Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)
Esercizi di autoverifica sull'integrazione di campi vettoriali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

giovedì 7 novembre 2024

Istruzioni generali. Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento, che sarà fornito lunedì 11/11. Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 24 pt (12+12). **Ex. 2:** 20 pt (10+10). **Ex. 3:** 28 pt (4×7). **Ex. 4:** 28 pt (4×7). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in due sedute da 3 ore).

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i campi $F = (2 - y, 0, -xz)$, $G = (1, -3z, 0)$ e $H = (-x^2, 0, z)$,

(i) Disegnare le varietà $X = \{(x, y, z) : z = 1\,,\ y^2 - 1 \le x \le 0\}$ e $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 4x\,,\ y \le 0\}$, dire qual è il bordo, e calcolare in due modi sia $\int_{\partial X} F \cdot dx$ che il flusso $\Phi_{\partial Y}(H)$.

(ii) Gli insiemi espressi in coordinate cilindriche $\ell = \{(r, \theta, z) : r = 1\,,\ \theta = z\,,\ 0 \le z \le 1\}$ e $L = \{(r, \theta, z) : \theta = -\frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le r \le 1\,,\ 0 \le z \le r\}$ a cosa corrispondono in coordinate cartesiane? Calcolare direttamente dalla definizione gli integrali di linea $\int_\ell G \cdot dx$ e $\int_{\partial L} F \cdot dx$ e i flussi $\Phi_L(\nabla \times G)$ e $\Phi_L(H)$. Qualcuno di questi integrali si può calcolare alternativamente anche usando i teoremi classici d'integrazione vettoriale?

2. Nel piano (x, y) siano A_1 il dominio racchiuso dalla curva $(\cos t, \sin^3 t)$ per $t \in [0, 2\pi]$, e A_2 il dominio compatto nel primo quadrante compreso tra i grafici di $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{x^2}{4}$ (sotto) e x^2 e $\frac{4}{x^2}$ (sopra).

(i) Usando la formula di Green, calcolare l'area di A_1 (provare anche in coordinate cartesiane) e l'integrale $\int_{A_1} x^2\, dx\, dy$.

(ii) Dimostrare che $(u, v) = (\frac{y}{x^2}, x^2 y)$ rappresenta un cambio di coordinate nel primo quadrante; calcolare poi l'area di A_2 in tre modi (di cui uno con Green e uno col cambio proposto).

3. [(*)] Nel piano verticale (x, z) sia $A = \{(x, z) : x, z \ge 0\,,\ x + \frac{1}{2}z \le 1\,,\ x^2 + z^2 \ge \frac{4}{5}\}$, e sia U il solido ottenuto ruotando A di un giro attorno all'asse z (disegnare).

(i) Calcolare l'area di A e l'integrale $\int_A (z^2 - 2x)\, dx\, dz$ in due modi (tra cui usando Green).

(ii) Calcolare $\int_U z^\alpha\, dx\, dy\, dz$ per gli α per cui è finito; usarlo per trovare volume e baricentro di U.

(iii) Trovare il flusso del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ uscente da U e dalle singole porzioni di frontiera (guardando con un po' d'astuzia come sono messi tra loro il campo e i pezzi di frontiera si può evitare ogni calcolo).

(iv) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e le superfici esterne conica e sferica di U.

[(*)] Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

4. Sia D il solido $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \le x^2+y^2 \le 1-\frac{1}{2}z\,,\ 0 \le z \le 1\,,\ y \ge 0\}$ (ove $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$).

(i) Disegnare D e calcolarne volume, area esterna, baricentro e momento d'inerzia rispetto z.

(ii) Calcolare in due modi (di cui uno con Green) area e baricentro della base superiore S di D.

(iii) Calcolare in due modi il flusso uscente totale del campo $F(x,y,z) = (\alpha x - y, 3y - \alpha z, 0)$ attraverso la superficie esterna di D. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ tale valore coincide col volume di D?

(iv) Sia S' la faccia incurvata non cilindrica di D. Determinare l'area di S' e la circuitazione di F lungo $\Gamma = \partial S'$, quest'ultima sia direttamente che usando la formula di Kelvin-Stokes.

Soluzioni.

1. (i) (Figura 1) L'insieme $X = \{(x,y,z) : z = 1\,,\ y^2-1 \le x \le 0\}$ è un settore di forma parabolica contenuto nel piano $z = 1$, il cui bordo ∂X è il circuito fatto dalla giunzione del tratto di parabola $x = y^2-1$ tra i punti $(0,1,1)$ e $(0,-1,1)$ unito al segmento tra essi; invece $Y = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4x\,,\ y \le 0\}$ è la mezza palla di centro $(2,0,0)$ e raggio 2 data da $y \ge 0$, il cui bordo ∂Y è la superficie chiusa costituita dal disco ∂Y_1 dato da $(x-2)^2+z^2 \le 4$ nel piano $y = 0$ e dalla semisuperficie sferica ∂Y_2 di equatore (nel piano $y = 0$) $(x-2)^2+z^2 = 4$ e con $y \ge 0$. • Il bordo ∂X va percorso in senso antiorario se guardato dall'alto, dunque $\int_{\partial X} F \cdot dx = \int_{-1}^{1}(2-y,0,0\cdot 1)\cdot(0,1,0)\,dy + \int_{1}^{-1}(2-y,0,-(y^2-1)1)\cdot(2y,1,0)\,dy = \int_{-1}^{1}(2-y,0,0\cdot 1)\cdot(0,1,0)\,dy + \int_{1}^{-1}(2-y,0,-(y^2-1)1)\cdot(2y,1,0)\,dy = 0 + \int_{1}^{-1} 2y(2-y)\,dy = \frac{4}{3}$. D'altra parte, per la formula di Kelvin-Stokes (teorema del rotore) questo deve essere anche il valore del flusso $\Phi_X(\nabla\times F)$: si calcola $\nabla\times F = (0,z,1)$, dunque $\Phi_X(\nabla\times F) = \int_X \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx\,dy = \text{Area}\,X = -\int_{-1}^{1}(y^2-1)\,dy = \frac{4}{3}$.

• L'orientazione naturale del piano (x,z), data dalla base ordinata (e_1,e_3), orienta positivamente ∂Y_1 (la cui normale uscente rispetto Y è $-e_2$: infatti $(-e_2,e_1,e_3)$ è base positiva per Y, ovvero per $\mathbb{R}^3$) e negativamente ∂Y_2 (la cui normale uscente rispetto Y ha la coordinata y positiva): pertanto, indicando $D = \{(x,z) : x^2+z^2 \le 4x\}$ e considerando le parametrizzazioni $(x,0,z)$ di ∂Y_1 e $(x,\sqrt{4x-x^2-z^2},z)$ di ∂Y_2 con $(x,z) \in D$, vale $\Phi_{\partial Y}(H) = \int_D \det\begin{pmatrix} -x^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dx\,dz - \int_D \det\begin{pmatrix} -x^2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2-z^2}} & -\frac{z}{\sqrt{4x-x^2-z^2}} \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dx\,dz = 0 - \int_D(-x^2\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2-z^2}} + z(-\frac{z}{\sqrt{4x-x^2-z^2}}))\,dx\,dz = \int_D \frac{x^2(2-x)+z^2}{\sqrt{4x-x^2-z^2}}\,dx\,dz$ che, posto $(x,z) = (2+\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$, dà $\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^2 \frac{-\rho\cos\alpha\,(2+\rho\cos\alpha)^2+\rho^2\sin^2\alpha}{\sqrt{4-\rho^2}}\,\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^2 \frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}(\rho\sin^2\alpha - 4\cos\alpha - 4\rho\cos^2\alpha - 4\rho^2\cos^3\alpha)\,d\rho$; eliminando i termini con α-integrale nullo si ha $\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^2 \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}}(\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha)\,d\rho = \int_0^{2\pi}(5\sin^2\alpha - 4)\,d\alpha \int_0^2 \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho$, che posto $\xi = \sqrt{4-\rho^2}$ dà $(\frac{5}{2}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) - 4\alpha]_0^{\pi} \int_2^0 \frac{4-\xi^2}{\xi}\,(-\xi)\,d\xi = -3\pi(4\xi - \frac{1}{3}\xi^3]_0^2 = -16\pi$. Alternativamente, ricordando il teorema di Gauss possiamo invece calcolare $\int_Y (\nabla\cdot H)\,dx\,dy\,dz = \int_Y (1-2x)\,dx\,dy\,dz$, che in coordinate sferiche adattate è $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 (1-2(2+r\cos\theta\sin\varphi))\,r^2\sin\varphi\,dr$: eliminando il termine con $\cos\theta$ che ha θ-integrale nullo su $[0,\pi]$ si ottiene $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 (-3)\,r^2\sin\varphi\,dr = -3\,\text{Vol}\,(Y) = -3\frac{2}{3}\pi(2)^3 = -16\pi$, lo stesso risultato di poco fa.

(ii) Gli insiemi $\ell = \{(r,\theta,z) : r = 1\,,\ \theta = z\,,\ 0 \le z \le 1\}$ e $L = \{(r,\theta,z) : \theta = -\frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le r \le 1\,,\ 0 \le z \le r\}$, che in coordinate cilindriche sono un segmento e un triangolo, in coordinate cartesiane sono rispettivamente il tratto di elica cilindrica $(\cos z, \sin z, z)$ con $0 \le z \le 1$ e il triangolo contenuto nel semipiano $x = 0$ con $y \le 0$ di vertici $(0,0,0)$, $(0,-1,0)$ e $(0,-1,1)$. • Parametrizzando ℓ in coordinate cilindriche come $(\cos\theta, \sin\theta, \theta)$ con $0 \le \theta \le 1$ vale $\int_\ell G \cdot dx = \int_0^1 (1,-3\theta,0)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,1)\,d\theta = -\int_0^1(\sin\theta + 3\theta\cos\theta)\,d\theta = -(-\cos\theta + 3\theta\sin\theta + 3\cos\theta]_0^1 = 2 - 2\cos 1 - 3\sin 1$. • Sul piano $x = 0$ il campo $F = (2-y,0,0)$ è parallelo all'asse x e dunque ortogonale allo stesso piano $x = 0$ (in particolare anche a L e al suo bordo ∂L), pertanto $\int_{\partial L} F \cdot dx = 0$. • Si calcola $\nabla\times G = (1,-3z,0) = (3,0,0)$, dunque (scegliendo e_1 come normale positiva al triangolo L) si ha $\Phi_L(\nabla\times G) = \int_L (G\cdot e_1)\,dy\,dz = 3\,\text{Area}\,L = \frac{3}{2}$. • Sul piano $x = 0$ il campo $H = (0,0,z)$ è parallelo all'asse z e dunque parallelo allo stesso piano $x = 0$ (in particolare anche a L), pertanto $\Phi_L(H) = 0$. • Degli integrali precedenti, possono essere ricalcolati con i teoremi classici $\int_{\partial L} F \cdot dx$ (circuitazione del campo L lungo il perimetro del triangolo L) e $\Phi_L(\nabla \times G)$ (flusso di un rotore), in entrambi i casi usando la formula di Kelvin-Stokes. Il primo sarà dunque uguale anche $\Phi_L(\nabla \times F) = \Phi_L(0, z, 1)$ che è nullo perché $(0, z, 1)$ è un campo parallelo al piano $x = 0$ e dunque anche a L, mentre il secondo sarà uguale anche alla circuitazione $\int_{\partial L} G \cdot dx$, dunque (partendo dal vertice $(0, -1, 0)$ del triangolo ∂L e girando in senso antiorario) a $\int_{-1}^{0}(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)\, dy + \int_0^1(1, -3z, 0) \cdot (0, -1, 1)\, dz + \int_1^0(1, -3z, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dz = 0 + 3\int_0^1 z\, dz + 0 = \frac{3}{2}$. Entrambi i valori concordano con quanto già trovato in precedenza.

2. (i) (Figura 2) Nella situazione presentata in questo esercizio, in cui A_1 è descritto tramite il suo bordo in forma parametrica $(\cos t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, la formula di Green fornisce il modo più agevole per fare i conti richiesti. • L'area di A_1 risulta $\oint_{\partial A_1} x\, dy = \int_0^{2\pi} \cos t (3 \cos t \sin^2 t\, dt) = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2 \tau\, d\tau = \frac{3}{16}(\tau - \sin\tau\cos\tau]_0^{4\pi} = \frac{3}{4}\pi$. Proviamo, come proposto, il calcolo dell'area in coordinate cartesiane: se $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ dalle equazioni parameriche si ricava che $x = \sqrt{1 - y^{2/3}}$, dunque per evidenti ragioni di simmetria si ha che l'area di A_1 risulta $4\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^{2/3}}} dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 - y^{2/3}}\, dy$, un integrale binomio. Posto $\frac{1-y^{2/3}}{y^{2/3}} = u^2$, sostituendo si arriva a $12\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(u^2+1)^3}\, du$. Ora, col metodo di Hermite si ricava che $\frac{u^2}{(u^2+1)^3} = \frac{1}{8}(\frac{1}{u^2+1} + (\frac{u^3-u}{(u^2+1)^2})')$, pertanto il nostro conto continua come $12\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{u^2+1} + (\frac{u^3-u}{(u^2+1)^2})')\, du = \frac{3}{2}(\operatorname{arctg} u + \frac{u^3-u}{(u^2+1)^2}]_0^1 = \frac{3\pi}{4}$, come già trovato in precedenza. • Con Green l'integrale $\int_{A_1} x^2\, dx\, dy$ diventa $\oint_{\partial A_1} \frac{1}{3}x^3\, dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos^3 t(3\cos t \sin^2 t\, dt) = \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi}(\sin^2 t - 2\sin^4 t + \sin^6 t)\, dt = \pi - 2\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{8}\pi = \frac{\pi}{8}$.(†)

(ii) Da $(u, v) = (\frac{y}{x^2}, x^2 y)$ si ricava $(x, y) = \phi(u, v) = (\sqrt[4]{v/u}, \sqrt{uv})$, dunque la funzione ϕ è una biiezione del primo quadrante in sè; lo jacobiano $\mathsf{J}_\phi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4u}\sqrt[4]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{4\sqrt[4]{uv^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}$ ha determinante $-\frac{1}{4\sqrt[4]{u^3 v}} < 0$, dunque effettivamente si tratta di un cambio di coordinate. L'insieme A_2 è definito da $\frac{1}{4}x^2 \le y \le x^2$ e $\frac{1}{x^2} \le y \le \frac{4}{x^2}$, che corrispondono a $\frac{1}{4} \le u \le 1$ e $\frac{1}{\le} v \le 4$: l'area di A_2 risulta allora $\int_{A_2} dx\, dy = \int_{\frac{1}{4}}^1 du \int_1^4 \frac{1}{4\sqrt[4]{u^3 v}}\, dv = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^1 u^{-\frac{3}{4}}\, du \int_1^4 v^{-\frac{1}{4}}\, dv = \frac{1}{4}(4u^{\frac{1}{4}}]_{\frac{1}{4}}^1\, (\frac{4}{3}v^{\frac{3}{4}}]_1^4 = \frac{4(5-3\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$. Il conto cartesiano, che è praticamente lo stesso che si farebbe con Green calcolando $-\int_{\partial A_2} y\, dx$, è $\int_1^{\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx + \int_{\sqrt{2}}^2(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{4}x^2)\, dx$, e l'altro conto con Green è $\int_{\partial A_2} x\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 2\sqrt{y}\, dy + \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{y}}\, dy + \int_2^1 \sqrt{y}\, dy + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy$: entrambi portano al medesimo risultato.

3. (i) (Figura 3) L'area di $A = \{(x, z) : x, z \ge 0\,,\ x + \frac{1}{2}z \le 1\,,\ x^2 + z^2 \ge \frac{4}{5}\}$ è la differenza tra quella del triangolo rettangolo A_1 di base 1 e altezza 2 e quella del quarto di cerchio A_2 di raggio $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (inscritto nel triangolo e tangente nell'interno all'ipotenusa), dunque risulta $1 - \frac{1}{4}\frac{4}{5}\pi = 1 - \frac{\pi}{5}$; usando Green si riottiene $\int_1^0 x\, d(2 - 2x) + \int_0^{2/\sqrt{5}} x\, d(\sqrt{\frac{4}{5} - x^2}) = 2\int_0^1 x\, dx - \int_0^{2/\sqrt{5}} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{4}{5} - x^2}}\, dx =$ [posto $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha$] $1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\sin^2\alpha\, d\alpha = 1 - \frac{4}{5}\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{5}$. • Anche l'integrale $\int_A (z^2 - 2x)\, dx\, dz$ conviene calcolarlo come differenza degli integrali su A_1 e A_2: essendo $\int_{A_1}(z^2 - 2x)\, dx\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x}(z^2 - 2x)\, dz = \int_0^1(\frac{1}{3}z^3 - 2xz]_0^{2-2x}\, dx = \frac{4}{3}\int_0^1(2 - 9x + 9x^2 - 2x^3)\, dx = \frac{4}{3}(2x - \frac{9}{2}x^2 + 3x^3 - \frac{1}{2}x^4]_0^1 = 0$ e $\int_{A_2}(z^2 - 2x)\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}(r^2\sin^2\theta - 2r\cos\theta)\, r\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}r^4\sin^2\theta - \frac{2}{3}r^3\cos\theta]_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{4}{25}\sin^2\theta - \frac{16}{15\sqrt{5}}\cos\theta)\, d\theta = (\frac{2}{25}(\theta - \sin\theta\cos\theta) - \frac{16}{15\sqrt{5}}\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{25} - \frac{16}{15\sqrt{5}}$ si ottiene $\int_{A_1}(z^2 - 2x)\, dx\, dz = \frac{16}{15\sqrt{5}} - \frac{\pi}{25}$. Alternativamente, con Green, l'integrale viene trasformato in $\oint_{\partial A}(xz^2 - x^2)\, dz = 2\int_0^1(x(2 - 2x)^2 - x^2)\, dx - \int_0^{2/\sqrt{5}}(x(\frac{4}{5} - x^2) - x^2)\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{5} - x^2}}\, dx = 2\int_0^1(4x - 9x^2 + 4x^3)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha(\frac{4}{5}\cos^2\alpha) - \frac{4}{5}\sin^2\alpha)(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha)\, d\alpha$, che a conti fatti ridà lo stesso risultato.

(ii) La funzione z^α è positiva su U, dunque per Tonelli e Fubini $I_\alpha := \int_U z^\alpha\, dx\, dy\, dz$ sarà uguale (finito o no) a un iterato. Detti U_1 e U_2 i solidi ottenuti ruotando rispettivamente A_1 e A_2, converrà calcolare separatamente i due integrali su U_1 e U_2, prendendone poi la differenza. La z-sezione di U_1 (risp. U_2) ha area $(1 - \frac{1}{2}z)^2\pi$ (risp. $(\frac{4}{5} - z^2)\pi$), dunque integrando per z-fette si ha $\int_{U_1} z^\alpha\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 z^\alpha(1 - \frac{1}{2}z)^2\pi\, dz = \int_0^2 z^\alpha(z^\alpha - z^{\alpha+1} + \frac{1}{4}z^{\alpha+2})\pi\, dz =$ [se $\alpha > -1$] $(\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{z^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{1}{4}\frac{z^{\alpha+3}}{\alpha+3}]_0^2 = \frac{2^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\pi$ e $\int_{U_2} z^\alpha\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2/\sqrt{5}} z^\alpha(\frac{4}{5} - z^2)\pi\, dz =$ [se $\alpha > -1$] $\pi(\frac{4}{5}\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{z^{\alpha+3}}{\alpha+3}]_0^{2/\sqrt{5}} = \frac{2^{\alpha+4}}{5^{\frac{\alpha+3}{2}}(\alpha+1)(\alpha+3)}\pi$: pertanto I_α è la differenza di questi due valori. In particolare vale $\mathrm{Vol}\,(U) = I_0 = (\frac{2}{3}\pi - \frac{16}{15\sqrt{5}})\pi = \frac{2(25-8\sqrt{5})}{75}\pi$ e $z_G = I(1)/I(0) = \frac{13\pi}{25}\frac{75\pi}{2(25-8\sqrt{5})} = \frac{39}{2(25-8\sqrt{5})}$ (mentre $x_G = y_G = 0$ per simmetria).

(†)Se $I_n = \int \sin^{2n} t\, dt$ (con $n \ge 1$), integrando per parti si ricava che $2n\, I_n = (2n-1)\, I_{n-1} - \sin^{2n-1} t\, \cos t$: in particolare si ha $\int_0^{2\pi} \sin^{2n} t\, dt = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{2\pi} \sin^{2(n-1)} t\, dt = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}2\pi$.

(iii) Poiché $\nabla\cdot F = 1$, per il teorema di Gauss il flusso totale $\Phi_{\partial U}(F)$ del campo F uscente da U è pari a $\mathrm{Vol}\,(U) = \frac{2(25-8\sqrt{5})}{75}\pi$. La frontiera di U è costituita dai tre pezzi $(\partial U)_1$ (la superficie conica esterna), $(\partial U)_2$ (la superficie semisferica sottostante) e $(\partial U)_3$ (la corona circolare sul piano $z=0$). Notando che $F = (-y,x,0)+(0,0,z)$ si vede subito che $\Phi_{(\partial U)_3}(F) = 0$: infatti $(-y,x,0)$ è un campo parallelo a $(\partial U)_3$ e dunque a flusso nullo, mentre $(0,0,z)$ si annulla su $(\partial U)_3$. Si ha allora $\Phi_{\partial U}(F) = \Phi_{(\partial U)_1}(F) + \Phi_{(\partial U)_2}(F)$. Ora, detto B il disco-base della semisfera U_2, poiché $\nabla\cdot F = 1$ si ricava sempre per Gauss che $\Phi_{(\partial U)_2}(F) + \Phi_B(F) = \mathrm{Vol}\,(U_2) = \frac{2}{3}\pi(\frac{2}{\sqrt{5}})^3 = \frac{16}{15\sqrt{5}}\pi$: ma vale $\Phi_B(F) = 0$ (per le stesse ragioni esposte per $(\partial U)_3$), e dunque $\Phi_{(\partial U)_2}(F) = \frac{16}{15\sqrt{5}}\pi$; si ottiene allora infine che $\Phi_{(\partial U)_1}(F) = \Phi_{\partial U}(F) - \Phi_{(\partial U)_2}(F) = \mathrm{Vol}\,(U) - \Phi_{(\partial U)_2}(F) = \frac{2}{3}\pi$. A quest'ultimo valore si poteva arrivare allo stesso modo di prima notando che $\Phi_{(\partial U)_1}(F) = \mathrm{Vol}\,(U_1) = \frac{1}{3}\pi 2 = \frac{2}{3}\pi$; naturalmente erano possibili anche i (stavolta abbastanza semplici) calcoli diretti dei singoli flussi.

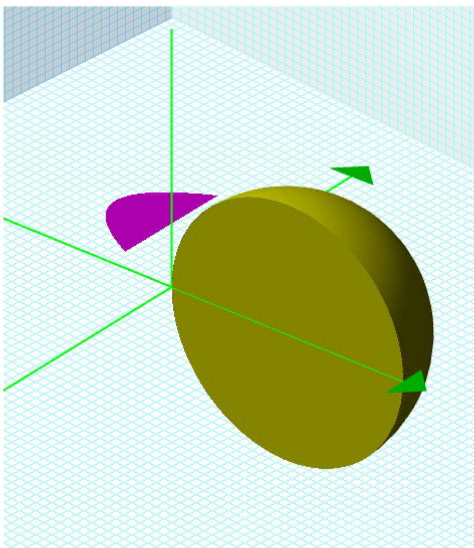
(iv) Il rotore di F è $\nabla\times F = 2\,e_3$; parametrizzando la superficie esterna conica tramite $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2(1-r))$ con $0\le r\le 1$ e $0\le\theta\le 2\pi$, il flusso uscente da essa di $\nabla\times F$ risulta $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix} dr = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 2r\,dr = 2\pi$; d'altra parte il bordo della superficie esterna conica è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano $z=0$, parametrizzata da $(\cos\theta,\sin\theta,0)$ con $0\le\theta\le 2\pi$ su cui la circuitazione di F vale $\int_0^{2\pi}(-y,x,z)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-\sin\theta,\cos\theta,0)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta = 2\pi$, valore uguale al precedente. • Parametrizzando la superficie esterna sferica tramite $(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\sin\varphi, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\sin\varphi, \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\sin\varphi)$ $0\le\theta\le 2\pi$ e $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, il flusso uscente di $\nabla\times F$ è $-\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\sin\varphi & \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\sin\varphi & \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\cos\varphi \\ 2 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\varphi\end{pmatrix} d\varphi = \frac{16}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8}{5}\pi$; d'altra parte il bordo della superficie esterna sferica è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{2}{\sqrt{5}}$ nel piano $z=0$, parametrizzata da $\frac{2}{\sqrt{5}}(\cos\theta,\sin\theta,0)$ con $0\le\theta\le 2\pi$, su cui la circuitazione di F vale come la precedente circuitazione moltiplicata per $(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 = \frac{4}{5}$, ovvero ancora $\frac{8}{5}\pi$.

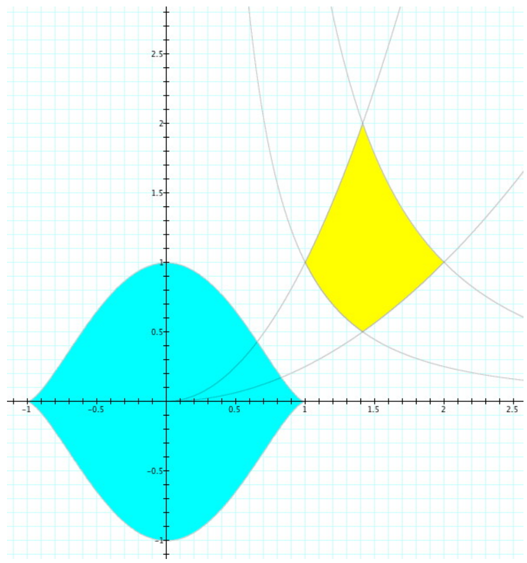
4. (i) (Figura 4) Per $0\le z\le 1$ la z-sezione del solido $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a^2 \le x^2+y^2 \le 1-\frac{1}{2}z,\ 0\le z\le 1,\ y\ge 0\}$ è la semicorona circolare di raggi a e $\sqrt{1-\frac{1}{2}z}$, che ha area $\frac{1}{2}((1-\frac{1}{2}z)-a^2)\pi$: dunque $\mathrm{Vol}\,(D) = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}z-a^2)\pi\,dz = \frac{\pi}{2}((1-a^2)z-\frac{1}{4}z^2]_0^1 = \frac{(3-4a^2)\pi}{8}$ e $z_G = \frac{8}{(3-4a^2)\pi}\int_0^1\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}z-a^2)z\pi\,dz = \frac{4}{3-4a^2}(\frac{1}{2}(1-a^2)z^2-\frac{1}{6}z^3]_0^1 = \frac{2(2-3a^2)}{3(3-4a^2)}$. Si ha poi $x_G\equiv 0$ (per simmetria), $y_G = \frac{8}{(3-4a^2)\pi}\int_D y\,dx\,dy\,dz = \frac{8}{(3-4a^2)\pi}\int_0^1 dz\int_0^\pi d\theta\int_a^{\sqrt{1-\frac{1}{2}z}}(r\sin\theta)\,r\,dr = \frac{16}{(3-4a^2)\pi}\int_0^1 dz\int_a^{\sqrt{1-\frac{1}{2}z}} r^2\,dr = \frac{16}{3(3-4a^2)\pi}\int_0^1((1-\frac{1}{2}z)^{3/2}-a^3)\,dz = \frac{16}{3(3-4a^2)\pi}(-\frac{4}{5}(1-\frac{1}{2}z)^{5/2}-a^3z]_0^1 = \frac{16}{3(3-4a^2)\pi}(\frac{4}{5}-\frac{1}{5\sqrt{2}}-a^3)$, e il momento d'inerzia (ove μ è la densità di massa) $\mathcal{I}_z = \mu\int_D(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \mu\int_0^1 dz\int_0^\pi d\theta\int_a^{\sqrt{1-\frac{1}{2}z}} r^2\,r\,dr = \frac{1}{4}\mu\pi\int_0^1((1-\frac{1}{2}z)^2-a^4)\,dz = \frac{1}{4}\mu\pi(-\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2}z)^3-a^4z]_0^1 = \frac{1}{4}\mu\pi(\frac{7}{12}-a^4)$.

(ii) L'area della base superiore, semicorona circolare di raggi a e $\frac{1}{\sqrt{2}}$, vale $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a^2)\pi = \frac{1-2a^2}{4}\pi$; con Green si ritrova $\oint_{\partial S} x\,dy = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_0^\pi a\cos\theta\,a\cos\theta\,d\theta = (\frac{1}{\sqrt{2}}-a)\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\theta = (\frac{1}{2}-a^2)(\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)]_0^\pi = \frac{1-2a^2}{4}\pi$. Il baricentro ha per simmetria $x_G = 0$, mentre $y_G = \frac{4}{(1-2a^2)\pi}\int_D y\,dx\,dy = \frac{4}{(1-2a^2)\pi}\int_0^\pi d\theta\int_a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\sin\theta\,r\,dr = \frac{2(\sqrt{2}-4a^3)}{3(1-2a^2)\pi}$. Con Green calcoliamo l'integrale $\int_D y\,dx\,dy = \oint_{\partial S} xy\,dy = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_0^\pi a\cos\theta\,a\sin\theta\,a\cos\theta\,d\theta = (\frac{1}{2\sqrt{2}}-a^3)\int_0^\pi\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = (\frac{1}{2\sqrt{2}}-a^3)(-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi = \frac{2}{3}(\frac{1}{2\sqrt{2}}-a^3) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-4a^3)}{6}$, che diviso per l'area $\frac{1-2a^2}{4}\pi$ ridà il risultato precedente.

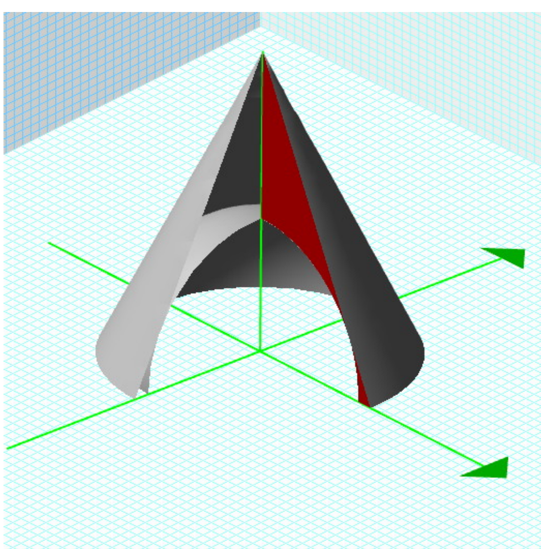
(iii) Il flusso uscente totale del campo $F(x,y,z) = (\alpha x - y, 3y-\alpha z, 0)$ attraverso la superficie esterna di D è dato, in base al teorema di Gauss, da $\int_D(\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = (\alpha+3)\,\mathrm{Vol}\,(D) = (\alpha+3)\frac{(3-4a^2)\pi}{8}$: dunque il volume di D si ritroverà per $\alpha+3 = 1$, ovvero per $\alpha = -2$. Potremmo naturalmente calcolare i flussi del campo F attraverso le varie porzioni del campo F. Notando che il campo è orizzontale in quanto la sua terza componente è nulla, il flusso attraverso le due basi è certamente nullo (esse sono parallele al campo). Inoltre sul piano $y=0$ il campo diventa $(\alpha x, -\alpha z, 0)$, e la sua componente normale uscente $(\alpha x,-\alpha z,0)\cdot(0,-1,0) = \alpha z$ è la stessa per entrambe le parti di superficie su tale piano: il flusso totale uscente per esse è dunque $2\int_0^1 dz\int_a^{\sqrt{1-\frac{1}{2}z}}\alpha z\,dx = 2\alpha\int_0^1 z(\sqrt{1-\frac{1}{2}z}-a)\,dz$ che, posto $1-\frac{1}{2}z = u^2$ (dunque $z = 2(1-u^2)$, da cui $dz = -4u\,du$) si ottiene $16\alpha\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u(1-u^2)(u-a)\,du$ (si omettono ulteriori calcoli). Quanto alla superficie cilindrica, parametrizzata da $(a\cos\theta, a\sin\theta, z)$ con $0\le\theta\le\pi$ e $0\le z\le 1$, il flusso uscente è $-\int_0^\pi d\theta\int_0^1 \det\begin{pmatrix} \alpha a\cos\theta - a\sin\theta & -a\sin\theta & 0 \\ 3a\sin\theta-\alpha z & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} dz$ (si omettono ulteriori calcoli). Infine, la superficie di paraboloide è parametrizzata da $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2(1-r^2))$ con $0\le\theta\le\pi$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}\le r\le 1$, e il flusso uscente è $\int_0^\pi d\theta\int_{1/\sqrt{2}}^1 \det\begin{pmatrix} (\alpha\cos\theta-\sin\theta)r & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 3r\sin\theta - 2\alpha(1-r^2) & \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & -4r & 0\end{pmatrix} dr$ (si omettono ulteriori calcoli). E la somma di questi flussi parziali dovrebbe ridare il flusso totale trovato in precedenza.

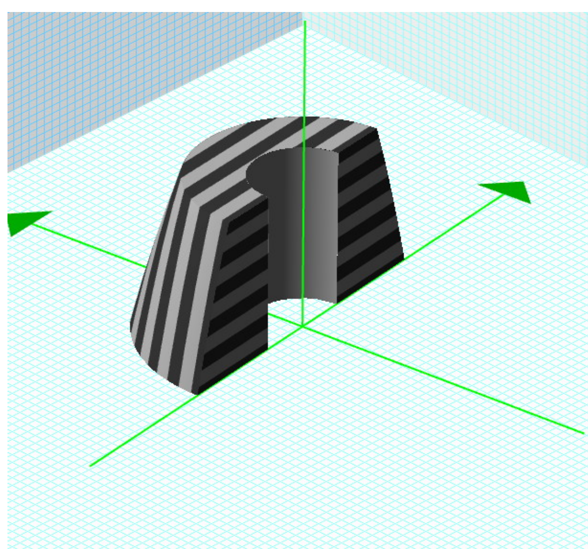
(iv) L'area della faccia anteriore di paraboloide S' di D la possiamo trovare con la parametrizzazione appena data qui sopra: l'elemento d'area risulta $r\sqrt{16r^2+1}\,dr\,d\theta$, dunque l'area è $\int_0^\pi d\theta \int_{1/\sqrt{2}}^1 r\sqrt{16r^2+1}\,dr = \frac{\pi}{48}((16r^2+1)^{3/2}]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{(17^{3/2}-27)\pi}{48}$. In base alla formula di Kelvin-Stokes, per trovare la circuitazione di F lungo $\Gamma = \partial S'$ basta calcolare il flusso uscente attraverso S' del rotore di F, che è $\nabla \times F = (\alpha, 0, 1)$, flusso dato da $\int_0^\pi d\theta \int_{1/\sqrt{2}}^1 \det \begin{pmatrix} \alpha & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & -4r & 0 \end{pmatrix} dr = \int_0^\pi d\theta \int_{1/\sqrt{2}}^1 (4\alpha r^2 \cos\theta + r)\,dr$, che eliminando il termine con $\cos\theta$ (a integrale nullo in θ) diventa $\int_0^\pi d\theta \int_{1/\sqrt{2}}^1 r\,dr = \frac{\pi}{4}$. Alternativamente, calcoliamo le quattro circuitazioni di F in modo diretto: parametrizzando in modo naturale i quattro tratti del bordo $\partial S'$ e tenendo presente la corretta orientazione (secondo la quale partiremo ad esempio dal punto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$, percorreremo l'arco alto di circonferenza fino a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$, scenderemo l'arco di parabola fino a $(1, 0, 0)$, quindi percorreremo l'arco basso di circonferenza fino a $(-1, 0, 0)$, per risalire infine a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$ lungo l'arco di parabola) si ottiene $\oint_{\partial S'} F \cdot d\ell = -\int_0^\pi (\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta - \alpha,\ 0) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, 0)\,d\theta + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (\alpha x, -2\alpha(1-x^2), 0) \cdot (1, 0, -4x)\,dx + \int_0^\pi (\alpha\cos\theta - \sin\theta,\ 3\sin\theta,\ 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta + \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} (\alpha x, -2\alpha(1-x^2), 0) \cdot (1, 0, -4x)\,dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\pi}{4}$, come ottenuto poco fa.





(1) Ex. 1. **(2)** Ex. 2.





(3) Ex. 3. **(4)** Ex. 4.