
4 Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale

Quella che segue è intesa essere una trattazione di secondo livello delle equazioni differenziali ordinarie, in cui si assume familiarità operativa con diversi aspetti delle equazioni differenziali scalari (quelle in cui si deve determinare una sola funzione $y : I \rightarrow \mathbb{C}$, ove I è intervallo di \mathbb{R}), quali:

- le nozioni di integrale generale, equazione lineare, equazione autonoma;
- la forma normale, e che significa risolvere un problema di Cauchy (condizioni iniziali);
- le tecniche risolutive delle equazioni del primo ordine a variabili separabili e lineari;
- gli elementi fondamentali delle equazioni lineari in forma normale (struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata e dell'equazione completa; metodo di Lagrange della variazione delle costanti arbitrarie per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa; trattazione esaustiva del caso a coefficienti costanti).

Generalizzando il già noto caso scalare, ci occuperemo di equazioni differenziali ordinarie in cui si chiede di determinare una n -upla di funzioni incognite $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$:⁽⁸⁰⁾ e, avendo più incognite da determinare, è naturale fare riferimento a sistemi di equazioni. Più precisamente, considereremo *sistemi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale*

$$y' = f(t, y)$$

ove $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una funzione continua definita in un aperto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$: ovvero, scritto in forma estesa,

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

ove le componenti $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono continue.

Questa forma è particolarmente utile perché sotto essa si possono agevolmente ricomprendere vari altri casi. Ad esempio, data un'equazione scalare di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

⁽⁸⁰⁾Il caso scalare è quello con $n = 1$; inoltre, d'ora in poi useremo preferibilmente la naturale notazione t per la variabile indipendente.

una volta posto $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ essa è equivalente al sistema del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ \vdots \\ z'_{n-1} = z_n \\ z'_n = g(t, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases}$$

Più in generale, lo stesso si può fare anche con un sistema in forma normale di ordine superiore.

Esempio. Il sistema del terzo ordine

$$\begin{cases} y''_1 = g(t, y_1, y'_1, y_2, y'_2, y''_2) \\ y''_2 = h(t, y_1, y'_1, y_2, y'_2, y''_2) \end{cases}$$

una volta posto $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (y_1, y'_1, y_2, y'_2, y''_2)$ è equivalente a

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = g(t, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \\ z'_3 = z_4 \\ z'_4 = z_5 \\ z'_5 = h(t, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5). \end{cases}$$

D'ora in poi, usando il termine “equazione differenziale” e scrivendo $y' = f(t, y)$ intenderemo sempre che l'equazione può essere a valori vettoriali, dunque che in realtà si può trattare di un sistema di equazioni differenziali scalari; e useremo quando possibile il termine “scalare” per sottolineare che si sta appunto studiando un'equazione scalare.

4.1 Esistenza e unicità: i teoremi di Cauchy-Lipschitz

Un *problema di Cauchy* per un'equazione differenziale del primo ordine $y' = f(t, y)$ è l'assegnazione del valore y_0 che la funzione incognita $y(t)$ deve assumere in un prefissato t_0 . Più precisamente, se $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una funzione continua definita in un aperto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, dato un punto $(t_0, y_0) \in U$ si cercano le soluzioni di

Problema di Cauchy

$$(4.1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

ovvero le funzioni $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo I di \mathbb{R} contenente t_0 , tali che per ogni $t \in I$ si abbia $(t, \varphi(t)) \in U$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, e che $\varphi(t_0) = y_0$. È utile scegliere fin da subito $a, b > 0$ tali che, denotando per brevità qui e nel seguito

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a], \quad J_b = \{y \in \mathbb{C}^n : \|y - y_0\| \leq b\},$$

l'intorno "rettangolare" compatto $I_a \times J_b$ di (t_0, y_0) sia contenuto in U .⁽⁸¹⁾

Ci interessa studiare l'esistenza e l'unicità di una tale φ , e ottenere informazioni sull'intervallo I su cui è definita. Il primo passo è la seguente riformulazione del problema di Cauchy:

Lemma 4.1.1. *Il problema differenziale (4.1) è equivalente al problema integrale di Volterra⁽⁸²⁾*

$$(4.2) \quad y = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Dimostrazione. Se $\varphi(t)$ è soluzione di (4.1), integrando ambo i membri tra $\tau = t_0$ e $\tau = t$ si ottiene (4.2). Viceversa, se $\varphi(t)$ è soluzione di (4.2) allora $\varphi(t)$ è di classe C^1 (perché il secondo membro lo è): derivando dunque ambo i membri e ricordando il Teorema Fondamentale del Calcolo si ottiene (4.1). \square

Siamo ora in grado di enunciare il risultato di esistenza e unicità per il problema di Cauchy; per la dimostrazione servirà ricordare la nozione di completezza negli spazi metrici, e in particolare il Lemma delle Contrazioni (vedi Appendice A.1, Teorema A.1.4).

Teorema 4.1.2. (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale) *Se in $I_a \times J_b$ la funzione continua f è anche lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a t , cioè se*

$$\exists L > 0 : \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in I_a \quad \forall y_1, y_2 \in J_b$$

allora esistono $0 < \delta \leq a$ e un'unica soluzione $\varphi : I_\delta \rightarrow J_b$ di classe C^1 di (4.1)-(4.2).

Dimostrazione. Sia $M = \max\{\|f(t, y)\| : (t, y) \in I_a \times J_b\}$ (che esiste finito perché f è continua e $I_a \times J_b$ compatto). • Se $M = 0$ allora f è identicamente nulla e il teorema è vero con $\delta = a$ e la costante $\varphi(t) \equiv y_0$. • Se $L = 0$ allora f è costante rispetto a y , ovvero il problema è dato da $y' = f(t)$ e $y(t_0) = y_0$, che ha soluzione $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$ con $0 < \delta < \min\{a, \frac{b}{M}\}$ (qui si intende che $M = \max\{\|f(t)\| : t \in I_a\}$) per assicurare che i valori di φ siano dentro J_b : infatti se $t \in I_\delta$ allora $\|\varphi(t) - y_0\| = \|\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau)\| d\tau \leq M \int_{t_0}^t d\tau = M|t - t_0| \leq M\delta < b$. • Nel caso generale, in cui $M > 0$ e $L > 0$, scegliamo $0 < \delta < \min\{a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}\}$, e consideriamo lo spazio vettoriale $V = C^0(I_\delta, \mathbb{C}^n)$ (funzioni continue da I_δ a \mathbb{C}^n) munito della sup-norma $\|\psi\|_\infty = \max\{\|\psi(t)\| : t \in I_\delta\}$: ricordiamo (Proposizione A.1.3) che rispetto a tale norma V è completo. La palla chiusa $B = \{g \in V : \|g - y_0\|_\infty \leq b\}$ in V è anch'essa completa rispetto alla stessa norma $\|\cdot\|_\infty$ (ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio normato completo è anch'esso completo): notiamo che B è fatto precisamente da quelle funzioni $\psi : I_\delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ la cui immagine è contenuta in J_b . Definiamo allora un operatore $T : B \rightarrow B$ tramite la forma integrale di Volterra (4.2): data $\psi \in B$ poniamo $(T\psi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau$. Va subito verificato che sia effettivamente $T\psi \in B$: in effetti se $t \in I_\delta$ si ha $\|(T\psi)(t) - y_0\| = \|\int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, \psi(\tau))\| d\tau \leq \int_{t_0}^t M d\tau = M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$, dunque ci siamo. L'ultima cosa da fare è mostrare che T sia una contrazione su B , perché allora grazie al Lemma delle Contrazioni (Teorema A.1.4) esisterebbe un'unica $\varphi \in B$ tale che $T\varphi = \varphi$, il che proverebbe che φ risolve (4.2) (ovvero (4.1)). Ma questo discende dalle ipotesi date: infatti se $\psi_1, \psi_2 \in B$ e $t \in I_\delta$ ha $\|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)\| = \|\int_{t_0}^t (f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))\| d\tau \leq \int_{t_0}^t L\|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\| d\tau \leq L\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \int_{t_0}^t d\tau \leq L|t - t_0|\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \leq L\delta\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty$, da cui $\|T\psi_1 - T\psi_2\|_\infty \leq L\delta\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty$, e basta notare che $L\delta < 1$.

Postilla (importante) alla dimostrazione. Notiamo, anche per uso futuro, che in realtà la dimostrazione si può migliorare fino ad arrivare a $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ (come accadeva nel caso $L = 0$). Infatti, come visto, un tale δ assicura che sia $T : B \rightarrow B$ (ovvero che se $\psi \in B$ allora anche $T\psi \in B$). Si può

⁽⁸¹⁾Tali $a, b > 0$ esistono, perché gli intorni "rettangolari" sono una base di intorni di (t_0, y_0) e U è aperto.

⁽⁸²⁾Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 - Roma, 11 ottobre 1940)

poi dimostrare per induzione che, indicato con $T^r : B \rightarrow B$ la composizione di T con se stesso r volte, se $\psi_1, \psi_2 \in B, t \in I_\delta$ e $r \in \mathbb{N}$ si ha

$$(*) \quad \|(T^r \psi_1)(t) - (T^r \psi_2)(t)\| \leq \frac{L^r}{r!} |t - t_0|^r \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty :$$

infatti il caso $r = 1$ l'abbiamo già visto sopra, e il passo induttivo da $r - 1$ a r si fa con gli stessi passaggi, essendo $\|(T^r \psi_1)(t) - (T^r \psi_2)(t)\| = \|\int_{t_0}^t (f(\tau, (T^{r-1} \psi_1)(\tau)) - f(\tau, (T^{r-1} \psi_2)(\tau))) d\tau\| \leq \|\int_{t_0}^t \|f(\tau, (T^{r-1} \psi_1)(\tau)) - f(\tau, (T^{r-1} \psi_2)(\tau))\| d\tau\| \leq \|\int_{t_0}^t L \|(T^{r-1} \psi_1)(\tau) - (T^{r-1} \psi_2)(\tau)\| d\tau\| \leq \|\int_{t_0}^t L \frac{L^{r-1}}{(r-1)!} |\tau - t_0|^{r-1} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty d\tau\| = \frac{L^r}{(r-1)!} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \|\int_{t_0}^t |\tau - t_0|^{r-1} d\tau\| = \frac{L^r}{r!} |t - t_0|^r \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty$. Poiché poi $|t - t_0| \leq \delta$, da (*) si ricava $\|T^r \psi_1 - T^r \psi_2\|_\infty \leq \frac{(L\delta)^r}{r!} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty$. Ora, se r è abbastanza grande affinché $\frac{(L\delta)^r}{r!} < 1$ (in effetti tale successione è infinitesima qualunque sia $L\delta$) questo significa che T^r è una contrazione di B e dunque ha un punto unito in B , ovvero una funzione $\varphi \in B$ tale che $T^r \varphi = \varphi$: ma una tale φ sarà anche l'unico punto unito per T (Corollario A.1.5), e si conclude come prima. \square

Facciamo alcune osservazioni sul Teorema 4.1.2.

- Se in $I_a \times J_b$ la funzione continua f è anche di classe \mathcal{C}^1 rispetto a y (caso molto comune), allora le ipotesi di unicità ed esistenza locale sono soddisfatte, essendo come noto $L = \max\{\|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\| : (t, y) \in I_a \times J_b\}$.
- La dimostrazione del Lemma delle Contrazioni (Teorema A.1.4) mostra un procedimento costruttivo per approssimare in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ la soluzione cercata: nelle notazioni della dimostrazione del Teorema 4.1.2, basta iterare l'operatore T partendo da una qualsiasi funzione in B , ad esempio dalla costante y_0 .

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy dato dall'equazione scalare $y' = 2ty^2$ con $y(0) = -1$, che sappiamo risolvere (è a variabili separabili, e viene $\varphi(t) = -\frac{1}{t^2+1}$). Qui è $f(t, y) = 2ty^2$ e $y_0 = -1$: si ha allora $(Ty_0)(t) = -1 + \int_0^t 2\tau(-1)^2 d\tau = -1 + t^2$, poi $(T^2y_0)(t) = -1 + \int_0^t 2\tau(-1 + \tau^2)^2 d\tau = -1 + t^2 - t^4 + \frac{1}{3}t^6$, $(T^3y_0)(t) = -1 + \int_0^t 2\tau(-1 + \tau^2 - \tau^4 + \frac{1}{3}\tau^6)^2 d\tau = -1 + t^2 - t^4 + t^6 - \frac{2}{3}t^8 + \frac{1}{3}t^{10} - \frac{1}{9}t^{12} + \frac{1}{126}t^{14}, \dots$ che effettivamente convergerà a $\varphi(t) = -\frac{1}{t^2+1} = -\frac{1}{1-(-t^2)} = -(1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + (-t^2)^3 + \dots)$.

- Un classica situazione in cui le condizioni del Teorema 4.1.2 non sono sempre soddisfatte è quella dell'equazione scalare autonoma $y' = 2\sqrt{|y|}$. Se si chiede che $y(t_0) = y_0 \neq 0$ le ipotesi sono soddisfatte (si noti che $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ è di classe \mathcal{C}^1 all'intorno di (t_0, y_0) se $y_0 \neq 0$), e infatti separando le variabili si ottiene l'unica (localmente) soluzione $\varphi(t) = \sigma_0(t - t_0 + \sigma_0\sqrt{|y_0|})^2$ ove $\sigma_0 = \text{sign } y_0$. Se invece si chiede che $y(t_0) = 0$ le ipotesi non sono soddisfatte (in particolare, si noti che $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ non è di classe \mathcal{C}^1 rispetto a y all'intorno di $(t_0, 0)$), e allora non è sorprendente notare che esistono due soluzioni $\varphi_1(t) \equiv 0$ e $\varphi_2(t) = (\text{sign}(t - t_0))(t - t_0)^2$ che non coincidono in alcun intorno di $t = t_0$, il che nega l'unicità locale della soluzione. Una situazione simile si presenta per $y' = |y|^\beta$ con $0 < \beta < 1$.⁽⁸³⁾

Esercizio. Data l'equazione differenziale autonoma $y' = y\sqrt{|\log y|}$, dire per quali dati iniziali si ha esistenza e unicità locale della soluzione. Studiare la crescenza e la convessità delle soluzioni. Infine, dopo aver visto se ve ne sono di costanti, determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

⁽⁸³⁾I conti dicono che la soluzione con $y(t_0) = y_0 \neq 0$ è $\varphi(t) = \sigma_0(|y_0|^{1-\beta} + \sigma_0(1-\beta)(t-t_0))^{\frac{1}{1-\beta}}$, mentre con $y(t_0) = 0$ si hanno le due soluzioni distinte $\varphi_1(t) \equiv 0$ e $\varphi_2(t) = (1-\beta)(\text{sign}(t-t_0))|t-t_0|^{\frac{1}{1-\beta}}$.

Risoluzione. Si ha $y = f(t, y)$ con $f(t, y) = y\sqrt{|\log y|}$ continua in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Le ipotesi per esistenza e unicità locale sono soddisfatte se e solo se $y \neq 1$ (infatti f è ivi di classe \mathcal{C}^1 , mentre non è y -lipschitziana all'intorno di $y = 1$). Poiché $y' = y\sqrt{|\log y|} \geq 0$ le soluzioni saranno crescenti, e strettamente crescenti non appena avranno lasciato il valore 1. Derivando rispetto t , posto $\sigma = \text{sign}(y - 1)$ si ha $y'' = y'\sqrt{|\log y|} + y\frac{1}{2\sqrt{|\log y|}}\sigma\frac{1}{y}y' = y'(\sqrt{|\log y|} + \frac{\sigma}{2\sqrt{|\log y|}})$, che risostituendo $y' = y\sqrt{|\log y|}$ dà $y'' = \frac{1}{2}y(2|\log y| + \sigma)$: pertanto se $\sigma = 1$ (ovvero quando $y > 1$) si ha sempre $y'' > 0$, mentre se $\sigma = -1$ (ovvero quando $0 < y < 1$) si ottiene $y'' = -\frac{1}{2}y(2\log y + 1)$, che è > 0 quando $\log y < -\frac{1}{2}$, ovvero quando $0 < y < \frac{1}{\sqrt{e}}$. Dunque le soluzioni saranno strettamente convesse quando il loro valore è maggiore di 1 o compreso tra 0 e $\frac{1}{\sqrt{e}}$, e strettamente concave nella striscia $\frac{1}{\sqrt{e}} < y < 1$. L'unica soluzione costante è $y \equiv 1$; per trovare le altre, separando le variabili e integrando si ottiene $2\sigma\sqrt{|\log y|} = t - t_0$ (scritta la costante d'integrazione in questo modo, questa soluzione vale 1 per $t = t_0$). Per $y > 1$ ciò equivale a $2\sqrt{\log y} = t - t_0$, che dà $y = e^{(t-t_0)^2/4}$ per $t > t_0$; invece per $0 < y < 1$ ciò equivale a $-2\sqrt{-\log y} = t - t_0$, che dà $y = e^{-(t-t_0)^2/4}$ per $t < t_0$. Le soluzioni si ottengono allora, dati $t_0 \leq t_1$, saldando una soluzione di tipo $y = e^{-(t-t_0)^2/4}$ per $t < t_0$ (nella striscia $0 < y < 1$) con una di tipo $y = e^{(t-t_1)^2/4}$ per $t > t_1$ (nella striscia $y > 1$), eventualmente (se $t_0 < t_1$) inserendo nel mezzo su $[t_0, t_1]$ un tratto della costante $y = 1$; ma anche saldando la soluzione costante $y \equiv 1$ su $]-\infty, t_1[$ con una di tipo $y = e^{(t-t_1)^2/4}$ per $t > t_1$, o saldando una soluzione di tipo $y = e^{-(t-t_0)^2/4}$ per $t < t_0$ con la soluzione costante $y \equiv 1$ su $]t_0, +\infty[$. (vedi Figura 4.1(a)).

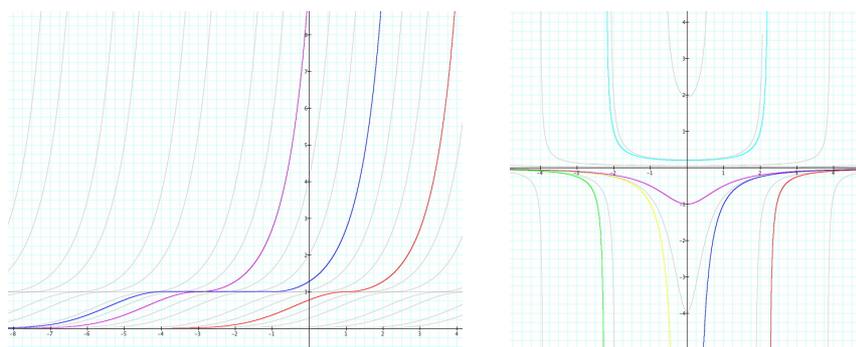


Figura 4.1: (a) $y' = y\sqrt{|\log y|}$ (non unicità per $y_0 = 1$); (b) $y' = 2ty^2$ (alcune soluzioni massimali).

- Il Teorema 4.1.2 asserisce l'unicità della soluzione in un *qualche* intorno di (t_0, y_0) : dunque, date due soluzioni di (4.1) entrambe definite in un intervallo I contenente t_0 , di certo esiste $\delta > 0$ tale che esse siano uguali su $I_\delta \subset I$, ma a priori non è detto che esse debbano coincidere su *tutto* I . Tuttavia:

Proposizione 4.1.3. *Si assuma che l'equazione $y' = f(t, y)$ abbia esistenza e unicità locale in ogni punto di U .⁽⁸⁴⁾ Allora:*

- (1) (Unicità locale in ogni punto implica unicità globale) *Due soluzioni definite su un medesimo intervallo I che coincidono in un punto di I sono necessariamente uguali su tutto I .*

⁽⁸⁴⁾ Ad esempio, come detto, ciò accade se f è di classe \mathcal{C}^1 in U .

- (2) (Le soluzioni massimali hanno dominio aperto) *Una soluzione massimale*⁽⁸⁵⁾ *ha come dominio un intervallo aperto.*
- (3) (“Fuga dai compatti” delle soluzioni massimali) *Una soluzione massimale esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U , nel senso che, data una soluzione massimale $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ (ove, come detto in (2), I è intervallo aperto) e un compatto $C \subset U$, esistono $t_-, t_+ \in I$ tali che $(t, \varphi(t)) \notin C$ per ogni $t < t_-$ e ogni $t > t_+$.*

Dimostrazione. (1) Siano $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ due soluzioni di $y' = f(t, y)$, e sia $t_0 \in I$ tale che $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Posto $I' = \{t \in I : \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$ e $I'' = \{t \in I : \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$, si ha che I' e I'' sono entrambi aperti in I : per I' ciò discende dal Teorema 4.1.2 come ribadito poco fa, mentre per I'' la ragione è la continuità di φ_1 e φ_2 . Essendo I intervallo (cioè connesso), necessariamente uno tra I' e I'' deve essere vuoto: ma I' non lo è (infatti $t_0 \in I'$), dunque lo è I'' . (2) Per iniziare, la nozione di soluzione massimale è ben definita grazie al punto precedente. Basta poi notare che l'intervallo di definizione non può avere né massimo né minimo: infatti, se ad esempio $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ fosse soluzione massimale e \tilde{t} fosse il massimo di I , allora il problema di Cauchy con dato $y(\tilde{t}) = \varphi(\tilde{t})$ avrebbe soluzione in tutto un intorno di \tilde{t} , il che permetterebbe di estendere l'intervallo di definizione di φ negandone la massimalità. (3) Omessa. \square

Esempi. (1) (Figura 4.1(b)) La già incontrata equazione $y' = 2ty^2$ ha unicità locale in ogni punto (infatti $2ty^2$ è di classe \mathcal{C}^1 su tutto \mathbb{R}^2), dunque ha anche unicità globale. Essa si integra facilmente, e ha come soluzioni la costante $y \equiv 0$ e le non costanti $y = -\frac{1}{t^2+k}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si noti che i domini massimali di tali soluzioni sono diversi a seconda di k , e più precisamente sono \mathbb{R} (quando $k > 0$), $] -\infty, 0[$ o $] 0, +\infty[$ (quando $k = 0$), e $] -\infty, -\sqrt{|k}|[$, $] -\sqrt{|k}|, \sqrt{|k}|[$ oppure $] \sqrt{|k}|, +\infty[$ (quando $k < 0$). (2) Cercando di interpretare il fenomeno della “fuga dei compatti” osservando le soluzioni di $y' = 2ty^2$, notiamo che le soluzioni massimali il cui dominio è limitato tendono all'infinito nel lato —o nei lati— in cui il dominio è limitato (ad esempio $-\frac{1}{t^2}$ in 0^- , oppure $-\frac{1}{t^2-1}$ in -1^\mp e in 1^\mp), mentre quelle limitate hanno dominio illimitato (ad esempio $-\frac{1}{t^2+1}$, che ha come dominio tutto \mathbb{R}): in tutti i casi la coppia $(t, y(t))$ non resta confinata in nessun compatto di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$. In generale, la “fuga dai compatti” implica che una soluzione limitata (ovvero, la cui immagine è limitata) deve vivere in eterno sia nel passato che nel futuro⁽⁸⁶⁾. Tale è il caso appena visto, oppure quello della soluzione del sistema $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ (ovvero $y' = f(t, y)$ con $y = (y_1, y_2)$ e $f(t, y) = (-y_2, y_1)$), che è $(y_1(t), y_2(t)) = (\cos t, \sin t)$: essa è limitata (infatti $\|y\| = 1$) ma definita su tutto \mathbb{R} .

- Sia data un'equazione $y' = f(t, y)$ con esistenza e unicità locale in ogni punto del dominio $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ di f ; per $(t_0, y_0) \in U$ denotiamo con $\varphi_{(t_0, y_0)} : I_{(t_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{C}^n$ la soluzione massimale con dato iniziale $\varphi_{(t_0, y_0)}(t_0) = y_0$. Considerato in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ il dominio $A = \{(t; t_0, y_0) : (t_0, y_0) \in U, t \in I_{(t_0, y_0)}\}$, il *flusso* dell'equazione è la funzione

$$(4.3) \quad \Phi : A \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \Phi(t; t_0, y_0) = \varphi_{(t_0, y_0)}(t).$$

In altre parole, Φ descrive cosa è diventata al tempo t la soluzione massimale che al tempo t_0 valeva y_0 . Si può dimostrare che Φ è una funzione localmente lipschitziana,

⁽⁸⁵⁾ovvero, non estendibile ad un intervallo più grande. Si noti che questa nozione ha senso grazie a (1).
⁽⁸⁶⁾È usuale impiegare l'espressione “nel passato/futuro” per intendere “prima/dopo di un certo istante di riferimento”: dunque, nel caso presente si intende che il dominio è tutto \mathbb{R} .

e che se f è di classe C^r tale è anche Φ . Scrivere il flusso di un'equazione è anche un modo particolare di esprimerne l'integrale generale.

Esempio. Come già visto, l'equazione $y' = 2ty^2$ ha esistenza e unicità locale in ogni punto e ha come soluzioni la costante $y \equiv 0$ e le non costanti $y = -\frac{1}{t^2+k}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Imponendo che $y(t_0) = y_0$, se $y_0 = 0$ si trova $y(t) \equiv 0$, mentre se $y_0 \neq 0$ si trova $k = -t_0^2 - \frac{1}{y_0}$, da cui $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0(t^2-t_0^2)}$ (che comprende anche il caso $y_0 = 0$). Il flusso è dunque $\Phi(t; t_0, y_0) = \frac{y_0}{1-y_0(t^2-t_0^2)}$.

- Il Teorema 4.1.2 fornisce una condizione sufficiente sia all'esistenza che all'unicità locale della soluzione del problema di Cauchy (ovvero $f(t, y)$ continua e localmente y -lipschitziana). Tuttavia per la sola esistenza locale (senza garanzia di unicità) della soluzione è già sufficiente che $f(t, y)$ sia continua:

Teorema 4.1.4. (Peano, esistenza locale) *Se in $I_a \times J_b$ la funzione f è continua, allora esistono $0 < \delta \leq a$ e una (non necessariamente unica) soluzione $\varphi : I_\delta \rightarrow J_b$ di classe C^1 di (4.1)-(4.2).*

Dimostrazione. L'idea è completamente diversa da quella vista per il Teorema 4.1.2: ne diamo solo un rapido riassunto. Posto sempre $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ si divida l'intervallo destro $I_\delta^+ = [t_0, t_0 + \delta]$ in tratti di lunghezza $\frac{1}{n}$ (dunque di estremi intermedi $t_j = t_0 + \frac{j}{n}$ con $0 \leq j \leq [n\delta]$: nel far questo si intende che fintanto che $\delta < \frac{1}{n}$, ovvero $n \leq \frac{1}{\delta}$, l'intervallo viene lasciato così com'è, e poi per $n > \frac{1}{\delta}$ si inizia a suddividerlo). In seguito, usando l'informazione sulla pendenza $y' = f(t, y)$ si costruisce una successione di funzioni continue lineari a tratti $\varphi_n(t)$ (chiamate *spezzate di Eulero*) ottenute saldando tra loro le funzioni tangenti nel punto iniziale di ciascun intervallo, ovvero ponendo $\varphi_n(t_0) = y_0$ e, costruita $\varphi_n(t)$ su $[t_0, t_{j-1}]$ per $j \geq 1$, ponendo $\varphi_n(t) = \varphi_n(t_j) + f(t_j, \varphi_n(t_j))(t - t_j)$ se $t \in]t_{j-1}, t_j]$. Grazie poi al Teorema di Ascoli-Arzelà (un fondamentale risultato di analisi funzionale) si osserva che esiste una sottosuccessione di funzioni $\varphi_{n_k}(t)$ che converge uniformemente a una funzione continua $\varphi(t)$, che si dimostra essere una soluzione di (4.2), dunque anche di (4.1). Quanto fatto fornisce una costruzione della soluzione a destra di t_0 (ovvero su I_δ^+); la costruzione a sinistra (su I_δ^-) è del tutto analoga. \square

È di grande interesse avere maggiori informazioni sul dominio della soluzione del problema di Cauchy: in particolare sarebbe importante sapere sotto quali condizioni la soluzione sia definita sul più largo intervallo possibile.⁽⁸⁷⁾

Teorema 4.1.5. (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità globale) *Sia I un intervallo di \mathbb{R} tale che $I \times \mathbb{C}^n \subset U$, e si supponga che valga una delle seguenti due ipotesi (la prima è più forte dell'altra, dunque dà luogo a una versione più debole del risultato).*

⁽⁸⁷⁾Guardando la dimostrazione del Teorema 4.1.2, in un primo momento sembrerebbe che la limitazione all'intervallo su cui è definita la soluzione sia provocata da un lato dalla taglia del dominio di $f(t, y)$ in direzione y e dalla taglia dei valori di f (il numero $\frac{b}{M}$) e dall'altro dalla taglia della costante di Lipschitz L (il numero $\frac{1}{L}$); ma la postilla della dimostrazione mostra come in realtà L non conti per nulla, lasciando in campo solo le prime due. Non sorprende dunque che il teorema di esistenza e unicità globale, che enunciamo qui di seguito, faccia piazza pulita della limitazione $\frac{b}{M}$ ponendo tra le sue ipotesi che $b = +\infty$.

– (Lipschitzianità rispetto y su $K \times \mathbb{C}^n$) Per ogni intervallo compatto $K \subset I$ si ha che

$$\exists L_K > 0 \quad : \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_K \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in K, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n.$$

– (Crescita sublineare) La funzione f è localmente lipschitziana rispetto a y (ipotesi del Teorema 4.1.2, dunque ammette esistenza e unicità locale), e per ogni intervallo compatto $K \subset I$ si ha che

$$\exists A_K, B_K > 0 \quad : \quad \|f(t, y)\| \leq A_K \|y\| + B_K \quad \forall (t, y) \in K \times \mathbb{C}^n.$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ il problema (4.1) ha una e una sola soluzione definita su tutto I .

Dimostrazione. Iniziamo notando che effettivamente l'ipotesi di lipschitzianità implica quella di crescita sublineare (ovvero, che il teorema con l'ipotesi di crescita sublineare è più forte, in quanto più generale, di quello con l'ipotesi di lipschitzianità): infatti se si ha lipschitzianità allora prendendo $y_1 = y$ e $y_2 = 0$ si ottiene $\|f(t, y)\| = \|f(t, y) - f(t, 0) + f(t, 0)\| \leq \|f(t, y) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq L_K \|y\| + \|f(t, 0)\|$, dunque si ha crescita sublineare con $A_K = L_K$ e $B_K = \max_{t \in K} (\|f(t, 0)\|)$. Non dimostriamo peraltro il teorema con l'ipotesi di crescita sublineare; facciamo invece con l'ipotesi di lipschitzianità. La prima cosa da osservare è che, in base al Teorema 4.1.2, tale ipotesi assicura esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale in $I \times \mathbb{C}^n$ e dunque, come visto, anche unicità globale. Guardando la dimostrazione del Teorema 4.1.2 e la sua postilla si nota allora che, essendo ora $b = +\infty$, per ogni dato iniziale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ si trova una e una sola soluzione del problema (4.1) definita su tutto I_a ; ma il ragionamento resta uguale anche rimpiazzando I_a con un qualsiasi compatto K di I contenente t_0 , ottenendo così una e una sola soluzione su tutto K . Considerando infine una successione crescente K_n di sottointervalli compatti di I contenenti t_0 la cui unione dia tutto I , le restrizioni su ciascun compatto K_n delle soluzioni sui compatti successivi coincidono per unicità globale con la soluzione su K_n , e dunque si ottiene in questo modo una e una sola soluzione su tutto I . \square

Facciamo anche qui alcune osservazioni sul Teorema 4.1.5.

- Se la funzione continua f è anche di classe \mathcal{C}^1 rispetto a y con derivate parziali rispetto a y_1, \dots, y_n limitate in ogni striscia del tipo $K \times \mathbb{C}^n$ (ove K è un intervallo compatto in I), allora le ipotesi del teorema di unicità ed esistenza globale (forma debole) sono soddisfatte.

Esercizio. Si consideri l'equazione $y' = \arctg(ty)$. Detta $\varphi(t)$ la sua soluzione con $\varphi(0) = 1$: (i) provare che φ è definita su tutto \mathbb{R} , (ii) studiarne parità, crescita e convessità e (iii) provare che è illimitata.

Risoluzione. (i) La funzione $f(t, y) = \arctg(ty)$ è \mathcal{C}^1 su tutto il piano, dunque ha ovunque esistenza e unicità locale. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{1+t^2y^2}$ è limitata su ogni compatto K di \mathbb{R}_t (infatti $|\frac{\partial f}{\partial y}| = \frac{|t|}{1+t^2y^2} \leq \max_{t \in K} |t|$), per il Teorema 4.1.5 tutte le soluzioni massimali saranno definite su \mathbb{R} , e tra queste anche φ . (ii) Posta $\psi(t) := \varphi(-t)$ si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t) = -\arctg((-t)\varphi(-t)) = \arctg(t\psi(t))$. Ne segue che anche $\psi(t)$ è soluzione, ed essendo $\psi(0) = \varphi(0)$ si ricava per unicità globale che $\psi(t) = \varphi(t)$, ovvero che $\varphi(-t) = \varphi(t)$, ovvero che φ è pari. Le zone del piano (t, y) dove le soluzioni saranno crescenti saranno quelle dove $\arctg(ty) > 0$, ovvero il primo e terzo quadrante. L'unica soluzione costante è $y \equiv 0$; per le altre, punti stazionari si hanno quando $t\varphi(t) = 0$, ma poiché non può mai essere $\varphi(t) = 0$ per alcun t (altrimenti per unicità globale si dovrebbe avere $\varphi \equiv 0$) l'unico punto stazionario si ha per $t = 0$. Infine, derivando ambo i membri rispetto a t si

ottiene $y'' = \frac{y+ty'}{1+t^2y^2} = \frac{y+t \operatorname{arctg}(ty)}{1+t^2y^2}$: ora, essendo $\varphi(0) = 1 > 0$ si ha che $\varphi(t) > 0$ per ogni $t \neq 0$ (infatti, come già detto, se si annullasse allora per unicità globale dovrebbe coincidere dappertutto con la soluzione nulla, il che è assurdo perché $\varphi(0) = 1 > 0$; e allora per continuità deve essere ovunque > 0) e dunque $\varphi''(t) = \frac{\varphi(t)+t \operatorname{arctg}(t\varphi(t))}{1+t^2\varphi(t)^2} > 0$, ovvero φ è sempre convessa. (iii) Se $t_0 > 0$ si ha $\varphi'(t_0) = \operatorname{arctg}(t_0\varphi(t_0)) > 0$: dunque, essendo φ convessa, essa sta sempre sopra alla sua applicazione affine tangente e dunque tende anch'essa a $+\infty$.

- Se un'equazione differenziale non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale in forma debole (ovvero la lipschitzianità rispetto y su strisce verticali del tipo $K \times \mathbb{C}^n$) si può sempre vedere se per caso soddisfa quelle del teorema in forma forte (ovvero la crescita sublineare).

Esempio. L'equazione $y' = f(t, y) = 3t^2y \sin(y^2) + 2(t-1) \operatorname{arctg} y$ soddisfa esistenza e unicità locale perché $f(t, y)$ è di classe C^1 su tutto \mathbb{R}^2 . Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale in forma debole non sono soddisfatte (infatti la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 3t^2 \sin(y^2) + 6t^2y^2 \cos(y^2) + \frac{2(t-1)}{1+y^2}$ non è limitata su alcuna striscia verticale $K \times \mathbb{C}$ ove K è un compatto di \mathbb{R}_t), ma lo sono quelle del teorema in forma forte: infatti sulla striscia $K \times \mathbb{C}$ si ha $|f(t, y)| \leq |3t^2 \sin(y^2)| |y| + 2|t-1| |\operatorname{arctg} y| \leq A_K|y| + B_K$ dove $A_K = \max_{t \in K}(3t^2)$ e $B_K = \pi \max_{t \in K} |t-1|$.

- Le equazioni $y' = 2\sqrt{|y|}$ e $y' = y^2$ non hanno esistenza e unicità globale: per la prima si è già visto che non ci sono nemmeno esistenza e unicità locale, mentre la seconda ha soluzioni $y = \frac{1}{k-t}$ che non sono definite su tutto \mathbb{R} . In effetti, il Teorema 4.1.5 non è applicabile ad esse.
- Un caso di grande importanza nel quale trova applicazione il Teorema 4.1.5 è quello delle *equazioni lineari*, ovvero del tipo

$$y' = A(t)y + b(t)$$

ove $A(t)$ è una funzione continua di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ a valori nello spazio degli operatori lineari di \mathbb{C}^n in sè (in concreto, $A(t)$ è una matrice $n \times n$ di funzioni $a_{i,j}(t)$) e $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ è un vettore di funzioni continue.

Corollario 4.1.6. (Esistenza e unicità globale per le equazioni differenziali lineari)
 Per ogni $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ esiste una e una sola soluzione definita su tutto I del problema di Cauchy dato da $y' = A(t)y + b(t)$ e $y(t_0) = y_0$.

Dimostrazione. Ricordiamo che, in generale, dato un operatore lineare A su uno spazio normato (V, p) , la *norma operatoriale* $\|A\|_{\text{op}} := \max\{p(Av) : p(v) = 1\}$ è la costante di Lipschitz globale per A su V , ovvero $p(Av) \leq \|A\|_{\text{op}} p(v)$ ed è la minima costante con questa proprietà. Pertanto, nel nostro quadro (in cui $f(t, y) = A(t)y + b(t)$) si ottiene $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| = \|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(t)\|_{\text{op}} \|y_1 - y_2\|$. Considerato dunque un intervallo compatto $K \subset \mathbb{R}$ e detto $L_K = \max\{\|A(t)\|_{\text{op}} : t \in K\}$, le ipotesi del Teorema 4.1.5 (versione debole) sono soddisfatte.⁽⁸⁸⁾ \square

⁽⁸⁸⁾ Per inciso, nel nostro caso di dimensione finita, al posto della norma operatoriale avremmo potuto considerare anche un'altra norma sullo spazio delle matrici, ad esempio quella di Frobenius: data $A \in M_n(\mathbb{C})$ essa è $\|A\|_F := \operatorname{tr}(\overline{A}A) = (\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2)^{\frac{1}{2}}$. Dette $A_i(t)$ le righe della matrice $A(t)$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha allora $\|A(t)(y_1 - y_2)\|^2 = \sum_{i=1}^n (A_i(t) \cdot (y_1 - y_2))^2 \leq \sum_{i=1}^n (\|A_i(t)\|^2 \|y_1 - y_2\|^2) = (\sum_{i=1}^n \|A_i(t)\|^2) \|y_1 - y_2\|^2 = \|A(t)\|_F^2 \|y_1 - y_2\|^2$, da cui $\|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \|A(t)\|_F \|y_1 - y_2\|$, e poi continuare come prima (considerato $K \dots$)

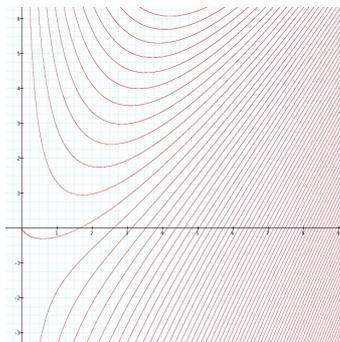


Figura 4.2: Soluzioni dell'equazione lineare $t(y' - \log t) + y = 0$, definite su $]0, +\infty[$.

Esempio. Le equazioni differenziali $t(y' - \log t) + y = 0$ e $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-t}}y - 2t^2 \\ y' = 2x + y \sin t + 1 \end{cases}$ sono lineari (la prima si riscrive come $y' = a(t)y + b(t)$ con $a(t) = -\frac{1}{t}$ e $b(t) = \log t$ definite in $]0, +\infty[$; la seconda come $z' = A(t)z + b(t)$ con $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1-t}} \\ 2 & \sin t \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ove $A(t)$ e $b(t)$ sono definite in $] -\infty, 1[$): in base al Corollario 4.1.6, già sappiamo che le soluzioni di tali equazioni saranno tutte definite rispettivamente in $]0, +\infty[$ e in $] -\infty, 1[$. Per la prima equazione possiamo anche calcolarle esplicitamente (Figura 4.2): scritta come $y' + p(t)y = q(t)$ con $p(t) = \frac{1}{t}$ e $q(t) = \log t$, si ha $P(t) = \int p(t) dt = \log t$ e $\int e^{P(t)} q(t) dt = \int t \log t dt = \frac{1}{4}t^2(2 \log t - 1)$, da cui $y(t) = e^{-P(t)}(\int e^{P(t)} q(t) dt + k) = \frac{1}{t}(\frac{1}{4}t^2(2 \log t - 1) + k) = \frac{k}{t} + \frac{1}{4}t(2 \log t - 1)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. La soluzione per $k = 0$ (ovvero $y(t) = \frac{1}{4}t(2 \log t - 1)$) è l'unica con limite finito (0) per $t \rightarrow 0^+$; si noti anche che essa è un asintoto a $+\infty$ per tutte le altre (infatti la differenza $\frac{k}{t}$ è infinitesima).

4.2 Equazioni autonome

Trattiamo ora con maggior dettaglio il caso di un'equazione differenziale autonoma, ovvero

$$y' = g(y)$$

ove $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ è un campo vettoriale continuo (che in realtà dovremo supporre quasi sempre localmente lipschitziano) su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. L'idea è che si sta cercando una curva parametrica $y(t)$ in \mathbb{C}^n prescrivendone in ogni punto il vettore tangente $y'(t) = g(y)$: è evidente dunque che, disegnando il campo vettoriale $g(y)$, si ottenga un'immediata visualizzazione dei sostegni di tali curve (ovvero —come ribadiremo tra poco— delle orbite, o linee di flusso, o curve integrali dell'equazione $y' = g(y)$, dette anche linee di campo di g). Da questo punto di vista, può essere utile interpretare anche un'equazione non autonoma $y' = f(t, y)$ come un'equazione autonoma, aggiungendo una dimensione: considerata $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ e posto $z_0 = t$ e $z_j = y_j$ per $1 \leq j \leq n$ (cioè $z = (t, y)$) l'equazione non autonoma $y' = f(t, y)$ equivale all'equazione autonoma $z' = g(z)$ con $g(z) = (1, f(z))$. In altre parole, disegnando nello spazio $(n+1)$ -dimensionale delle (t, y) il campo $(1, f(t, y))$ si possono visualizzare (i sostegni delle soluzioni $z(t)$ ovvero) i grafici delle soluzioni $y(t)$.

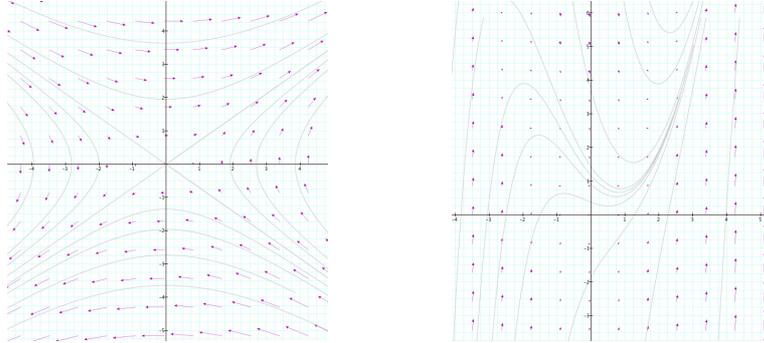


Figura 4.3: (a) Alcune orbite dell'equazione autonoma $(x', y') = (2y, x)$. (b) Alcuni grafici delle soluzioni di $y' = t^2 - y$, visti come orbite dell'equazione autonoma $(z_1', z_2') = (1, z_1^2 - z_2)$.

Una caratteristica dell'integrale generale delle equazioni autonome è la seguente:

Proposizione 4.2.1. *Lo spazio delle soluzioni di un'equazione autonoma è invariante per traslazioni temporali: ovvero, se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ è soluzione, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ lo è anche la sua traslata $\tau_\alpha \varphi : I + \alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ definita da $(\tau_\alpha \varphi)(t) = \varphi(t - \alpha)$.*

Dimostrazione. Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ è soluzione e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $(\tau_\alpha \varphi)'(t) = \varphi(t - \alpha)' = \varphi'(t - \alpha) = g(\varphi(t - \alpha)) = g((\tau_\alpha \varphi)(t))$, ovvero $(\tau_\alpha \varphi)' = g(\tau_\alpha \varphi)$ come si voleva. \square

Ripetiamo i teoremi di esistenza e unicità nell'ambito autonomo.

Teorema 4.2.2. (Esistenza e unicità per sistemi autonomi) *Si abbia un'equazione autonoma $y' = g(y)$ con $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ campo vettoriale continuo su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.*

- (a) *Se il campo g è localmente lipschitziano (ad esempio se è di classe \mathcal{C}^1) allora l'equazione ha esistenza e unicità locale.*
- (b) *Nel caso $\Omega = \mathbb{C}^n$, se il campo g è globalmente lipschitziano (ad esempio se è di classe \mathcal{C}^1 con derivate parziali limitate) o se è localmente lipschitziano con crescita sublineare, allora l'equazione ha esistenza e unicità su tutto \mathbb{R} .*

Anche la nozione di *flusso* (vedi (4.3)) diventa più semplice nel caso di sistemi autonomi localmente lipschitziani. Infatti, per l'invarianza delle soluzioni per traslazioni temporali (Proposizione 4.2.1), se $\varphi_{(t_0, y_0)} : I_{(t_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{C}^n$ è la soluzione massimale con dato iniziale $\varphi_{(t_0, y_0)}(t_0) = y_0$ allora vale $I_{(t_0, y_0)} = t_0 + I_{(0, y_0)}$ e $\varphi_{(t_0, y_0)} = \tau_{t_0} \varphi_{(0, y_0)}$ (ovvero $\varphi_{(t_0, y_0)}(t) = \varphi_{(0, y_0)}(t - t_0)$), dunque basta concentrarsi sull'evoluzione temporale della soluzione che all'istante $t = 0$ vale y_0 .

Dato allora un sistema autonomo $y' = g(y)$ con $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziano, per $y_0 \in \Omega$ denotiamo con $\varphi_{y_0} : I_{y_0} \rightarrow \mathbb{C}^n$ la soluzione massimale con dato iniziale $\varphi_{y_0}(0) = y_0$. Considerato in $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ il dominio $\tilde{\Omega} = \{(t; y_0) : y_0 \in \Omega, t \in I_{y_0}\}$, il *flusso* del sistema autonomo $y' = g(y)$ è la funzione

$$(4.4) \quad \Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \Phi(t; y_0) = \varphi_{y_0}(t);$$

Flusso per sistemi autonomi

ovvero, $\Phi(t, y_0)$ descrive l'evoluzione della soluzione massimale che al tempo $t = 0$ vale y_0 .

Supponiamo ora che il campo g sia di classe \mathcal{C}^1 (dunque, come già osservato in generale, anche Φ sarà di classe \mathcal{C}^1) e che tutte le soluzioni massimali del sistema $y' = g(y)$ siano definite su tutto \mathbb{R} : si ha allora $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$, e per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ possiamo definire il *flusso all'istante t* del sistema autonomo $y' = g(y)$ (o, come anche si dice, del campo g) la funzione che dice “dove il campo ha trasportato un punto $y \in \Omega$ dopo un tempo t ”:

$$(4.5) \quad \Phi^t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \Phi^t(y) = \varphi_y(t).$$

Proposizione 4.2.3. *Vale $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. In particolare Φ^t è un diffeomorfismo per ogni $t \in \mathbb{R}$, con inversa Φ^{-t} .*

Dimostrazione. Se $y \in \Omega$ si ha $(\Phi^s \circ \Phi^t)(y) = \Phi^s(\varphi_y(t)) = \varphi_{\varphi_y(t)}(s)$ e $\Phi^{s+t}(y) = \varphi_y(s+t) = (\tau_{-t}\varphi_y)(s)$: ma per l'invarianza per traslazioni temporali delle soluzioni di un sistema autonomo si ha $\varphi_{\varphi_y(t)} = \tau_{-t}\varphi_y$, dunque si conclude. Applicando in particolare al caso $s = -t$ si ottiene $\Phi^{-t} \circ \Phi^t = \Phi^{-t+t} = \Phi^0 = \text{Id}$, dunque Φ^t è un diffeomorfismo per ogni $t \in \mathbb{R}$, con inversa Φ^{-t} . \square

Esempi. (1) L'equazione scalare autonoma $y' = y - 1$ ha integrale generale $y(t) = ke^t + 1$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: ne ricaviamo che il flusso è $\Phi^t(y) = (y - 1)e^t + 1$. (2) Il sistema autonomo $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$ ha (vedi più tardi, a pag. 132) integrale generale $\begin{cases} x(t) = 2k \cos(t + \alpha) \\ y(t) = k \sin(t + \alpha) \end{cases}$ al variare di $k > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Imponendo che $(x(0), y(0)) = (x, y)$ si ottiene $k_{(x,y)} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4y^2}$ e $\alpha_{(x,y)}$ tale che $(\cos \alpha_{(x,y)}, \sin \alpha_{(x,y)}) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}})$, dunque il flusso è $\Phi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da $\Phi^t(x, y) = (2k_{(x,y)} \cos(t + \alpha_{(x,y)}), k_{(x,y)} \sin(t + \alpha_{(x,y)}))$.

Un'orbita dell'equazione autonoma $y' = g(y)$ (anche *linea (di flusso)* o *curva integrale* del campo $g(y)$) è il sostegno (immagine) di qualche soluzione massimale dell'equazione.

Orbita
Linea di flusso
Curva integrale

Un punto $\tilde{y} \in \Omega$ tale che $g(\tilde{y}) = 0$ è detto un *equilibrio* dell'equazione.

Equilibrio

Proposizione 4.2.4. *Un punto $\tilde{y} \in \Omega$ è un equilibrio per l'equazione se e solo se la funzione costante $y(t) \equiv \tilde{y}$ è soluzione dell'equazione stessa.*

Dimostrazione. Ovvio. \square

Esistono vari modi per esprimere l'idea di “stabilità” di un equilibrio (ovvero il fatto che “una soluzione con dato iniziale vicino all'equilibrio resta per sempre nei suoi paraggi”), per i quali rimandiamo a corsi ulteriori. La nozione più semplice, anche se un po' forte in quanto richiede che tutte le soluzioni con dato sufficientemente vicino all'equilibrio tendano a rientrare in esso, è la seguente: un punto $\tilde{y} \in \Omega$ è detto *equilibrio attrattivo* se esiste un intorno V di \tilde{y} ⁽⁸⁹⁾ tale che tutte le soluzioni $y(t)$ con dato iniziale in V tendano a \tilde{y} quando $t \rightarrow +\infty$. Reciprocamente, un equilibrio è detto *repulsivo* se è attrattivo nel

Equilibrio
attrattivo
e repulsivo

⁽⁸⁹⁾Tale intorno V è detto essere un *bacino d'attrazione* dell'equilibrio \tilde{y} .

passato, ovvero se se esiste un intorno V di \tilde{y} tale che tutte le soluzioni $y(t)$ con dato iniziale in V tendano a \tilde{y} quando $t \rightarrow -\infty$.

Esempi. (1) L'equazione autonoma scalare $y' = \alpha y$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$) ha l'unico equilibrio $\tilde{y} = 0$, attrattivo o repulsivo a seconda che $\alpha \leq 0$. (2) L'equazione $y' = y^2$ ha anch'essa come unico equilibrio $\tilde{y} = 0$, che però stavolta non è né attrattivo né repulsivo (è attrattivo/repulsivo per dato iniziale ≥ 0). (3) L'equazione logistica $y' = \gamma y(1 - y/S)$ (con $\gamma, S > 0$) ha gli equilibri $\tilde{y}_1 = 0$ (repulsivo) e $\tilde{y}_2 = S$ (attrattivo).

Se $\tilde{y} \in \Omega$ è un equilibrio e si assume che il campo g sia localmente lipschitziano, allora per la Proposizione 4.2.4 l'unica soluzione del problema di Cauchy con dato del tipo $y(t_0) = \tilde{y}$ è la funzione costante $\varphi(t) \equiv \tilde{y}$: la quale è ovviamente massimale perché definita su tutto \mathbb{R} , e dunque disegna un'orbita fatta dal singolo punto. Vediamo altri fatti che valgono in generale per le orbite di equazioni autonome date da campi localmente lipschitziani.

Proposizione 4.2.5. *Si assuma che il campo g sia localmente lipschitziano. Allora:*

- (1) *Orbite diverse non si intersecano mai.*
- (2) *Due soluzioni massimali percorrono una stessa orbita se e solo se sono l'una traslata (temporale) dell'altra.*
- (3) *Una soluzione non costante $\varphi(t)$ percorre la sua orbita con una velocità $\varphi'(t)$ mai nulla; e se $\varphi(t)$ tende per $t \rightarrow +\infty$ a un punto $y_0 \in \Omega$, allora y_0 è un equilibrio.*
- (4) *Sia $\varphi : I \rightarrow \Omega$ una soluzione massimale. Se esiste $T > 0$ tale che per qualche $t_0 \in I$ si abbia $t_0 + T \in I$ e $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$, allora necessariamente $I = \mathbb{R}$ e $\varphi(t)$ è periodica con T fra i suoi periodi.*
- (5) *Se g è un campo gradiente allora le orbite (ovvero le sue linee di campo) sono aperte, nel senso che tutte le soluzioni non costanti dell'equazione sono iniettive.⁽⁹⁰⁾*
- (6) *Una soluzione massimale con orbita contenuta in un compatto di Ω per tutti i tempi positivi (risp. negativi) ha come dominio temporale un intervallo aperto superiormente (risp. inferiormente) illimitato; in particolare, una soluzione massimale con orbita interamente contenuta in un compatto di Ω ha come dominio temporale tutto \mathbb{R} . Tutte le altre soluzioni massimali escono definitivamente da ogni compatto di Ω sia nel passato che nel futuro⁽⁹¹⁾.*

Dimostrazione. (1-2) Siano $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ e $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ due soluzioni massimali di $y' = g(y)$ tali che $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) =: y_0$ per qualche $t_1 \in I_1$ e $t_2 \in I_2$. Allora le soluzioni massimali $\varphi_2(t)$ e $(\tau_{t_2-t_1}\varphi_1)(t)$ (quest'ultima

⁽⁹⁰⁾Non vale il viceversa: ovvero, anche se un campo ha linee aperte non è detto che esso sia un campo gradiente. Ad esempio, il campo $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$ ha linee di campo aperte (sono eliche cilindriche attorno all'asse z) ma non è un campo gradiente (si osservi che il suo rotore $\nabla \times F = (0, 0, 2)$ non è nullo).

⁽⁹¹⁾Come già ricordato, l'espressione "nel passato/futuro" significa "prima/dopo di un certo istante di riferimento": nel caso presente si intende che, considerato un qualsiasi compatto $K \subset \Omega$, esistono due istanti $t_0 < t_1$ nel dominio della soluzione tali che l'orbita esca da K per ogni $t < t_0$ e ogni $t > t_1$.

definita sull'intervallo $I_1 + t_2 - t_1$ come $\varphi_1(t - (t_2 - t_1))$ ⁽⁹²⁾ soddisfano entrambe al problema di Cauchy con dato $y(t_2) = y_0$, dunque sono uguali (unicità locale in ogni punto implica unicità globale), cioè φ_2 è una traslata temporale di φ_1 , che ovviamente disegna la stessa orbita. (3) Se $\varphi'(t_0) = 0$ allora $g(\varphi(t_0)) = 0$, dunque per unicità la soluzione $\varphi(t)$ deve essere la costante $\varphi(t_0)$ (sia $\varphi(t)$ che la costante $\varphi(t_0)$ soddisfano al problema $y' = g(y)$ con dato iniziale $y(t_0) = \varphi(t_0)$). Se poi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = y_0 \in \Omega$, per continuità sarà anche $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(\varphi(t)) = g(y_0)$. Se per assurdo fosse $g(y_0) \neq 0$ si avrebbe $g_j(y_0) \neq 0$ per qualche componente j , dunque per la permanenza del segno esisterebbero $K > 0$ e un intorno limitato V di y_0 tali che $|g_j(y)| > K$ se $y \in V$. Sia $T > 0$ tale che $\varphi(t) \in V$ per ogni $t > T$: allora, considerato che g_j ha segno costante in V , si avrebbe $|\varphi_j(t) - \varphi_j(T)| = |\int_T^t g_j(\varphi(\tau)) d\tau| = \int_T^t |g_j(\varphi(\tau))| d\tau \geq K(t - T)$, il che è impossibile perché il primo membro è limitato mentre il secondo no (tende a $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$). (4) Come visto nel precedente punto (2) la soluzione $\tau_{-T}\varphi$, definita nell'intervallo traslato $I - T$ come $(\tau_{-T}\varphi)(t) := \varphi(t + T)$, è anch'essa massimale; e poiché $(\tau_{-T}\varphi)(t_0) = \varphi(t_0)$ essa deve coincidere con φ . Ne segue che $I - T = I$ (dunque $I = \mathbb{R}$) e che $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero $\varphi(t)$ è periodica con T fra i suoi periodi. (5) Sia $\varphi : I \rightarrow \Omega$ una soluzione massimale non costante che sia non iniettiva, cioè tale che si abbia $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ per certi $t_1, t_2 \in I$ diversi tra loro. Considerato il circuito $\gamma = \varphi|_{[t_1, t_2]} : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$, si ha allora $\int_\gamma g \cdot dy = \int_{t_1}^{t_2} g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} g(\gamma(t)) \cdot g(\gamma(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \|g(\gamma(t))\|^2 dt$. Visto che g è supposto essere un campo gradiente tale integrale deve essere nullo, il che implica (essendo la funzione integranda $\|g(\gamma(t))\|^2$ continua e positiva) che vale identicamente $g(\gamma(t)) \equiv 0$ per ogni $t \in [t_1, t_2]$. Ma questo è assurdo perché il campo g non può avere nessun equilibrio tra i punti di $\gamma([t_1, t_2])$ (altrimenti, se esistesse $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$ tale che $g(\gamma(\tilde{t})) = 0$, per unicità φ dovrebbe coincidere con la soluzione costante $\gamma(\tilde{t})$, ma così non è). (6) È la rilettura della “fuga dai compatti” (vedi Proposizione 4.1.3) nel caso delle equazioni autonome. \square

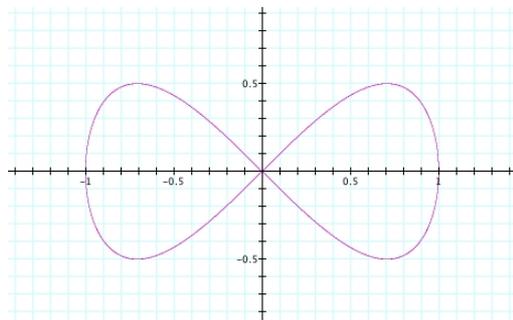


Figura 4.4: La curva-otto $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$.

Esempio. La funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$ parametrizza la *curva-otto* C (vedi Figura 4.4). Per la Proposizione 4.2.5(1) la curva $\gamma(t)$ non potrà mai essere soluzione di una sistema autonomo $(x', y') = g(x, y)$ ove g sia un campo localmente lipschitziano su tutto un aperto contenente C (o quantomeno contenente l'origine $O(0, 0)$): infatti la sua orbita C , che si autointerseca in O , negherebbe l'unicità locale (si noti infatti che $\varphi_1(t) = \gamma(t - \frac{\pi}{2})$ e $\varphi_2(t) = \gamma(t + \frac{\pi}{2})$ soddisfano entrambe al problema di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ e dunque dovrebbero necessariamente coincidere in tutto un intorno di $t = 0$, ma ciò non accade perché stanno percorrendo due tratti diversi di C). Invece $\gamma(t)$ può essere soluzione massimale di un sistema autonomo definito non in un intorno di O : ad esempio, si vede

⁽⁹²⁾Va notato che la soluzione massimale $\varphi(t) : I \rightarrow \Omega$ per un certo dato (t_0, y_0) lo è anche per tutti gli altri suoi dati di passaggio $(t_1, \varphi(t_1))$ al variare di $t_1 \in I$ (ovvio); e che la traslata di una soluzione massimale è anch'essa una soluzione massimale (facile: se $\tau_\alpha \varphi : I + \alpha \rightarrow \Omega$ non lo fosse, si potrebbe estenderla a una soluzione $\psi : J \rightarrow \Omega$ con $I + \alpha \subsetneq J$, ma allora l'antitraslata di quest'ultima $\tau_{-\alpha} \psi : J - \alpha \rightarrow \Omega$ estenderebbe φ con $I \subsetneq J - \alpha$, assurdo per la massimalità di φ).

subito che lo è, a dominio ridotto (del tipo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), per il sistema $(x', y') = (-\frac{y}{x}, 2x^2 - 1)$, che è definito in uno dei due semipiani $x \geq 0$. • Quanto appena detto vale naturalmente per sistemi del primo ordine, per i quali il dato iniziale di Cauchy consiste della sola posizione iniziale $(x(0), y(0))$: invece per sistemi di ordine superiore il dato iniziale è più composito (ad esempio, per il secondo ordine il dato iniziale di Cauchy consiste di posizione e velocità iniziali $(x(0), y(0); \dot{x}(0), \dot{y}(0))$), dunque l'autointersezione di C non costituisce di per sé un impedimento all'essere soluzione di un sistema definito ovunque. Ad esempio, $\gamma(t)$ soddisfa evidentemente al sistema autonomo del secondo ordine $(x'', y'') = (-x, -\frac{1}{4}y)$, che è disaccoppiato e dunque si può risolvere separatamente in x e y con integrale generale $(x(t), y(t)) = (A \cos(t + \alpha), B \cos(2t + \beta))$: in effetti in questo caso l'unicità non è negata, perché anche se per $t = 0$ entrambe le soluzioni $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ passano per $(0, 0)$, ci passano però con diverse velocità $\varphi_1'(0) = (1, -1) \neq \varphi_2'(0) = (-1, -1)$.

La rappresentazione geometrica delle orbite in Ω (senza necessariamente curarsi della legge oraria con cui esse sono percorse) è detta *ritratto in fase* dell'equazione, mentre lo stesso Ω è detto *spazio delle fasi*.

Ritratto in fase
Spazio delle fasi

Esempi. (1) Il sistema autonomo $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$ ha come unico equilibrio $O(0, 0)$, e le soluzioni non costanti (che, come già detto e come vedremo a pag. 132, sono $\begin{cases} x(t) = 2k \cos(t + \alpha) \\ y(t) = k \sin(t + \alpha) \end{cases}$ al variare di $k > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$) descrivono orbite che sono ellissi centrate nell'origine: dunque il suo ritratto in fase (in Ω , che in questo caso è il piano (x, y)) è costituito dal punto di equilibrio e da queste ellissi. In questo caso il verso di percorrenza di tali orbite è quello antiorario (Figura 4.5(a)). (2) L'equazione scalare $y' = \alpha y$ ha come ritratto in fase (in Ω , che in questo caso è la retta reale) le tre orbite che sono la semiretta negativa, l'origine (unico equilibrio) e la semiretta positiva. Il verso di percorrenza delle orbite semiretta è quello uscente dall'origine se $\alpha > 0$, quello entrante se $\alpha < 0$ (Figura 4.5(b)).

In generale, per un'equazione autonoma scalare $y' = g(y)$ (ove $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo di \mathbb{R}), il ritratto in fase dell'equazione in I è facile da tracciare: gli equilibri sono gli zeri di g , e il segno di g dà il verso di percorrenza delle altre orbite in cui I viene spezzato dagli equilibri, con evidente rappresentazione visiva della natura degli equilibri stessi.

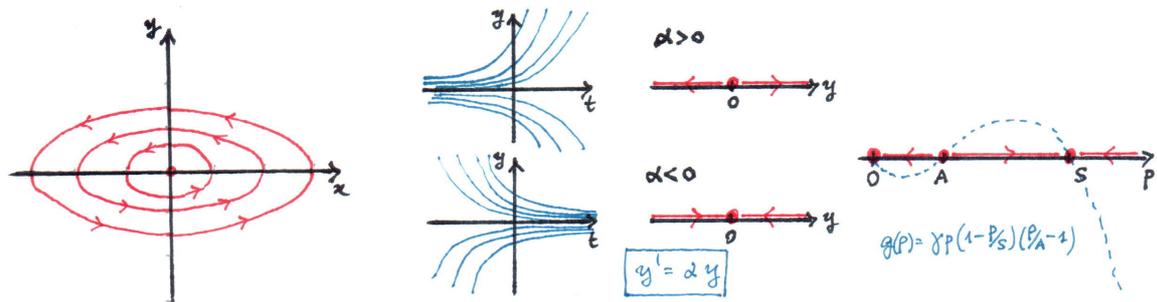


Figura 4.5: (a) Ritratto in fase del sistema $(x', y') = (-2y, \frac{1}{2}x)$. (b) Soluzioni e ritratto in fase di $y' = \alpha y$ nei casi $\alpha \geq 0$. (c) Ritratto in fase dell'effetto Allee.

Esempio. (Effetto Allee) In ecobiologia, l'*effetto Allee* è quello per cui una popolazione, se scende sotto una certa soglia critica (che dipende dal tipo di popolazione, di ambiente...) tende a deperire ed estinguersi. Il modello matematico, che raffina quello logistico, è il seguente: indicando con $p(t)$ l'evoluzione temporale

del numero d'individui della popolazione, la funzione $p(t)$ dovrebbe soddisfare un'equazione del tipo

$$p' = \gamma p \left(1 - \frac{p}{S}\right) \left(\frac{p}{A} - 1\right)$$

(qui $g(p) = \gamma p \left(1 - \frac{p}{S}\right) \left(\frac{p}{A} - 1\right)$, con $I = [0, +\infty[$ ove $\gamma > 0$ è il tasso di crescita e $0 < A < S$ sono rispettivamente la soglia critica di deperimento e di saturazione. Gli equilibri sono $\tilde{p}_1 = 0$, $\tilde{p}_2 = A$ e $\tilde{p}_3 = S$; poiché poi $g(p) > 0$ per $A < p < S$ si ha che 0 e S sono equilibri attrattivi mentre A è repulsivo (Figura 4.5(c)).

Un'attenzione speciale, soprattutto per le sue applicazioni meccaniche, merita il caso di un'equazione autonoma del secondo ordine

$$y'' = h(y, y')$$

che, posto $p = y'$, sappiamo essere equivalente al sistema dato da

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y, p) \end{cases} .$$

Equazioni autonome del 2o ordine

In tal caso va posta particolare cura nel distinguere tra, da un lato, lo spazio delle (t, y) (di dimensione $n + 1$, nel quale vengono tracciati i grafici delle soluzioni $y(t)$ nello spazio delle configurazioni); e, dall'altro, lo spazio delle (y, y') (lo spazio delle fasi di dimensione $2n$, nel quale viene tracciato il ritratto in fase dell'equazione). Ciò è particolarmente importante nel caso scalare ($n = 1$), in cui entrambi gli spazi sono di dimensione 2 e non vanno confusi tra loro: anche a tal fine sarà bene usare la terminologia di *orbite* solo per lo spazio delle fasi, mentre l'immagine di una soluzione $y(t)$ nello spazio delle configurazioni viene di solito chiamata *traiettoria*.

Orbite e traiettorie

Notiamo anche che, in questo caso, un *equilibrio* (dunque una coppia (\tilde{y}, \tilde{y}') che annulla il campo vettoriale del sistema equivalente $g(y, y') = (y', h(y, y'))$) si riduce ad essere una configurazione \tilde{y} tale che $h(\tilde{y}, 0) = 0$.

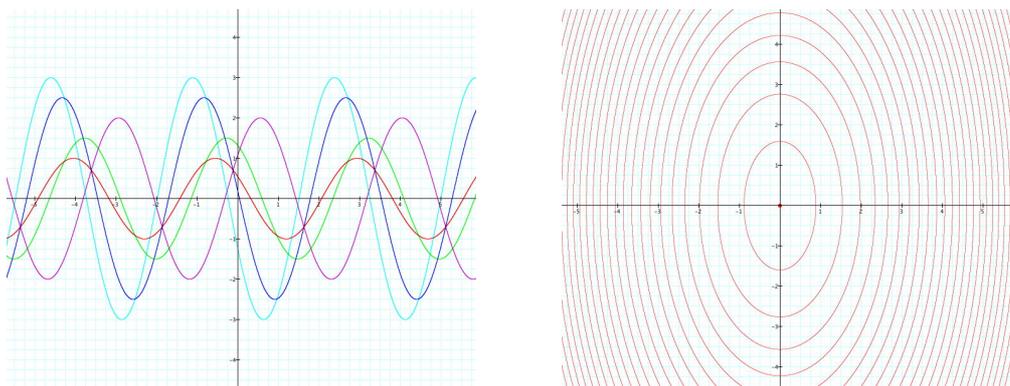


Figura 4.6: Oscillatore armonico: (a) alcune soluzioni; (b) ritratto in fase.

Esempi. (1) La più importante applicazione delle equazioni autonome del secondo ordine è naturalmente nella Meccanica newtoniana con forze indipendenti dal tempo, governata dalla legge $m\ddot{y} = F(y, \dot{y})$ (dunque

h è la forza per unità di massa): come detto, in tale quadro un equilibrio è una configurazione \tilde{y} nella quale il corpo, se posto in essa con velocità nulla, non risente di forze attive. **(2)** L'oscillatore armonico $y'' = -\omega^2 y$ ha come unico equilibrio $\tilde{y} \equiv 0$, mentre le soluzioni non costanti sono $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ al variare dell'ampiezza $A \geq 0$ e della fase $\phi \in \mathbb{R}$: nel piano (t, y) esse hanno come grafico delle sinusoidi (Figura 4.6(a)), mentre le orbite nel piano delle fasi (y, y') sono le ellissi $y^2 + \frac{1}{\omega^2}(y')^2 = A^2$ (Figura 4.6(b)). Si noti che nel piano delle fasi le orbite giustamente non si intersecano tra loro, mentre nel piano (t, y) i grafici sì: quello che conta è che, per rispettare l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy, due diversi grafici si intersechino tra loro con pendenze diverse, e così in effetti avviene.

La natura geometrica del problema differenziale autonomo $y' = g(y)$, secondo la quale la direzione e il verso del campo g determinano le orbite del sistema (in quanto il campo è la velocità) suggerisce che moltiplicando il campo g per una funzione scalare di segno costante (il che altera solo il modulo del campo ma non la direzione e il verso) si ottenga un problema *equivalente* a quello iniziale, nel senso che i due sistemi hanno gli stessi equilibri e che ogni soluzione non costante del secondo si ottiene da una soluzione non costante del primo tramite un cambio di parametro invertibile, in particolare hanno le stesse curve integrali: in altre parole, i due problemi *hanno lo stesso ritratto in fase*. In effetti non solo questo è vero ma vale anche il viceversa, come viene spiegato nella seguente

Sistemi equivalenti

Proposizione 4.2.6. *Due sistemi autonomi localmente lipschitziani $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$ sono equivalenti se e solo se esiste una funzione $\rho(y)$ localmente lipschitziana mai nulla tale che $\tilde{g} = \rho g$. Se i campi sono di classe C^k , tale è anche ρ .*

Dimostrazione. Prima di entrare nei dettagli, il risultato è chiaro da un punto di vista intuitivo: due campi vettoriali danno luogo a sistemi equivalenti nel senso esposto nell'enunciato se e solo se essi hanno gli stessi equilibri e sono ovunque paralleli e equiorientati, differendo eventualmente solo per la norma. Entriamo ora nel preciso. Per avere gli stessi equilibri la condizione che $\tilde{g} = \rho g$ per una funzione ρ mai nulla è chiaramente necessaria e sufficiente. Assumiamo ora che y sia un fissato punto generico di Ω che non sia un equilibrio dei campi, e siano $\varphi : I \rightarrow \Omega$ e $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \Omega$ le soluzioni massimali rispettivamente di $y' = g(y)$ e di $y' = \tilde{g}(y)$ con $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0) = y$. Supponiamo che esista un cambio di parametro invertibile $\theta : I \rightarrow \tilde{I}$ tale che $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \theta^{-1}$ e $\theta(0) = 0$, e vediamo quale dovrebbe essere allora il legame tra θ e ρ . Dette τ e t le variabili rispettivamente di \tilde{I} e di I e indicato per brevità $\psi = \theta^{-1}$ (dunque si penserà $\theta(t) = \tau$ e $\psi(\tau) = t$), derivando ambo i membri di $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\psi(\tau))$ rispetto a τ si ottiene $\tilde{\varphi}'(\tau) = \varphi'(\psi(\tau)) \psi'(\tau)$, da cui $\rho(\tilde{\varphi}(\tau)) g(\tilde{\varphi}(\tau)) = g(\varphi(\psi(\tau))) \psi'(\tau)$: essendo $g(\tilde{\varphi}(\tau)) = g(\varphi(\psi(\tau)))$ un vettore non nullo (siamo fuori dagli equilibri), questo equivale a $\rho(\tilde{\varphi}(\tau)) = \psi'(\tau)$, ovvero (ricordando che $\psi'(\tau)\theta'(t) = 1$) la relazione cercata $\theta'(t) = \frac{1}{\rho(\varphi(t))}$. Pertanto, se $\tilde{g} = \rho g$ allora si potrà definire $\theta(t) := \int_0^t \frac{1}{\rho(\varphi(s))} ds$, un cambio di parametro invertibile tra I e \tilde{I} con $\theta(0) = 0$; viceversa, considerato un generico y non di equilibrio e considerato il cambio invertibile $\theta(t)$ tra le uniche soluzioni $\varphi(t)$ e $\tilde{\varphi}(\tau)$ dei sistemi $y' = g(y)$ e $y' = \tilde{g}(y)$ con condizione iniziale $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0) = y$, basterà porre $\rho(y) = \frac{1}{\theta'(0)}$. \square

La Proposizione 4.2.6 evidenzia la natura essenzialmente geometrica di un sistema autonomo. Appare allora di primario interesse —sia come problema in sé che come primo passo verso una possibile risoluzione del problema di Cauchy— riuscire a determinarne le orbite: a tal fine la nozione che segue è di grande importanza.

Consideriamo un'equazione autonoma reale $y' = g(y)$ con $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale reale localmente lipschitziano. Un *integrale primo* dell'equazione è una funzione scalare $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 costante sulle soluzioni del sistema. La nozione ha senso anche per equazioni in forma normale di ordine superiore al primo, facendo riferimento all'equazione del primo ordine ad esse associata.

Integrale primo

Proposizione 4.2.7. *La funzione scalare E è un integrale primo per $y' = g(y)$ se e solo se ∇E è ortogonale al campo g in ogni punto di Ω , cioè $\nabla E(y) \cdot g(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$.*

Dimostrazione. Dire che E è un integrale primo per $y' = g(y)$ è come dire che le orbite dell'equazione (nei punti y delle quali il vettore tangente è $g(y)$) sono contenute nelle ipersuperfici di livello di E (nei punti delle quali il vettore normale è $\nabla E(y)$), dunque l'asserzione pare del tutto chiara. Si tratta solo di esprimere in modo formale quanto appena detto. E è un integrale primo per $y' = g(y)$ se e solo se $\frac{d}{dt} E(\varphi(t)) \equiv 0$ per ogni soluzione $\varphi(t)$, dunque se e solo se $\nabla E(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$ per ogni soluzione $\varphi(t)$: pertanto la condizione è chiaramente sufficiente. Viceversa, preso un qualsiasi $y_0 \in \Omega$ sia $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema $y' = g(y)$ con condizione iniziale $y(0) = y_0$ (potremmo prendere direttamente l'unica soluzione massimale): allora $E(\varphi(t))$ è costante rispetto a t , da cui derivando rispetto a t e calcolando per $t = 0$ si ottiene $\nabla E(y_0) \cdot g(y_0) = 0$. Per la genericità di y_0 si conclude. \square

Come conseguenza della Proposizione 4.2.7 notiamo che, come è ragionevole debba essere:

Corollario 4.2.8. *Una funzione $E(y)$ è un integrale primo per un sistema autonomo $y' = g(y)$ se e solo se lo è per gli altri sistemi a lui equivalenti.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.2.6 i sistemi equivalenti a $y' = g(y)$ sono del tipo $y' = \tilde{g}(y) := \rho(y)g(y)$ con $\rho(y)$ funzione scalare mai nulla su Ω , e dunque $\nabla E(y) \cdot \tilde{g}(y) = \rho(y)(\nabla E(y) \cdot g(y))$ si annulla per ogni $y \in \Omega$ se e solo se $\nabla E(y) \cdot g(y)$ si annulla per ogni $y \in \Omega$. \square

Esempio. Per il sistema autonomo $\begin{cases} x' = z - y \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ la funzione $E(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ è un integrale primo: infatti il gradiente $\nabla E = (2x, 2y, -2z)$ è ortogonale al campo $g(x, y, z) = (z - y, x + z, x + y)$. Quando più tardi sapremo risolvere i sistemi lineari vedremo che le soluzioni reali del sistema sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{cases} x(t) = A + C e^{-t} \\ y(t) = -A + B e^t \\ z(t) = -A + B e^t - C e^{-t} \end{cases}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{R}$, e in effetti E è costante lungo le soluzioni (si noti che $E(x(t), y(t), z(t)) = A^2 + 2BC$ non dipende da t): ciò significa che le orbite delle soluzioni del sistema giacciono sulle superfici di livello di E . In particolare l'unica soluzione costante $(0, 0, 0)$, che corrisponde all'unico equilibrio del sistema, giace sulla superficie di livello 0, che è il cono a due falde; e per l'unicità, evidentemente soddisfatta dal sistema, le altre orbite di livello 0 dovranno stare in una delle falde del cono (Figura 4.7).

L'esempio più classico di integrale primo, con note applicazioni fisiche, è l'*integrale dell'energia* di un'equazione autonoma del secondo ordine del tipo

Integrale dell'energia

$$y'' = h(y)$$

ove h è un campo conservativo, ovvero $h = -\nabla V$ ove $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è l'*energia potenziale* associata al campo (naturalmente se l'equazione $y'' = h(y)$ è scalare ciò è sempre possibile, con $V(y) = -\int h(y) dy$). Come già detto, posto $p = y'$, sappiamo che l'equazione

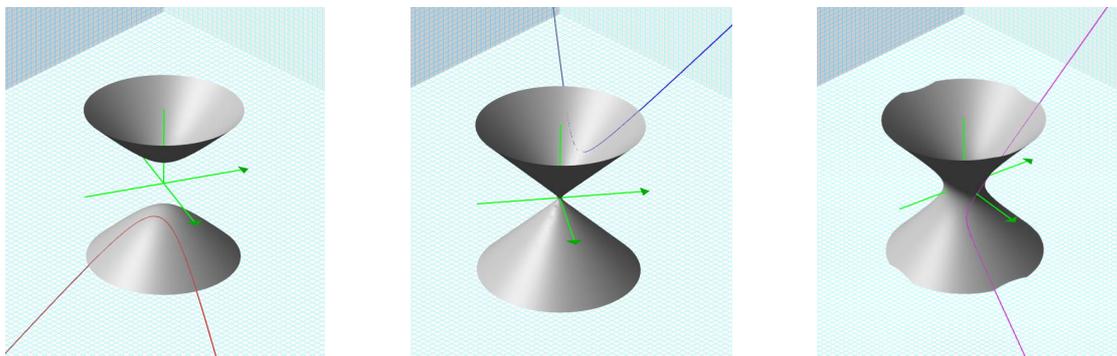


Figura 4.7: Alcune soluzioni del sistema $(x', y', z') = (z - y, x + x, x + y)$ e corrispondenti superfici di livello dell'integrale primo $E(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$: (a) livello -7 ; (b) livello 0 ; (c) livello 18 .

$y'' = h(y)$ equivale al sistema dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y) \end{cases}$, che ha come integrale primo la funzione $E(y, p) = \frac{1}{2}||p||^2 + V(y)$ (si noti infatti che $\nabla E(y, p) = (-h(y), p)$ è ortogonale al campo $(p, h(y))$): dunque l'integrale dell'energia per l'equazione $y'' = h(y)$ è

$$E(y, y') = \frac{1}{2}||y'\|^2 + V(y).$$

Esempi. (1) L'equazione che regola la dinamica di un pendolo semplice di lunghezza ℓ soggetto alla sola forza di gravità è $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$, ove $\theta(t)$ è la legge oraria con cui evolve l'angolo rispetto alla verticale e g è l'accelerazione di gravità. Denotando con $\omega = \dot{\theta}$ la velocità angolare, il sistema associato $(\dot{\theta}, \dot{\omega}) = (\omega, -\frac{g}{\ell} \sin \theta)$ ha equilibri $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$, dei quali quelli stabili/instabili (punti di minimo/massimo per l'energia potenziale $-\frac{g}{\ell} \cos \theta$) sono quelli con $k = 2n$ pari / $k = 2n + 1$ dispari. L'integrale dell'energia risulta $E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta$, ove $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare. Nello spazio delle fasi (θ, ω) le curve di livello $E(\theta, \omega) = \alpha$ sono visibili nella Figura 4.8(a): quelle chiuse (energia bassa $-\frac{g}{\ell} \leq \alpha < \frac{g}{\ell}$) sono le oscillazioni periodiche attorno agli equilibri stabili $\theta = 2n\pi$, quelle aperte (energia alta $\alpha > \frac{g}{\ell}$) sono le rotazioni monotone passando per gli equilibri instabili $\theta = \pi + 2n\pi$, mentre le curve integrali separatrici che passano per gli equilibri instabili sono divise da queste in orbite che rappresentano rotazioni monotone tendenti asintoticamente a uno degli equilibri instabili. (2) Se un punto materiale di massa m si muove in \mathbb{R}^3 soggetto a delle forze conservative di energia potenziale $U(\underline{x})$, la dinamica è regolata da $m\ddot{\underline{x}} = -\nabla U(\underline{x})$, con integrale dell'energia $E(\underline{x}, \underline{v}) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{m}U(\underline{x})$ ove $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$ è il vettore velocità e $v = ||\underline{v}||$ è il suo modulo (come noto, in Fisica è d'uso considerare piuttosto l'“energia totale”, il precedente integrale dell'energia moltiplicato per m).

La presenza di un integrale primo può anche far abbassare l'ordine di un'equazione.

Esercizio. Data l'equazione differenziale $\ddot{x} = 2e^{2x} + 2e^x$ nell'incognita $x(t)$ determinarne l'integrale dell'energia, e usarlo per risolvere il problema di Cauchy con dati $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2\sqrt{2}$.

Risoluzione. In questo quadro si ha $\ddot{x} = h(x) = 2e^{2x} + 2e^x$ e perciò $V(x) = -\int h(x) dx = -(e^{2x} + 2e^x)$, dunque l'integrale dell'energia risulta $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - (e^{2x} + 2e^x)$ (le curve di livello di E nello spazio delle fasi (x, \dot{x}) sono visibili nella Figura 4.8(b), con evidenziata quella relativa al dato iniziale del nostro

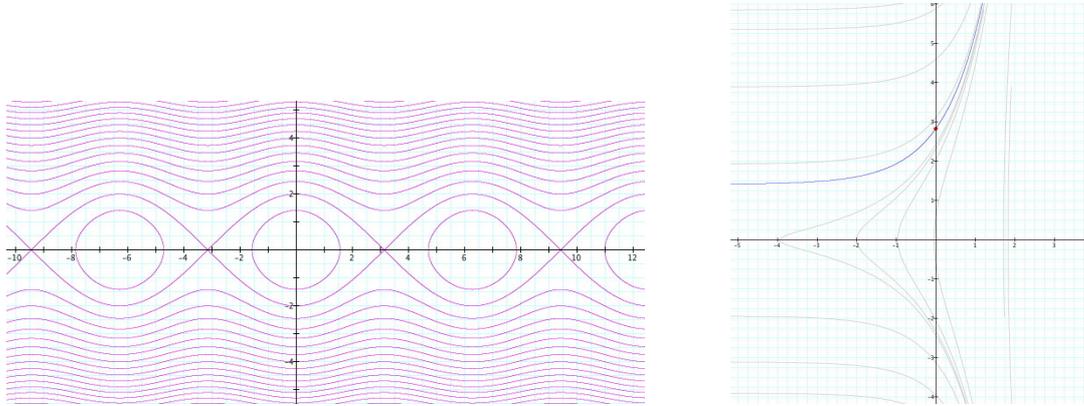


Figura 4.8: Curve di livello dell'energia totale nello spazio delle fasi: (a) pendolo semplice $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$; (b) equazione $\ddot{x} = 2e^{2x} + 2e^x$.

problema). Lungo la soluzione cercata tale integrale primo sarà costante, e varrà dunque $E(x(0), \dot{x}(0)) = E(0, 2\sqrt{2}) = 1$: pertanto la $x(t)$ soddisferà $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - (e^{2x} + 2e^x) = 1$, ovvero $\dot{x}^2 = 2(e^{2x} + 2e^x + 1)$, da cui (poiché \dot{x} non si annulla mai in quanto il secondo membro non si annulla mai, e dunque resta positivo come lo è in $t = 0$, essendo $\dot{x}(0) = 2\sqrt{2} > 0$) si ricava $\dot{x} = \sqrt{2(e^{2x} + 2e^x + 1)} = \sqrt{2}(e^x + 1)$, che è diventata un'equazione del primo ordine a variabili separabili che sappiamo risolvere. Separando le variabili si ottiene $\frac{1}{e^x + 1} dx = \sqrt{2} dt$, che integrata tra 0 e t dà $(\log(\frac{e^\xi}{e^\xi + 1}))|_{x(0)}^{x(t)} = \sqrt{2}(\tau)|_0^t$, ovvero $\log(\frac{e^x}{e^x + 1}) - \log(\frac{1}{2}) = \log(\frac{2e^x}{e^x + 1}) = \sqrt{2}t$, da cui $e^x = \frac{e^{\sqrt{2}t}}{2 - e^{\sqrt{2}t}}$, da cui infine la soluzione cercata $x(t) = \log(\frac{e^{\sqrt{2}t}}{2 - e^{\sqrt{2}t}}) = \sqrt{2}t - \log(2 - e^{\sqrt{2}t})$, definita come soluzione massimale nell'intervallo per cui $2 - e^{\sqrt{2}t} > 0$, ovvero in $]-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}} \log 2[$.

4.3 Sistemi autonomi nel piano ed equazioni differenziali totali

Occupiamoci ora del caso particolare dei sistemi autonomi nel piano cartesiano (x, y)

$$(4.6) \quad \begin{cases} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y) \end{cases}$$

ove a e b sono funzioni di classe \mathcal{C}^1 su un aperto V di \mathbb{R}^2 , dunque con esistenza e unicità locale (e unicità globale); esso comprende tra l'altro l'equazione scalare del primo ordine $y' = f(x, y)$ (ove si intende $y(x)$), nel senso che $y(x)$ è soluzione di quest'ultimo se e solo se $(t, y(t))$ è soluzione del sistema autonomo $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = f(t, y) \end{cases}$; o anche l'equazione scalare autonoma del secondo ordine $y'' = h(y, y')$, che equivale al sistema $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y, p) \end{cases}$.

Nel piano le ipersuperfici sono le curve, dunque trovare un integrale primo per il sistema (4.6) equivale sostanzialmente a trovarne le orbite in V : saranno (porzioni del)le curve di livello dell'integrale primo. Consideriamo la forma differenziale

$$(4.7) \quad \omega = b(x, y) dx - a(x, y) dy :$$

se essa fosse esatta, per la Proposizione 4.2.7 una sua primitiva sarebbe un integrale primo per il sistema⁽⁹³⁾. Va da sè che spesso questo non accade: se tuttavia si riuscisse a ottenere una forma esatta moltiplicando ω per una funzione scalare $\rho(x, y)$ di classe \mathcal{C}^1 mai nulla (che chiameremo *fattore integrante*), sempre per la Proposizione 4.2.7 una primitiva di $\rho\omega$ sarebbe ancora un integrale primo del sistema⁽⁹³⁾. Quando è possibile allora trovare un fattore integrante?

Fattore integrante

Affrontiamo il problema da un punto di vista generale. Data una forma differenziale lineare

$$\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

di classe \mathcal{C}^1 su un aperto V di \mathbb{R}^2 , sappiamo che il fatto che $\rho\omega$ sia una forma esatta equivale, su un dominio semplicemente connesso, alla chiusura di $\rho\omega$, che dà luogo all'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial(\rho p)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho q)}{\partial x}, \quad \text{ovvero} \quad \rho\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right).$$

Si può provare⁽⁹⁴⁾ che un tale fattore integrante $\rho(x, y)$ esiste sempre; tuttavia non si dispone per esso di una formula di rappresentazione in generale, ma solo in alcuni casi particolari, come ad esempio quello delle variabili separabili (4.9), o anche come il seguente.

Proposizione 4.3.1. *Se esistono $u(x)$ e $v(y)$ tali che $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = u(x)q - v(y)p$, allora $\rho(x, y) = e^{\int u(x) dx + \int v(y) dy}$ è fattore integrante. Ad esempio:*

- se $\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)$ non dipende da y , allora $\rho(x) = e^{\int \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx}$ è fattore integrante;
- se $-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)$ non dipende da x , allora $\rho(y) = e^{-\int \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) dy}$ è fattore integrante.

Dimostrazione. In tali ipotesi la suddetta condizione $\rho\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$ diventa $\rho(u(x)q - v(y)p) = q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$, ovvero $q(\rho u(x)) - p(\rho v(y)) = q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$, che è soddisfatta se si riesce a trovare una $\rho(x, y)$ tale che $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = (\rho u(x), \rho v(y))$: e la proposta $\rho(x, y) = e^{\int u(x) dx + \int v(y) dy}$ effettivamente soddisfa questo requisito. \square

La tattica perciò è la seguente.

1. Dato un sistema autonomo (4.6)⁽⁹⁵⁾ con condizione iniziale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, verificare se (x_0, y_0) è un equilibrio: in tal caso la soluzione cercata è la costante $(x(t), y(t)) \equiv (x_0, y_0)$. Altrimenti considerare la forma differenziale lineare associata (4.7) e cercarne una primitiva $F(x, y)$, eventualmente usando un fattore integrante.
2. Trovata la curva integrale $F(x, y) = k_0$ passante per (x_0, y_0) (ove ovviamente $k_0 = F(x_0, y_0)$), l'orbita della soluzione cercata è l'intera porzione della curva integrale che

⁽⁹³⁾Infatti dire che $F(x, y)$ è una primitiva di $\rho\omega$ significa che $dF = \rho\omega$, ovvero che $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\rho b, -\rho a)$: ma allora ∇F è ortogonale al campo $g(x, y) = (a, b)$, e basta applicare la Proposizione 4.2.7.

⁽⁹⁴⁾usando il *metodo delle caratteristiche* per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

⁽⁹⁵⁾in particolare un'equazione scalare del primo ordine $y' = f(x, y)$ o un'equazione scalare autonoma del secondo ordine $y'' = h(y, y')$.

contiene (x_0, y_0) e che non contiene equilibri.⁽⁹⁶⁾ Inoltre, poiché sappiamo che una soluzione non costante ha velocità che non si annulla mai, tale orbita sarà percorsa da un capo all'altro in modo monotono.

3. Ritornare poi al sistema (4.6) e cercare di usare l'informazione data dalla curva integrale per risolverlo (magari disaccoppiando una delle due equazioni del sistema) trovando così la legge oraria $\varphi(t)$ con cui l'orbita viene percorsa.

Esempi. (1) Consideriamo il sistema autonomo $\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x + y^2 \end{cases}$. L'unico equilibrio del sistema (dato da $-2xy = x + y^2 = 0$) è l'origine $O(0, 0)$. Per le altre orbite, la forma differenziale associata $(x + y^2) dx + 2xy dy$ è esatta (è chiusa sul semplicemente connesso \mathbb{R}^2), e una sua primitiva è $F(x, y) = x^2 + 2xy^2$. Tra le curve di livello $F(x, y) = k$, quella con $k = 0$ (unione dell'asse y e della parabola $x = -2y^2$) contiene anche l'equilibrio O , che da solo costituisce un'orbita; ne deduciamo che tutte e sole le orbite del sistema (percorse in modo monotono da un capo all'altro) saranno l'equilibrio $\{O\}$, poi i due semiasse $\{(0, y) : y < 0\}$ e $\{(0, y) : y > 0\}$, le due semiparabole $\{(x, y) : x = -2y^2, y < 0\}$ e $\{(x, y) : x = -2y^2, y > 0\}$, e tutte le altre curve $x^2 + 2xy^2 = k$ con $k \neq 0$. Fissiamo ora l'attenzione sul problema di Cauchy dato dalle condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$: per quanto appena detto, l'orbita percorsa dalla soluzione massimale sarà la mezza parabola $x = -2y^2$ con $y > 0$. Se il nostro interesse fosse limitato alla geometria dell'orbita della nostra soluzione, avremmo terminato; se invece siamo anche interessati alla legge oraria, sostituendo $x = -2y^2$ nella seconda equazione del sistema si riesce a disaccoppiare quest'ultima ottenendo $y' = -y^2$, che si risolve facilmente (è a variabili separabili) e, tenuto conto che $y(0) = 1$, dà $y(t) = \frac{1}{t+1}$; dalla prima equazione si ottiene allora $x' = -2xy = -\frac{2x}{t+1}$, pure a variabili separabili, che, tenuto conto che $x(0) = -2$, dà $x(t) = -\frac{2}{(t+1)^2}$. La soluzione del nostro problema di Cauchy è dunque $(x(t), y(t)) = (-\frac{2}{(t+1)^2}, \frac{1}{t+1})$ definita per $t \in]-\infty, 1[$, intorno di $t = 0$ (che, come atteso, costituisce una parametrizzazione del tratto superiore della parabola $x = -2y^2$, percorso verso sinistra).

(2) Consideriamo il sistema autonomo $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$ già incontrato in precedenza a pag. 122 parlando di flusso. L'unico equilibrio del sistema (dato da $-2y = \frac{1}{2}x = 0$) è l'origine $O(0, 0)$. La forma associata $\frac{1}{2}x dx + 2y dy$ è esatta (è a variabili separate), e una sua primitiva è $F(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$. Le curve di livello di F sono (a parte il punto O) le ellissi del tipo $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = k^2$ con $k > 0$, di semiasse $2k$ e k . Ricavando (ad esempio per $y > 0$) che $y = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - x^2}$ e sostituendo nella prima equazione $x' = -2y$ si ottiene $x' = -\sqrt{4k^2 - x^2}$: posto $x(t) = 2k \cos \theta(t)$ ciò equivale a $\theta' = 1$, ovvero $\theta(t) = t + \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, da cui $x(t) = 2k \cos(t + \alpha)$. Sostituendo quest'ultima nella seconda equazione $y' = \frac{1}{2}x$ si ottiene $y' = k \cos(t + \alpha)$ che, ricordando che deve essere $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = k^2$, si integra dando $y(t) = k \sin(t + \alpha)$. L'integrale generale del nostro sistema è dunque $(x(t), y(t)) = (2k \cos(t + \alpha), k \sin(t + \alpha))$ al variare di k e α (espressione valida evidentemente su tutto il piano, non solo per $y > 0$), come già anticipato a pag. 122.

In generale, data una forma differenziale lineare nel piano $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$, ove

Equazione differenziale totale

⁽⁹⁶⁾In effetti le orbite del sistema non possono intersecarsi (per unicità), e non possono occupare solo parzialmente un tratto di curva di livello di F non contenente equilibri. Per giustificare quest'ultima affermazione, si ricordi che le orbite sono le immagini delle soluzioni *massimali*, dunque se una soluzione massimale $\varphi(t)$ occupasse un tale tratto di una curva di livello solo fino a un certo punto non di equilibrio basterebbe considerare il problema di Cauchy con dato iniziale per $t = 0$ in quel punto, che per esistenza locale ammetterebbe una soluzione $\psi(t)$ definita in tutto un intorno aperto di $t = 0$; essendo $\psi'(0) \neq 0$, tale ψ avrebbe come immagine tutto un intorno del punto stesso nella topologia indotta della curva, e dunque sarebbe possibile estendere la soluzione φ saldandola con ψ , ma ciò contraddirebbe la massimalità.

p e q sono funzioni \mathcal{C}^1 su un aperto V di \mathbb{R}^2 , si definisce *equazione differenziale totale* il problema, denotato con

$$(4.8) \quad \omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0,$$

di trovare le funzioni $\varphi : I \rightarrow V$ di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, dette soluzioni dell'equazione differenziale totale, che siano:

- (a) o una costante $\varphi(t) \equiv (x_0, y_0)$ tale che $p(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) = 0$;
- (b) o tali che $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ e $\varphi^* \omega = p(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + q(\varphi(t)) \varphi_2'(t) \equiv 0$.⁽⁹⁷⁾

I punti $(x_0, y_0) \in V$ che soddisfano (a) (e danno luogo alle uniche soluzioni costanti di $\omega = 0$) sono detti *punti singolari* della forma ω .⁽⁹⁸⁾

Punti singolari

L'idea dell'equazione totale è di concentrare l'attenzione unicamente sulle geometria delle orbite o *curve integrali* delle soluzioni, senza riguardo alla legge oraria con cui queste orbite sono percorse. E le curve integrali si possono determinare, come detto prima, cercando una primitiva F di ω (eventualmente con l'ausilio di un fattore integrante ρ , perché è evidente che, data una funzione mai nulla $\rho(x, y)$, un'equazione totale $\omega = 0$ è equivalente all'equazione totale $\rho\omega = 0$ nel senso che le soluzioni della prima sono tutte e sole quelle della seconda) e poi considerandone le curve di livello $F(x, y) = k$: infatti ciò è chiaro se $\varphi(t)$ è una costante come in (a), mentre se è come in (b) vale

$$(F(\varphi(t)))' = \nabla F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \rho(p(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + q(\varphi(t)) \varphi_2'(t)) \equiv 0.$$

In altre parole, le soluzioni di $\omega = 0$ sono tutte e sole le curve parametriche la cui immagine è contenuta in una delle curve integrali $F(x, y) = k$, a prescindere dalla legge oraria con cui tale curva integrale è percorsa.

Esempio. Se $\omega = dx$, le soluzioni di $\omega = 0$ sono tutte e sole le $\varphi(t)$ il cui sostegno giace su una retta verticale del tipo $x = k$, cioè tali che $\varphi_1(t) \equiv k$ (e dunque $\varphi_1'(t) \equiv 0$), senza riguardo alla legge oraria $\varphi_2(t)$ con cui tale retta viene percorsa. Una primitiva di ω è $F(x, y) = x$, perciò le curve integrali sono, come già osservato, le rette verticali $x = k$.

L'equazione differenziale totale può essere data e risolta di per sè, o può essere raggiunta a partire da un sistema differenziale: è infatti evidente che le soluzioni di (4.6) si trovano tra quelle di (4.8) con $(p, q) = (b, -a)$. In questo secondo caso, passare da un problema completo (geometrico e temporale) come il sistema differenziale (4.6) a un problema solo geometrico come l'equazione differenziale totale (4.8) equivale a concentrarsi esclusivamente sul determinare le curve integrali di (4.6) (tra queste, in particolare, gli equilibri

⁽⁹⁷⁾Il simbolo $\varphi^* \omega$ denota proprio il pull-back di ω tramite φ , che infatti è $p(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + q(\varphi(t)) \varphi_2'(t)$.

⁽⁹⁸⁾Su altri testi si definisce come soluzione dell'equazione differenziale totale $\omega = 0$ una qualunque $\varphi : I \rightarrow V$ di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ tale che $\varphi^* \omega = 0$. Oltre a quelle che noi abbiamo scelto di chiamare soluzioni, questo insieme comprende ovviamente anche tutti i cammini costanti in V , qualunque sia questa costante: tuttavia noi preferiamo chiamare "soluzioni" solo le costanti che corrispondono ai punti singolari, perché solo queste soluzioni costanti corrispondono agli equilibri dei sistemi lineari che danno luogo all'equazione totale $\omega = 0$ tramite l'associazione (4.7).

corrisponderanno ai punti singolari della forma) disinteressandosi momentaneamente della legge oraria con cui queste vanno percorse. Poi, nel caso in cui questa legge oraria sia importante da sapere, una volta risolta l'equazione totale si potrà ritornare al problema originale (4.6) seguendo la tattica illustrata poco fa; in ogni caso, se due sistemi autonomi danno luogo alla stessa equazione totale essi sono equivalenti, come spiegato nella Proposizione 4.2.6.

Esercizio. Risolvere l'equazione differenziale totale $(x^2 + 2x + y^3) dx + 3y^2 dy = 0$; dare poi qualche esempio di sistema autonomo che dà luogo a tale equazione totale, cercando di risolverne il problema di Cauchy con dato $(x(0), y(0)) = (1, -1)$.

Risoluzione. (Figura 4.9) La forma $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy = (x^2 + 2x + y^3) dx + 3y^2 dy$ ha come punti singolari le soluzioni di $x^2 + 2x + y^3 = 3y^2 = 0$, ovvero $O(0, 0)$ e $A(-2, 0)$, che corrispondono alle soluzioni costanti dell'equazione totale. Per le altre soluzioni notiamo che ω , definita su tutto \mathbb{R}^2 , non è esatta perché non è chiusa; tuttavia, visto che $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = 1$ non dipende da y , si ha che $\rho(x) = e^{\int \frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) dx} = e^x$ è fattore integrante, e in effetti la forma $e^x \omega = e^x(x^2 + 2x + y^3) dx + 3e^x y^2 dy$ è esatta, con primitiva $F(x, y) = e^x(x^2 + y^3)$. Tra le curve di livello $e^x(x^2 + y^3) = k$, quelle che contengono O e A si ottengono rispettivamente per $k = 0$ e $k = 4e^{-2}$: pertanto le orbite dell'equazione totale sono i due punti O e A , i tratti delle curve di livello $x^2 + y^3 = 0$ (cuspide) e $e^x(x^2 + y^3) = 4e^{-2}$ che si ottengono privandole rispettivamente dei punti O e A , e tutte le altre curve di livello $e^x(x^2 + y^3) = k$ con $k \neq 0, 4e^{-2}$. In particolare, notiamo che la curva integrale su cui sta il dato $(1, -1)$ è la mezza cuspide $\{(x, y) : x^2 + y^3 = 0, x > 0\}$. • I sistemi che danno luogo all'equazione totale $\omega = 0$ sono tutti e soli quelli del tipo $\begin{cases} x' = \rho(x, y) \frac{-3y^2}{x^2 + 2x + y^3} \\ y' = \rho(x, y) \frac{-3y^2}{x^2 + 2x + y^3} \end{cases}$ ove $\rho(x, y)$ è una funzione C^1 mai nulla: si tratta di sistemi tutti equivalenti tra loro nel senso spiegato nella Proposizione 4.2.6, con gli stessi equilibri e le stesse soluzioni non costanti (a meno di un cambio invertibile di parametro temporale). Vediamone tre esempi.

- Considerare $\rho(x, y) = -\frac{1}{3y^2}$ (sul semipiano $y < 0$) equivale a cercare le soluzioni dell'equazione scalare $y' = -\frac{x^2 + 2x + y^3}{3y^2}$ (formalmente ottenuta da $\omega = 0$ "dividendo ambo i membri per dx "). La soluzione del problema con $(x(0), y(0)) = (1, -1)$, ovvero con $y(1) = -1$, sarà quella trovata esplicitando la y da $x^2 + y^3 = 0$ con $x > 0$, ovvero $y = -x^{2/3}$.
- Prendiamo ora $\rho(x, y) \equiv 1$, ovvero il sistema $\begin{cases} x' = -3y^2 \\ y' = x^2 + 2x + y^3 \end{cases}$. Anche qui, naturalmente, la soluzione del problema con $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ avrà come orbita la mezza cuspide $x^2 + y^3 = 0$ con $x > 0$. E anche in questo caso l'equazione dell'orbita ci aiuta a semplificare il problema. Inserendo infatti nel sistema l'informazione $x^2 + y^3 = 0$ (da cui in particolare $y = -x^{2/3}$) si ottiene $\begin{cases} x' = -3x^{4/3} \\ y' = 2x \end{cases}$, nel quale la prima equazione è disaccoppiata e, tenuto conto che $x(0) = 1$, ha soluzione $x(t) = \frac{1}{(t+1)^3}$; messa quest'ultima nella seconda equazione del sistema si ha $y' = \frac{2}{(t+1)^3}$ che, tenuto conto che $y(0) = -1$, si integra subito dando $y(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque $(x(t), y(t)) = (\frac{1}{(t+1)^3}, -\frac{1}{(t+1)^2})$ definita per $t \in]-1, +\infty[$, intorno di $t = 0$ (che, come atteso, è una parametrizzazione della mezza cuspide percorsa verso sinistra).
- Scegliendo invece $\rho(x, y) = x^{-1/3}$ (per $x > 0$) e ricordando che $x^2 + y^3 = 0$ (ovvero $y = -x^{2/3}$) si ottiene $\begin{cases} x' = -3x^{-1/3} (-x^{2/3})^2 \\ y' = 2x x^{-1/3} \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x' = -3x \\ y' = 2x^{2/3} \end{cases}$. La prima equazione è disaccoppiata e, tenuto conto che $x(0) = 1$, ha soluzione $x(t) = e^{-3t}$; messa quest'ultima nella seconda equazione si ha $y' = 2e^{-2t}$ che, tenuto conto che $y(0) = -1$, si integra subito dando $y(t) = -e^{-2t}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque $(x(t), y(t)) = (e^{-3t}, -e^{-2t})$ definita per $t \in \mathbb{R}$, che è un'altra parametrizzazione della mezza cuspide percorsa verso sinistra.

Giusto per illustrare la Proposizione 4.2.6, mostriamo come funziona l'equivalenza tra i sistemi mostrati nei punti (b) e (c). Nelle notazioni dell'enunciato, qui abbiamo $I =]-1, +\infty[$, $\tilde{I} = \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (\frac{1}{(t+1)^3}, -\frac{1}{(t+1)^2})$, $\tilde{\varphi}(\tau) = (e^{-3\tau}, -e^{-2\tau})$; il cambio di parametro $\theta : I \rightarrow \tilde{I}$ è dato da $\tau = \theta(t) = \log(t + 1)$. Si ha poi

$\tilde{g}(x, y) = \rho(x, y) g(x, y)$ con $\rho(x, y) = x^{-\frac{1}{3}}$, e in effetti vale $\theta(t) = \int_0^t \frac{ds}{\rho(\varphi(s))} = \int_0^t \frac{ds}{s+1} = \log(t+1)$ e $\rho(x_0, y_0) = \rho(1, -1) = 1 = \frac{1}{\theta'(0)}$.

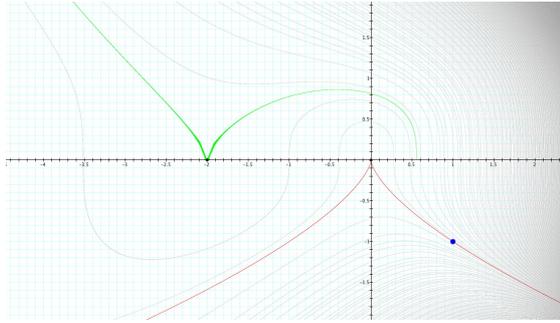


Figura 4.9: Orbite dell'equazione totale $(x^2 + 2x + y^3) dx + 3y^2 dy = 0$; sono evidenziate le curve di livello che contengono i punti singolari $O(0, 0)$ e $A(-2, 0)$, e il dato di Cauchy $(1, -1)$.

Per la sua importanza mettiamo in evidenza il caso a *variabili separabili*

Variabili separabili

$$(4.9) \quad a_1(x)b_2(y) dx + b_1(x) a_2(y) dy = 0.$$

Notato che le rette $x = x_0$ tali che $b_1(x_0) = 0$, e le rette $y = y_0$ tali che $b_2(y_0) = 0$ sono curve integrali, al di fuori di esse si può moltiplicare per il fattore integrante $\frac{1}{b_1(x)b_2(y)}$ ottenendo l'equazione totale $\frac{a_1(x)}{b_1(x)} dx + \frac{a_2(y)}{b_2(y)} dy = 0$, in cui la forma è a variabili separate e dunque esatta: dette $F(x)$ e $G(y)$ due primitive di $\frac{a_1(x)}{b_1(x)}$ e di $\frac{a_2(y)}{b_2(y)}$, le curve integrali saranno quelle della forma $F(x) + G(y) = k$.

Esempio. (*Il sistema preda-predatore di Volterra-Lotka*) Siano $x(t)$ e $y(t)$ l'evoluzione temporale delle popolazioni rispettivamente di una specie preda e di una specie sua predatrice in un ambiente provvisto di risorse a volontà per la specie preda (che dunque non dà luogo a fenomeni di soglia critica di tipo logistico) e in cui le prede siano (almeno in buona approssimazione) l'unico alimento ricercato dai predatori. In queste condizioni è naturale pensare che l'evoluzione delle prede sia data da una sovrapposizione tra una crescita malthusiana (ovvero proporzionale alla popolazione) dovuta all'ambiente con risorse illimitate e una decrescita dovuta alla presenza dei predatori (proporzionale alla densità temporale di incontri tra le due specie, a sua volta proporzionale a entrambe le popolazioni): il risultato è una legge del tipo $\dot{x} = ax - bxy$ con $a, b > 0$. Considerazioni analoghe fanno ipotizzare che l'evoluzione dei predatori sia data da una sovrapposizione tra una decrescita malthusiana dovuta alla nullità delle risorse fornite dall'ambiente (considerato di per sè, dunque a prescindere dalla presenza delle prede) e una crescita dovuta alla presenza delle prede, ovvero $\dot{y} = -cy + dxy$ con $c, d > 0$. In sostanza, i coefficienti a e c rappresentano i tassi ambientali di evoluzione "indipendente" di ciascuna popolazione, mentre b e d misurano l'interazione reciproca delle due popolazioni. Otteniamo dunque il sistema autonomo $\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$, che soddisfa alle condizioni di esistenza e unicità locale ma non a quelle di esistenza e unicità globale: non è dunque detto che una soluzione $(x(t), y(t))$ viva per tempi lunghi, anche se intuitivamente sembra evidente che se $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$ allora nessuna delle due popolazioni possa crescere a dismisura (se le prede crescono troppo allora crescono anche i predatori che poi fanno decrescere le prede, il che a sua volta provoca la decrescita dei predatori e di conseguenza un nuovo aumento del numero di prede, ...) e dunque potrebbe scattare l'esistenza in eterno delle

soluzioni in base alla “fuga dai compatti” (Proposizione 4.2.5(6)). Passiamo allora all’analisi geometrica del sistema tramite l’equazione totale associata $(c - dx)y dx + x(a - by) dy = 0$, che è a variabili separabili. Gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$; notiamo poi che $x = 0$ e $y = 0$ sono curve integrali, dunque per unicità le orbite con dato iniziale nel primo quadrante (quello di nostro interesse) restano confinate in esso. Pensando dunque di essere nel primo quadrante, una volta moltiplicato per il fattore integrante $\frac{1}{xy}$ l’integrale primo risulta $f(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$. Ora, non è difficile vedere che nel primo quadrante le curve di livello di f sono curve chiuse che girano attorno all’equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ (Figura 4.10)⁽⁹⁹⁾, e questo dà ben ragione all’intuizione di andamento ciclico delle popolazioni descritta poco fa: in effetti, non contenendo alcun equilibrio tali orbite sono percorse più volte dalle soluzioni, dunque per la Proposizione 4.2.5(4) le soluzioni vivono in eterno e sono periodiche. Considerata allora una soluzione $(x(t), y(t))$ e detto $T > 0$ il periodo, calcoliamone la media $(x_{\text{med}}, y_{\text{med}}) = (\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt)$: integrando $\frac{\dot{x}}{x} = a - by$ e $\frac{\dot{y}}{y} = -c + dx$ tra $t = 0$ e $t = T$ e tenendo presente che $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$ si ottiene $0 = \log \frac{x(T)}{x(0)} = aT - bTy_{\text{med}}$ e $0 = \log \frac{y(T)}{y(0)} = -cT + dTx_{\text{med}}$, da cui $(x_{\text{med}}, y_{\text{med}}) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ (in altre parole: i valori medi delle popolazioni coincidono con quelli dell’equilibrio, in particolare non dipendono dal dato iniziale).

È interessante fare un’altra osservazione, che dà la misura di come questo modello dia ragione di fenomeni naturali altrimenti inspiegabili. Sperimentalmente si è osservato che quando l’ambiente diventa più favorevole alla vita di entrambe le popolazioni c’è uno sviluppo sensibilmente superiore dei predatori rispetto a quello delle prede; e viceversa, quando l’ambiente diventa più ostile alla vita di entrambe le popolazioni ne soffrono più i predatori delle prede. Questo mutamento di condizione ambientale si può modellizzare aggiungendo all’evoluzione di entrambe le popolazioni un medesimo contributo malthusiano di piccolo coefficiente ε (si intende che $\varepsilon > 0$ rappresenta un miglioramento ambientale, mentre $\varepsilon < 0$ un peggioramento), ovvero passando dal sistema $\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$ al sistema $\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy + \varepsilon x \\ \dot{y} = -cy + dxy + \varepsilon y \end{cases}$. In sostanza, rispetto al sistema iniziale i parametri “ambientali” (a, c) vengono mutati in $(a + \varepsilon, c - \varepsilon)$, e allora l’analisi compiuta mostra che dopo il mutamento i valori medi delle popolazioni di prede/predatori passano da $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ a $(\frac{c-\varepsilon}{d}, \frac{a+\varepsilon}{b})$, il che effettivamente conferma quanto suggerito dall’osservazione sperimentale. Questo fatto è detto *principio di Volterra*, e storicamente risale agli anni ’20 del XX secolo. In quell’epoca il biologo Umberto D’Ancona dell’università di Padova, interessato all’evoluzione delle popolazioni delle specie animali in competizione, aveva osservato nel mare Adriatico un forte aumento percentuale dei “selaci” (pesci predatori non interessanti per la pesca, come razze, squali etc.) rispetto al pesce commestibile durante gli anni della Prima Guerra Mondiale, nei quali la pesca marittima era drasticamente diminuita per ovvi motivi legati al rischio bellico e dunque le condizioni ambientali del mare erano migliorate per entrambe le popolazioni: non capendo la ragione di tale fenomeno, che appariva contrario a quanto si sarebbe potuto supporre, D’Ancona aveva chiesto aiuto al collega matematico pisano Vito Volterra, che per l’appunto rispose elaborando il modello che porta il nome suo e di Lotka⁽¹⁰⁰⁾. Tale modello dunque spiega anche che, al contrario, un moderato aumento della pesca porta a un incremento del pesce commestibile, naturalmente a patto che assieme al pesce commestibile vengano pescati anche i suoi predatori (i selaci). Un altro fenomeno influenzato dal principio di Volterra è il trattamento dei frutteti con gli insetticidi che, sterminando sia gli insetti parassiti sia gli eventuali insetti predatori dei parassiti, provoca alla lunga effetti contrari alle attese. Ad esempio, nel 1868 un insetto di origine australiana (*Icerya purchasi*) venne introdotto accidentalmente in America e minacciò di distruggere gli agrumeti: come rimedio venne introdotto anche il suo naturale predatore australiano, una coccinella (*Novius cardinalis*) che effettivamente contribuì a ridurre le *Iceryae*. Tuttavia alla scoperta del DDT gli orticoltori ne fecero subito uso nella speranza di ridurre ulteriormente la presenza dei parassiti, ma alla lunga si ottenne l’effetto contrario a quanto sperato, ovvero l’aumento delle sole *Iceryae*.

Per concludere, mettiamo in evidenza alcuni tipi notevoli di *equazioni differenziali scalari*

⁽⁹⁹⁾ Infatti nel primo quadrante $f(x, y)$ è una funzione convessa che tende a $+\infty$ quando x tende sia a 0^+ che a $+\infty$ (uniformemente in y) e analogamente per y , ed ha minimo in $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

⁽¹⁰⁰⁾ Alfred James Lotka (Leopoli, 2 marzo 1880 - New York, 5 dicembre 1949)

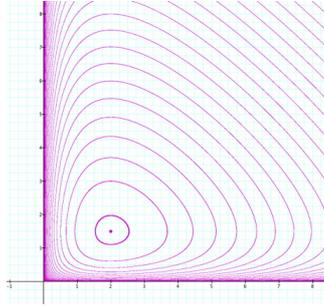


Figura 4.10: Le orbite del sistema preda-predatore di Volterra-Lotka.

con le relative equazioni differenziali totali e tecniche di risoluzione.

- L'equazione del primo ordine a variabili separabili

$$f_2(x) g_1(y) y' = f_1(x) g_2(y)$$

nell'incognita $y(x)$, che già sappiamo risolvere, dà luogo all'equazione totale a variabili separabili $f_1(x) g_2(y) dx - f_2(x) g_1(y) dy = 0$.

Esempio. L'equazione $x^3 y' + y^3 = 0$ dà luogo all'equazione totale $y^3 dx + x^3 dy = 0$. Per quest'ultima, notato che l'origine $O(0,0)$ è l'unico punto singolare e che gli assi $x = 0$ e $y = 0$ (o per meglio dire —visto che $O(0,0)$ è un punto singolare— i quattro semiassi) sono curve integrali, dividendo si ottiene $\frac{1}{x^3} dx + \frac{1}{y^3} dy = 0$, che ha come primitiva $F(x,y) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})$. Le altre curve integrali sono dunque della forma $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = k$ con $k > 0$, da cui $y(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{kx^2 - 1}}$, definite per $|x| > \frac{1}{\sqrt{k}}$. In particolare, l'unica soluzione definita su tutto \mathbb{R} è quella nulla.

- L'equazione del primo ordine omogenea $y' = f(x,y)$ ove f è omogenea di grado 0 (ricordiamo che una funzione $f(x,y)$ si dice “omogenea di grado r ” se $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y)$ per ogni $\lambda \neq 0$) si può risolvere introducendo una nuova variabile dipendente $z(x)$ tale che $y(x) = x z(x)$, con la quale per $x \neq 0$ l'equazione diventa $z + xz' = f(x,xz) = x^0 f(1,z) = f(1,z)$, ovvero $xz' = f(1-z) - z$, che è a variabili separabili.

Allo stesso modo si tratta l'equazione totale omogenea $p(x,y) dx + q(x,y) dy = 0$ ove p e q sono omogenee dello stesso grado r : ponendo ancora $y(x) = x z(x)$, per $x \neq 0$ l'equazione diventa $x^r p(1,z) dx + x^r q(1,z) (z dx + x dz) = 0$, ovvero (dividendo per x^r) $(p(1,z) + z q(1,z)) dx + x q(1,z) dz = 0$; notato che se $p(1,c) + c q(1,c) = 0$ allora $z = c$ (ovvero $y = cx$) è una curva integrale dell'equazione, dividendo si ottiene $\frac{1}{x} dx + \frac{q(1,z)}{p(1,z) + z q(1,z)} dz = 0$, a variabili separate e dunque esatta.

Esempio. L'equazione totale $y^2 dx - (x^2 + 2xy) dy = 0$ è omogenea di grado 2. Notato che l'unico punto singolare è $O(0,0)$, e che $x = 0$ è curva integrale, posto $y(x) = x z(x)$ si ottiene $x^2 z^2 dx - (x^2 + 2x^2 z) (z dx + x dz) = 0$ ovvero (per $x \neq 0$, dividendo per x^2) $z(z+1) dx + x(2z+1) dz = 0$. Tenuto presente che $z = 0$ e $z = -1$ (ovvero $y = 0$ e $y = -x$) sono curve integrali, dividendo si ottiene $\frac{1}{x} dx + \frac{2z+1}{z(z+1)} dz = 0$, le cui curve integrali sono $F(x,z) = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2z+1}{z(z+1)} dz = \log |xz(z+1)| = k$,

ovvero $xz(z+1) = k \neq 0$, che corrisponde a $y(x+y) = kx$, dunque $x = \frac{y^2}{k-y}$ (una famiglia di iperboli, vedi Figura 4.11; per $k = 0$ sono ricomprese le curve $y = 0$ e $y = -x$ già notate in precedenza). Uno dei due rami di queste iperboli passa per O , che è punto singolare: dunque tale ramo viene diviso in due diverse orbite, mentre l'altro ramo è per intero un'orbita. Anche gli assi $x = 0$, $y = 0$ e $y = -x$ vengono divisi dall'origine in due orbite distinte.

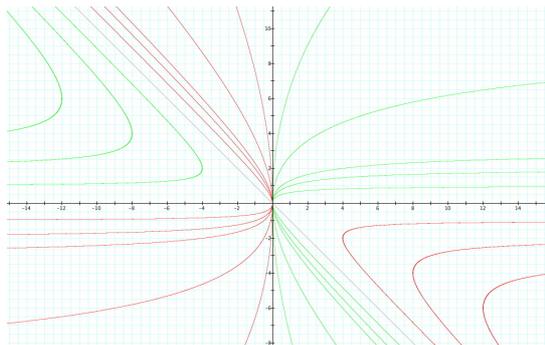


Figura 4.11: Orbite dell'equazione totale omogenea $y^2 dx - (x^2 + 2xy) dy = 0$: è la famiglia di iperboli $x = \frac{y^2}{k-y}$ (le curve con $k > 0$ sono in verde, quelle con $k < 0$ in rosso).

- L'equazione scalare autonoma del secondo ordine $y'' = h(y, y')$ equivale, come già osservato in precedenza, al sistema $\begin{cases} y' = p \\ p' = h(y, p) \end{cases}$, che dà luogo all'equazione differenziale totale $h(y, p) dy - p dp = 0$. Nel caso in cui l'equazione sia del tipo $y'' = h(y)$, una primitiva di tale forma è, come noto, l'integrale dell'energia.

Esempio. L'equazione $y'' = 2yy'(y' - 1)$ dà luogo all'equazione totale $2yp(p - 1) dy - p dp = 0$. Curve integrali sono $p = 0$ (che corrisponde a $y' \equiv 0$, dunque $y(t) \equiv k \in \mathbb{R}$) e $p = 1$ (che corrisponde a $y' \equiv 1$, dunque $y(t) = t + k$ con $k \in \mathbb{R}$); dividendo si ottiene allora $2y dy - \frac{1}{p-1} dp = 0$, che integrata porge $y^2 - \log |p - 1| = k$, che equivale a $p = he^{y^2} + 1$ per $h \in \mathbb{R}$: queste sono dunque le orbite nello spazio delle fasi (y, p) . Volendo risalire alla legge oraria $y(t)$ si ottiene $y' = he^{y^2} + 1$, che è a variabili separabili ma non integrabile elementarmente.

- L'equazione di Bernoulli è del tipo $y' + p(x)y = q(x)y^\beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$. Se $\beta = 0$ o $\beta = 1$ si tratta di un'equazione lineare, che sappiamo risolvere; nel resto dei casi, per cercare le soluzioni non nulle, dividendo per y^β si ottiene $y^{-\beta}y' + p(x)y^{1-\beta} = q(x)$ ovvero $\frac{1}{1-\beta}(y^{1-\beta})' + p(x)y^{1-\beta} = q(x)$ che, posto $z(x) = y^{1-\beta}(x)$, diventa l'equazione lineare $\frac{1}{1-\beta}z' + p(x)z = q(x)$.

Esempio. L'equazione $xy' = y - y^3$ diventa, per $x \neq 0$, $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^3$. Notata la soluzione nulla $y \equiv 0$ (su tutto \mathbb{R}), dividendo per y^3 si ha $y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = -\frac{1}{x}$ ovvero, posto $z(x) = y(x)^{-2}$, $-\frac{1}{2}z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}$, cioè $z' + \frac{2}{x}z = \frac{2}{x}$, equazione lineare che ha soluzioni $z(x) = \frac{1}{x^2}(x^2 + k) = 1 + \frac{k}{x^2}$, da cui $y(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}$ (definite su \mathbb{R} se $k > 0$, o per $|x| > \sqrt{-k}$ se $k < 0$; per $k = 0$ si hanno le costanti $y = \mp 1$).

Domande e risposte

01. D. *Nella dimostrazione della Proposizione 4.2.7 lei parte dal fatto che “Dire che E è un integrale primo per $y' = g(y)$ è come dire che le orbite dell’equazione (nei punti y delle quali il vettore tangente è $g(y)$) sono contenute nelle ipersuperfici di livello di E .” Da dove deriva questo fatto?*

R. È una semplice riformulazione della definizione di “integrale primo”. Per definizione, una funzione $E(y)$ si dice “integrale primo” per l’equazione autonoma $y' = g(y)$ se, presa una qualsiasi soluzione $\varphi(t)$ dell’equazione (ovvero una funzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ tale che $\varphi'(t) = g(\varphi(t))$ per ogni $t \in I$), la funzione E assume lo stesso valore in tutti i punti-immagine di φ , ovvero se $E(\varphi(t))$ è una costante indipendente da t . Ma questo è esattamente come dire che la curva-immagine $\varphi(I)$ di φ (ovvero, come si dice, la “orbita” di φ) sia tutta contenuta in uno stesso insieme di livello di E , ovvero un luogo del tipo $E(x, y) = k$ per un certo $k \in \mathbb{R}$, che come noto, se E è sommersiva, è un’ipersuperficie di \mathbb{R}^n .