

# Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)

## Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie lineari

1. Risolvere i seguenti problemi sulle equazioni differenziali lineari.

- (a) Risolvere  $(x^2 - 1)y' - 2y = 1$  in due modi. Vi sono soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ ?
- (b) Trovare la funzione  $y(x)$  tale che  $(x^3 + 1)y' + 2x^2y = \sin x$  e  $y(0) = \alpha$ , ove  $\alpha$  è un parametro reale. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -1+} y(x)$ .
- (c) Trovare le soluzioni  $y(x)$  dell'equazione  $4y'' - 4y' + y = (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$  tali che  $y(0) = -2y'(0)$ .
- (d) Dire come è fatto l'integrale generale (cioè: se è uno spazio vettoriale, uno spazio affine, nulla di tutto ciò..., e quale sarà il dominio delle soluzioni) dell'equazione  $y''' + \alpha x^2 y' + 8y = \frac{1}{x+1}$ , ove  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto poi  $\alpha = 0$ , cercare per quanto possibile di descriverlo concretamente.

2. Si consideri l'equazione differenziale  $\ddot{x} = \frac{2}{t}(5 \cos 2t - (t + 1)(x + \dot{x}))$  nell'incognita  $x(t)$ .

- (a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità? Una soluzione con  $x(\pi) = 0$  che dominio ha?
- (b) Trovare tutte le suddette soluzioni, usando il cambio di variabile dipendente  $u(t) = tx(t)$ .

3. È dato il sistema differenziale  $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = -\alpha x + y - e^t \end{cases}$ , ove  $\alpha$  è un parametro reale.

- (a) Determinare una risolvante per il sistema omogeneo associato, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (b) Calcolare le soluzioni del sistema non omogeneo, e quella tale che  $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ .

4. (\*) È dato il sistema differenziale  $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x + y - 1 \end{cases}$ .

- (a) Trovare un integrale primo per il sistema, e disegnare le orbite delle soluzioni.
- (b) Trovare l'integrale generale del sistema.

5. (\*) Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcolare  $e^{tA}$ , e usarla per risolvere  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + a e^{-t} \\ \dot{y} = -x - y + b e^{-t} \end{cases}$  al variare di  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- (b) Usando i risultati di (a), trovare l'integrale generale di  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + z \\ \dot{y} = -x - y + z \\ \dot{z} = -z \end{cases}$ .

6. Si consideri l'equazione differenziale  $(e^t + 1)y'' - 2e^t y' = 0$ .

- (a) Scrivere il sistema del primo ordine equivalente. Cosa si può dire su esistenza e unicità?
- (b) Trovare l'integrale generale dell'equazione data, e dell'equazione  $(e^t + 1)y'' - 2e^t y' = e^t$ .
- (c) Trovare l'integrale generale del sistema equivalente.

---

(\*) Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

7. Si consideri l'equazione differenziale  $2x^2 y'' - 3xy' + 2y = 0$ .
- Cosa si può dire su esistenza, unicità e dominio delle soluzioni?
  - Cercare due soluzioni diverse su  $]0, +\infty[$  del tipo  $x^\alpha$  per opportuni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dicendo poi quali sono tutte le altre soluzioni.
  - Trovare tutte le soluzioni di  $2x^2 y'' - 3xy' + 2y = -\frac{9}{x}$  tali che  $y(1) = -3$ .
8. Si consideri il sistema differenziale  $\begin{cases} t^2 \dot{x} = tx + y - 1 \\ t\dot{y} = y + t^2 \end{cases}$ .
- Per il sistema omogeneo associato cercare due soluzioni indipendenti del tipo  $\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$  per opportuni  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , trovandone poi tutte le altre.
  - Risolvere il sistema completo, trovando in particolare la soluzione con  $(x(1), y(1)) = (0, 0)$ .
9. (\*) Si considerino  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  e l'associato sistema differenziale  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
- Trovare le soluzioni costanti del sistema.
  - Quali coppie di vettori  $(u, v)$  in  $\mathbb{R}^3$  sono tali che la funzione  $t \mapsto u + tv$  sia soluzione?
  - È vero che l'insieme delle soluzioni del sistema le cui componenti sono polinomi di grado non superiore a 1 è uno spazio vettoriale? Se sì, di quale dimensione?
  - Trovare gli autovalori di  $A$  e una matrice risolvante per il sistema.
  - Calcolare  $e^{tA}$ .
10. (\*) Si consideri il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = ix + iy \\ \dot{y} = -iy \end{cases}$ .
- Trovare le soluzioni reali del sistema.
  - Trovare l'integrale generale calcolando autovalori e autovettori della matrice associata  $A$ .
  - Ritrovare l'integrale generale calcolando  $e^{tA}$  direttamente dalla definizione (vale  $A^2 = \dots$ ).
11. Si considerino  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- Calcolare la matrice esponenziale  $e^{tA}$  (a tale scopo, dopo aver calcolato gli autovalori di  $A$  converrà determinare un cambio di base che ponga l'operatore associato ad  $A$  in una forma opportuna), e usarla per risolvere il problema di Cauchy dato da  $y' = Ay$  e  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
  - Risolvere il problema non omogeneo  $y' = Ay + b(t)$  con valore iniziale  $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
12. (\*) Si considerino  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ , e il sistema associato  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b(t)$ .
- Trovare una risolvante per il sistema omogeneo associato, e usarla per calcolare  $e^A$ .
  - Ricalcolare  $e^A$  trovando una base che porta l'operatore associato ad  $A$  in una forma semplice.
  - Trovare la soluzione del sistema non omogeneo con condizione iniziale nulla.
13. (a) Risolvere il sistema lineare reale  $\begin{cases} \dot{x} = (1-y) \cos t \\ \dot{y} = (x-2 \sin t) \cos t \end{cases}$  riconducendolo a un'equazione lineare scalare complessa.
- (b) Determinare le soluzioni  $y(x)$  dell'equazione differenziale di Eulero  $3x^2 y'' - xy' + y = 0$  che ammettono un minimo locale in  $x = 1$ .

## Soluzioni.

1. (a) L'equazione del primo ordine  $(x^2 - 1)y' - 2y = 1$  è sia lineare che a variabili separabili. Risolta come lineare, per  $x \neq \pm 1$  si ottiene  $y' - \frac{2}{x^2-1}y = \frac{1}{x^2-1}$ ; se  $p(x) = -\frac{2}{x^2-1}$  si ha  $P(x) = \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ , e  $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{\text{sign}(1-x^2)}{x-1}$ , da cui  $y(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \left( \frac{\text{sign}(1-x^2)}{x-1} + k \right) = k \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{k(x-1)-1}{x+1}$  con  $k \in \mathbb{R}$  (ove queste soluzioni sono pensate separatamente su ognuno dei tre intervalli di  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ , dunque vi sarà una costante  $k_1$  per  $x < -1$ , una costante  $k_2$  per  $-1 < x < 1$  e una costante  $k_3$  per  $x > 1$ , l'una indipendente dalle altre). Il limite di tutte queste soluzioni per  $x \rightarrow 1$  è sempre finito per ogni  $(k_1, k_2, k_3)$ , e vale  $-\frac{1}{2}$ ; invece, il limite per  $x \rightarrow -1$  è finito se e solo se  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$ , e vale ancora  $-\frac{1}{2}$ , ed in tal caso per  $x < 1$  si ottiene la costante  $y(x) \equiv -\frac{1}{2}$ . Tuttavia, richiedendo la derivabilità anche in  $x = 1$  (con derivata nulla) si ottiene pure  $k_3 = -\frac{1}{2}$ . In sostanza, l'unica soluzione definita su tutto  $\mathbb{R}$  è la costante  $y(x) = \frac{-\frac{1}{2}(x-1)-1}{x+1} \equiv -\frac{1}{2}$ .  
Risolviamo ora l'equazione come a variabili separabili. Si ottiene  $(x^2 - 1)y' = 2y + 1$ : notata la costante  $y \equiv -\frac{1}{2}$ , possiamo separare le variabili e integrare ottenendo  $\log |2y + 1| = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + h = \log e^h \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ , da cui (posto  $u = \pm e^h$ ) si ha  $2y + 1 = u \frac{x-1}{x+1}$ , da cui  $y(x) = u \frac{(x-1)}{2(x+1)} - \frac{1}{2}$  con  $u \in \mathbb{R}$ . Si tratta di una famiglia diversa da quella trovata in precedenza? Ovviamente ciò non può essere (ed infatti, con la relazione  $u = 2k + 1$  tra le due costanti arbitrarie  $k$  e  $u$ , le due famiglie coincidono).
- (b) L'equazione  $(x^3 + 1)y' + 2x^2 y = \sin x$  è lineare del primo ordine, e per  $x \neq -1$  può essere posta in forma normale  $y' + p(x)y = q(x)$  con  $p(x) = \frac{2x^2}{x^3+1}$  (dunque  $P(x) = \frac{2}{3} \log |x^3 + 1|$ ) e  $q(x) = \frac{\sin x}{x^3+1}$ . Le sue soluzioni non possono essere poste in forma esplicita, ma applicando la formula integrale con la condizione  $y(0) = \alpha$  (e pensando ovviamente  $x^3 + 1 > 0$ , ovvero  $x > -1$ ) si può comunque scrivere  $y(x) = (x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}} (\alpha + \int_0^x (t^3 + 1)^{\frac{2}{3}} \frac{\sin t}{t^3+1} dt)$ , ovvero  $y(x) = \frac{\alpha + \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}} dt}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}$ . • Quando  $x \rightarrow +\infty$  il denominatore tende a  $+\infty$  (è asintotico a  $x^2$ ), mentre il denominatore ha limite finito (infatti  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e l'integrale generalizzato  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}} dt$  converge grazie al criterio di Abel-Dirichlet): dunque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ . • Quando invece  $x \rightarrow -1^+$  il denominatore tende a  $0^+$ , mentre al numeratore l'integrale generalizzato  $\int_0^{-1} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}} dt$  converge (infatti  $(t^3 + 1) \sim_{-1^+}^* (t + 1)$ , dunque  $\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}} \sim_{-1^+}^* (t + 1)^{-\frac{1}{3}}$  ad un valore  $U > 0$  (infatti la funzione integranda è negativa su  $] -1, 0]$ , che però viene percorso a ritroso). Ne ricaviamo che se  $\alpha \geq -U$  allora  $\lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \pm\infty$ . Se invece vale proprio  $\alpha = -U$  si ha una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , e con de l'Hôpital si ottiene  $\lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{2x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sin x}{2x^2} = -\frac{1}{2} \sin 1 < 0$ .
- (c) L'equazione  $4y'' - 4y' + y = (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$ , del secondo ordine a coefficienti costanti, ha equazione caratteristica con radice doppia  $\frac{1}{2}$ , dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è  $\{(A + Bx)e^{\frac{x}{2}} : A, B \in \mathbb{R}\}$ . Una soluzione particolare dell'equazione completa sarà dunque della forma  $\tilde{y}(x) = x^2(ax + b)e^{\frac{x}{2}}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  da determinare: si ha allora  $\tilde{y}'(x) = (\frac{a}{2}x^3 + (3a + \frac{b}{2})x^2 + 2bx)e^{\frac{x}{2}}$  e  $\tilde{y}''(x) = (\frac{a}{4}x^3 + (3a + \frac{b}{4})x^2 + 2(3a + b)x + 2b)e^{\frac{x}{2}}$ , da cui la condizione  $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = 8(3ax + b)e^{\frac{x}{2}} = (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$ , che dà  $a = \frac{1}{24}$  e  $b = \frac{1}{8}$ . L'integrale generale dell'equazione completa è pertanto  $\{y(x) = (A + Bx + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3)e^{\frac{x}{2}} : A, B \in \mathbb{R}\}$ . Derivando si ottiene  $y'(x) = (\frac{A}{2} + B + (\frac{1}{4} + \frac{B}{2})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$ , dunque la condizione  $y(0) = -2y'(0)$  dà  $A = -2(\frac{A}{2} + B) = -A - 2B$ , da cui  $B = -A$ : le soluzioni cercate sono pertanto quelle dell'integrale generale con  $B = -A$ .
- (d) L'equazione differenziale  $y''' + \alpha x^2 y' + 8y = \frac{1}{x+1}$  è lineare, del terzo ordine, in forma normale. Essa è infatti del tipo  $y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ , ove le funzioni  $a_2(x) = 0$ ,  $a_1(x) = \alpha x^2$ ,  $a_0(x) = 8$  e  $b(x) = \frac{1}{x+1}$  sono tutte continue nel dominio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , e andrà dunque risolta indipendentemente in uno dei due intervalli  $I = ]-\infty, -1[$  oppure  $J = ]-1, +\infty[$ . Su ognuno di essi (ad esempio su  $I$ ), l'integrale generale  $S_0$  dell'equazione omogenea associata  $y''' + \alpha x^2 y' + 8y = 0$  è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 nello spazio vettoriale complesso  $V = \mathcal{C}^3(I, \mathbb{C})$  (le funzioni  $I \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $\mathcal{C}^3$ ), dunque sarà generato da una terna di funzioni (sistema fondamentale)  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\} \subset V$ ; invece l'integrale generale  $S$  dell'equazione completa sarà un sottospazio affine di  $V$ , ottenuto traslando  $S_0$  tramite una qualsiasi soluzione particolare  $\tilde{\varphi}(x) \in S$ , ovvero  $S = \{A\varphi_1(x) + B\varphi_2(x) + C\varphi_3(x) + \tilde{\varphi}(x) : A, B, C \in \mathbb{C}\}$ . Si noti che le soluzioni saranno funzioni di classe  $\mathcal{C}^3$  definite su *tutto*  $I$  (la stessa cosa, poi, varrà indipendentemente per  $J$ ).

Se  $\alpha = 0$ , l'equazione  $y''' + 8y = \frac{1}{x+1}$  diventa a coefficienti costanti reali. L'equazione caratteristica è  $\lambda^3 + 8 = 0$ , cioè  $\lambda^3 = -8$ , che ha le tre radici  $-2$  e  $1 \pm i\sqrt{3}$ : un sistema fondamentale di soluzioni è pertanto  $\{\varphi_1(x) = e^{-2x}, \varphi_2(x) = e^{(1+i\sqrt{3})x}, \varphi_3(x) = e^{(1-i\sqrt{3})x}\}$ .<sup>(†)</sup> Per cercare una soluzione particolare  $\tilde{\varphi}(x) \in S$ , in questo caso si deve ricorrere al metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Si ha  $W_\varphi(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{(1+i\sqrt{3})x} & e^{(1-i\sqrt{3})x} \\ -2e^{-2x} & (1+i\sqrt{3})e^{(1+i\sqrt{3})x} & (1-i\sqrt{3})e^{(1-i\sqrt{3})x} \\ 4e^{-2x} & 2(-1+i\sqrt{3})e^{(1+i\sqrt{3})x} & 2(-1-i\sqrt{3})e^{(1-i\sqrt{3})x} \end{pmatrix}$ , da cui risulta  $\det W_\varphi(x) = -24\sqrt{3}i$ : pertanto sarà  $\tilde{\varphi}(x) = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{(1+i\sqrt{3})x} + c_3(x)e^{(1-i\sqrt{3})x}$ , con  $c_1(x) = \int \frac{-2\sqrt{3}ie^{2x}}{-24\sqrt{3}i(x+1)} dx$ ,  $c_2(x) = -\int \frac{(3-\sqrt{3})ie^{(-1-i\sqrt{3})x}}{-24\sqrt{3}i(x+1)} dx$  e  $c_3(x) = \int \frac{(3+\sqrt{3})ie^{(-1+i\sqrt{3})x}}{-24\sqrt{3}i(x+1)} dx$ .

2. (a) L'equazione differenziale  $\ddot{x} = \frac{2}{t}(5 \cos 2t - (t+1)(x+\dot{x}))$  è lineare, a coefficienti definiti per  $t \neq 0$ : dunque, come sappiamo, in questo caso sono soddisfatte le condizioni del teorema di esistenza e unicità globale (già in forma debole) sull'intervallo  $]-\infty, 0[$  o sull'intervallo  $]0, +\infty[$ . In particolare, una soluzione con  $x(\pi) = 0$  avrà come dominio tutto  $]0, +\infty[$ .

- (b) Da  $u = tx$ , ovvero  $x = \frac{u}{t}$ , derivando rispetto a  $t$  si trova prima  $\dot{x} = \frac{t\dot{u}-u}{t^2}$  e poi  $\ddot{x} = \frac{(\dot{u}+t\ddot{u}-\dot{u})t^2-2t(t\dot{u}-u)}{t^4} = \frac{t^2\ddot{u}-2t\dot{u}+2u}{t^3}$ , da cui sostituendo nell'equazione si trova  $\frac{t^2\ddot{u}-2t\dot{u}+2u}{t^3} = \frac{2}{t}(5 \cos 2t - (t+1)(\frac{u}{t} + \frac{t\dot{u}-u}{t^2}))$ , ovvero  $t^2\ddot{u} - 2t\dot{u} + 2u = 2t^2(5 \cos 2t - (t+1)(\frac{u}{t} + \frac{t\dot{u}-u}{t^2})) = 10t^2 \cos 2t - 2t^2u - 2t(t\dot{u} - u) - 2tu - 2(t\dot{u} - u) = 10t^2 \cos 2t - 2t^2u - 2t^2\dot{u} + 2tu - 2tu - 2t\dot{u} + 2u$ , da cui confrontando il primo e l'ultimo membro si ha  $t^2\ddot{u} = 10t^2 \cos 2t - 2t^2u - 2t^2\dot{u}$ , da cui dividendo per  $t^2$  si arriva a  $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = 10 \cos 2t$ , equazione a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica ha radici  $-1 \pm i$ , dunque le soluzioni dell'omogenea sono generate da  $e^{-t} \cos t$  e  $e^{-t} \sin t$ ; cercando poi una soluzione particolare del tipo  $a \cos 2t + b \sin 2t$  si ottiene  $(a, b) = (-1, 2)$ , pertanto l'integrale generale è  $u(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) - \cos 2t + 2 \sin 2t$  al variare di  $A, B \in \mathbb{C}$ , che corrispondono dunque a  $x(t) = \frac{1}{t}(e^{-t}(A \cos t + B \sin t) - \cos 2t + 2 \sin 2t)$ . Imponendo infine che  $x(\pi) = 0$  si ottiene  $0 = \frac{1}{\pi}(-Ae^{-\pi} - 1)$  da cui  $A = -e^\pi$ : le soluzioni cercate sono così  $x(t) = \frac{1}{t}(e^{-t}(B \sin t - e^{-\pi} \cos t) - \cos 2t + 2 \sin 2t)$  al variare di  $B \in \mathbb{C}$ .

3. (a) Gli autovalori della matrice del sistema omogeneo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$  sono dati da  $(\tau - 1)^2 - 4\alpha = 0$ .

- Se  $\alpha > 0$ , posto  $\beta := \sqrt{\alpha}$  si hanno le radici reali distinte  $1 \pm 2\beta$ , con autovettori associati  $\begin{pmatrix} 2 \\ \mp\beta \end{pmatrix}$ : una risolvante è allora  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{(1+2\beta)t} & 2e^{(1-2\beta)t} \\ -\beta e^{(1+2\beta)t} & \beta e^{(1-2\beta)t} \end{pmatrix}$ .
- Se  $\alpha = 0$  si ottiene l'autovalore doppio 1: in tal caso si ha  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 + N$  con  $N = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  nilpotente, e come sappiamo si calcola  $e^{tA} = e^t(\mathbf{1}_2 + tN) = \begin{pmatrix} e^t & -4te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ , che è già una risolvante. Alternativamente possiamo risolvere facilmente il sistema omogeneo: da  $\dot{y} = y$  si ricava  $y = ke^t$ , da cui  $\dot{x} = x - 4y = x - 4ke^t$  che dà  $\dot{x} - x = -4ke^t$  (lineare scalare del primo ordine), con soluzioni  $x = (h - 4kt)e^t$ . Mettendo in colonna le soluzioni con  $(h, k) = (1, 0)$  e  $(0, 1)$  si riottiene  $e^{tA}$ .
- Se  $\alpha < 0$ , posto  $\beta := \sqrt{-\alpha}$  si hanno le radici complesse coniugate distinte  $1 \pm 2\beta i$ , con autovettori associati  $\begin{pmatrix} 2 \\ \mp\beta i \end{pmatrix}$ , da cui la risolvante  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{(1+2\beta i)t} & 2e^{(1-2\beta i)t} \\ -\beta i e^{(1+2\beta i)t} & \beta i e^{(1-2\beta i)t} \end{pmatrix}$ , o anche, prendendo la parte reale e immaginaria della prima colonna, la risolvante reale  $\tilde{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2\beta t) & 2e^t \sin(2\beta t) \\ \beta e^t \sin(2\beta t) & -\beta e^t \cos(2\beta t) \end{pmatrix}$ .

- (b) Se  $\alpha \neq 0$  il numero 1 non è autovalore di  $A$ , dunque conviene cercare una soluzione (l'unica) del tipo  $\begin{pmatrix} a e^t \\ b e^t \end{pmatrix}$ : e imponendo che sia soluzione del sistema non omogeneo si trova  $(a, b) = (-\frac{1}{\alpha}, 0)$ . Le soluzioni sono dunque del tipo  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$  al variare di  $u, v \in \mathbb{C}$ ; con la condizione iniziale si ottiene  $\Phi(0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\Phi(0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ , che nei due casi  $\alpha \geq 0$  dà  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{4\alpha} \\ \frac{\alpha+1}{4\alpha} \end{pmatrix}$ .

Se invece  $\alpha = 0$  il numero 1 è autovalore doppio di  $A$ , e possiamo cercare una soluzione del tipo  $\begin{pmatrix} (at^2 + bt + c)e^t \\ (dt^2 + ft + g)e^t \end{pmatrix}$ , oppure risolvere direttamente il sistema differenziale che in questo caso è semplice: in entrambi i casi l'integrale generale risulta  $\begin{cases} x(t) = (u - 4vt + 2t^2)e^t \\ y(t) = (v - t)e^t \end{cases}$  al variare di  $u, v \in \mathbb{C}$ , e con la condizione iniziale  $(x(0), y(0)) = (1, 0)$  si ottiene  $(u, v) = (1, 0)$ .

4. (a) La forma differenziale lineare associata al sistema omogeneo è  $\omega = (2x + y)dx - (-x - 2y)dy$ , che è esatta (è chiusa nel dominio  $\mathbb{R}^2$ , che è semplicemente connesso): la sua primitiva  $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$  è l'integrale

<sup>(†)</sup> Per avere una base di soluzioni reali, volendo si possono rimpiazzare  $\varphi_2(x)$  e  $\varphi_3(x)$  rispettivamente con  $\frac{\varphi_2(x) + \varphi_3(x)}{2} = e^x \cos(\sqrt{3}x)$  e  $\frac{\varphi_2(x) - \varphi_3(x)}{2i} = e^x \sin(\sqrt{3}x)$ . Ma per i conti che seguono, in cui interviene la matrice wronskiana, conviene forse tenersi la base complessa.

primo cercato. Le orbite delle soluzioni del sistema omogeneo sono dunque le curve di livello di  $F$ , ovvero  $x^2 + xy + y^2 = k$ : per  $k = 0$  si tratta del solo punto  $(0, 0)$  (equilibrio del sistema omogeneo), mentre per  $k > 0$  si tratta di ellissi di centro  $(0, 0)$ , con assi ruotati di  $\frac{\pi}{4}$  e semiasse rispettivamente  $\sqrt{2k/3}$  e  $\sqrt{2k}$ .

- (b) La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo reale  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  ha autovalori  $\pm\sqrt{3}i$ , con autovettori rispettivamente  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \mp \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ ; prendendo parte reale e immaginaria della soluzione  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} e^{\sqrt{3}it}$  si costruisce la risolvente reale  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{3}t) & 2\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - \cos(\sqrt{3}t) & -\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ . Poiché 0 non è autovalore di  $A$ , una soluzione particolare del sistema completo è un vettore costante  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  da determinare, e i calcoli danno  $a = b = \frac{1}{3}$ . Dunque la soluzione è  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , cioè
- $$\begin{cases} x = 2k_1 \cos(\sqrt{3}t) + 2k_2 \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{3} \\ y = -(k_1 + \sqrt{3}k_2) \cos(\sqrt{3}t) + (\sqrt{3}k_1 - k_2) \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{al variare di } k_1, k_2 \in \mathbb{C}.$$

5. (a) L'unico autovalore (doppio) di  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  è  $-1$ , dunque  $N = A - (-1)\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  è nilpotente e commuta con  $(-1)\mathbf{1}_2$ , dunque vale  $e^{tA} = e^{-t}(\mathbf{1}_2 + tN) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (1+2t)e^{-t} \end{pmatrix}$ . A questo punto, per risolvere il problema di Cauchy del sistema completo con  $(x(0), y(0)) = (\alpha, \beta)$  conviene ricorrere alla formula, conseguenza del metodo della variazione delle costanti arbitrarie, che esprime direttamente la soluzione in termini della matrice esponenziale: ricordiamo che, per un sistema  $y' = Ay + b(t)$ , la soluzione con  $y(t_0) = y_0$  è data da  $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} b(\tau) d\tau$ , dunque nel nostro caso si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \begin{pmatrix} a e^{-\tau} \\ b e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau = e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + e^{-t} \int_0^t \begin{pmatrix} a - 2(a-2b)(t-\tau) \\ b - 2(\frac{1}{2}a-b)(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} a\tau + (a-2b)(t-\tau)^2 \\ b\tau + (\frac{1}{2}a-b)(t-\tau)^2 \end{pmatrix} \Big|_0^t = \begin{pmatrix} (\alpha + (a-2\alpha+4\beta)t - (a-2b)t^2) e^{-t} \\ (\beta + (b-\alpha+2\beta)t - (\frac{1}{2}a-b)t^2) e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) L'equazione disaccoppiata  $\dot{z} = -z$  è lineare del primo ordine, e dà  $z(t) = k e^{-t}$ : sostituendo tale espressione di  $z(t)$  nelle due equazioni per  $x$  e  $y$  si ottiene  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + k e^{-t} \\ \dot{y} = -x - y + k e^{-t} \end{cases}$ , che è esattamente il problema piano già visto con  $a = b = k$ . Dunque la soluzione è  $\begin{cases} x(t) = (\alpha + (k-2\alpha+4\beta)t + k t^2) e^{-t} \\ y(t) = (\beta + (k-\alpha+2\beta)t + \frac{1}{2}k t^2) e^{-t} \\ z(t) = k e^{-t} \end{cases}$  al variare di  $k, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

6. (a) L'equazione si pone in forma normale come  $y'' = \frac{2e^t}{e^t+1} y'$ . Posto  $p = y'$  si ha il sistema equivalente  $\begin{cases} y' = p \\ p' = \frac{2e^t}{e^t+1} p \end{cases}$ , lineare con funzioni di  $t$  definite su tutto  $\mathbb{R}$ : dunque c'è esistenza e unicità globale su tutto  $\mathbb{R}$ .

- (b) Da  $p' = \frac{2e^t}{e^t+1} p$ , separando le variabili e integrando si ricava  $p = k(e^t + 1)^2$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ ; essendo poi  $p = y'$  si ha  $y' = k(e^t + 1)^2 = k(e^{2t} + 2e^t + 1)$ , che integrata ulteriormente dà  $y(t) = k(\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t) + h$  al variare di  $k, h \in \mathbb{R}$ . Essendo ora in possesso dello spazio di soluzioni dell'equazione omogenea, possiamo applicare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie per risolvere anche l'equazione non omogenea  $(e^t + 1)y'' - 2e^t y' = e^t$ , ovvero  $y'' - \frac{2e^t}{e^t+1} y' = \frac{e^t}{e^t+1}$ . Due generatrici indipendenti dello spazio di soluzioni dell'omogenea sono  $y_1(t) \equiv 1$  e  $y_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t$ , con matrice wronskiana  $W(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t \\ 0 & (e^t + 1)^2 \end{pmatrix}$ , dunque una soluzione particolare è del tipo  $\tilde{y}(t) = c_1(t)1 + c_2(t)(\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t)$  dove  $c_1(t) = -\int \frac{\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t}{(e^t+1)^2} \frac{e^t}{e^t+1} dt$  e  $c_2(t) = \int \frac{1}{(e^t+1)^2} \frac{e^t}{e^t+1} dt$ , che si possono calcolare ponendo  $e^t + 1 = u$  (dovrebbe venire  $c_1(t) = \frac{1}{2} \log(e^t + 1) + (\frac{1}{2(e^t+1)^2} - 1)t - \frac{3}{4(e^t+1)^2}$  e  $c_2(t) = -\frac{1}{2(e^t+1)^2}$ ).

- (c) Il sistema equivalente all'omogenea  $\begin{cases} y' = p \\ p' = \frac{2e^t}{e^t+1} p \end{cases}$  e quello equivalente alla non omogenea  $\begin{cases} y' = p \\ p' = \frac{2e^t}{e^t+1} p + \frac{e^t}{e^t+1} \end{cases}$  hanno ovviamente come integrale generale le coppie  $\begin{pmatrix} y(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$  nelle quali  $y(t)$  fa parte dell'integrale generale calcolato nel punto precedente, e  $p(t)$  è la sua derivata.

7. (a) L'equazione  $2x^2 y'' - 3xy' + 2y = 0$  è lineare omogenea; per  $x \neq 0$  si pone in forma normale  $y'' - \frac{3}{2x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ , dunque ci sarà esistenza e unicità su  $]0, +\infty[$  o su  $]-\infty, 0[$  a seconda della condizione di Cauchy.
- (b) Imponendo che  $x^\alpha$  sia soluzione su  $]0, +\infty[$  si ottiene  $2x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = 0$ , da cui  $2\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 2 = 0$ , con soluzioni  $2$  e  $\frac{1}{2}$ : dunque tutte le soluzioni su  $]0, +\infty[$  sono del tipo  $y(x) = k_1 \sqrt{x} + k_2 x^2$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ . (D'altra parte —come qualcuno si sarà accorto— quella presentata è un esempio di equazione di Eulero, un tipo di equazioni lineari studiato ad hoc perché riconducibili al caso dei coefficienti costanti. Per maggiori dettagli si veda l'Esercizio 13(b) qui di seguito.)
- (c) Cerchiamo una soluzione particolare di  $2x^2 y'' - 3xy' + 2y = -\frac{9}{x}$ , ovvero  $y'' - \frac{3}{2x} y' + \frac{1}{x^2} y = -\frac{9}{2x^3}$ . Come visto, le soluzioni dell'omogenea sono generate da  $x^2$  e  $\sqrt{x}$ , con matrice wronskiana  $W(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & x^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 2x \end{pmatrix}$ ,

dunque una soluzione particolare è del tipo  $\tilde{y}(x) = c_1(x)\sqrt{x} + c_2(x)x^2$  dove  $c_1(x) = -\int \frac{x^2}{\frac{3}{2}x\sqrt{x}}(-\frac{9}{2x^3})dx = 3\int x^{-\frac{5}{2}}dx = -\frac{2}{x\sqrt{x}}$  e  $c_2(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\frac{3}{2}x\sqrt{x}}(-\frac{9}{2x^3})dx = -3\int x^{-4}dx = \frac{1}{x^3}$ , da cui  $\tilde{y}(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}x^2 = -\frac{1}{x}$ . Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione  $2x^2y'' - 3xy' + 2y = -\frac{9}{x}$  sono  $y(x) = k_1\sqrt{x} + k_2x^2 - \frac{1}{x}$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ : e imponendo che  $y(1) = -3$  si ottiene  $-3 = k_1 + k_2 - 1$ , da cui  $k_2 = -k_1 - 2$ , e perciò  $y(x) = k\sqrt{x} - (k+2)x^2 - \frac{1}{x}$  al variare di  $k \in \mathbb{C}$ .

8. (a) Imponendo che la funzione  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$  sia soluzione del sistema omogeneo  $\begin{cases} t^2\dot{x} = tx + y \\ t\dot{y} = y \end{cases}$ , che per  $t \neq 0$  è in forma normale  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}y \\ \dot{y} = \frac{1}{t}y \end{cases}$ , si trova che  $\begin{cases} at^2 = t(at+b) + (ct+d) \\ ct = ct+d \end{cases}$ : la seconda equazione dà  $d = 0$ , che messa nella prima dà  $at^2 = at^2 + (b+c)t$ , da cui  $c = -b$  (mentre  $a$  è arbitrario). Le due soluzioni  $\begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$  sono indipendenti per  $t \neq 0$ , e dunque sono generatrici dello spazio vettoriale 2-dimensionale di soluzioni: una risolvete sarà  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix}$ , e tutte le altre soluzioni del sistema omogeneo saranno  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\begin{cases} x(t) = k_1t - k_1 + k_2 \\ y(t) = (k_1 - k_2)t \end{cases}$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ .
- (b) Ricordiamo che, per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, la soluzione di un sistema non omogeneo  $y' = Ay + b(t)$  con  $y(t_0) = y_0$  è data da  $y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau$  (ove  $\Phi(t)$  è una risolvete del sistema omogeneo associato): dunque nel nostro caso la soluzione con  $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  del dato sistema non omogeneo, che per  $t > 0$  equivale a  $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}y - \frac{1}{t^2} \\ \dot{y} = \frac{1}{t}y + t \end{cases}$ , diventa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix} \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau^2} \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau^2} \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix} \int_1^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau} - 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2t^2} + \log t - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2t^2} + \log t - t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} + t \log t - \frac{3}{2}t + 1 \\ \frac{1}{2t} + t \log t - t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione generale del sistema non omogeneo sarà così  $\begin{cases} x(t) = k_1t - k_1 + k_2 + \tilde{x}(t) \\ y(t) = (k_1 - k_2)t + \tilde{y}(t) \end{cases}$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ .

9. (a) Trovare le soluzioni costanti del sistema  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  con  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  equivale a trovare il nucleo dell'operatore associato alla matrice  $A$ , ovvero i vettori  $v \in \mathbb{R}^3$  tali che  $Av = 0$ . Come noto, esisteranno tali vettori non nulli se e solo se  $A$  sarà singolare (altrimenti detto, essa ha 0 come autovalore), il che è vero perché in effetti  $\det A = 0$  (la matrice  $A$  ha rango 2, come si nota subito guardando le prime due colonne), e il conto dice che  $v = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $k \in \mathbb{C}$ .
- (b-c) Dire che la funzione  $\varphi(t) = u + tv$  sia soluzione di  $\varphi'(t) = A\varphi(t)$  equivale a dire che valga  $v = A(u + tv) = Au + tAv$  per ogni  $t$ , ovvero necessariamente che  $Av = 0$  e  $Au = v$ . La prima equazione, come visto nel punto precedente, dà  $v = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $k \in \mathbb{C}$ ; la seconda allora diventa il cercare le soluzioni  $u \in \mathbb{R}^3$  di  $Au = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}$  che, come si verifica direttamente, sono  $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  al variare di  $h \in \mathbb{C}$ : in sostanza, le soluzioni cercate sono del tipo  $\varphi(t) = u + tv = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + tk \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  al variare di  $h, k \in \mathbb{C}$ . Si tratta chiaramente di uno spazio vettoriale di dimensione 2, generato dalle due soluzioni  $\varphi_1(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  (costante) e  $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$ : ciò risponde anche al punto (c).
- (d) Facendo il conto degli autovalori si trova  $\det(\tau \mathbf{1}_3 - A) = \tau^2(\tau + 1)$ , dunque gli autovalori sono  $-1$  (semplice) e  $0$  (come già noto; doppio). Un autovettore associato a  $-1$  è  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , dunque una corrispondente soluzione del sistema è  $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ . Non dimentichiamo però che in precedenza (nei punti (b-c)) abbiamo già trovato due soluzioni indipendenti del sistema (si tratterebbe proprio di quelle legate all'autospazio generalizzato legato all'autovalore doppio 0), e chiaramente indipendenti anche con quella appena trovata: è dunque possibile costruire una risolvete come  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & e^{-t} \\ 2 & 1+2t & -e^{-t} \\ 0 & 1 & -2e^{-t} \end{pmatrix}$ .
- (e) Come noto, vale  $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1+4t+2e^{-t} & 1-2t-e^{-t} & -1+3t+e^{-t} \\ 2+8t-2e^{-t} & -4t+e^{-t} & 1+6t-e^{-t} \\ 4-4e^{-t} & -2+2e^{-t} & 3-2e^{-t} \end{pmatrix}$ .
- In alternativa, dopo aver calcolato gli autovalori di  $A$ , l'autospazio generalizzato relativo a 0 è il nucleo di  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ , che risulta dato dai vettori  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  tali che  $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ , ed è perciò

generato da  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  (il già noto autovettore) e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Perciò, ricordando che un autovettore associato a  $-1$  è  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , il cambio di base  $A = PBP^{-1}$  dato da  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  porterà l'operatore associato ad  $A$  in forma a blocchi, e infatti si trova  $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , già in forma canonica di Jordan<sup>(†)</sup>, con  $e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ : si ricava pertanto che  $e^{tA} = P e^{tB} P^{-1}$ , e il conto ridà quanto appena trovato.

10. (a) Se  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  è una soluzione reale del sistema, dalla seconda equazione si ricava  $\dot{y} = -iy$  il che implica che  $y(t) \equiv 0$  (altrimenti si avrebbe una funzione reale uguale ad una immaginaria pura): messa questa informazione nella prima equazione si ricava  $\dot{x} = ix$ , da cui anche  $x(t) \equiv 0$  per lo stesso motivo. Pertanto l'unica soluzione reale del sistema è quella identicamente nulla.
- (b) La matrice dei coefficienti  $A = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  ha autovalori  $i$  e  $-i$ , con autovettori associati rispettivamente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ : una matrice risolvete è allora  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ 0 & -2e^{-it} \end{pmatrix}$  (in questo caso non abbiamo un sistema reale, dunque è inutile cercare una risolvete reale: si veda anche il punto (a)), e l'integrale generale risulta pertanto  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\begin{cases} x(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \\ y(t) = -2k_2 e^{-it} \end{cases}$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ . Visto che ci siamo, si può anche calcolare subito  $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ 0 & -2e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & i \sin t \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ .
- (c) Da  $A = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  si ha  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ : ne ricaviamo  $A^{2k} = (-1)^k \mathbf{1}_2$  e  $A^{2k+1} = (-1)^k A$ , e perciò

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbf{1}_2 + \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A \\ &= (\cos t) \mathbf{1}_2 + (\sin t) A = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \sin t & i \sin t \\ 0 & -i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & i \sin t \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

come già trovato in precedenza. Infine, la matrice esponenziale è già di per sè una risolvete del sistema, dunque si può usare per descrivere le soluzioni del sistema in luogo della  $\Phi(t)$  di sopra.

11. (a) La matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  ha autovalori  $0$  (semplice) e  $-1$  (doppio). Un autovettore associato a  $0$  (ovvero un vettore non nullo soluzione del sistema  $Av = 0$ ) è  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; l'autospazio generalizzato relativo a  $-1$ , ovvero il nucleo di  $((-1)\mathbf{1}_3 - A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , è dato dai vettori  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  tali che  $v_1 + v_2 - 2v_3 = 0$ , ed è perciò generato da  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  (autovettore di  $-1$ ) e  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Perciò il cambio di base  $A = PBP^{-1}$  dato da  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (con  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ) porterà l'operatore associato ad  $A$  in forma a blocchi, e infatti si trova  $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , già in forma canonica di Jordan<sup>(†)</sup>, con  $e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ : perciò  $e^{tA} = P e^{tB} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2e^{-t} & -1+e^{-t} & 2-2e^{-t} \\ -4te^{-t} & (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -1+(1-2t)e^{-t} & -1+(1-t)e^{-t} & 2-(1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$ , e la soluzione cercata è allora  $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4e^{-t} \\ -8te^{-t} \\ -3+2(1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}$ .
- (b) Decomponiamo  $b(t) = b_1(t) + b_2$  con  $b_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$  e  $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  (costante). • Poiché  $1$  non è autovalore di  $A$ , una soluzione particolare per  $y' = Ay + b_1(t)$  sarà della forma  $v e^t$  ove  $v \in \mathbb{R}^3$  è un vettore da determinare: dovrà allora aversi  $v e^t = Av e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ , ovvero  $(\mathbf{1}_3 - A)v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , da cui  $v = (\mathbf{1}_3 - A)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Dunque una soluzione particolare di  $y' = Ay + b_1(t)$  è  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$ . • Poiché  $0$  è autovalore semplice, una soluzione particolare per  $y' = Ay + b_2$  sarà del tipo  $u + tv$  con  $u, v$  vettori da determinare: dovrà aversi dunque  $v = Au + tAv + b_2$  per ogni  $t$ , da cui  $Av = 0$  e  $Au = v - b_2$ , da cui (come visto prima)  $v = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$  per  $k \in \mathbb{C}$ , e i conti di  $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = v - b_2 = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ k-1 \end{pmatrix}$  danno  $u_1 - u_3 = -5$ ,  $u_2 = 6$  e

<sup>(†)</sup>... ma, come già osservato in altre occasioni, anche se  $B$  non fosse stata in forma canonica di Jordan sarebbe comunque stata composta da blocchi con un solo autovalore, con ciascuno dei quali sappiamo come costruire l'esponenziale.

$k = 4$ : scelto ad esempio  $u_1 = 0$  (e dunque  $u_3 = 5$ ), ne ricaviamo che una soluzione per  $y' = Ay + b_2$  sarà  $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 6 \\ 5 + 4t \end{pmatrix}$ . • Pertanto la soluzione generale del problema non omogeneo  $y' = Ay + b(t)$

è della forma  $y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ 6 \\ 5 + 4t \end{pmatrix}$  al variare di  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{C}$ ; imponendo che  $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  si ha allora  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ , e a conti fatti questo dà  $y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 2 + 4t \\ -4(t+1)e^{-t} - 2e^t + 6 \\ 3 - (2t+1)e^{-t} - 2e^t + 4t \end{pmatrix}$ .

• Giusto per provare un approccio alternativo, per cercare la soluzione particolare per  $y' = Ay + b_2$  usiamo la formula che ci dà quella a valore iniziale nullo  $\int_0^t e^{(t-\tau)A} b_2 d\tau$  (in questo caso abbordabile nei calcoli, visto che  $b_2$  è un vettore costante), con la quale si trova  $\begin{pmatrix} 4(e^{-t} - 1 + t) \\ 6 - 2(3+4t)e^{-t} \\ (1+4t)(1 - e^{-t}) \end{pmatrix}$ . Pertanto la soluzione generale di  $y' = Ay + b(t)$  è della forma  $y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4(e^{-t} - 1 + t) \\ 6 - 2(3+4t)e^{-t} \\ (1+4t)(1 - e^{-t}) \end{pmatrix}$  al variare di  $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}$ ; imponendo che  $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  si ha  $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , che a conti fatti ridà la soluzione trovata poco fa.

12. (a) La matrice  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  ha autovalori  $-1$  e  $-4$ , con autovettori associati rispettivamente  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Una risolvante del sistema omogeneo associato è perciò  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-4t} \\ -2e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}$ : la matrice esponenziale risulta pertanto  $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-4t} \\ -2e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{-4t} & -e^{-t} + e^{-4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-4t} & 2e^{-t} + e^{-4t} \end{pmatrix}$ , e per  $t = 1$  si ottiene  $e^A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-1} + 2e^{-4} & -e^{-1} + e^{-4} \\ -2e^{-1} + 2e^{-4} & 2e^{-1} + e^{-4} \end{pmatrix}$ .

- (b) Una base che porta l'operatore associato ad  $A$  in una forma "semplice" (in questo caso diagonale) è quella data dai due autovettori individuati in precedenza: detta  $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice del cambio di base, si avrà  $A = PBP^{-1}$  con  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ , e dunque  $e^A = Pe^B P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , che risulta uguale a quanto trovato nel punto precedente.

- (c) Per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare del sistema non omogeneo è data da  $\Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$  ove  $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1} b(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ 2e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ , da cui  $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$ : la soluzione particolare è pertanto  $\Phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ , e l'integrale generale risulta  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ , ovvero  $\begin{cases} x(t) = (k_1 + \frac{1}{3})e^{-t} + k_2 e^{-4t} \\ y(t) = (-2k_1 + \frac{1}{3})e^{-t} + k_2 e^{-4t} \end{cases}$  al variare di  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ . Imponendo poi che  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  si ha  $(k_1, k_2) = (0, -\frac{1}{3})$ , da cui  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-4t} \\ e^{-t} - e^{-4t} \end{pmatrix}$ : allo stesso risultato si sarebbe arrivati naturalmente anche calcolando direttamente tale soluzione con dato iniziale nullo, con la regola  $e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) d\tau$  (si invita a verificare).

13. (a) Definita la funzione complessa  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , il sistema lineare reale  $\begin{cases} \dot{x} = (1-y)\cos t \\ \dot{y} = (x-2\sin t)\cos t \end{cases}$  corrisponde all'equazione lineare complessa  $z' = p(t)z + q(t)$  con  $p(t) = i\cos t$  e  $q(t) = \cos t + i(-2\sin t\cos t)$ . Una primitiva di  $p(t)$  è  $P(t) = i\sin t$  e, posto  $u = i\sin t$ , vale  $\int e^{P(t)} q(t) dt = \int e^{i\sin t} (1 - 2i\sin t)\cos t dt = -i \int (1 - 2u) e^u du = -i(3 - 2u)e^u = -(2\sin t + 3i)e^{i\sin t}$ : pertanto  $z(t) = e^{-P(t)} (\int e^{P(t)} q(t) dt + k) = k e^{-i\sin t} - (2\sin t + 3i)e^{i\sin t}$  al variare di  $k = A + iB \in \mathbb{C}$ , ovvero  $x(t) + iy(t) = (A + iB)(\cos(\sin t) - i\sin(\sin t)) - 2\sin t - 3i = (A \cos(\sin t) + B \sin(\sin t) - 2\sin t) + i(B \cos(\sin t) - A \sin(\sin t) - 3)$ . Uguagliando parti reali e immaginarie si hanno le soluzioni del sistema originario:  $\begin{cases} x(t) = A \cos(\sin t) + B \sin(\sin t) - 2\sin t \\ y(t) = B \cos(\sin t) - A \sin(\sin t) - 3 \end{cases}$  con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

- (b) La risoluzione su  $]0, +\infty[$  dell'equazione differenziale di Eulero  $x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0$  nell'incognita  $y(x)$  prevede di effettuare il cambio di variabile indipendente  $x = e^t$ : in questo modo la funzione composta  $z(t) := y(x) = y(e^t)$  soddisferà ad un'equazione lineare a coefficienti costanti. E, poiché  $z(t) = e^{\tau t}$  se e solo se  $y(x) = x^\tau$ , un modo rapido per arrivare all'equazione caratteristica dell'equazione in  $z(t)$  è di cercare le soluzioni di tipo  $y(x) = x^\tau$  dell'equazione originale. Nel caso della nostra equazione  $3x^2 y'' - xy' + y = 0$ , imponendo che  $y(x) = x^\tau$  sia soluzione si ottiene  $3x^2 \tau(\tau-1)x^{\tau-2} - x\tau x^{\tau-1} + x^\tau = 0$  per ogni  $x > 0$ , da cui necessariamente  $3\tau(\tau-1) - \tau + 1 = 0$ , ovvero  $3\tau^2 - 4\tau + 1 = 0$ , con radici  $1$  e  $\frac{1}{3}$ : ne ricaviamo che le soluzioni reali sono  $z(t) = A e^t + B e^{\frac{1}{3}t}$ , ovvero  $y(x) = Ax + B\sqrt[3]{x}$  al variare di  $A, B \in \mathbb{R}$ . Si tratta di funzioni  $C^\infty$  all'intorno di  $x = 1$  e dunque per ammettere un minimo locale in  $x = 1$  una condizione necessaria sarà che  $y'(1) = 0$  e  $y''(1) \geq 0$ : ovvero, essendo  $y'(x) = A + \frac{1}{3}Bx^{-\frac{2}{3}}$  e  $y''(x) = -\frac{2}{9}Bx^{-\frac{5}{3}}$ , bisogna che  $A + \frac{1}{3}B = 0$  e  $-\frac{2}{9}B \geq 0$ , cioè  $B = -3A$  e  $B \leq 0$  (ovvero  $A \geq 0$ ). Inoltre se vale anche  $y''(1) > 0$  (cioè  $B < 0$ , ovvero  $A > 0$ ) la condizione è anche sufficiente, dunque basta controllare solo il caso estremale in cui  $y'(1) = y''(1) = 0$ , che dà la costante nulla (per la quale effettivamente, a rigor di termini,  $x = 1$  è di minimo locale). Ricapitolando, le soluzioni dell'equazione di Eulero  $3x^2 y'' - xy' + y = 0$  che ammettono un minimo locale in  $x = 1$  sono le funzioni del tipo  $y(x) = A(x - 3\sqrt[3]{x})$  al variare di  $A \geq 0$ .