Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie - teoria generale - 2

1. Sia data l'equazione differenziale $(t^2 + t)y' = y + 2e^{-t}$ nell'incognita $y(t)$.

(i) Che si può dire su esistenza e unicità locale e globale? Vi sono soluzioni costanti?

(ii) Precisare crescenza e convessità delle soluzioni a seconde delle zone del piano (t, y).

(iii) Esprimere la soluzione tale che $y(1) = \alpha$, studiandone i limiti per t che tende a 0^+ e a $+\infty$.

2. (*) È data l'equazione differenziale $\dot{x} = t \log(1 + x^2)$ nell'incognita $x(t)$.

(i) Spiegare perché l'equazione gode di unicità globale per le sue soluzioni; dimostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Studiare crescenza, convessità, parità, limiti a $\pm\infty$ delle soluzioni massimali.

(iii) Esistono soluzioni che hanno un asintoto obliquo?

3. (i) Dire se l'equazione autonoma $y'' = e^y$ ha soluzioni costanti. Usando l'integrale dell'energia, determinare (per quanto possibile) la soluzione del problema di Cauchy con $(y(0), y'(0)) = (0, \alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare un integrale primo per il sistema autonomo $\begin{cases} \dot{x} = -(x^2 + 1) \sin y \\ \dot{y} = x \end{cases}$.

4. Sia data l'equazione differenziale $y'' = y' e^y$.

(i) Mostrare che tutte le costanti sono soluzione; e che le soluzioni non costanti sono monotone.

(ii) Trovare l'integrale generale (si noti che il secondo membro è...)

5. (*) Si considera il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y \end{cases}$.

(i) Trovare le soluzioni costanti. Mostrare che l'insieme delle soluzioni è simmetrico rispetto all'asse y. Mostrare che una soluzione che inizia in un punto dell'asse y rimane sull'asse y.

(ii) Disegnare le zone del piano (x, y) in cui è crescente la $x(t)$ e quelle in cui è crescente $y(t)$.

(iii) Scrivere l'equazione totale associata al sistema, cercare per la stessa un fattore integrante del tipo $\exp(g(x^2 + y^2))$, e trovare, nel semipiano $x > 0$, un integrale primo del sistema.

(iv) Quante orbite ci sono sull'asse y? Disegnare il loro verso di percorrenza.

(v) Determinare la soluzione con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$ al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

6. (*) Sia dato il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = -y^2 \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$.

(*) Esercizio tratto da lezioni o prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

(i) Trovarne gli equilibri; trovarne un integrale primo ed abbozzare le orbite, segnandovi sopra il verso di percorrenza; in particolare, quante orbite ci sono sulla retta $y = -x$?

(ii) C'è una chiara simmetria delle orbite rispetto alla retta $y = -x$; come si esprime tale simmetria con le soluzioni? In altre parole, se $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ è soluzione massimale, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, quale altra funzione è pure soluzione?

(iii) Trovare esplicitamente la soluzione massimale del problema di Cauchy dato dall'equazione con la condizione iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

(iv) Quante soluzioni massimali ci sono con $y(0) = 0$ e $x(1) = 0$?

7. (*) È dato il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$.

(i) Trovarne gli equilibri.

(ii) Mostrare che $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ è soluzione.

(iii) Dimostrare che le soluzioni massimali con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(iv) Usando coordinate polari calcolare le soluzioni, e mostrare che nessuna soluzione con dato iniziale $(x(0), y(0)) \notin \overline{D}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

8. Risolvere le seguenti equazioni differenziali totali, calcolando in particolare le curve integrali passanti per il punto indicato (per la seconda cercare un fattore integrante del tipo $\rho(x + y^2)$, per la terza anche ponendo $y = z^\alpha$ per un opportuno $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulti omogenea):

(i) $(x \cos y - y \sin y)\, dy + (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0$, $P(1, \pi)$;

(ii) $(3x + 2y + y^2)\, dx + (x + 4xy + 5y^2)\, dy = 0$, $Q(0, -1)$;

(iii) $(x^2y^2 - 1)\, dy + 2xy^3\, dx = 0$, $R(0, 1)$.

9. È data l'equazione scalare $y^2 - x^2 + 2xy\, y' = 0$ nella funzione incognita $y(x)$.

(i) Trovare l'integrale generale ricorrendo all'equazione totale associata.

(ii) Scrivere un sistema autonomo del primo ordine equivalente all'equazione data, e dare un esempio di sua risoluzione, commentandone la relazione con le soluzioni dell'equazione.

10. Determinare il flusso e un integrale primo per i sistemi $\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x \\ \dot{y} = \sin x \end{cases}$.

Soluzioni.

1. (i) L'equazione differenziale $(t^2+t)y' = y+2e^{-t}$ nell'incognita $y(t)$ è lineare, e per $t^2+t \neq 0$ (ovvero $t \neq 0, -1$) può essere messa in forma normale: si può dunque affermare che vi sarà esistenza e unicità globale su ognuno dei tre intervalli $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$ o $I_3 =]0, +\infty[$ a seconda del problema di Cauchy assegnato. Una soluzione costante $y \equiv k$ dovrebbe soddisfare $0 = k + 2e^{-t}$ per ogni t in un intervallo, ma ciò è impossibile.

(ii) (Figura 1) Notiamo che per un'eventuale soluzione $y(t)$ definita in $t = -1$ (risp. in $t = 0$) dovrebbe valere necessariamente $y(-1) = -2e$ (risp. $y(0) = -2$). Detto ciò, per $t \neq 0, -1$ si ha $y'(t) = \frac{y+2e^{-t}}{t^2+t}$: il numeratore è positivo dove $y > -2e^{-t}$ mentre il denominatore lo è per $t < -1$ oppure per $t > 0$, e il segno di $y'(t)$ (ovvero la crescenza di $y(t)$) ne segue per quoziente. Derivando ulteriormente si ottiene $y''(t) = \frac{(y'-2e^{-t})(t^2+t)-(y+2e^{-t})(2t+1)}{(t^2+t)^2} = \frac{y+2e^{-t}-2e^{-t}(t^2+t)-(y+2e^{-t})(2t+1)}{(t^2+t)^2} = -\frac{2t}{(t^2+t)^2}(y + (t+3)e^{-t})$, dunque vale $y''(t)$ (ovvero $y(t)$ è convessa) quando $y < -(t+3)e^{-t}$ (se $t > 0$) o quando $y > -(t+3)e^{-t}$ (se $t < 0$).

(iii) (Figura 1) Scriviamo $y' + p(t)\,y = q(t)$ con $p(t) = -\frac{1}{t^2+t}$ e $q(t) = \frac{2e^{-t}}{t^2+t}$. Per $t > 0$ una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = \log\frac{t+1}{t}$, dunque una forma integrale per la soluzione tale che $y(1) = \alpha$ è $\tilde{y}(t) = e^{-P(t)}(\int_1^t e^{P(\tau)}q(\tau)\,d\tau + \alpha\, e^{P(1)}) = \frac{2t}{t+1}(\alpha + \int_1^t \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\,d\tau)$. Quanto ai limiti richiesti, l'integrale generalizzato $\int_1^0 \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\,d\tau$ diverge a $-\infty$ mentre $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\,d\tau$ converge a un limite finito e positivo $L \sim 0{,}15$: pertanto vale $\lim_{t\to+\infty} \tilde{y}(t) = 2(\alpha + L)$, mentre $\lim_{t\to0^+} \tilde{y}(t)$ è in forma indeterminata, e usando de l'Hôpital esso vale $\lim_{t\to0^+} \frac{\alpha+\int_1^t \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\,d\tau}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2t}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{e^{-t}}{t^2}}{-\frac{1}{2t^2}} = -2$ (come atteso da quanto detto in precedenza su un eventuale valore $y(0)$).

2. (i) L'equazione differenziale $\dot{x} = f(t,x) := t\,\log(1+x^2)$ gode di esistenza e unicità locali su tutto $\mathbb{R}^2$ perché f è di classe $\mathcal{C}^1$; di conseguenza gode anche di unicità globale. Inoltre la derivata $\frac{\partial f}{\partial x} = t\,\frac{2x}{1+x^2}$ è limitata su ogni striscia del tipo $K \times \mathbb{R}$ con K compatto di $\mathbb{R}$ (infatti, notando che da $0 \leq (1-|x|)^2 = 1 + x^2 - 2|x|$ discende che $\frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$, si ha che $|\frac{\partial f}{\partial x}| = |t|\frac{2|x|}{1+x^2} \leq \max_{t\in K}|t|$), dunque le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Una soluzione costante $x \equiv k$ dovrebbe soddisfare $0 = t\,\log(1+k^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il che implica $\log(1+k^2) = 0$, ovvero $k = 0$. Dunque l'unica soluzione costante è quella nulla: per unicità globale ne consegue che tutte le altre soluzioni $x(t)$ non potranno mai annullarsi, e pertanto avranno segno costante.

(ii) (Figura 2) A parte la soluzione costante $x \equiv 0$ si ha $\log(1+x^2) > 0$, dunque le soluzioni $x(t)$ saranno crescenti se e solo se $t > 0$. Derivando ambo i membri rispetto t si ottiene $\ddot{x} = \log(1+x^2) + t\,\frac{2x\dot{x}}{1+x^2} = \log(1+x^2)(1+t\,\frac{2tx}{1+x^2}) = \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}(1+x^2+2t^2x)$: se $x > 0$ si ricava che le soluzioni sono strettamente convesse, mentre se $x < 0$ la condizione è che $|t| < \sqrt{\frac{x^2+1}{|x|}}$ (vedi in figura). Se $\varphi(t)$ è una soluzione massimale (definita dunque su tutto $\mathbb{R}$), posto $\psi(t) := \varphi(-t)$ si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -(-t)\log(1+\varphi(-t)^2) = t\log(1+\psi(t)^2)$, dunque anche $\psi(t)$ è soluzione: essendo $\psi(0) = \varphi(0)$, per unicità globale non può che essere $\psi(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, in altre parole le soluzioni massimali sono pari. Quanto ai limiti a $\pm\infty$, per parità basterà esaminare il limite a $+\infty$: una funzione positiva è come visto strettamente crescente e convessa e dunque per essa tale limite sarà $+\infty$; se invece è negativa, essendo essa crescente e superiormente limitata (ricordiamo che non può annullarsi) essa avrà limite finito e negativo, che in realtà deve essere proprio 0^- perché, se fosse $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \ell < 0$, si avrebbe $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = \lim_{t\to+\infty} t\,\log(1+\varphi(t)^2) = +\infty$, incompatibile col fatto che $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ è finito[(†)].

(iii) Un'eventuale soluzione $\varphi(t)$ con asintoto obliquo dovrebbe necessariamente tendere a $+\infty$ e quindi sarebbe una soluzione positiva; e il coefficiente angolare dell'asintoto sarebbe $\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}$, che per de l'Hôpital sarebbe $\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi'(t)}{1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\,\log(1+\varphi(t))}{1}$, ma quest'ultimo limite vale $+\infty$, dunque niente da fare.

3. (i) Una soluzione costante $y \equiv k$ dovrebbe soddisfare $0 = e^k$, impossibile. L'integrale dell'energia per l'equazione è $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 - e^y$; la soluzione del problema di Cauchy con $(y(0), y'(0)) = (0, \alpha)$ è dunque caratterizzata dal valore di energia $E(0, \alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - 1$: ne segue che essa soddisfa l'equazione del primo ordine a variabili

[(†)] Ricordiamo ancora il *Criterio dell'asintoto*, facile conseguenza di de l'Hôpital: se una funzione derivabile f ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ finito, allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, se esiste, vale 0 (di conseguenza, se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ esiste ma non è nullo allora $f(x)$ non può avere limite finito).

separabili $\frac{1}{2}(y')^2 - e^y = \frac{1}{2}\alpha^2 - 1$, ovvero $y' = \sqrt{\alpha^2 - 2 + 2e^y}$ (valida, nel caso $0 < \alpha < \sqrt{2}$, fintanto che $y \geq \log(1 - \frac{1}{2}\alpha^2)$). Converrà ora distinguere i tre casi $\alpha \gtreqless \sqrt{2}$. Nel caso $\alpha = \sqrt{2}$ si ottiene $y' = \sqrt{2}\, e^{\frac{y}{2}}$, da cui $y(t) = -2\log(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t)$. Anche negli altri due casi l'integrazione può essere fatta abbastanza facilmente, e ne lasciamo i dettagli allo studente: notiamo solo che ponendo $\alpha^2 - 2 + 2e^y = \eta^2$ (da cui $e^y\,dy = \eta\,d\eta$, cioè $dy = \frac{2\eta}{\eta^2+2-\alpha^2}\,d\eta$) si ha $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-2+2e^y}}\,dy = \int \frac{2}{\eta^2+2-\alpha^2}\,d\eta$, integrale di funzione razionale in η.

(ii) L'equazione totale associata al dato sistema è $x\,dx + (x^2+1)\sin y\,dy = 0$, a variabili separabili: dividendo per x^2+1 si ottiene $\frac{x}{x^2+1}\,dx + \sin y\,dy = 0$, forma esatta la cui primitiva $\frac{1}{2}\log(x^2+1) - \cos y$ è l'integrale primo cercato.

4. (i) Che tutte le costanti siano soluzione di $y'' = y'\,e^y$ è evidente. Poi, per mostrare che le soluzioni non costanti sono monotone basta notare che, per unicità, lungo una soluzione non costante deve aversi $y'(t) \neq 0$ per ogni t (infatti, data una soluzione $\varphi(t)$, se per qualche t_0 si avesse $\varphi'(t_0) = 0$ il problema di Cauchy dato da $(y(t_0), y'(t_0)) = (\varphi(t_0), 0)$ sarebbe risolto sia da $\varphi(t)$ che dalla costante $\varphi(t_0)$ e dunque, per l'unicità globale evidentemente soddisfatta dall'equazione $y'' = y'\,e^y$, $\varphi(t)$ dovrebbe essere la costante $\varphi(t_0)$): ma allora per continuità y' deve avere segno costante, da cui la monotonia di $y(t)$.

(ii) Il secondo membro è la derivata di e^y, dunque integrando si ha $y' = e^y + k$. Separando le variabili e integrando ancora si ha $\int \frac{1}{e^y+k}\,dy = \int \frac{e^{-y}}{1+k\,e^{-y}}\,dy = t+h$, che per $k=0$ diventa $-e^{-y} = t+h$ da cui $y(t) = -\log(-t-h)$, e per $k \neq 0$ dà $-\frac{1}{k}\log(1 + k\,e^{-y}) = t+h$ da cui $y(t) = -\log(\frac{e^{-k(t+h)}-1}{k})$, soluzioni definite per $t < -h$.

5. (i) Le soluzioni costanti (ovvero gli equilibri) del sistema sono dati da $x = x^2 + y^2 + y = 0$, ovvero $O(0,0)$ e $P(0,-1)$. Se $(\alpha(t), \beta(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ è soluzione, è immediato verificare che lo è anche $(-\alpha(t), \beta(t))$: ciò mostra che l'insieme delle soluzioni è simmetrico rispetto all'asse y. Infine, se $x(0) = 0$ la prima equazione $\dot{x} = x$ ha come unica soluzione $x(t) \equiv 0$: pertanto una soluzione che inizia in un punto dell'asse y rimane sull'asse y.

(ii) Dal sistema si evince che $x(t)$ cresce nel semipiano $x > 0$, e $y(t)$ cresce dove $x^2+y^2+y = x^2+(y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > 0$ (zona esterna al cerchio di diametro OP).

(iii) L'equazione totale associata al sistema è $(x^2+y^2+y)\,dx - x\,dy = 0$. Posto $u = x^2+y^2$, cerchiamo come suggerito un fattore integrante del tipo $e^{g(u)}$, ovvero una funzione $g(u)$ tale che $\frac{\partial(e^{g(u)}(x^2+y^2+y))}{\partial y} = \frac{\partial(-e^{g(u)}\,x)}{\partial x}$, cioè $e^{g(u)}\,g'(u)\,2y\,(x^2+y^2+y) + e^{g(u)}\,(2y+1) = -e^{g(u)}\,g'(u)\,2x\,x - e^{g(u)}$, da cui si ricava $g'(u) = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{u}$, che dà $g(u) = -\log u$. Pertanto il fattore integrante risulta $e^{g(u)} = \frac{1}{x^2+y^2}$, e una primitiva sul semipiano $x > 0$ di $\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$ (ovvero la somma del differenziale dx e della nota forma argomento $\frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$, chiusa e dunque esatta sui semplicemente connessi) è $x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

(iv) Data la presenza dei due equilibri O e A, le orbite sull'asse y saranno cinque: il semiasse $T_1 = \{(0,y) : y > 0\}$, l'equilibrio $T_2 = \{O\}$, il segmento aperto $T_3 = \{(0,y) : -1 < y < 0\}$, l'equilibrio $T_4 = \{A\}$ e la semiretta $T_5 = \{(0,y) : y < -1\}$. Poiché poi, come spiegato in (i), sull'asse y la seconda equazione diventa $\dot{y} = y^2 + y$, per capire il verso di percorrenza delle orbite non costanti basterà esaminare il segno su esse di $y^2 + y$: pertanto le semirette T_1 e T_5 vengono percorse verso l'alto, e il segmento aperto T_3 verso il basso.

(v) • Se $\alpha = 0$, come detto la soluzione percorre una delle cinque orbite sull'asse y, ovvero $x(t) \equiv 0$. Se $\beta = 0$ oppure $\beta = -1$ la soluzione sarà la costante in uno dei due equilibri; negli altri casi, nell'equazione $\dot{y} = y^2 + y$ (che è di tipo logistico, cioè $\dot{y} = \nu(1 - \frac{1}{S}y)y$) si possono separare le variabili ottenendo $y(t) = \frac{\beta e^t}{1+\beta(1-e^t)}$.
• Se invece $\alpha \neq 0$, grazie a (i) possiamo limitarci al caso $\alpha > 0$. Da $\dot{x} = x$ ricaviamo subito che $x(t) = \alpha\,e^t$; ricordando poi l'integrale primo $x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, la soluzione cercata starà sulla curva $x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \alpha - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, ovvero $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x - \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, da cui $\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{\alpha e^t} = \alpha(e^t - 1) + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$. Circa il dominio di $y(t)$, ciò impone la condizione $|\alpha(e^t-1) + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}| < \frac{\pi}{2}$, cioè $1 - \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}) < e^t < 1 + \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha})$: notiamo che il secondo membro è sempre > 0, e il primo lo è se e solo se $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} < \alpha - \frac{\pi}{2}$, cosa che se $\alpha \geq \pi$ è sempre verificata mentre se $0 < \alpha < \pi$ lo è se e solo se $\frac{\beta}{\alpha} < \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg}\alpha$, ovvero $\beta < -\alpha\operatorname{cotg}\alpha$. Pertanto la soluzione è $y(t) = \alpha\,e^t\,\operatorname{tg}(\alpha(e^t-1) + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha})$, definita in $]-\infty, \log(1 + \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}))[$ quando $0 < \alpha < \pi$ e $\beta \geq -\alpha\operatorname{cotg}\alpha$, e in $]\log(1 - \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha})), \log(1 + \frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}))[$ in tutti gli altri casi.

6. (i) (Figura 3) L'unico equilibrio del sistema $\begin{cases} \dot{x} = -y^2 \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$ è l'origine $(0,0)$. L'equazione totale associata è $x^2\,dx + y^2\,dy = 0$, a variabili separate e dunque esatta: un integrale primo del sistema è dunque $F(x,y) = x^3 + y^3$. Detta Γ_k la curva integrale di equazione $x^3 + y^3 = k$, si ha $(x,y) \in \Gamma_k$ se e solo se $(-y,-x) \in \Gamma_{-k}$ (ovvero la famiglia delle curve integrali è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = -x$, essa stessa curva integrale); inoltre $(x,y) \in \Gamma_k$ se e solo se $(y,x) \in \Gamma_k$ (ovvero ciascuna curva integrale è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$). Le curve Γ_k possono essere disegnate senza difficoltà ad esempio esplicitando una delle due variabili, ottenendo quanto visibile in Figura 3: e, visto che $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$, le soluzioni del sistema le percorreranno da destra verso sinistra, nel verso delle y crescenti. Infine, vista la presenza dell'equilibrio nell'origine $O(0,0)$, le orbite sulla bisettrice $y = -x$ saranno tre: lo stesso equilibrio O, e le due semirette $y = -x$ con $x \gtrless 0$.

(ii) Come già detto, la simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$ si esprime dicendo che se $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ è soluzione massimale con $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, lo sarà anche $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ con $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (-\varphi_2(t), -\varphi_1(t))$: infatti $\psi'(t) = (\psi_1'(t), \psi_2'(t)) = (-\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t)) = (-\varphi_1(t)^2, \varphi_2(t)^2) = (-\psi_2(t)^2, \psi_1(t)^2)$.

(iii) La condizione iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 1$ è sul tratto della bisettrice $y = -x$ (che è la curva integrale Γ_0) con $x < 0$: come detto prima, la corrispondente soluzione massimale del sistema descriverà interamente tale semiretta da destra verso sinistra. Imponendo la condizione $y = -x$ si trovano le equazioni disaccoppiate $\dot{x} = -x^2$ e $\dot{y} = y^2$, che con le condizioni iniziali date si risolvono subito dando $(x(t), y(t)) = (\frac{1}{t-1}, \frac{1}{1-t})$, definita per $t \in]-\infty, 1[$.

(iv) Si noti innanzitutto che richiedere che $y(0) = 0$ e $x(1) = 0$ non rappresenta una condizione di Cauchy (gli istanti sono diversi), dunque una soluzione massimale con tale proprietà non soddisfa necessariamente esistenza e unicità. Converrà allora forse concentrarsi su cosa possa essere $x(0) = x_0$, per comprendere quale delle curve integrali potranno essere percorse da tali soluzioni. Se $x_0 = 0$, la soluzione cercata è chiaramente la costante nulla, nell'equilibrio O. Se $x_0 \neq 0$, una tale soluzione dovrebbe passare per $t = 0$ nel punto $(x_0, 0)$, per poi raggiungere l'asse y (cioè ascissa nulla) per $t = 1$: questo è possibile in linea teorica solo quando $x_0 > 0$, perché, come detto in precedenza, le orbite sono sempre percorse nel verso delle x decrescenti. Supponiamo dunque $x_0 > 0$: l?orbita percorsa sarà allora $x^3 + y^3 = x(0)^3 + y(0)^3 = x_0^3$, da cui $x(t) = (x_0^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}$, e inserendo ciò nella seconda equazione si ottiene $\dot{y} = |x_0^3 - y^3|^{\frac{2}{3}}$, a variabili separabili. Integrando tra gli istanti 0 e t e ricordando che $y(0) = 0$ si ottiene (*) $\int_0^{y(t)} |x_0^3 - y^3|^{-\frac{2}{3}}\,dy = t$: non bisogna però dimenticare che deve essere $x(1) = 0$, da cui $y(1)^3 = x_0^3 - x(1)^3 = x_0^3$ ovvero $y(1) = x_0$, il che impone la condizione (**) $\int_0^{x_0} |x_0^3 - y^3|^{-\frac{2}{3}}\,dy = 1$ che determina necessariamente l'unico $x_0 > 0$ per cui l'ascissa nulla viene raggiunta dopo 1 unità temporale. Ricapitolando, l'unica soluzione $y(t)$ si ottiene esplicitando la condizione (*) ove x_0 è determinato da (**); tali integrali non sono calcolabili in modo elementare ma, usando il cambio di variabile $\eta = x_0 y$ o introducendo la funzione Gamma di Eulero, si possono ottenere le espressioni più esplicite $x_0 = \int_0^1 (1 - \eta^3)^{-\frac{2}{3}}\,d\eta = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})^2/\Gamma(\frac{2}{3})$.

7. (i) Gli equilibri del sistema $\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$ sono le soluzioni di $x - y - x(x^2 + y^2) = x + y - y(x^2 + y^2) = 0$: confrontando si ottiene $y(x - y) = x(x + y)$, ovvero $-y^2 = x^2$, il che mostra che l'unico equilibrio è $O(0, 0)$.

(ii) Che $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ sia soluzione si vede con una banale verifica. Grazie all'unicità globale (che discende da esistenza e unicità locali in ogni punto), ne consegue che le altre soluzioni non potranno mai intersecare la circonferenza unitaria, dunque le loro orbite si troveranno o tutte dentro la palla unitaria aperta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ o tutte fuori della palla unitaria chiusa $\overline{D}$.

(iii) Come appena detto, una soluzione massimale con condizione iniziale $(x(0), y(0)) \in D$ dovrà restare confinata all'interno di D, non potendone attraversare la frontiera: in base al principio della "fuga dai compatti" (che in questo caso è più noto come "intrappolamento nei compatti") ne segue che sarà definita su tutto $\mathbb{R}$.

(iv) (Figura 4, tratta dalle note di corso di G. De Marco) Sostituendo $(x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t),\ r(t) \sin \theta(t))$ nel sistema e ricavando $\dot{r}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ (ad esempio con Cramer) si ottiene semplicemente $\begin{cases} \dot{r} = r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$: poiché da $\dot{\theta} = 1$ si ricava $\theta = t + k$ (in altre parole, l'angolo θ coincide con il tempo a meno di una traslazione), l'altra equazione differenziale scalare $\dot{r} = r - r^3$ potrebbe essere intesa direttamente nella funzione polare incognita $r(\theta)$. Questa equazione, a variabili separabili, ha le due attese soluzioni costanti $r \equiv 0$ e $r \equiv 1$ (ovvero rispettivamente l'equilibrio O e la già notata soluzione costante $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$); per il resto, separando le variabili si ottiene $\frac{1}{r - r^3} r' = 1$, che integrando dà $(\log \frac{r}{\sqrt{|r^2 - 1|}}]_{r(0)}^{r(t)} = t$; posto $\alpha := -\log \frac{r(0)}{\sqrt{|r(0)^2 - 1|}} = \log \frac{\sqrt{|r(0)^2 - 1|}}{r(0)}$ si ottiene allora $\log \frac{r}{\sqrt{|r^2 - 1|}} = t - \alpha$, da cui

$$r(t) = \begin{cases} e^{t-\alpha}/\sqrt{e^{2(t-\alpha)} + 1} & \text{se } r(0) < 1, \text{ definita su tutto } \mathbb{R}\,; \\ e^{t-\alpha}/\sqrt{e^{2(t-\alpha)} - 1} & \text{se } r(0) > 1, \text{ definita su }]\alpha, +\infty[\text{ (in questo caso si ha } \alpha < 0). \end{cases}$$

Le soluzioni con $0 < r(0) < 1$, globalmente definite, tendono a 0 per $t = \theta$ che tende a $-\infty$ e a 1^- per $t = \theta$ che tende a $+\infty$; quelle con $r(0) > 1$ tendono anch'esse a 1^+ per $t = \theta$ che tende a $+\infty$, mentre vanno all'infinito con la semiretta di argomento α come direzione asintotica per $t = \theta \to \alpha^+$ (si veda la Figura 4).

8. Denoteremo le equazioni totali proposte come $\omega = p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = 0$.

(i) L'equazione con $p(x, y) = x \sin y + y \cos y$ e $q(x, y) = x \cos y - y \sin y$ ha come unico punto singolare l'origine $O(0, 0)$; la forma ω non è esatta, tuttavia $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = 1$ non dipende da y, pertanto $e^{\int 1\,dx} = e^x$ è fattore integrante. In effetti, una primitiva di $e^x \omega$ risulta $F(x, y) = e^x((x - 1) \sin y + y \cos y)$, dunque le curve integrali sono $F(x, y) = k$ per $k \in \mathbb{R}$; imponendo il passaggio per $P(1, \pi)$ si ottiene $k = -\pi e$. Si noti che per $k = 0$ si ottiene $(x - 1) \sin y + y \cos y = 0$, ovvero l'unione dell'asse $y = 0$ e dei grafici $x = 1 - y \operatorname{cotg} y$ con $k\pi < y < (k + 1)\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$; l'asse $y = 0$, contenendo l'equilibrio O risulterà spezzato in tre orbite per le soluzioni dei sistemi autonomi associati.

(ii) L'equazione con $p(x,y)=3x+2y+y^2$ e $q(x,y)=x+4xy+5y^2$ ha come punti singolari $O(0,0)$, $A(-1,1)$ e $B(-\frac{5}{12},\frac{1}{2})$. La forma ω non è esatta, e come suggerito cerchiamo un fattore integrante del tipo $\rho(u)$ con $u=x+y^2$: dovrà essere allora $\frac{\partial(\rho(u)\,(3x+2y+y^2))}{\partial y}=\frac{\partial(\rho(u)\,(x+4xy+5y^2))}{\partial x}$, ovvero $\rho'(u)\,2y\,(3x+2y+y^2)+2(y+1)\,\rho(u)=\rho'(u)\,1\,(x+4xy+5y^2)+(4y+1)\,\rho(u)$, da cui $(2y-1)(x+y^2)\rho'(u)=(2y-1)\rho(u)$, soddisfatta se $u\rho'(u)=\rho(u)$, ovvero $\rho(u)=cu$ con $c\in\mathbb{R}$ costante. In effetti, una primitiva di $(x+y^2)\omega$ risulta $F(x,y)=(x+y)(x+y^2)^2$, dunque le curve integrali sono $F(x,y)=k$ per $k\in\mathbb{R}$; imponendo il passaggio per $Q(0,-1)$ si ottiene $k=-1$. Notiamo che per $k=0$ si ottiene $(x+y)(x+y^2)^2=0$, ovvero l'unione della bisettrice $x=-y$ e della parabola $x=-y^2$, che contiene due dei tre punti singolari (ovvero O e A); il terzo punto singolare B sta sulla curva di livello $k=\frac{1}{432}$.

(iii) L'equazione con $p(x,y)=2xy^3$ e $q(x,y)=x^2y^2-1$ non ha punti singolari. La forma ω non è esatta; tuttavia, dopo aver notato che $y=0$ è curva integrale, si può calcolare che $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x})=-\frac{1}{2xy^3}(6xy^2-2xy^2)=-\frac{2}{y}$ non dipende da x, pertanto $e^{\int(-\frac{2}{y})\,dy}=\frac{1}{y^2}$ è fattore integrante. In effetti, una primitiva di $\frac{1}{y^2}\omega$ risulta $F(x,y)=x^2y+\frac{1}{y}$, dunque le curve integrali sono $F(x,y)=k$ per $k\in\mathbb{R}$; imponendo il passaggio per $R(0,1)$ si ottiene $k=1$. • Un procedimento alternativo era di porre $y=z^\alpha$ per un opportuno $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui risulti omogenea: si ottiene allora $(x^2z^{2\alpha}-1)\,\alpha\,z^{\alpha-1}\,dz+2xz^{3\alpha}\,dx=0$, che risulta omogenea se e solo se $\alpha=-1$, in cui diventa $2\frac{x}{z^3}\,dx+(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4})\,dz=0$, ovvero (moltiplicando per z^2) $2\frac{x}{z}\,dx+(1-\frac{x^2}{z^2})\,dz=0$. Posto $u=\frac{x}{z}$, da cui $x=uz$, si ottiene allora $2u\,(z\,du+u\,dz)+(1-u^2)\,dz=0$, ovvero $2uz\,du+(1+u^2)\,dz=0$, a variabili separabili: si ottiene infatti $\frac{2u}{1+u^2}\,du+\frac{1}{z}\,dz=0$, la cui primitiva $\log|z(1+u^2)|$ ha curve di livello che corrispondono a quelle di $F(x,y)$ trovate in precedenza.

9. (i) (Figura 5) L'equazione totale associata all'equazione scalare $y^2-x^2+2xy\,y'=0$ è $(y^2-x^2)\,dx+2xy\,dy=0$ (formalmente, si può pensare di averla ottenuta "moltiplicando ambo i membri per dx"). Essa ha come unico punto singolare l'origine $O(0,0)$, è esatta e ha primitiva $F(x,y)=3xy^2-x^3$: le curve integrali dell'equazione totale sono dunque le curve di livello $F(x,y)=k$ (notiamo che per $k=0$ si ottiene l'unione dell'asse y e delle due rette $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$). Le soluzioni della nostra equazione originale sono quelle che si ottengono esplicitando ove possibile $y(x)$: essendo $\frac{\partial F}{\partial y}=6xy$, ciò è possibile al di fuori degli assi ottenendo $y(x)=\pm\sqrt{\frac{x^3+k}{3x}}$, definita per $x<-\sqrt[3]{k}$ o per $x>0$ (se $k>0$) oppure per $x<0$ o per $x>\sqrt[3]{-k}$ (se $k<0$), mentre nel caso $k=0$ si ottengono le rette $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$, uniche soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) L'esempio più naturale di sistema autonomo del primo ordine equivalente all'equazione data è $\begin{cases}\dot{x}=2xy\\ \dot{y}=x^2-y^2\end{cases}$, di cui per il punto precedente già conosciamo le orbite: in particolare osserviamo che l'unico equilibrio è $O(0,0)$, e di conseguenza, per unicità globale, dall'asse y e dalle due rette $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ si ottengono sei diverse orbite considerando le semirette. Assegnato un dato iniziale $(x(0),y(0))=(\alpha,\beta)$, possiamo dunque determinare la relativa orbita $F(x,y)=k$ con $k=F(\alpha,\beta)$, che potrebbe aiutarci a disaccoppiare le equazioni. Ad esempio, se $(\alpha,\beta)=(\sqrt{3},-1)$ l?orbita sarà la semiretta $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ con $x>0$, equazione che sostituita in $\dot{y}=x^2-y^2$ dà $\dot{y}=2y^2$, la cui soluzione con $y(0)=-1$ è $y(t)=-\frac{1}{2t+1}$; sostituendo in $\dot{x}=2xy$ si trova allora $\dot{x}=-\frac{2x}{2t+1}$, la cui soluzione con $x(0)=\sqrt{3}$ è $x(t)=\frac{\sqrt{3}}{2t+1}$; ricapitolando, la soluzione tale che $(x(0),y(0))=(\sqrt{3},-1)$ è $(x(t),y(t))=(\frac{\sqrt{3}}{2t+1},-\frac{1}{2t+1})$. Si tratta naturalmente di una parametrizzazione della semiretta $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ con $x>0$, così come lo è $(x,-\frac{1}{\sqrt{3}}x)$ relativa alla corrispondente soluzione dell'equazione $y^2-x^2+2xy\,y'=0$: il cambio di parametro invertibile tra le due è $\theta:]-\frac{1}{2},+\infty[\to]0,+\infty[$ dato da $x=\theta(t)=\frac{\sqrt{3}}{2t+1}$.

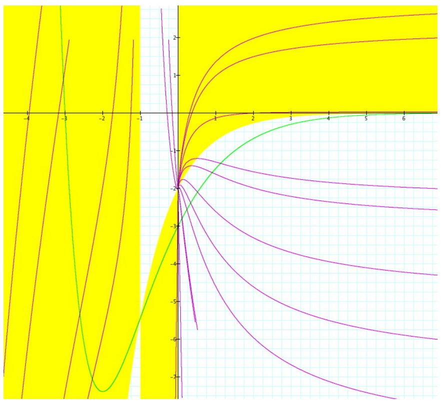
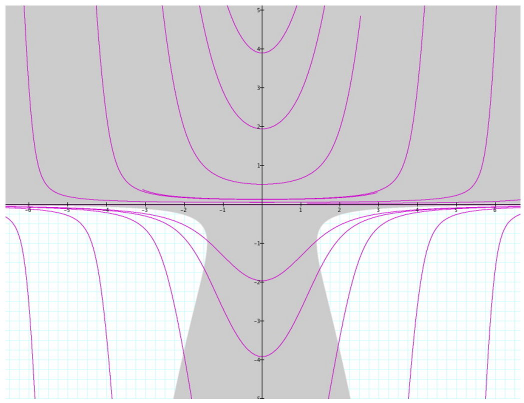
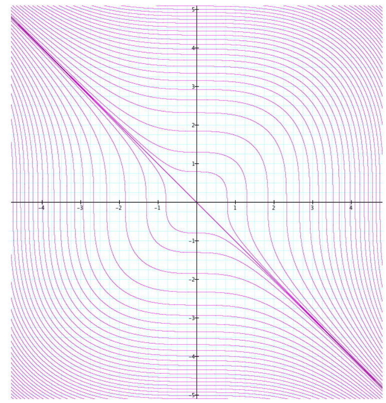
10. Ricordiamo la nozione di flusso per un sistema autonomo $(x',y')=g(x,y)$ con $g:\Omega\to\mathbb{R}^2$ localmente lipschitziano. Per $(x_0,y_0)\in\Omega$ sia $\varphi_{(x_0,y_0)}(t)$ la soluzione massimale con dato iniziale $\varphi_{(x_0,y_0)}(0)=(x_0,y_0)$: il *flusso* del sistema autonomo $(x',y')=g(x,y)$ è la funzione $\Phi(t;(x_0,y_0))=\varphi_{(x_0,y_0)}(t)$, che descrive l'evoluzione della soluzione massimale che al tempo $t=0$ vale (x_0,y_0). Se inoltre il campo g è di classe $\mathcal{C}^1$ e tutte le soluzioni massimali del sistema $(x',y')=g(x,y)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$, per ogni fissato $t\in\mathbb{R}$ si può definire il *flusso all'istante t* del sistema autonomo $(x',y')=g(x,y)$ come la funzione $\Phi^t:\Omega\to\mathbb{R}^2$ che dice "dove il campo ha trasportato un punto $(x,y)\in\Omega$ dopo un tempo t": ovvero $\Phi^t(x,y)=\varphi_{(x,y)}(t)$.

• Nel primo sistema $\begin{cases}\dot{x}=\cos^2 x\\ \dot{y}=1\end{cases}$ con la condizione iniziale (x_0,y_0), la seconda equazione dà $y(t)=t+y_0$; quanto alla prima, se $x_0\in\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi$ si ha la soluzione costante $x\equiv x_0$, altrimenti, supposto che $-\frac{\pi}{2}+k_{x_0}\pi<x_0<\frac{\pi}{2}+k_{x_0}\pi$ per un certo $k_{x_0}\in\mathbb{Z}$, separando le variabili e integrando si ottiene $\operatorname{tg}x(t)-\operatorname{tg}x_0=t$, da cui $x(t)=\operatorname{arctg}(t+\operatorname{tg}x_0)+k_{x_0}\pi$. Il flusso è pertanto

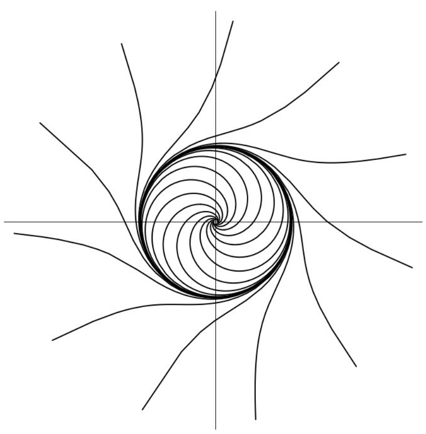
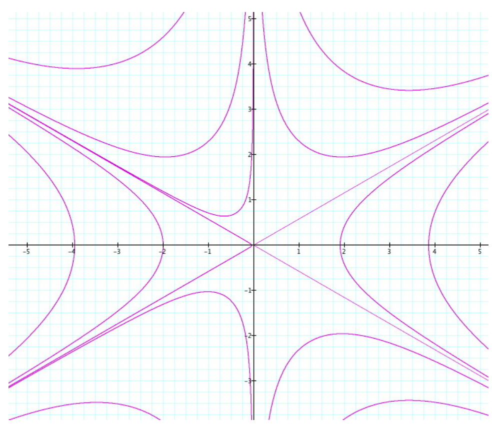
$$\Phi^t(x,y)=\begin{cases}(\operatorname{arctg}(t+\operatorname{tg}x)+k_x\pi\,,\ t+y) & \text{se } -\frac{\pi}{2}+k_x\pi<x<\frac{\pi}{2}+k_x\pi \text{ per un certo } k_x\in\mathbb{Z};\\ (x,\ t+y) & \text{se } x\in\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi.\end{cases}$$

• Nel secondo sistema $\begin{cases}\dot{x}=\cos^2 x\\ \dot{y}=\sin x\end{cases}$ con la condizione iniziale (x_0,y_0), la prima equazione non è cambiata rispetto al primo e dunque dà le stesse soluzioni. Messe nella seconda, se $x_0 = \frac{\pi}{2} + k_{x_0}\pi$ per un certo $k_{x_0} \in \mathbb{Z}$ si ricava dunque $y(t) = y_0 + (-1)^{k_{x_0}} t$; se invece $-\frac{\pi}{2} + k_{x_0}\pi < x_0 < \frac{\pi}{2} + k_{x_0}\pi$ per un certo $k_{x_0} \in \mathbb{Z}$, da $\dot{y} = \sin x$ si ricava $\dot{y} = \sin(\operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg} x_0) + k_{x_0}\pi) = (-1)^{k_{x_0}} \sin(\operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg} x_0))$ da cui, ricordando che $\sin\alpha = \operatorname{sign}(\cos\alpha)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, si ricava $\dot{y} = (-1)^{k_{x_0}} \frac{t + \operatorname{tg} x_0}{\sqrt{1+(t+\operatorname{tg} x_0)^2}}$, che integrando dà $y(t) = y_0 + (-1)^{k_{x_0}}(\sqrt{1+(t+\operatorname{tg} x_0)^2} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x_0^2}) = y_0 + (-1)^{k_{x_0}}(\sqrt{1+(t+\operatorname{tg} x_0)^2} - \frac{1}{\cos x_0})$. Dunque il flusso risulta

$$\Phi^t(x,y) = \begin{cases} (\operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg} x) + k_x\pi\,,\ y + (-1)^{k_x}(\sqrt{1+(t+\operatorname{tg} x)^2} - \frac{1}{\cos x})) & \text{se } -\frac{\pi}{2} + k_x\pi < x < \frac{\pi}{2} + k_x\pi\,; \\ (x,\, y + (-1)^{k_x} t) & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k_x\pi. \end{cases}$$

(1) Ex. 1 (in giallo le zone di crescenza; in verde la curva dei flessi). **(2)** Ex. 2 (in grigio le zone di convessità). **(3)** Ex. 6.

(4) Ex. 7. **(2)** Ex. 9.