Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)
Esercizi di autoverifica su equazioni differenziali - teoria generale

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

giovedì 21 novembre 2024

Istruzioni generali. Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento, che sarà fornito lunedì 25/11. Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 16 pt (6+4+6). **Ex. 2:** 16 pt (4+6+6). **Ex. 3:** 16 pt (5+6+5). **Ex. 4:** 18 pt (4+4+5+5). **Ex. 5:** 16 pt (6+4+6). **Ex. 6:** 18 pt (7+4+7). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in due sedute da 3 ore).

---

1. $^{(*)}$ Sia data l'equazione differenziale $y' = \sin(ty)$.

(i) Cosa si può dire riguardo esistenza e unicità locale e globale delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se una soluzione si annulla per un certo t_0, essa è identicamente nulla?

(ii) Mostrare che le soluzioni sono pari, e che se $\varphi(t)$ è una soluzione lo è anche $-\varphi(t)$.

(iii) Studiare la crescenza delle soluzioni. Il punto $t = 0$ è un estremante locale per esse?

2. Sia data l'equazione differenziale $t\,\dot{x} = x\,(\log x - \log t)$.

(i) Dire per quali dati iniziali è garantita esistenza e unicità locale della soluzione $x(t)$. Sono applicabili i risultati di esistenza e unicità globale?

(ii) Vi sono soluzioni costanti, o più in generale di tipo lineare $x(t) = at + b$? Dire in quali zone del piano (x, t) le soluzioni sono crescenti e dove sono convesse.

(iii) Usando il cambio $x(t) = t\,z(t)$ trovare tutte le soluzioni, e in particolare quella con $x(1) = 1$.

3. È data l'equazione differenziale $y' \sin^3 x = 2y \cos x$ nell'incognita $y(x)$.

(i) Si può dire a priori dove saranno definite le soluzioni? Per quali $y_0 \in \mathbb{R}$ esisteranno eventualmente soluzioni del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$?

(ii) Discutere a priori crescenza e convessità delle soluzioni. Se $\varphi(x)$ è soluzione, lo è anche $-\varphi$?

(iii) Trovare tutte le soluzioni, specificando se ve ne sono di definite all'intorno di $x = 0$ o anche su tutto $\mathbb{R}$. Risolvere in particolare il problema di Cauchy con $y(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

4. $^{(*)}$ È data l'equazione differenziale $y'' = y\,e^{-y^2}$.

$^{(*)}$Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

(i) Scrivere il sistema equivalente del primo ordine, e mostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Esprimere l'integrale dell'energia $E(y,y')$, e usarlo per mostrare che ogni soluzione massimale $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ha derivata φ' limitata.

(iii) Determinare i valori dell'energia per cui le soluzioni sono strettamente monotone.

(iv) Tracciare alcune curve di livello di E, e descrivere qualitativamente le soluzioni non monotone.

5. È data l'equazione differenziale totale $2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy=0$.

(i) Trovare tutte le soluzioni, e in particolare quelle per $(0,-1)$. Qual è la loro orbita?

(ii) Quali sono le soluzioni, nell'incognita $x(y)$, dell'equazione scalare $x'=\frac{3x^2-y^2}{2xy}$?

(iii) Trovare la soluzione del sistema autonomo $\begin{cases} x'=3x^2-y^2 \\ y'=2xy \end{cases}$ tale che $(x(0),y(0))=(-1,1)$.

6. (*) È dato il sistema differenziale $\begin{cases} x'=y^2(1+x^2) \\ y'=y^2 \end{cases}$.

(i) Trovare tutte le soluzioni costanti del sistema; determinarne poi un integrale primo, e dire con precisione quali saranno le orbite delle soluzioni, compreso il verso di percorrenza.

(ii) Dopo aver risolto il problema di Cauchy scalare dato da $y'=y^2$ e $y(0)=b$ al variare di $b\in\mathbb{R}$, dire quali sono le soluzioni del sistema definite su tutto $\mathbb{R}$.

(iii) Esibire la soluzione del sistema tale che $(x(0),y(0))=(a,b)$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$.

Soluzioni.

1. (i) (Figura 1) Nell'equazione scalare $y'=\sin(ty)$ la funzione $f(t,y)=\sin(ty)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2$, dunque esistenza e unicità locale delle soluzioni sono assicurate per ogni dato iniziale $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ (e dunque anche unicità globale). Inoltre f è evidentemente limitata, dunque ha crescita sublineare: ciò assicura anche che tutte le soluzioni massimali hanno dominio $\mathbb{R}$. Una soluzione costante $y\equiv k$ dovrebbe far sì che $0=\sin(kt)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, ma ciò accade solo per $k=0$: dunque l'unica soluzione costante è $y\equiv 0$. Pertanto, per unicità globale, una soluzione si annulla per un certo t_0 non può che essere identicamente nulla.

(ii) Sia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una soluzione massimale, e si ponga $\psi(t):=\varphi(-t)$: poiché $\psi'(t)=-\varphi'(-t)=-\sin((-t)\varphi(-t))=\sin(t\varphi(-t))=\sin(t\psi(t))$ risulta che anche $\psi(t)$ è soluzione ma essendo $\psi(0)=\varphi(-0)=\varphi(0)$, per unicità globale deve essere $\psi(t)=\varphi(t)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, ovvero $\varphi(-t)=\varphi(t)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$. In altre parole, φ è pari. Inoltre si ha $(-\varphi)'(t)=-\varphi'(t)=-\sin(t\varphi(t))=\sin(t\,(-\varphi)(t))$, dunque anche $-\varphi$ è soluzione.

(iii) Le soluzioni $y(t)$ sono crescenti quando $\sin(ty)\geq 0$; limitandoci a guardare nel primo quadrante (dopo tutto sappiamo che le soluzioni sono pari, e che se φ è soluzione anche $-\varphi$ lo è), ciò significa che $\frac{2k\pi}{t}\leq y\leq\frac{(2k+1)\pi}{t}$ per $k=\mathbb{N}\cup\{0\}$, ovvero le soluzioni crescono nella zona compresa tra i semiassi coordinati e il ramo di iperbole $y=\frac{\pi}{t}$ e tra i rami di iperbole $\frac{2k\pi}{t}$ e $\frac{(2k+1)\pi}{t}$ per $k\geq 1$. In particolare tali soluzioni, che per (i) saranno sempre positive perché non possono mai annullarsi, assumeranno massimi/minimi locali sui rami di iperbole rispettivamente $y=\frac{(2k+1)\pi}{t}$ e $y=\frac{2k\pi}{t}$, e in $t=0$ avranno un minimo locale (vedi Figura 1).
La natura di $t=0$ può essere controllata facilmente anche in modo diretto. Infatti, se $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una soluzione massimale con $\varphi(0)>0$ si ha $\varphi'(0)=\sin(0\,\varphi(0))=0$, e poiché derivando si ottiene $y''=(y+ty')\cos(ty)$, si ha anche $\varphi''(0)=(\varphi(0)+0\,\varphi'(0))\cos(0\,\varphi(0))=\varphi(0)>0$, il che mostra che $t=0$ è un

punto di minimo locale stretto per φ. In modo analogo si dimostra che se $\varphi(0) < 0$ allora $t = 0$ è un punto di massimo locale stretto per φ.

2. (i) (Figura 2) L'equazione scalare $t\,\dot{x} = x\,(\log x - \log t)$ ha senso solo nel primo quadrante, ovvero dove $t > 0$ e $x > 0$: in altre parole, le soluzioni potranno essere definite in un intervallo contenuto in $]0, +\infty[$, e dovranno essere strettamente positive. Detto questo, possiamo dividere per t ottenendo la forma normale $\dot{x} = \frac{x}{t}\,\log\frac{x}{t}$. La funzione $f(t,x) = \frac{x}{t}\,\log\frac{x}{t}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ sul primo quadrante, dunque esistenza e unicità locale delle soluzioni sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0, y_0) in esso (da cui anche l'unicità globale); d'altra parte il dominio di $f(t,x)$ non contiene alcuna striscia verticale del tipo $(t,x) \in I \times \mathbb{R}$ per qualche intervallo $I \subset]0, +\infty[$ e dunque non è applicabile il teorema di esistenza e unicità globale, il che non implica però che le soluzioni massimali non possano essere definite comunque su tutto $]0, +\infty[$ (cosa che, come vedremo, alla fine si verificherà comunque).

(ii) Una soluzione costante $x \equiv b > 0$ dovrebbe soddisfare $0 = \frac{b}{t}\,\log\frac{b}{t}$ per ogni $t > 0$, ma questo non è possibile: dunque non vi sono soluzioni costanti. Cercando invece una soluzione di tipo lineare $x(t) = at + b$, dovrebbe verificarsi che $a = (a + \frac{b}{t})\,\log(a + \frac{b}{t})$ per ogni $t > 0$: naturalmente dovrà allora essere $b = 0$ e $a = a\,\log a$, ovvero $\log a = 1$, ovvero $a = e$. Troviamo dunque la soluzione $x(t) = et$ (valida per $t > 0$).
Le soluzioni saranno crescenti quando $\dot{x} = \frac{x}{t}\,\log\frac{x}{t} \geq 0$, ovvero quando $\frac{x}{t} \geq 1$, cioè sopra la bisettrice $x = t$, sulla quale le soluzioni dovranno dunque assumere massimo assoluto. Posto poi $x(t) = t\,z(t)$, derivando ambo i membri di $\dot{x} = z\,\log z$ si ottiene $\ddot{x} = \dot{z}\log z + z\frac{\dot{z}}{z} = \dot{z}(\log z + 1) = \frac{t\dot{x}-x}{t^2}(\log\frac{x}{t} + 1) = \frac{x(\log^2(\frac{x}{t})-1)}{t^2}$, e pertanto $\ddot{x} \geq 0$ se e solo se $|\log\frac{x}{t}| > 1$), il che si verifica per $\frac{x}{t} > e$ oppure per $\frac{x}{t} < \frac{1}{e}$, ovvero per $x > et$ oppure per $0 < x < \frac{1}{e}t$.

(iii) Da $\dot{x} = \frac{x}{t}\,\log\frac{x}{t}$ si ricava $z + t\dot{z} = z\,\log z$, ovvero $t\dot{z} = z(\log z - 1)$. L'equazione totale associata è $z(1 - \log z)\,dt + t\,dz = 0$, a variabili separabili: osservato che $z \neq 0$, e che $z = e$ (ovvero $x = et$, come già visto) è una curva integrale, possiamo separare le variabili arrivando a $\frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{z(1-\log z)}\,dz = 0$. Posto $z = e^{\xi}$, ricaviamo $\int \frac{1}{z(1-\log z)}\,dz = \int \frac{1}{e^{\xi}(1-\xi)}e^{\xi}\,d\xi = -\log|\xi - 1| = -\log|\log z - 1|$: pertanto le altre curve integrali sono date dalle curve di livello di $\log t - \log|\log z - 1|$, cioè $\log|\frac{\log z - 1}{t}| = k$, cioè $\log z - 1 = ct$ per $c \in \mathbb{R}$, da cui $z(t) = e^{1+ct}$ ovvero $x(t) = t\,e^{1+ct}$ per $c \in \mathbb{R}$, intese per $t > 0$. Imponendo infine che $x(1) = 1$ si ottiene $1\,e^{1+c} = 1$, da cui $c = -1$, così la soluzione cercata è $x(t) = t\,e^{1-t}$.

3. (i) (Figura 3) L'equazione differenziale $y'\sin^3 x = 2y\cos x$ è lineare; portata in forma normale per $x \neq k\pi$ (per $k \in \mathbb{Z}$) essa diventa $y' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}y$, dunque le sue soluzioni saranno senz'altro definite su intervalli del tipo $]k\pi, (k+1)\pi[$, e si tratterà poi eventualmente di vedere se tali soluzioni potranno essere prolungate anche ai punti del tipo $x = k\pi$. Un'eventuale soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$ (la cui esistenza non è a priori garantita, perché per $x = 0$ l'equazione non è in forma normale) dovrà soddisfare $y'(0)\,\sin^3 0 = 2\,y_0\,\cos 0$, dunque forzatamente $y_0 = 0$: ne deduciamo che un'eventuale soluzione definita all'intorno di $t = 0$ dovrà essere necessariamente nulla in quel punto. È d'altra parte evidente che la costante $y \equiv 0$ è soluzione, ma non è detto che sarà la sola (e infatti non lo sarà, come vedremo tra poco).

(ii) Per $x \neq k\pi$ si ha $y' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}y$, dunque per $y \gtrless 0$ le soluzioni saranno crescenti quando $\frac{2\cos x}{\sin^3 x} \gtrless 0$, ovvero quando $\operatorname{cotg} x \gtrless 0$, ovvero rispettivamente quando $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ o quando $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k+1)\pi$. Derivando ambo i membri rispetto a t si ottiene $y'' = 2\frac{(y'\cos x - y\sin x)\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x\,y\cos x}{\sin^6 x} = 2\frac{2y\cos^2 x - y\sin^4 x - 3y\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^6 x} = 2y\frac{2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 2}{\sin^6 x} = 2y\frac{(2\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - 2)}{\sin^6 x}$, pertanto per $y \gtrless 0$ le soluzioni sono convesse quando $|\sin x| \lesseqgtr \frac{1}{2}$, ovvero rispettivamente quando $-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$ o quando $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + (k+1)\pi$. La situazione sembra dunque evidentemente simmetrica rispetto al segno di y: in effetti, è immediato vedere che se $\varphi(x)$ è soluzione allora lo è anche $-\varphi(x)$, in quanto $(-\varphi)'(x) = -\varphi'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\varphi(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}(-\varphi)(x)$.

(iii) Su $]k\pi, (k+1)\pi[$ l'equazione si integra facilmente, con soluzioni $y(x) = c\,e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$. In realtà notiamo che il limite di tutte queste soluzioni quando x tende a $k\pi$ è sempre nullo, e tale è anche il limite delle loro derivate $y(x) = c\,\frac{2\cos x}{\sin^3 x}\,e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$ (a causa della rapida decrescenza dell'esponenziale). Ne ricaviamo che per ogni successione bilatera di costanti $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ si può definire una soluzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $\varphi(x) = c_k\,e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$ sull'intervallo $]k\pi, (k+1)\pi[$ (con costanti su ciascun intervallo a due a due indipendenti tra loro) e $\varphi(k\pi) = 0$. L'assegnare la condizione iniziale $y(-\frac{\pi}{2}) = -1$ porta a determinare solo la costante c_{-1} relativa all'intervallo $]-\pi, 0[$, che deve soddisfare $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = c_{-1}\,e^{-\frac{1}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})}}$, da cui $c_{-1} = -e$.

4. (i) Posto $y' = p$, il sistema del primo ordine equivalente all'equazione differenziale $y'' = y\,e^{-y^2}$ è $\begin{cases} y' = p \\ p' = y\,e^{-y^2} \end{cases}$. Poiché $g(y,p) = (p,\, y\,e^{-y^2})$ è $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ si ha esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale (t_0, y_0), dunque anche unicità globale; inoltre le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial y}(y,p) = (0,\, (1 - 2y^2)\,e^{-y^2})$ e $\frac{\partial g}{\partial p}(y,p) = (1, 0)$

sono limitate (infatti $\|\frac{\partial g}{\partial y}(y,p)\| = |(1-2y^2)\,e^{-y^2}| \leq 1$ e $\|\frac{\partial g}{\partial p}(y,p)\| \equiv 1$), dunque le soluzioni massimali dell'equazione saranno certamente definite su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) L'integrale dell'energia è $E(y,y') = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}e^{-y^2} = \frac{1}{2}(p^2 + e^{-y^2})$; ogni soluzione massimale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ percorre una delle curve di livello di tale energia, ovvero ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ soddisferà $\frac{1}{2}(\varphi'(t)^2 + e^{-\varphi(t)^2}) = E$ per un fissato valore $E > 0$, da cui si ricava che $|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2E}$.

(iii) Come detto, ogni soluzione massimale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $\frac{1}{2}(\varphi'(t)^2 + e^{-\varphi(t)^2}) = E$ per un certo valore costante di energia $E > 0$, ovvero $\varphi'(t)^2 = 2E - e^{-\varphi(t)^2}$. Ora, i valori dell'energia per cui le soluzioni $\varphi(t)$ sono strettamente monotone sono quelli per i quali la velocità delle soluzioni $\varphi'(t)$ non si annulla mai: e poiché $e^{-\varphi(t)^2} \leq 1$ (e vale 1 per la soluzione nulla), ciò accade se e solo se $2E > 1$, ovvero $E > \frac{1}{2}$. La situazione è rappresentata nella Figura 4, in cui appare lo spazio delle fasi (y,p): per tali valori di E le curve di livello dell'energia, ovvero le orbite delle soluzioni nello spazio delle fasi, non toccano mai l'asse orizzontale $p = 0$; la curva di livello $E(y,p) = \frac{1}{2}$ corrisponde a $\frac{1}{2}(p^2 + e^{-y^2}) = \frac{1}{2}$ ovvero $p^2 + e^{-y^2} = 1$, e contiene le cinque orbite date dall'equilibrio $(y,p) = (0,0)$ e dai quattro rami di curva ciascuno contenuto in uno dei quadranti.

(iv) Le curve di livello di E si tracciano facilmente, come grafici di $p = \mp\sqrt{2E - e^{-y^2}}$ (vedi Figura 4). In particolare, le curve di livello che corrispondono alle soluzioni $y(t)$ non monotone sono quelle con $0 < E < \frac{1}{2}$, in cui sarà $|y| \leq \sqrt{-\log(2E)}$. Dalle loro orbite nello spazio delle fasi si evince che saranno di due tipi: o sempre positive con un minimo assoluto per $y = \sqrt{-\log(2E)}$, o sempre negative con un massimo assoluto per $y = -\sqrt{-\log(2E)}$, le une opposte delle altre.

5. (i) L'equazione differenziale totale $\omega = 2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$ ha come solo punto singolare l'origine $O(0,0)$. Quanto alle altre curve integrali, la forma $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ con $p(x,y) = 2xy$ e $q(x,y) = y^2 - 3x^2$ non è esatta; tuttavia, notato che $y = 0$ (l'asse x) è curva integrale, poiché $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = -\frac{1}{2xy}(2x - (-6x)) = -\frac{4}{y}$ non dipende da x, abbiamo che $\rho(y) = \exp(\int(-\frac{4}{y})\,dy) = \frac{1}{y^4}$ è fattore integrante, e in effetti $\rho\,\omega = \frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy$ è esatta con primitiva $F(x,y) = \frac{x^2-y^2}{y^3}$. Pertanto, oltre a quelle già citate (la costante $O(0,0)$ e l'asse $y = 0$) le altre curve integrali dell'equazione totale sono le curve di livello di F, ovvero quelle date da $x^2 - y^2 = ky^3$ con $k \in \mathbb{R}$ che, si noti, contengono tutte l'origine O e sono di disegno abbastanza semplice (diverse sono tracciate nella Figura 5). Su tali curve saranno contenute le orbite delle soluzioni $\varphi(t)$, che per quanto detto saranno l'origine O (soluzione costante), i due semiassi $y < 0$ e $y > 0$, i tre rami nei quali resta divisa ciascuna curva di tipo $x^2 - y^2 = ky^3$ con $k \neq 0$; e, per $k = 0$, le quattro semibisettrici in ciascuno dei quadranti. In particolare, l?orbita delle soluzioni transitanti per $(0,-1)$ è il ramo della curva $x^2 - y^2 = y^3$ con $y < 0$ (in rosso nella Figura 5).

(ii) Le soluzioni, nell'incognita $x(y)$, dell'equazione scalare $x' = \frac{3x^2-y^2}{2xy}$ (in pratica, del sistema autonomo nel piano (x,y) in cui y rappresenta il tempo) sono semplicemente quelle che si ottengono esplicitando ove possibile $x(y)$ dalle equazioni $x^2 - y^2 = ky^3$ delle curve integrali dell'equazione totale trattata poco fa. Usando il teorema del Dini, la condizione è che ciò si può fare all'intorno dei punti della curva $f(x,y) = x^2 - y^2 - ky^3 = 0$ tali che $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \neq 0$, ovvero tranne che all'intorno dei punti della curva con ascissa nulla: ne ricaviamo che le soluzioni sono quelle del tipo $x(y) = \pm y\sqrt{ky+1}$, definite, se $k > 0$, o per $y > 0$ o per $-\frac{1}{k} < y < 0$; se $k = 0$, o per $y > 0$ o per $y < 0$; e, se $k < 0$, o per $y < 0$ o per $0 < y < -\frac{1}{k}$.

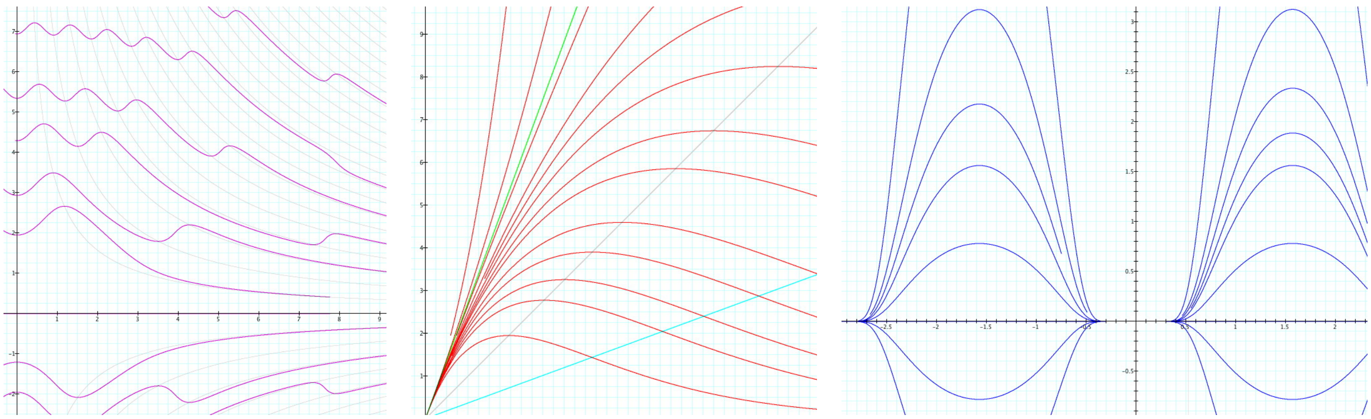
(iii) Come spiegato in precedenza, la soluzione del sistema autonomo $\begin{cases} x' = 3x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$ tale che $(x(0),y(0)) = (-1,1)$ avrà come orbita la semibisettrice $y = -x$ nel secondo quadrante (in blu nella Figura 5): pertanto per tale soluzione il sistema si disaccoppia in entrambe le equazioni, diventando $\begin{cases} x' = 2x^2 \\ y' = -2y^2 \end{cases}$, che tenuto conto della condizione iniziale si risolve facilmente trattando ciascuna equazione come a variabili separabili, con soluzione $(x(t),\,y(t)) = (-\frac{1}{2t+1},\,\frac{1}{2t+1})$ definita per $t \in\,]-\frac{1}{2},+\infty[$.

6. (i) (Figura 6) Una costante $(x,y) \equiv (x_0,y_0)$ è soluzione del sistema se e solo se $0 = y_0^2(1+x_0^2)$ e $0 = y_0^2$, dunque tutti i punti $(x_0,0)$ dell'asse x sono equilibri del sistema. L'equazione totale associata $y^2\,dx - y^2(1+x^2)\,dy = 0$, che al di fuori dei punti singolari dell'asse x equivale a $dx - (1+x^2)\,dy = 0$, è a variabili separabili: dividendo si ottiene dunque $\frac{1}{1+x^2}\,dx - dy = 0$, che ha primitiva $F(x,y) = \operatorname{arctg} x - y$, così che le curve integrali sono i grafici traslati in verticale $y = \operatorname{arctg} x + k$. Per quanto si è detto in precedenza, le orbite del sistema saranno i singoli punti dell'asse x (per le soluzioni costanti); i due rami in cui ciascuno dei grafici $y = \operatorname{arctg} x + k$ viene diviso per $y < 0$ e $y > 0$ quando $|k| < \frac{\pi}{2}$; e l'intero grafico $y = \operatorname{arctg} x + k$ quando $|k| \geq \frac{\pi}{2}$ (tali grafici non intersecano l'asse x). Poiché vale $y' = y^2 > 0$, tali orbite verranno sempre percorse dalle soluzioni nel verso delle y crescenti (si noti che, come si intuisce guardando i grafici, vale sempre anche $x' = y^2(1+x^2) > 0$).

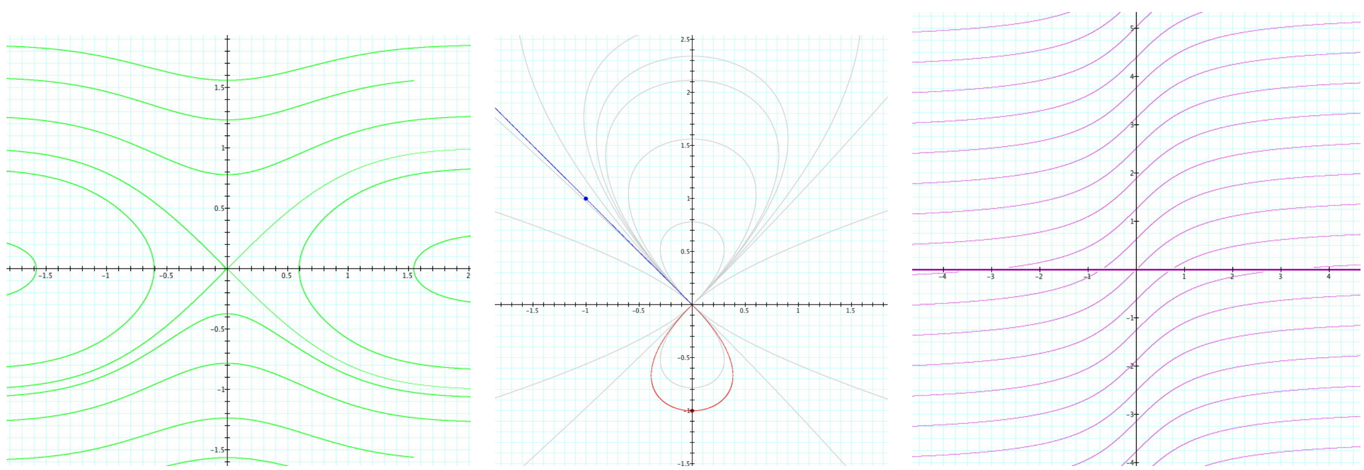
(ii) Il problema di Cauchy scalare dato da $y' = y^2$ e $y(0) = b$ (è in sostanza la componente $y(t)$ del nostro sistema, che è disaccoppiata) ha la soluzione nulla se $b = 0$, mentre se $b \neq 0$ si possono separare le variabili ottenendo $(-\frac{1}{\eta}]_b^y = (\tau]_0^t$ ovvero $-\frac{1}{y} + \frac{1}{b} = t$, da cui $y(t) = \frac{b}{1-bt}$, definita solo su $]-\infty,\frac{1}{b}[$ se $b > 0$, e solo su

$]\frac{1}{b}, +\infty[$ se $b < 0$. Dunque l'unica soluzione del problema scalare definita su tutto $\mathbb{R}$ è la costante $y \equiv 0$, e ne consegue che le sole soluzioni del sistema definite su tutto $\mathbb{R}$ sono le costanti $(x_0, 0)$ negli equilibri dell'asse x.

(iii) Il sistema ha evidentemente esistenza e unicità locale (il campo vettoriale è $\mathcal{C}^1$), dunque anche unicità globale. Se $b = 0$ abbiamo già visto prima che la soluzione è la costante nell'equilibrio $(a, 0)$. Occupiamoci dunque del caso $b \neq 0$: anche per questo caso abbiamo già visto che allora $y(t) = \frac{b}{1-bt}$, dunque ci manca solo da determinare $x(t)$. Sostituendo la già trovata $y(t)$ nell'equazione $x' = y^2(1 + x^2)$ dovrà essere $x' = \frac{b^2}{(1-bt)^2}(1 + x^2)$, da cui separando le variabili e integrando si ottiene $(\operatorname{arctg} \xi]_a^x = (\frac{b}{1-b\tau}]_0^t$, ovvero $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a - b + \frac{b}{1-bt}$. Questo pone delle condizioni sull'intervallo temporale aperto $I_{(a,b)}$ (che, per quanto visto prima in (ii), non sarà $\mathbb{R}$) nel quale è definita la soluzione massimale: infatti tale uguaglianza ha senso quando $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{arctg} a - b + \frac{b}{1-bt} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $b - \operatorname{arctg} a - \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{b}{1-bt} < b - \operatorname{arctg} a + \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e poiché l'intervallo conterrà $t = 0$ dovrà anche essere $1 - bt > 0$. Su tale intervallo $I_{(a,b)}$, che sarebbe possibile descrivere esplicitamente distinguendo vari casi ma che comunque non specifichiamo oltre, la soluzione sarà allora $(x(t), y(t)) = (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a - b + \frac{b}{1-bt}), \frac{b}{1-bt})$.



(1) Ex. 1. **(2)** Ex. 2. **(3)** Ex. 3.



(4) Ex. 4. **(5)** Ex. 5. **(6)** Ex. 6.