

Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie - teoria generale - 1

Gli esercizi 1-4 sono da considerarsi un ripasso delle equazioni differenziali di base già incontrate in Analisi 1. I successivi 5-10 sono più propriamente inerenti al corso di Analisi 3.

1. (a) Data l'equazione differenziale $x^3 y' + (y^2 + 4) \log |x| = 0$, si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Trovare le soluzioni costanti. Dimostrare che se $\varphi(x)$ è una soluzione per $x > 0$, allora $\psi(x) = \varphi(-x)$ è soluzione per $x < 0$. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(-1) = 0$.
(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $2x(y-1)y' = \sin x$ tale che $y(1) = 2$, e calcolarne i limiti interessanti.
2. (a) Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x^2 - 1)y' - x^2 + 2(x - y) + 5 = 0$ tale che $y(0) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Per quali α tale soluzione può essere prolungata ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?
(b) Risolvere il problema di Cauchy dato da $xy' - y = \sin x$ e dalla condizione $y(1) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Determinare, al variare di α , i limiti della soluzione in 0^+ e in $+\infty$.
3. (a) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = e^{-\alpha x} - 2\alpha \cos x$ e dalle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
(b) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, la soluzione dell'equazione differenziale $y^{(IV)} - \alpha y = x + e^{-x}$ tale che $y(0) = 0$.
4. Una sferetta di massa m è immersa in un piccolo tubo orizzontale di vetro liscio contenente del fluido in quiete; essa è congiunta ad un punto del tubo da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, e si trova ferma sopra il perno della molla. Improvvisamente il fluido viene fatto scorrere con velocità costante $v > 0$ da sinistra verso destra. Detto β il coefficiente viscoso del fluido, discutere la legge oraria del moto $x(t)$ rispetto ad un riferimento cartesiano orizzontale x con l'origine nel perno della molla.^(*)
5. ^(†) Data l'equazione differenziale $y' = y^3$, dopo aver osservato che se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (con I intervallo di $\mathbb{R}$) è soluzione allora anche $-\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ lo è, risolvere il problema di Cauchy dato da $y(0) = 1$, e mostrare, giustificando accuratamente le risposte, come da questa soluzione si ricavano tutte le soluzioni di ogni altro problema di Cauchy con $y(t_0) = y_0$, senza ulteriori integrazioni.
6. ^(†) Discutere crescita e convessità delle soluzioni dell'equazione differenziale scalare $y' = 4t^+ \sqrt{|y|}$ ove $t^+ = \max\{t, 0\}$. Risolvere poi, discutendolo al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy dato da $y(0) = y_0$.
7. ^(†) Sia data l'equazione differenziale scalare $y' = ty^2 \sin y$.

^(*) Si suggerisce di porre $\gamma = \beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega = \sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla). Naturalmente l'esito del moto dipenderà dalle relazioni reciproche tra i parametri, e quanto trovato andrà poi interpretato per vedere se è fisicamente sensato!

^(†) Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

- (a) Trovarne le soluzioni costanti; studiare la crescita delle soluzioni. Per le soluzioni $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valutare l'eventuale parità e la natura del punto con $t = 0$.
- (b) L'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale? E globale? Al di là del fatto che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale globale siano soddisfatte o meno, in questo caso c'è comunque un altro modo per mostrare che tutte le soluzioni sono in realtà definite su tutto $\mathbb{R}$: quale?
- (c) Data una soluzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $0 < \varphi(0) < \pi$ mostrare che i limiti $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ esistono finiti, e calcolarli.
8. ^(†) Data l'equazione $y'' = t^2 \sin y + y'$, scrivere il sistema del primo ordine equivalente e mostrare che le soluzioni di ogni problema di Cauchy sono globali. Trovare poi le soluzioni costanti.
9. ^(†) Si consideri l'equazione $y''y + (y')^2 = \frac{1}{2}y^2$. Denotiamo con x la variabile indipendente.
- (a) Trovare le soluzioni costanti. È vero che se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione allora lo è anche $k\varphi$, dove k è costante? E la $\psi : -I \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $\psi(x) = \varphi(-x)$?
- (b) Servendosi del cambio di variabile dipendente $\frac{1}{2}y^2 = u$, determinare esplicitamente la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, trovandone anche il dominio.
- (c) Esistono soluzioni non identicamente nulle che si annullano?
10. ^(†) Si consideri l'equazione $y'' = 2y^3 - y$.
- (a) Trovare le soluzioni costanti.
- (b) Se $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ è soluzione, lo è anche $-\varphi$? E lo è $\psi : -I \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\psi(t) = \varphi(-t)$?
- (c) Considerato il problema di Cauchy dato da $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, dire al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ quali delle sue soluzioni massimali sono pari, e quali sono dispari.
- (d) Scrivere il sistema equivalente, e trovare un integrale primo non banale per l'equazione.
- (e) Risolvere esplicitamente il problema di Cauchy dato da $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, trovando anche l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

Soluzioni.

1. (a) L'equazione differenziale $x^3 y' + (y^2 + 4) \log |x| = 0$ è definita per $x \neq 0$; le soluzioni saranno crescenti dove $y' = -\frac{(y^2+4) \log |x|}{x^3} \geq 0$, dunque per $x \leq -1$ oppure $0 < x \leq 1$ (ci aspettiamo dunque dei massimi locali in $x = \pm 1$). Se $y \equiv k$ fosse soluzione, poiché $y' \equiv 0$ dovrebbe aversi $(k^2 + 4) \log |x| = 0$ per ogni $x \neq 0$, ma nessun k permette ciò (infatti $k^2 + 4 > 0$). Dunque non vi sono soluzioni costanti. Supponiamo ora che $\phi(x)$ sia una soluzione per $x > 0$, e poniamo $\psi(x) = \phi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\phi'(-x)$ (regola della catena), per un qualsiasi $x < 0$ si ha $x^3 \psi'(x) + (\psi(x)^2 + 4) \log |x| = x^3 (-\phi'(-x)) + (\phi(-x)^2 + 4) \log |x| = (-x)^3 \phi'(-x) + (\phi(-x)^2 + 4) \log |-x| = 0$ (infatti $-x > 0$, e $\phi(t)$ è soluzione per $t > 0$, dunque in questo caso per $t = -x$): ma ciò significa che $\psi(x)$ è soluzione quando $x < 0$. Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione, che è a variabili separabili: si ottiene $\frac{1}{y^2+4} dy = -\frac{\log |x|}{x^3} dx$ da cui, integrando (al secondo membro per parti), si ottiene $\frac{1}{2} \arctg \frac{y}{2} = \frac{2 \log |x| + 1}{4x^2} + k$. Con la condizione iniziale $y(-1) = 0$ si ottiene $\frac{1}{4} \arctg 0 = \frac{1}{4} + k$, da cui $k = -\frac{1}{4}$, da cui $\arctg \frac{y}{2} = \frac{2 \log |x| + 1}{2x^2} - \frac{1}{2}$, da cui $y = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{2 \log |x| - 1}{2x^2} - \frac{1}{2} \right)$.

- (b) Da $2x(y-1)y' = \sin x$, separando le variabili si ottiene $2(y-1)dy = \frac{\sin x}{x} dx$. Ora, come noto, $\frac{\sin x}{x}$ non è integrabile elementarmente, dunque per la primitiva dobbiamo lasciare la notazione integrale; poiché è data la condizione $y(1) = 2$ converrà considerare $D(x) := \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ (la notazione $D(x)$ vorrebbe evocare il nome di Dirichlet), definita in $]0, +\infty[$. Si ottiene allora $y^2 - 2y = D(x) + k$, e imponendo che $y(1) = 2$ si ha $k = 0$. Pertanto si ha $y^2 - 2y - D(x) = 0$, da cui $y(x) = 1 + \sqrt{D(x) + 1}$ (vista la condizione iniziale, la soluzione col “meno” è spuria). I limiti notevoli di $y(x)$ sono dunque in 0^+ e in $+\infty$. Ora, poiché come noto $\frac{\sin t}{t}$ è prolungabile per continuità in $t = 0$ col valore 1, si ha che $D(x)$ è pure essa prolungabile per continuità in $x = 0$ col valore $D(0) := \int_1^0 \frac{\sin t}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt \sim -0,95$, da cui $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1 + \sqrt{D(0) + 1} \sim 1,2$; inoltre, sempre come noto, $D(x)$ è (semplicemente) integrabile in $+\infty$ per cui, detto $\ell := \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1 + \sqrt{\ell + 1}$. In realtà si può calcolare che l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ vale $\frac{\pi}{2}$ e dunque, essendo $\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt \sim \frac{\pi}{2} - 0,95 \sim 0,6$, si ottiene $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1 + \sqrt{\ell + 1} \sim 2,3$.
2. (a) L'equazione differenziale $(x^2 - 1)y' - x^2 + 2(x - y) + 5 = 0$, ovvero $(x^2 - 1)y' - 2y = x^2 - 2x - 5$, è lineare del primo ordine; per portarla nella forma normale $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{2}{x^2 - 1}$ e $q(x) = \frac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1}$ bisogna dividere per $x^2 - 1$, dunque dobbiamo per il momento assumere $x \neq \mp 1$. Poiché $P(x) = \int p(x) dx = \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ e $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \frac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = \left(\text{sign}(x^2 - 1) \right) \left(\frac{x^2 - x + 6}{x - 1} \right)$, l'integrale generale (su ciascuno degli intervalli connessi che compongono $\mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$) è $y(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \left(\left(\text{sign}(x^2 - 1) \right) \left(\frac{x^2 - x + 6}{x - 1} \right) + k \right) = \frac{x^2 - x + 6}{x + 1} + k \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. Se ora vogliamo imporre la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dobbiamo dunque essere consapevoli che ciò riguarderà solo la costante sull'intervallo $] -1, 1[$ (sul quale $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\frac{x-1}{x+1}$): si ottiene $\alpha = 6 + k$, da cui $k = \alpha - 6$, ovvero la soluzione $y(x) = \frac{x^2 - x + 6}{x + 1} + (\alpha - 6) \left(-\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{x^2 - (\alpha - 5)x + \alpha}{x + 1}$. Se si vuole avere una speranza di prolungare questa soluzione ad una su tutto $\mathbb{R}$ bisogna, per iniziare, che i limiti $\lim_{x \rightarrow \mp 1 \pm} \frac{x^2 - (\alpha - 5)x + \alpha}{x + 1}$ siano finiti: quello per $x \rightarrow 1^-$ lo è sempre e vale 3, mentre quello per $x \rightarrow -1^+$ lo è solo quando $\alpha = 2$, e vale 1. In tal caso si ottiene in effetti la soluzione $y(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = x + 2$, che è valida su tutto $\mathbb{R} \dots$ ed è anzi, come visto, l'unica ad esserlo.
- (b) Posto $x \neq 0$, l'equazione diventa $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{\sin x}{x}$. Essendo $P(x) = -\log x$ (visto che la condizione iniziale è in $x_0 = 1$, già pensiamo $x > 0$), la soluzione $y_\alpha(x)$ del problema di Cauchy con $y(1) = \alpha$ si può scrivere in forma integrale come $y_\alpha(x) = e^{-P(x)} \left(\int_1^x e^{P(t)} q(t) dt + \alpha e^{P(1)} \right) = x \left(\int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt + \alpha \right)$. Quando x tende a 0^+ l'integrale $\int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$ tende all'integrale generalizzato $\int_1^0 \frac{\sin t}{t^2} dt = -\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2} dt$, che diverge a $-\infty$ (infatti $\frac{\sin t}{t^2} \sim_{0^+} \frac{1}{t}$), dunque il $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_\alpha(x)$ è in forma indeterminata $0 \cdot \infty$; tuttavia, con de l'Hôpital si ricava $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt + \alpha}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 0^-$, dunque $y_\alpha(x)$ tende a 0^- per ogni α . Invece, quando x tende a $+\infty$ l'integrale $\int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$ tende all'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$, che converge anche assolutamente (non serve usare Abel-Dirichlet) in quanto $\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$. Detto $\ell \in \mathbb{R}$ il valore di tale integrale generalizzato, è dunque chiaro che se $\alpha \neq -\ell$ si ricava $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_\alpha(x) = \text{sign}(\ell + \alpha)\infty$. Nel caso particolare in cui $\alpha = -\ell$ il limite è in forma indeterminata $\infty \cdot 0$, solo che stavolta purtroppo de l'Hôpital non si può applicare (infatti il limite del rapporto delle derivate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sin x)$ non esiste) ...
3. (a) L'equazione caratteristica di $y'' + 2y' + y = 0$ è $t^2 + 2t + 1 = 0$, che ha radice doppia $t = -1$: dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A e^{-x} + B x e^{-x} = (A + Bx) e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Poiché i non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_2(x) = -2\alpha \cos x$ è della forma $\tilde{y}_2(x) = a \cos x + b \sin x$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = b \cos x - a \sin x$ e $\tilde{y}_2''(x) = -a \cos x - b \sin x$, imponendo che lo sia si ottiene $2(b \cos x - a \sin x) = -2\alpha \cos x$, da cui $a = 0$ e $b = -\alpha$: dunque $\tilde{y}_2(x) = -\alpha \sin x$. Quanto a $b_1(x) = e^{-\alpha x}$, se $\alpha \neq 1$ si ha che $-\alpha$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x) = a e^{-\alpha x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = -\alpha a e^{-\alpha x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = \alpha^2 a e^{-\alpha x}$, imponendo che lo sia si ottiene $(\alpha^2 - 2\alpha + 1)a e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}$, da cui $a = \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$: dunque se $\alpha \neq 1$ si ha $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} e^{-\alpha x}$. Se invece $\alpha = 1$, il numero $-\alpha = -1$ è soluzione doppia dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x) = a x^2 e^{-x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = a(2x - x^2) e^{-x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = a(2 - 4x + x^2) e^{-x}$, si ottiene $2a e^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = \frac{1}{2}$. Ricapitolando:
- (i) se $\alpha \neq 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A + Bx) e^{-x} + \frac{1}{(\alpha - 1)^2} e^{-\alpha x} - \alpha \sin x$, da cui $y'(x) = (B - A - Bx) e^{-x} - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} e^{-\alpha x} - \alpha \cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ha $0 = A + \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$ e $0 = B - A - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} - \alpha$, da cui $A = -\frac{1}{(\alpha - 1)^2}$ e $B = \alpha + \frac{1}{\alpha - 1}$;
- (ii) se invece $\alpha = 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A + Bx) e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - \sin x$, da cui $y'(x) = (B - A - Bx) e^{-x} + \frac{1}{2} (2x - x^2) e^{-x} - \cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ha $0 = A$ e $0 = B - A - 1$, da cui $A = 0$ e $B = 1$, ovvero la soluzione $y(x) = (x + \frac{1}{2} x^2) e^{-x} - \sin x$.
- (b) Se $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y^{(IV)} = x + e^{-x}$, il cui integrale generale (con quattro integrazioni successive) è

$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{x^5}{120} + e^{-x}$, al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$. Imponendo che $y(0) = 0$ si trova $A + 1 = 0$, da cui $A = -1$: dunque le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{x^5}{120} + e^{-x} - 1$, al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$.

Se invece $\alpha > 0$, posto $\beta = \sqrt[4]{\alpha}$, l'equazione caratteristica di $y^{(IV)} - \alpha y = x + e^{-x}$ ha le quattro radici distinte $\pm\beta$ e $\pm i\beta$, dunque un sistema fondamentale è dato da $\varphi_1(x) = e^{\beta x}$, $\varphi_2(x) = e^{-\beta x}$, $\varphi_3(x) = e^{i\beta x}$, $\varphi_4(x) = e^{-i\beta x}$; sostituendo $\varphi_3(x)$ e $\varphi_4(x)$ rispettivamente con la loro semisomma e con la loro differenza divisa per $2i$, possiamo anzi scegliere $\varphi_3(x) = \cos \beta x$ e $\varphi_4(x) = \sin \beta x$. Poiché 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ sarà della forma $\tilde{\varphi}_1(x) = ax + b$, e da $\tilde{\varphi}_1^{(IV)}(x) - \alpha \tilde{\varphi}_1(x) = x$ si trova $0 - \alpha(ax + b) = x$, da cui $a = -\frac{1}{\alpha}$ e $b = 0$, dunque $\tilde{\varphi}_1(x) = -\frac{1}{\alpha}x$. Quanto a $b_2(x) = e^{-x}$, vanno distinti i casi $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$: infatti nel primo caso -1 è radice (semplice) dell'equazione caratteristica, mentre nel secondo non lo è. Se $\alpha = 1$ una soluzione particolare è della forma $\tilde{\varphi}_2(x) = axe^{-x}$, e da $\tilde{\varphi}_2^{(IV)}(x) - \tilde{\varphi}_2(x) = e^{-x}$ si trova $a(x - 4)e^{-x} - axe^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = -\frac{1}{4}$, ovvero $\tilde{\varphi}_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$; se invece $\alpha \neq 1$ una soluzione particolare è della forma $\tilde{\varphi}_2(x) = ae^{-x}$, e da $\tilde{\varphi}_2^{(IV)}(x) - \alpha \tilde{\varphi}_2(x) = e^{-x}$ si trova $ae^{-x} - \alpha ae^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = \frac{1}{1-\alpha}$, ovvero $\tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{1-\alpha}e^{-x}$. Ricapitolando: se $\alpha = 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A - \frac{1}{4}x)e^x + Be^{-x} + C \cos x + D \sin x - x$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si trova $0 = A + B + C$, da cui ad esempio $A = -B - C$, e le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = (-B - C - \frac{1}{4}x)e^x + Be^{-x} + C \cos x + D \sin x - x$ al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$; se invece $\alpha > 0$ ma $\alpha \neq 1$ l'integrale generale è $y(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C \cos \beta x + D \sin \beta x - \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{1-\alpha}e^x$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si trova $0 = A + B + C + \frac{1}{1-\alpha}$, da cui ad esempio $A = -B - C - \frac{1}{1-\alpha}$, e le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = (-B - C - \frac{1}{1-\alpha})e^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C \cos \beta x + D \sin \beta x - \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{1-\alpha}e^x$ al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$.

4. Il fluido, nel suo moto, spinge la sferetta verso destra con la forza viscosa costante βv , dunque l'equazione differenziale cui obbedisce il moto $x(t)$ è $mx'' = -kx - \beta x' + \beta v$, ovvero $x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 2\gamma v$ con $\gamma = \beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega = \sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla). Una soluzione particolare dell'equazione completa è evidentemente la costante $\tilde{x} := \frac{2\gamma v}{\omega^2} = \frac{\beta v}{k}$. Quanto all'equazione omogenea, il discriminante dell'equazione caratteristica è $4(\gamma^2 - \omega^2)$, dunque vanno distinti tre casi.

(a) Se $\gamma > \omega$ (fluido denso, o molla debole), l'equazione caratteristica ha due radici reali negative distinte $\sigma' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ e $\sigma'' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, con $\sigma' < \sigma'' \leq 0$. L'integrale è $x(t) = Ae^{\sigma' t} + Be^{\sigma'' t} + \tilde{x}$, e con le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = \frac{-\sigma''}{\sigma'' - \sigma'} \tilde{x}$ e $B = \frac{\sigma'}{\sigma'' - \sigma'} \tilde{x}$, ovvero $x(t) = \tilde{x} \frac{\sigma''(1 - e^{\sigma' t}) - \sigma'(1 - e^{\sigma'' t})}{\sigma'' - \sigma'}$; in ogni caso, essendo $\sigma', \sigma'' < 0$ si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \tilde{x}$. Si noti che la velocità $x'(t) = \frac{\sigma' \sigma''}{\sigma'' - \sigma'} (e^{\sigma'' t} - e^{\sigma' t})$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t \rightarrow +\infty$.

(b) Se $\gamma = \omega$ (caso risonante), l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia negativa $-\gamma$. L'integrale è $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} + \tilde{x}$, da cui $x'(t) = (B - \gamma A - \gamma Bt)e^{-\gamma t}$, e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = -\tilde{x}$ e $B = -\gamma \tilde{x}$, da cui $x(t) = \tilde{x}(1 - (1 + \gamma t)e^{-\gamma t})$; in ogni caso, essendo $-\gamma < 0$ si ha anche qui $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \tilde{x}$, e la velocità $x'(t) = \gamma(1 + \gamma t)\tilde{x}e^{-\gamma t}$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t \rightarrow +\infty$.

(c) Infine, se $\gamma < \omega$ (fluido rarefatto, o molla forte), l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate con parte reale negativa $-\gamma$ e parte immaginaria $\pm \eta$, con $\eta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. L'integrale, scritto in forma reale, è $x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \eta t + B \sin \eta t) + \tilde{x}$, da cui $x'(t) = ((\eta B - \gamma A) \cos \eta t - (\eta A + \gamma B) \sin \eta t)e^{-\gamma t}$ e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = -\tilde{x}$ e $B = -\frac{\gamma}{\eta} \tilde{x}$, ovvero $x(t) = \tilde{x}(1 - e^{-\gamma t}(\cos \eta t + \frac{\gamma}{\eta} \sin \eta t))$; e anche qui, essendo $-\gamma < 0$, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \tilde{x}$, mentre la velocità $x'(t) = \tilde{x} \frac{\gamma^2 + \eta^2}{\eta} e^{-\gamma t} \sin \eta t$ oscilla di segno e tende a smorzarsi per $t \rightarrow +\infty$.

Ricapitolando, in tutti i casi la sferetta tende asintoticamente alla posizione $\tilde{x} = \frac{\beta v}{k}$: nei primi due casi, avvicinandosi da sinistra con velocità positiva tendente a zero; nel terzo, dopo una "fase transitoria" di oscillazioni smorzate attorno a $\tilde{x}$. Tutto ciò è fisicamente sensato: è naturale che, dopo una fase iniziale transitoria, la spinta del fluido e il richiamo della molla facciano attestare la sferetta su una posizione di compromesso.

Curiosità: i casi estremi come limite dei casi intermedi. Se nel tubo non ci fosse fluido ($\gamma = 0$) il moto avverrebbe solo per azione della forza elastica: da $x'' + \omega^2 x = 0$ si otterrebbe, come noto, $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, e con le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si avrebbe $A = B = 0$, ovvero la prevedibile quiete $x(t) \equiv 0$. Se invece non ci fosse la molla ($k = 0$) agirebbe solo il fluido, che finirebbe per trascinare via con sé la sferetta: da $x'' + 2\gamma x' = 2\gamma v$ si otterrebbe $x(t) = A + Be^{-2\gamma t} + vt$, da cui $x(t) = v - 2\gamma Be^{-2\gamma t}$, e le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ darebbero $A + B = 0$ e $v - 2\gamma B = 0$, da cui $A = -\frac{v}{2\gamma}$ e $B = \frac{v}{2\gamma}$, ovvero $x(t) = v(\frac{e^{-2\gamma t} - 1}{-2\gamma} + t)$. Si tratta infatti di un moto che tende (man mano che scema l'effetto del termine transitorio $e^{-2\gamma t}$) al rettilineo uniforme, con la velocità $x'(t) = v(1 - e^{-2\gamma t})$ che tende asintoticamente a v . Cerchiamo ora di ottenere questi due casi estremi come limite, rispettivamente, dei casi (c) e (a) trattati in precedenza.

Se il fluido è estremamente rarefatto o la molla estremamente dura ($\frac{\gamma}{\omega} \rightarrow 0^+$), la posizione $\tilde{x}$ tende a 0 , e da (c) si osserva che $x(t)$ tende effettivamente alla quiete in 0 .

Se invece il fluido è estremamente denso o la molla estremamente cedevole ($\frac{\omega}{\gamma} \rightarrow 0^+$), l'evoluzione del moto $x(t)$ in (a) è meno chiara: infatti la posizione $\tilde{x}$ tende coerentemente a $+\infty$ ma, poiché σ' e σ'' tendono rispettivamente a -2γ e a 0^- , la frazione $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma't})-\sigma'(1-e^{\sigma''t})}{\sigma''-\sigma'}$ tende a 0. Conviene allora operare come segue, sviluppando $x(t)$ (per un t fissato) rispetto alla quantità infinitesima $\varepsilon := \frac{\omega}{\gamma}$. Si ha $\sigma' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}) = -\gamma(1 + 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $\sigma'' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) = -\gamma(1 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, dunque $\sigma'' - \sigma' = 2\gamma - \gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $1 - e^{\sigma't} = 1 - e^{(-2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t} e^{(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t}(1 + \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = (1 - e^{-2\gamma t}) - \frac{1}{2}\gamma t e^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$ e $1 - e^{\sigma''t} = 1 - e^{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - (1 - \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$: sostituendo, si ha $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma't})-\sigma'(1-e^{\sigma''t})}{\sigma''-\sigma'} = \frac{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))((1-e^{-2\gamma t}) - \frac{1}{2}\gamma t e^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) - (-2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))(\frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))}{2\gamma - \gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)} = \frac{-\frac{1}{2}\gamma(1-e^{-2\gamma t})\varepsilon^2 + \gamma^2 t e^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)}{2\gamma + o_0(1)} = \frac{2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$. D'altra parte vale $\tilde{x} = \frac{2\gamma v}{\omega^2} = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}$, dunque $x(t) = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}(\frac{2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) \sim \frac{v}{2\gamma}(2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t})$, che è quanto trovato in precedenza nel caso di assenza della molla.

5. L'equazione differenziale scalare $y' = y^3$ è autonoma, e soddisfa ovviamente esistenza e unicità locale (infatti $g(y) = y^3 \in C^1$), dunque anche unicità globale; non soddisfa invece le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale. C'è l'ovvia soluzione nulla, e perciò (per unicità globale) tutte le altre soluzioni non si annullano mai; essendo $y' = y^3$ e $y'' = 3y^2 y' = 3y^5$ le soluzioni positive crescono e sono convesse, quelle negative decrescono e sono concave. Se $\varphi(x)$ è soluzione, ovvero $\varphi' = \varphi^3$, allora $(-\varphi)' = -\varphi' = -\varphi^3 = (-\varphi)^3$, dunque anche $-\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ lo è. Risolviamo ora il problema di Cauchy con dato $y(0) = 1$: separando e integrando si ottiene $\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{y^3} dy = \int_0^t d\tau$, da cui $-\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2} = t$, che dà $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$, definita in $] -\infty, \frac{1}{2}[$. Col dato $y(0) = y_0 \neq 0$, calcoli identici danno $y(t) = \varphi_{y_0}(t) := \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2 t}}$, definita in $] -\infty, \frac{1}{2y_0^2}[$. Infine, poiché l'equazione è autonoma, la famiglia delle soluzioni è invariante per traslazioni temporali: ciò implica che la soluzione del problema col dato $y(t_0) = y_0 \in \varphi_{y_0}(t - t_0)$, ovvero se $y_0 = 0$ la funzione nulla, e se $y_0 \neq 0$ la funzione $y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-2y_0^2(t-t_0)}}$.

6. (Figura 1) Nell'equazione scalare $y' = f(t, y) := 4t^+ \sqrt{|y|}$ la funzione f è continua su $\mathbb{R}^2$, ed è di classe C^1 ovunque tranne che sugli assi: ai nostri fini è importante notare che sull'asse $y = 0$ essa non è localmente lipschitziana rispetto a y , dunque esistenza e unicità locali saranno assicurate ovunque tranne che per i dati iniziali del tipo $(t_0, 0)$. È anche il caso di notare subito che per $t < 0$ si ha $f(t, y) \equiv 0$, dunque le soluzioni saranno costanti su $] -\infty, 0[$; conviene allora occuparsi delle soluzioni su $]0, +\infty[$, riservandosi in seguito di saldarle con quelle costanti su $] -\infty, 0[$. D'ora in poi dunque lavoreremo su $]0, +\infty[$, scrivendo $t^+ = t$.

Poiché $y' = 4t\sqrt{|y|} \geq 0$ le soluzioni sono ovunque crescenti, e strettamente crescenti dove non si annullano. Quanto alla convessità, posto $\sigma = \text{sign}(y)$ si ha $y' = 4(\sqrt{|y|} + t \frac{\sigma}{2\sqrt{|y|}} y') = 4(\sqrt{|y|} + 2\sigma t^2)$, pertanto le soluzioni sono strettamente convesse quando sono positive; quando invece sono negative lo sono quando $4(\sqrt{-y} - 2t^2) > 0$, ovvero quando $y < -4t^4$, e saranno concave quando $-4t^4 < y < 0$.

Passiamo ora al problema di Cauchy dato da $y(0) = y_0$. • Quando $y_0 > 0$, essendo crescente la soluzione sarà strettamente positiva su tutto $]0, +\infty[$. Da $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} = \int_0^t 2\tau d\tau$ si ricava $\sqrt{y} - \sqrt{y_0} = t^2$, da cui $y(t) = (t^2 + \sqrt{y_0})^2$, valida per $t \geq 0$; la derivata $y' = 4t(t^2 + \sqrt{y_0})$ tende a 0 quando $t \rightarrow 0^+$, dunque la soluzione si può saldare con la costante $y \equiv y_0$ per $t < 0$ ottenendo così una funzione C^1 , l'unica soluzione massimale su tutto $\mathbb{R}$. • Quando $y_0 = 0$ si è visto che non è garantita l'esistenza e unicità locale: e infatti così accade. Una soluzione, che già sappiamo essere crescente, può avere un tratto in cui vale costantemente 0 fino a un certo $t_0 > 0$; cercando poi all'intorno destro di t_0 una soluzione non nulla (dunque strettamente positiva) del problema di Cauchy con $y(t_0) = 0$ si possono separare le variabili, ottenendo $\int_0^{y(t)} \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} = \int_{t_0}^t 2\tau d\tau$, da cui $y(t) = (t^2 - t_0^2)^2$ valida per $t > t_0$. Ricapitolando, le soluzioni massimali su tutto $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy con $y(0) = 0$ si ottengono, al variare di $t_0 \geq 0$, definendole come 0 per $t \leq t_0$ e come $(t^2 - t_0^2)^2$ per $t > t_0$. • Vediamo infine il caso in cui $y_0 < 0$. Una soluzione, che già sappiamo esistere ed essere unica localmente, sarà strettamente crescente, ma per la permanenza del segno resterà negativa in un certo intorno destro di $t = 0$: separando le variabili si ottiene $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{2\sqrt{-\eta}} = \int_0^t 2\tau d\tau$, da cui $-\sqrt{-y} + \sqrt{-y_0} = t^2$, che (nell'ipotesi che $y(t) < 0$) dà $y(t) = -(t^2 - \sqrt{-y_0})^2$, valida in un intorno destro di $t = 0$ (si noti che la derivata $y'(t) = -4t(t^2 - \sqrt{-y_0})$ tende a 0 quando $t \rightarrow 0^+$, dunque la soluzione si può saldare come funzione C^1 con la costante $y \equiv y_0$ per $t < 0$). Ora, l'intorno destro di $t = 0$ cui si fa riferimento è, come esplicitamente dichiarato (altrimenti la separazione di variabili effettuata perde di senso), quello nel quale la soluzione $y(t)$ rimane < 0 : e si vede chiaramente che ciò cessa di valere a partire da $t = \sqrt[4]{-y_0}$, istante nel quale la funzione, strettamente crescente, si annulla. Da quell'istante in poi bisogna ragionare come nel punto precedente: la soluzione potrebbe restare nulla da $t = \sqrt[4]{-y_0}$ fino a un certo istante successivo $t = t_1$, per poi ripartire verso l'alto come $y(t) = (t^2 - t_1^2)^2$, valida per $t > t_1$. Ricapitolando, le soluzioni massimali su tutto $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy con $y(0) = y_0 < 0$ si ottengono, al variare di $t_1 \geq \sqrt[4]{-y_0}$, definendole come y_0 per $t \leq 0$; come $-(t^2 - \sqrt{-y_0})^2$ per $0 < t \leq \sqrt[4]{-y_0}$; come 0 per $\sqrt[4]{-y_0} < t \leq t_1$; e come $(t^2 - t_1^2)^2$ per $t > t_1$.

7. (a) (Figura 2) L'equazione $y' = ty^2 \sin y$ soddisfa ovviamente esistenza e unicità locale (infatti $ty^2 \sin y \in C^1$), dunque anche unicità globale. Una soluzione costante $y \equiv c$ deve soddisfare $0 = tc^2 \sin c$ per ogni t : dunque le soluzioni costanti sono $y \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni crescono dove $ty^2 \sin y > 0$, ovvero nelle semistricce orizzontali del tipo $]0, +\infty[\times]2k\pi, (2k+1)\pi[$ oppure del tipo $] -\infty, 0[\times](2k-1)\pi, 2k\pi[$ per $k \in \mathbb{Z}$. Data una soluzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo $\psi(t) = \varphi(-t)$: allora $\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -(-t)\varphi(-t)^2 \sin \varphi(-t) = t\psi(t)^2 \sin \psi(t)$, dunque anche ψ è soluzione; ed essendo $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$, per unicità globale deve essere $\psi = \varphi$, ovvero $\varphi(t)$ deve essere pari. Visto quanto detto sulla crescenza, se $\varphi(0) = k\pi$ allora φ è la relativa costante; mentre se $2k\pi < \varphi(0) < (2k+1)\pi$ (risp. se $(2k-1)\pi < \varphi(0) < 2k\pi$) allora $t = 0$ è punto di minimo (risp. massimo) assoluto stretto per $\varphi(t)$.
- (b) Come detto, l'equazione soddisfa ovviamente le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale; ma non quelle del teorema di esistenza e unicità globale, ne' in forma debole ne' in forma forte (a causa della presenza di y^2 la crescita non può essere sublineare). Tuttavia in questo caso si può comunque concludere che tutte le soluzioni sono in realtà definite su tutto $\mathbb{R}$: ciò è dovuto al fenomeno della fuga dai compatti. Difatti tutte le soluzioni sono limitate in y , ovvero hanno immagine limitata (le costanti $y \equiv k\pi$ lo sono ovviamente, ma lo sono anche tutte le altre perché, per unicità globale, non potranno mai toccare le quote $k\pi$ e dunque restano intrappolate in una striscia orizzontale del tipo $\mathbb{R} \times]k\pi, (k+1)\pi[$), e ciò implica per l'appunto che devono essere definite su tutto $\mathbb{R}$.
- (c) Che i limiti $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ esistano sempre finiti è ovvio per le soluzioni costanti, ma è chiaro anche per le altre: infatti, come visto, per $t \geq 0$ esse sono monotone e limitate in una striscia orizzontale. Ci resta solo da capire quanto valgano questi limiti. Prendiamo ad esempio una soluzione non costante per la quale $0 < \varphi(0) < \pi$, che resta dunque intrappolata nella striscia orizzontale $]0, \pi[$: per $t > 0$ è crescente, e se fosse $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < \pi$ si avrebbe $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t\varphi(t)^2 \sin \varphi(t) = +\infty$, il che però è incompatibile col fatto che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < +\infty$.^(†) Dunque vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi$, e allo stesso modo si mostra che anche $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \pi$. Discorso analogo per i limiti di tutte le altre soluzioni: se $2k\pi < \varphi(0) < (2k+1)\pi$ allora $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \varphi(t) = (2k+1)\pi$, mentre se $(2k-1)\pi < \varphi(0) < 2k\pi$ allora $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \varphi(t) = (2k-1)\pi$.
8. L'equazione scalare del secondo ordine $y'' = t^2 \sin y + y'$ equivale, posto $p = y'$, al sistema del primo ordine $\begin{cases} y' = p \\ p' = t^2 \sin y + p \end{cases}$, ovvero $(y, p)' = f(t; (y, p))$ con $f(t; (y, p)) = (p, t^2 \sin y + p)$. Questo sistema soddisfa ovviamente a esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale (infatti $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$), dunque ha unicità globale. Le ipotesi del teorema di esistenza (e unicità) globale sono soddisfatte per quanto riguarda il fatto che (y, p) sia del tutto libera; proviamo poi a vedere se le derivate parziali rispetto a y e a p sono limitate quando t varia in un compatto $K \subset \mathbb{R}$, ma questo è vero perché $\frac{\partial f}{\partial y} = (0, t^2 \cos y)$ e $\frac{\partial f}{\partial p} = (1, 1)$, dunque $\|\frac{\partial f}{\partial y}\| = t^2 |\cos y| \leq \max_{t \in K} (t^2)$ e $\|\frac{\partial f}{\partial p}\| = \sqrt{2}$. Pertanto tutte le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$. Quanto alle soluzioni costanti, una $y \equiv c$ lo è se e solo se $0 = t^2 \sin c + 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero se e solo se $c = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.
9. (a) Le soluzioni costanti $y \equiv c$ dell'equazione autonoma $y''y + (y')^2 = \frac{1}{2}y^2$ devono soddisfare $0 = \frac{1}{2}c^2$, da cui $c = 0$: l'unica soluzione costante è $y \equiv 0$. Possiamo allora dire con sicurezza che, per unicità globale, tutte le altre soluzioni non potranno annullarsi? La risposta è no! Infatti questo è un problema al secondo ordine, dunque l'unicità si concretizza dicendo che non ci potrà essere un'altra soluzione tale che in un certo t_0 si abbia $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.
Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione, allora $(k\varphi)''(k\varphi) + ((k\varphi)')^2 = k^2(\varphi''\varphi + (\varphi')^2) = k^2\varphi^2 = (k\varphi)^2$ e perciò anche $k\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione; e $\psi''(x)\psi(x) + (\psi'(x))^2 = \varphi''(-x)\varphi(-x) + (-\varphi'(-x))^2 = \varphi''(-x)\varphi(-x) + \varphi'(-x)^2 = \frac{1}{2}\varphi(-x)^2 = \frac{1}{2}\psi(x)^2$, così pure ψ è soluzione.
- (b) Col cambio di variabile dipendente $\frac{1}{2}y^2 = u$, da cui $yy' = u'$ e $(y')^2 + yy'' = u''$ si ottiene semplicemente $u'' = u$, da cui $u(t) = Ae^t + Be^{-t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Da $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $u(0) = \frac{1}{2}$ e $u'(0) = 0$, e questo dà $A + B = \frac{1}{2}$ e $A - B = 0$ da cui $A = B = \frac{1}{4}$: ne ricaviamo che $u(t) = \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})$, da cui $y^2 = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t$, e pertanto infine $y(t) = \sqrt{\cosh t}$, definita su tutto $\mathbb{R}$.
- (c) Iniziamo col notare che, trattandosi di un'equazione autonoma, basta porsi la domanda quando $t = 0$, ovvero se ci sia una soluzione $\varphi(t)$ non identicamente nulla tale che $\varphi(0) = 0$. Ora, scrivendo la soluzione $u(t)$ nella forma equivalente $u(t) = C \cosh t + D \sinh t$ al variare di $C, D \in \mathbb{R}$, se si cerca la soluzione del problema di Cauchy dato da $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$ si trova $u(t) = \frac{1}{2}y_0(y_0 \cosh t + 2y_1 \sinh t)$, ovvero $y(t)^2 = y_0(y_0 \cosh t + 2y_1 \sinh t)$: questo mostra con chiarezza che la risposta al quesito è negativa, perché se $y_0 = 0$ si ricava $y(t) \equiv 0$. Volendo comunque andare un po' oltre col ragionamento, per poter ricavare $y(t)$ andrà poi supposto che il secondo membro sia ≥ 0 , e questo darà un dominio che dipende da y_0 e y_1 , ma che

^(†)Questo fatto, di per sé intuitivo, è noto anche come "Criterio dell'asintoto": Se una funzione derivabile f ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ finito, allora il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, se esiste, vale 0. Ciò si dimostra subito con de l'Hôpital (che si può sempre applicare quando il denominatore tende a ∞ , qualunque cosa ci sia al numeratore): infatti $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1}$.

per dati iniziali con $y_0 \neq 0$ dovrà necessariamente dare esistenza e unicità locale: infatti all'intorno di dati con $y_0 \neq 0$ è possibile porre l'equazione in forma normale, così scatta il teorema di Cauchy-Lipschitz.

10. L'equazione $y'' = 2y^3 - y$ è scalare del secondo ordine, della forma $y'' = h(y)$ con h funzione C^∞ : è dunque assicurata esistenza e unicità locale (e unicità globale) per il problema di Cauchy dato da $y(0) = a$ e $y'(0) = b$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Le soluzioni costanti $y \equiv c$ devono soddisfare $0 = 2c^3 - c$, dunque $c = 0$ oppure $c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- (b) Se $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ è soluzione, allora $(-\varphi)'' = -\varphi'' = -(2\varphi^3 - \varphi) = 2(-\varphi)^3 - (-\varphi)$, dunque anche $-\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione. Se poi $\psi : -I \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $\psi(t) = \varphi(-t)$, si ha $\psi''(t) = \varphi''(-t) = 2\varphi(-t)^3 - \varphi(-t) = 2\psi(t)^3 - \psi(t)$, e così anche ψ è soluzione.
- (c) Una soluzione pari, essendo derivabile, deve avere necessariamente $y'(0) = b = 0$. Sia allora $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente $t = 0$) la soluzione massimale del problema di Cauchy con $\varphi(0) = a$ e $\varphi'(0) = 0$: caratterizzare il fatto che φ è pari equivale a chiedersi quando il dominio I è simmetrico e $\varphi(-t) = \varphi(t)$ per ogni $x \in I$. Ora, poco fa abbiamo visto che se $\varphi(t)$ è soluzione allora pure $\psi(t) = \varphi(-t) : -I \rightarrow \mathbb{R}$ lo è, e anche per essa vale $\psi(0) = \varphi(-0) = a$ e $\psi'(0) = -\varphi'(-0) = 0$: dunque per unicità globale^(§) le due soluzioni (massimali) φ e ψ coincidono, e $I = -I$ (ovvero I è un intervallo simmetrico). Ricapitolando, le soluzioni massimali pari sono tutte e sole quelle con $y(0) = a$ e $y'(0) = 0$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

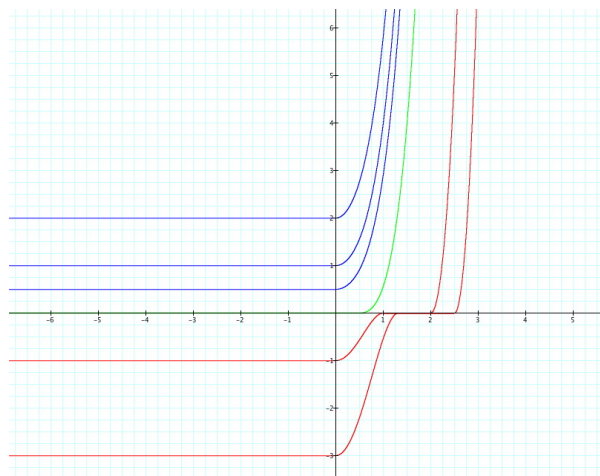
D'altra parte una soluzione dispari, essendo continua, deve avere necessariamente $y(0) = a = 0$. Poco fa abbiamo visto che Sia allora $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente $t = 0$) la soluzione massimale del problema di Cauchy con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = b$: caratterizzare il fatto che φ è dispari equivale a chiedersi quando il dominio I è simmetrico e $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ per ogni $x \in I$. Ora, poco fa abbiamo visto che se $\varphi(t)$ è soluzione allora anche $\psi(t) = \varphi(-t) : -I \rightarrow \mathbb{R}$ lo è, e che in tal caso lo è anche $\eta(t) := -\psi(t) = -\varphi(-t) : -I \rightarrow \mathbb{R}$. Notiamo inoltre che anche per $\eta(t)$ vale $\eta(0) = -\varphi(-0) = 0 = \varphi(0)$ e $\eta'(0) = -(-\varphi'(-0)) = \varphi'(0) = b$: dunque per unicità globale^(§) le due soluzioni (massimali) φ e η coincidono, e $I = -I$ (ovvero I è un intervallo simmetrico). Ricapitolando, le soluzioni massimali dispari sono tutte e sole quelle con $y(0) = 0$ e $y'(0) = b$, per ogni $b \in \mathbb{R}$.

(Si noti che, pertanto, l'unica soluzione sia pari che dispari è quella per cui $y(0) = y'(0) = 0$: nessuna sorpresa, perché si tratta ovviamente della soluzione costante nulla.)

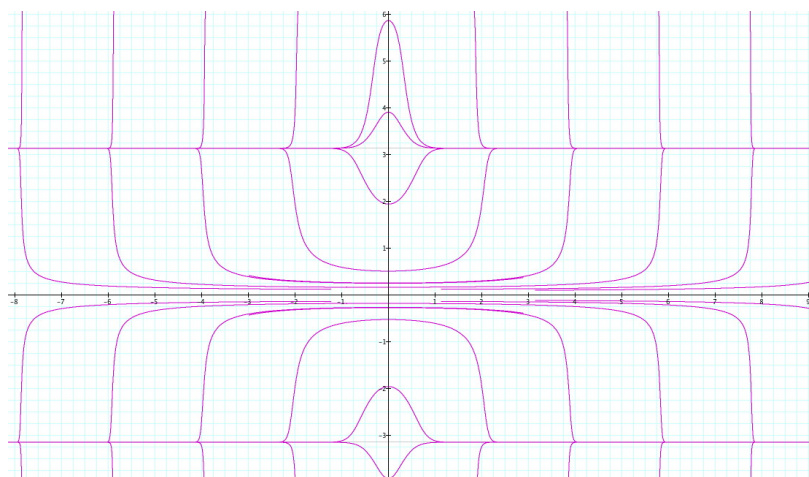
- (d) Come detto, la nostra equazione differenziale $y'' = 2y^3 - y$ è scalare del secondo ordine, della forma $y'' = h(y)$ con h funzione C^∞ : possiamo dunque considerare l'integrale dell'energia $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 - \int (2y^3 - y) dy = \frac{1}{2}((y')^2 - y^4 + y^2)$ (o, naturalmente, anche il suo doppio). Il sistema del primo ordine equivalente, posta come al solito $p = y'$, è $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2y^3 - y \end{cases}$.
- (e) La traiettoria nello spazio delle fasi $(y, p) = (y, y')$ della soluzione con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ è data dalla corrispondente curva di livello dell'integrale dell'energia: essendo $E(1, 0) = 0$ si ricava che lungo la soluzione si ha $(y')^2 - y^4 + y^2 = 0$, ovvero $(y')^2 = y^2(y^2 - 1)$. Vorremmo ora ricavarci y' , per ottenere un problema al primo ordine a variabili separabili: ma che segno scegliere, visto che il dato iniziale è proprio uno in cui y' si annulla? La prima osservazione è che, in base a (c), la soluzione che stiamo cercando è pari (infatti il dato iniziale è del tipo con $y'(0) = b = 0$), dunque basta che troviamo la soluzione in un intorno destro di $t = 0$; la seconda è che $y''(0) = 2y(0)^3 - y(0) = 1 > 0$, dunque la soluzione cercata è convessa all'intorno di $t = 0$, e questo forza y' ad essere > 0 in tutto un intorno destro di $t = 0$. Abbiamo dunque capito che in un intorno destro di $t = 0$ sarà $y' = y\sqrt{y^2 - 1}$, da cui $\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \int_0^t d\tau$. Ora si ha $\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \int \frac{dy}{y^2\sqrt{1 - (1/y)^2}} = - \int \frac{d(1/y)}{\sqrt{1 - (1/y)^2}} = \arccos(1/y) + k$, da cui ricaviamo $(\arccos(1/y))_1^{y(t)} = t$, ovvero $\arccos(1/y) = t$, da cui (tenuto presente che $y(0) = 1$) si ha $\frac{1}{y} = \cos t$, da cui $y(t) = \frac{1}{\cos t}$ (la secante, definita come soluzione massimale nell'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, che come atteso è simmetrico).^(¶)

^(§) Si ricordi che il nostro è un problema del secondo ordine, non del primo: dunque non basta che in un certo t_0 siano uguali i valori delle due soluzioni, serve anche l'uguaglianza dei valori delle loro derivate prime!

^(¶) Alla stessa soluzione si arriva naturalmente anche integrando in altri modi: ad esempio, posto $\sqrt{y^2 - 1} = u$, ovvero $y = \sqrt{1 + u^2}$, si ricava $\int_0^{\sqrt{y^2 - 1}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{y^2 - 1}) = t$, da cui (essendo $y(0) = 1$) si ha $\sqrt{y^2 - 1} = \operatorname{tg} t$, ovvero (essendo $y(0) = 1 > 0$) di nuovo $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}$. Si potrebbe anche aver posto in alternativa $y = \cosh u$.



(1) Ex. 6.



(2) Ex. 7.