omega = d\psi$ allora $d\omega = d(d\psi) = 0$ (grazie alla proprietà di complesso $d \circ d = 0$). La sua domanda allora può essere riformulata chiedendosi: *è vero o no che $B^k(U) = Z^k(U)$?*

- Per $k = 0$ si ha $B^0(U) = \{0\}$ (la funzione nulla) e $Z^0(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : df = 0\} = \{$funzioni localmente costanti su $U\}$. Notiamo che lo spazio $Z^0(U)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di

dimensione d dove d è il numero di componenti connesse di U (infatti una base dello spazio delle funzioni localmente costanti su U è data dalla famiglia delle funzioni che valgono 1 su una certa componente connessa di U e 0 su tutte le altre), dunque non è mai nullo: ne segue che nel caso $k = 0$ la risposta è sempre no.

- Per $k = 1$ la risposta è sì quando U è semplicemente connesso: infatti sappiamo che ogni 1-forma chiusa su un semplicemente connesso è anche esatta.
- Per $1 < k \leq n$ la risposta dipende dalle proprietà topologiche di U, e dunque varia di caso in caso. Ad esempio, un fondamentale risultato di Poincaré (noto come *lemma di Poincaré*) dice che se U è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (ad esempio lo stesso $\mathbb{R}^n$, o una palla) allora $B^k(U) = Z^k(U)$ per ogni $1 \leq k \leq n$: in altre parole, ogni k-forma chiusa su U è anche esatta su U, ovvero esiste una $(k-1)$-forma "potenziale" ψ su U tale che $\omega = d\psi$.
- In generale, visto che $B^k(U)$ è sempre un sottospazio vettoriale di $Z^k(U)$, si può considerare lo spazio vettoriale quoziente $\frac{Z^k(U)}{B^k(U)}$, che viene solitamente detto *coomologia di grado k* di U e indicato con $H^k(U)$; dunque si ha $H^k(U) = 0$ se e solo se $B^k(U) = Z^k(U)$, e in tal caso si dice che U "non ha coomologia in grado k". Notiamo, per quanto detto prima, che $H^0(U) = \mathbb{R}^d$ dove d è il numero di componenti connesse di U; e che $H^1(U) = 0$ se U è semplicemente connesso.
  L'idea è che quanto più uno spazio ha coomologia, tanto più la sua topologia è complicata. Ad esempio:
  - per il lemma di Poincaré, un aperto U omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ ha coomologia solo in grado 0, con $H^0(U) = \mathbb{R}$ (è connesso);
  - se $U \subset \mathbb{R}^2$ è una corona circolare (diciamo centrata nell'origine, dunque esprimibile in coordinate polari come $a < r < b$ per certi $0 < a < b$) allora $H^0(U) = \mathbb{R}$ (perché U è connessa) e si può dimostrare che $H^1(U) = \mathbb{R}$ (la cosa non sorprende, perché U non è semplicemente connesso; e un generatore di $H^1(U)$ –ovvero una 1-forma chiusa ma non esatta– è come noto la forma-argomento $\omega_{\arg} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$);
  - se $U \subset \mathbb{R}^3$ è una corona sferica (diciamo centrata nell'origine, dunque esprimibile in coordinate sferiche come $a < r < b$ per certi $0 < a < b$) allora $H^0(U) = \mathbb{R}$ (perché U è connessa), $H^1(U) = 0$ (perché U è semplicemente connessa), e si può dimostrare che $H^2(U) = \mathbb{R}$: un generatore di $H^2(U)$ —ovvero una 2-forma chiusa su U ma non esatta in U— è la forma $\omega = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dy\,dz - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dz + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy$ (detta anche "forma dell'angolo solido", perché facendone il pull-back in coordinate sferiche essa diventa $\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$, il cui integrale su una superficie di $\mathbb{R}^3$ dà la misura in steradianti dell'angolo solido sotto il quale è vista la superficie dall'origine). Tale 2-forma, come sappiamo, corrisponde al campo $F(\underline{r}) = \underline{r}/r^3$, che è solenoidale ma non è il rotore di un altro campo definito globalmente su tutto U: lo è tuttavia localmente, su ogni porzione "superficialmente semplicemente connessa" di U, ma per questo rimando alla risposta alla domanda n. 29 sul potenziale vettore qui sotto.

07. D. *È vero che un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$ ha rotore nullo e divergenza nulla se e solo se è costante?*

R. No, è già falso nel caso di campi vettoriali piani (ovvero, con una delle tre coordinate costante): ad esempio, i campi $F_1(x, y, z) = (x, -y, 0)$ e $F_2 = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 0)$ hanno sia il rotore che la divergenza nulli ma non sono costanti. Tuttavia, su un campo con queste caratteristiche qualcosa si può comunque dire: in effetti, se un campo $\mathcal{C}^\infty$ definito su $\mathbb{R}^3$ ha nulli sia il rotore

che la divergenza allora esso deve essere o costante o illimitato (ovvero la sua norma non è limitata, come ad esempio accade per i suddetti campi F_1 e F_2). Ne spieghiamo ora il motivo. Se il campo $F = (F_x, F_y, F_z)$ è irrotazionale esso è conservativo (perché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso): detta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un potenziale di F (dunque $F = \operatorname{grad} f$), se F è anche solenoidale si ha $\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0$, cioè $\Delta f = 0$ ove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è l'operatore di Laplace (detto anche "laplaciano"): ovvero, come si dice con una terminologia classica, la funzione f è *armonica*. Ma se f è armonica, per Schwarz lo è anche ciascuna delle componenti di F (ad esempio, poiché $F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ si ha $\Delta(F_x) = \Delta(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) = 0$): se F fosse limitato (ovvero se la sua norma fosse limitata) allora lo sarebbero tutte le sue componenti, ma un celebre teorema, dovuto a Liouville, afferma che una funzione armonica su tutto $\mathbb{R}^3$ se è limitata è necessariamente costante. Dunque, se F fosse limitato dovrebbe essere necessariamente costante.
Lo stesso ragionamento si può usare per campi con dominio più generale, applicandolo alla restrizione del campo a un piano contenuto in esso: scelte le coordinate di modo che tale piano sia (x, y), si usa il laplaciano nel piano per concludere che la restrizione di F al piano deve essere costante o illimitata.

08. D. *I miei dubbi riguardano le funzioni di definizione g e h per una m-varietà con bordo in $\mathbb{R}^n$. Nella Proposizione 3.1.3 a pag. 68 si introduce g come già fatto in precedenza nella definizione tramite una sommersione (appunto g); si introduce poi h definita in $\mathbb{R}^n$ come g però a valori in $\mathbb{R}$. Ora questa h è utilizzata per descrivere il bordo della varietà, che infatti è definito dagli zeri di g (perché anche il bordo di X è parte della varietà X) e dagli zeri di h. Quindi mi pare che h sia funzione di definizione del bordo; però allora il suo codominio dovrebbe essere $\mathbb{R}^{n-(m-1)}$ essendo il bordo di dimensione m. Perché invece è $\mathbb{R}$ il codominio? In particolare nel primo esempio in fondo alla pagina compare solo h, che, in questo caso definisce sia bordo che varietà. Si può quindi dire che per una varietà di dimensione n in $\mathbb{R}^n$, cioè un aperto di $\mathbb{R}^n$, è sufficiente una funzione di definizione per bordo e varietà, invece per dimensioni inferiori ne servano due?*

R. No, lei non ha capito bene. Il bordo ∂X della varietà non è l'insieme degli zeri di h (questo vorrebbe dire che ∂X sarebbe sempre un'ipersuperficie di $\mathbb{R}^n$, cosa non vera in generale), ma l'insieme degli zeri *sia di g che di h*, ovvero della funzione $(g, h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n-(m-1)}$ (dunque, giustamente, ∂X è una varietà di dimensione $m - 1$); invece la varietà X è data come insieme degli zeri della funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ (dunque la dimensione è m), mentre in essa la funzione h appare solo come condizione di disuguaglianza $h(x) \leq 0$, dunque non incide sulla dimensione. Nel caso particolare in cui la varietà X è un chiuso di $\mathbb{R}^n$ di dimensione n (ovvero, la chiusura di un aperto di $\mathbb{R}^n$) le funzioni g *non ci sono* (cioè: per descrivere X non servono funzioni da usare come equazione, perché la dimensione di X è quella massima e non va abbassata rispetto a quella di $\mathbb{R}^n$) e c'è solo la funzione h che lo descrive come disequazione; la stessa funzione h, presa però come equazione, serve a descriverne il bordo ∂X, che infatti in questo caso è un'ipersuperficie di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, se X è la palla chiusa di raggio 1 in $\mathbb{R}^3$ si ha $X = \{(x, y, x) : h(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1 \leq 0\}$ (come si vede, per descrivere X non servono, e non ci sono, le funzioni g da usare come equazione), e il bordo ∂X è la circonferenza di raggio 1, che è infatti descritta dall'*equazione* $h(x, y, z) = 0$. Per un esempio di dimensione inferiore si veda la risposta alla domanda n. 26 punto 2, compresa la figura. Lì X è una porzione di superficie sferica in $\mathbb{R}^3$, ovvero $n = 3$ e $m = 2$: dunque, essendo $n - m = 1$ serve la sola funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$ per definire X come equazione, e poi serve una funzione $h(x, y, z) = 1 - z$ per descriverne la porzione di interesse tramite la disequazione $h(x, y, z) \leq 0$. Si noti che il bordo ∂X, che è la circonferenza di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 2 posta nel piano orizzontale $z = 1$, è l'insieme degli zeri sia di g che di h.

09. D. *Per risolvere alcuni problemi di fisica risulta comodo saper scrivere le operazioni* $\operatorname{grad} f$,

$\operatorname{rot} F$ *e* $\operatorname{div} G$ *in coordinate diverse dalle cartesiane, tanto che nei libri sono di solito riportate le espressioni riassunte anche in*

`http://it.wikipedia.org/wiki/Nabla_in_coordinate_cilindriche_e_sferiche` .

Lei a pagina 91 delle dispense mostra in pratica come poter ottenere $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot} F$ *e* $\operatorname{div} G$ *in coordinate cartesiane. Come possiamo ottenere le espressioni della tabella per gli altri sistemi di coordinate?*
Se voglio per esempio l'espressione del rotore di un campo in coordinate sferiche: posso partire dalla 1-forma $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$, *farne il pull-back per "portarla" in coordinate sferiche, e poi differenziarla (per la Proposizione 3.3.5(1) pag. 93) ottenendo così alla fine l'espressione del rotore in coordinate sferiche?*

R. Sì, proprio così: ma facendo ben attenzione sia al significato delle espressioni che compaiono, sia alle corrette identificazioni tra campi e forme su $\mathbb{R}^3$. La pagina di Wikipedia che lei cita è riportata

Nabla in coordinate cilindriche e sferiche – Wikipedia 8/12/11 2:10 PM

Nabla in coordinate cilindriche e sferiche

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Nel calcolo vettoriale è spesso utile conoscere come esprimere ∇ in altri sistemi di coordinate diversi da quello cartesiano.

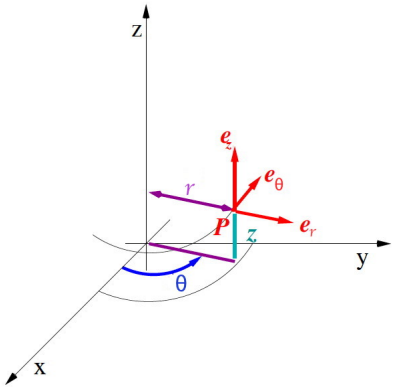
Operatore	Coordinate cartesiane (x,y,z)	Coordinate cilindriche (ρ,φ,z)	Coordinate sferiche (r,θ,φ)
Definizione delle coordinate		$\begin{bmatrix} x &=& \rho\cos\phi \\ y &=& \rho\sin\phi \\ z &=& z \end{bmatrix}$.	$\begin{bmatrix} x &=& r\sin\theta\cos\phi \\ y &=& r\sin\theta\sin\phi \\ z &=& r\cos\theta \end{bmatrix}$.
		$\begin{bmatrix} \rho &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &=& \operatorname{atan2}(y,x) \\ z &=& z \end{bmatrix}$.	$\begin{bmatrix} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \arccos(z/r) \\ \phi &=& \operatorname{atan2}(y,x) \end{bmatrix}$.
A Campo vettoriale $\mathbf{A}$	$A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\triangle f = \nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\triangle \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$	$\triangle A_x\hat{\mathbf{x}} + \triangle A_y\hat{\mathbf{y}} + \triangle A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\triangle A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\triangle A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + (\triangle A_z)\hat{\boldsymbol{z}}$	$(\triangle A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{r}} + (\triangle A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} + (\triangle A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} + dxdz\hat{\mathbf{y}} + dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} + d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} + \rho d\rho d\phi\hat{\boldsymbol{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}} + r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Relazioni notevoli:

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \triangle f$ (Laplaciano)
2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = 0$
3. $\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
4. $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
5. $\triangle fg = f\triangle g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\triangle f$
6. Formula di Lagrange per il prodotto vettoriale: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Nota

- La funzione atan2(y,x) è usata al posto di arctan(y/x) per il suo dominio. La funzione arctan(y/x) ha immagine in (-π/2, +π/2), mentre atan2(y,x) ha immagine in (-π, π].



http://it.wikipedia.org/wiki/Nabla_in_coordinate_cilindriche_e_sferiche

qui in figura, e nella sua tabella (che chiamerò nel seguito [Wiki]) essa riporta le espressioni del

gradiente, del rotore e della divergenza, oltre che nelle usuali coordinate cartesiane, anche in coordinate cilindriche e sferiche. Ma che significa ciò? È chiaro che, prima di tutto, bisognerà che ci intendiamo bene su cosa vuol dire esprimere una funzione o un campo vettoriale in un altro sistema di coordinate.

Occupiamoci ad esempio delle coordinate cilindriche (r, θ, z) di $\mathbb{R}^3$ (che nella seconda colonna di [Wiki] sono chiamate (ρ, ϕ, z); una volta capito queste, si potrà portare a termine in modo analogo anche il conto in coordinate sferiche, che corrisponde alla terza colonna di [Wiki]), e denotiamo il cambio di coordinate cilindriche con $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

- Per quanto riguarda le funzioni si tratta semplicemente di comporre la funzione in coordinate cartesiane $f(x, y, z)$ con il cambio Φ, ottenendo così $\hat{f}(r, \theta, z) = f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z)$.
- Per quanto riguarda invece i campi vettoriali, l'idea è che un campo

$$F(x, y, z) \;=\; (f(x, y, z),\, g(x, y, z),\, h(x, y, z)) \;=\; f\,\vec{e}_x + g\,\vec{e}_y + h\,\vec{e}_z$$

  espresso qui nell'usuale terna cartesiana $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, venga invece espresso nella terna "cilindrica" $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ in cui ad esempio il versore $\vec{e}_r$ è quello del gradiente della superficie di livello di r, ovvero quello in cui θ e z restano costanti e varia crescendo solo r e analogamente per gli altri (vedi figura). Anche la terna cilindrica è destrorsa, ed è chiaro che $\vec{e}_r = (\cos\theta)\,\vec{e}_x + (\sin\theta)\,\vec{e}_y$ e $\vec{e}_\theta = (-\sin\theta)\,\vec{e}_x + (\cos\theta)\,\vec{e}_y$: il campo precedente si scriverà allora anche come

$$F(r, \theta, z) \;=\; \hat{f}\,\vec{e}_r + \hat{g}\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{e}_z \qquad\qquad \text{ove } \;(\hat{f},\, \hat{g}) = (f\cos\theta + g\sin\theta,\, -f\sin\theta + g\cos\theta).$$

In [Wiki] le notazioni corrispondenti sono $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}) \leftrightarrow (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\mathbf{z}}) \leftrightarrow (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, $\mathbf{A} \leftrightarrow F$, $(A_x, A_y, A_z) \leftrightarrow (f, g, h)$ e $(A_\rho, A_\phi, A_z) \leftrightarrow (\hat{f}, \hat{g}, h)$.

Dopo questi chiarimenti, le espressioni di gradiente, rotore e divergenza in coordinate cilindriche potrebbero essere ottenute restando nell'ambito dei campi vettoriali (con calcoli diretti piuttosto pesanti o con considerazioni euristiche non molto rigorose ma efficaci basate sui teoremi classici del calcolo vettoriale —come il teorema di Gauss, o del gradiente, o la formula di Kelvin-Stokes— per i quali rimandiamo a testi di Fisica o altre scienze applicate): il nostro scopo qui è invece di arrivarci in modo matematicamente rigoroso usando il linguaggio parallelo delle forme differenziali, ricordando che su un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ il complesso di de Rham $0 \to \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \to 0$, se tradotto <u>in modo corretto</u> nel linguaggio dei campi vettoriali (indichiamo con $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ lo spazio dei campi vettoriali $\mathcal{C}^\infty$ su U) diventa $0 \to \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{C}^\infty(U) \to 0$.

- <u>Gradiente</u>. Una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ corrisponde alla stessa 0-forma f; se partiamo dalle coordinate cartesiane $f(x, y, z)$, come detto essa verrà portata in coordinate cilindriche come $\hat{f}(r, \theta, z) = (\Phi^* f)(r, \theta, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, e calcolandone il differenziale in r, θ, z si ottiene $d\hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}\,dz$, che è la 1-forma in $\Omega^1(U)$ che dovrà corrispondere al gradiente di f. E poiché la corretta identificazione tra campi vettoriali in terna cilindrica e 1-forme in coordinate cilindriche è data da $\vec{e}_r \leftrightarrow dr$, $\vec{e}_\theta \leftrightarrow r\,d\theta$ e $\vec{e}_z \leftrightarrow dz$, si ha $\operatorname{grad}\hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\,\vec{e}_r + (\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta})\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}\,\vec{e}_z$, come in [Wiki].
- <u>Rotore</u>. Un campo cartesiano $F = (f, g, h) : U \to \mathbb{R}^3$ corrisponde alla 1-forma $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$. Andando in coordinate cilindriche, si ha $\widehat{\omega} := \Phi^*\omega = f\,d(r\cos\theta) + g\,d(r\sin\theta) + h\,dz = f\,(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) + g\,(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) + h\,dz = (f\cos\theta + g\sin\theta)\,dr + (-f\sin\theta + g\cos\theta)\,r\,d\theta + h\,dz = \hat{f}\,dr + (r\hat{g})\,d\theta + h\,dz$ (coerentemente alle espressioni di $\hat{f}$ e $\hat{g}$ descritte in precedenza), il cui differenziale cilindrico è dunque $d\widehat{\omega} = (\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}\,dz)\,dr +$

$(\frac{\partial(r\hat g)}{\partial r}\,dr + r\frac{\partial \hat g}{\partial \theta}\,d\theta + r\frac{\partial \hat g}{\partial z}\,dz)\,d\theta + (\frac{\partial h}{\partial r}\,dr + \frac{\partial h}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial h}{\partial z}\,dz)\,dz = (\frac{\partial h}{\partial \theta} - r\frac{\partial \hat g}{\partial z})\,d\theta\,dz + (\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial \hat f}{\partial z})\,dr\,dz + (\frac{\partial(r\hat g)}{\partial r} - \frac{\partial \hat f}{\partial \theta})\,dr\,d\theta$, che è la 2-forma in $\Omega^2(U)$ che dovrà corrispondere al rotore di F. E poiché la corretta identificazione tra campi vettoriali in terna cilindrica e 2-forme in coordinate cilindriche è data da $\vec e_r \leftrightarrow r\,d\theta\,dz$, $\vec e_\theta \leftrightarrow -dr\,dz$ e $\vec e_z \leftrightarrow r\,dr\,d\theta$, si ottiene $\operatorname{rot} F = (\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat g}{\partial z})\,\vec e_r + (\frac{\partial \hat f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial r})\,\vec e_\theta + \frac{1}{r}(\frac{\partial(r\hat g)}{\partial r} - \frac{\partial \hat f}{\partial \theta})\,\vec e_z$, come scritto in [Wiki].

- Divergenza. Un campo cartesiano $F = (f, g, h) : U \to \mathbb{R}^3$ corrisponde alla 2-forma $\eta = f\,dy\,dz - g\,dx\,dz + h\,dx\,dy$. Andando in coordinate cilindriche, si ha $\widehat\eta := f\,d(r\sin\theta)\,dz - g\,d(r\cos\theta)\,dz + h\,d(r\cos\theta)\,d(r\sin\theta) = f\,(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta)\,dz - g\,(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\,dz + h\,(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\,(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = \hat f\,r\,d\theta\,dz - \hat g\,dr\,dz + h\,r\,dr\,d\theta$ (ovvero $\hat f\,(r\,d\theta\,dz) + \hat g\,(-dr\,dz) + h\,(r\,dr\,d\theta)$, che giustamente, per quanto detto prima circa l'identificazione tra campi cilindrici e 2-forme cilindriche, corrisponde al campo vettoriale cilindrico $F = \hat f\,\vec e_r + \hat g\,\vec e_\theta + h\,\vec e_z$, dunque tutto torna), il cui differenziale cilindrico è $d\widehat\eta = d(r\hat f)\,d\theta\,dz - d(\hat g)\,dr\,dz + d(rh)\,dr\,d\theta = (\frac{\partial(r\hat f)}{\partial r}\,dr + r\frac{\partial \hat f}{\partial \theta}\,d\theta + r\frac{\partial \hat f}{\partial z}\,dz)\,d\theta\,dz - (\frac{\partial \hat g}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \hat g}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \hat g}{\partial z}\,dz)\,dr\,dz + (\frac{\partial(rh)}{\partial r}\,dr + r\frac{\partial h}{\partial \theta}\,d\theta + r\frac{\partial h}{\partial z}\,dz)\,dr\,d\theta = (\frac{\partial(r\hat f)}{\partial r} + \frac{\partial \hat g}{\partial \theta} + r\frac{\partial h}{\partial z})\,dr\,d\theta\,dz$, che è la 3-forma in $\Omega^3(U)$ che corrisponderà alla divergenza di F. E poiché la corretta identificazione tra funzioni e 3-forme in coordinate cilindriche è data da $1 \leftrightarrow r\,dr\,d\theta\,dz$, si ottiene $\operatorname{div} F = \frac{1}{r}(\frac{\partial(r\hat f)}{\partial r} + \frac{\partial \hat g}{\partial \theta} + r\frac{\partial h}{\partial z}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\hat f)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat g}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial z}$, come scritto in [Wiki].

Per concludere ricordo anche che, grazie alla commutazione tra differenziale e pull-back (Proposizione 3.3.5(1)) si potrebbe procedere anche nel modo inverso: ovvero, anziché prima passare in coordinate cilindriche e poi calcolare il differenziale cilindrico (ovvero calcolare $d(\Phi^*\omega)$, come si è fatto poco fa) si potrebbe prima operare il differenziale cartesiano e poi passare in coordinate cilindriche (ovvero calcolare $\Phi^*(d\omega)$), senza cambiare il risultato.