

5 Equazioni differenziali ordinarie lineari

Trattiamo ora in modo più diretto il caso delle *equazioni lineari*, ovvero del tipo

$$(5.1) \quad y' = A(t)y + b(t)$$

ove $A(t)$ è una funzione continua a valori nello spazio degli operatori lineari di $\mathbb{C}^n$ in sè (dunque, in coordinate, una matrice $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ di funzioni continue) e $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ è un vettore di funzioni continue.

5.1 Generalità

Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ sul quale sono definite $A(t)$ e $b(t)$, abbiamo già visto (Corollario 4.1.6) che sussistono esistenza e unicità globali, ovvero che per ogni $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ esiste una e una sola soluzione definita su tutto I del problema di Cauchy dato da $y' = A(t)y + b(t)$ e $y(t_0) = y_0$. Il prossimo passo è vedere come sia fatto l'insieme delle soluzioni di (5.1): a tal fine va considerata anche l'*equazione omogenea associata*

$$(5.2) \quad y' = A(t)y.$$

Il seguente risultato riunisce in un solo enunciato tutte le informazioni necessarie.

Proposizione 5.1.1. *Sia S (risp. S_0) l'integrale generale di (5.1) (risp. di (5.2)).*

- (1) S_0 è un $\mathbb{C}$ -sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ di dimensione n , ovvero vi sono n soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in S_0$ definite su tutto I tali che

$$S_0 = \{\lambda_1 \varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

Un tale insieme $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$, ovvero una base di S_0 su $\mathbb{C}$, si dirà essere un sistema fondamentale di soluzioni di (5.2), e una matrice $\Phi(t)$ le cui colonne sono un sistema fondamentale di soluzioni si dirà essere una risolvante di (5.2).

**Sistema
fondamentale
di soluzioni**

Risolvante

- (2) Se $\Phi(t)$ è una matrice le cui colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono soluzioni di (5.2) allora $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $\Phi(t)$ è una risolvante di (5.2);
- (ii) le soluzioni di (5.2) sono tutte e sole quelle del tipo $\varphi(t) = \Phi(t)c$, ove $c \in \mathbb{C}^n$ è un vettore costante;
- (iii) esiste $\tilde{t} \in I$ tale che $\Phi(\tilde{t})$ non è singolare, ovvero i vettori $\varphi_1(\tilde{t}), \dots, \varphi_n(\tilde{t})$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$ (altrimenti detto, $\det \Phi(\tilde{t}) \neq 0$);

- (iv) per ogni $t \in I$ la matrice $\Phi(t)$ non è singolare, ovvero i vettori $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$ (altrimenti detto, $\det \Phi(t) \neq 0$).

In particolare:

- (a) se $\Phi(t)$ è una risolvibile allora vale $A(t) = \Phi'(t) \Phi(t)^{-1}$, e tutte le altre risolventi sono del tipo $\Phi(t) L$ ove $L \in M_n(\mathbb{C})$ è una matrice invertibile;
 (b) la soluzione di (5.2) tale che $y(t_0) = y_0$ è data da $\varphi(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} y_0$.

- (3) S è il sottospazio affine di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ ottenuto traslando il sottospazio vettoriale S_0 con una qualsiasi soluzione particolare di (5.1), ovvero

$$S = S_0 + \tilde{\varphi}(t) = \{\lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\},$$

ove $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ è sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea, e $\tilde{\varphi}(t) \in S$.

- (4) (Metodo della variazione delle costanti arbitrarie) Nelle notazioni precedenti, una soluzione particolare di (5.1) è

Metodo della
variazione delle
costanti arbitrarie

$$\tilde{\varphi}(t) = \Phi(t) c(t), \quad \text{ove} \quad c'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t).$$

Di conseguenza, si può descrivere esplicitamente lo spazio delle soluzioni di (5.1):

$$S = \{\varphi(t) = \Phi(t) k + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) dt : k \in \mathbb{C}^n\},$$

e, fissato $t_0 \in I$, la soluzione del problema di Cauchy (4.1) con $y(t_0) = y_0$:

$$\varphi(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau.$$

- (5) (Principio di sovrapposizione) Se $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, e $\tilde{\varphi}_1(t)$ (risp. $\tilde{\varphi}_2(t)$) è una soluzione di (5.1) ove $b(t)$ sia sostituito da $b_1(t)$ (risp. da $b_2(t)$) allora $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$ è una soluzione di (5.1).

Dimostrazione. (1) Se $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ risolvono (5.2) e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ allora è facile vedere che anche $\lambda \varphi_1(x) + \mu \varphi_2(x)$ risolve (5.2), dunque S_0 è un $\mathbb{C}$ -sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$. Preso un qualsiasi $t_0 \in I$, l'applicazione di valutazione $v_{t_0} : S_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ data da $v_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$ è lineare (ovvio) e biiettiva (grazie al Corollario 4.1.6). Dunque S_0 ha dimensione n . (2) L'affermazione che se $\Phi(t)$ è una matrice le cui colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono soluzioni di (5.2) allora $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ è ovvia: infatti equivale a dire che per ogni suo vettore colonna vale $\varphi_j'(t) = A(t) \varphi_j(t)$, cosa per l'appunto vera in quanto le $\varphi_j(t)$ sono soluzioni del sistema omogeneo. Passiamo ora alle affermazioni (i)-(iv). Le affermazioni (i) e (ii) sono equivalenti per definizione di risolvibile. Se vale (iii), poiché v_t è un isomorfismo si ha che necessariamente le colonne di $\Phi(t)$ devono essere una base di S_0 , ovvero vale (i); d'altra parte (i) implica (iv) (perché v_t è isomorfismo per ogni $t \in I$) e ovviamente (iv) implica (iii). In particolare, se $\Phi(t)$ è una risolvibile allora è invertibile per ogni t , e si ricava che $A(t) = \Phi'(t) \Phi(t)^{-1}$. È infine chiaro che, nota una risolvibile $\Phi(t)$, tutte le altre sono del tipo $\Phi(t) L$ ove $L \in M_n(\mathbb{C})$ è una matrice invertibile: si tratta infatti di tutte e sole le matrici di funzioni le cui colonne sono ottenute da quelle di $\Phi(t)$ tramite una trasformazione invertibile di S_0 , che manda basi in basi. Questo prova (a). Per quanto riguarda (b), in base a (ii) le soluzioni di (5.2) sono tutte e sole quelle del tipo $\varphi(t) = \Phi(t) c$, ove $c \in \mathbb{C}^n$ è un vettore costante: imponendo che per $t = t_0$ tale soluzione valga y_0 si ottiene $y_0 = \Phi(t_0) c$, da cui $c = \Phi(t_0)^{-1} y_0$, e dunque

$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$. (3) Se $\tilde{\varphi}(t)$ risolve (5.1) e $\varphi(t) \in S_0$, allora anche $\tilde{\varphi}(t) + \varphi(t)$ risolve (5.1), e dunque $\tilde{\varphi}(t) + S_0 \subset S$; viceversa, se $\psi(t)$ risolve (5.1) allora $\psi(t) - \tilde{\varphi}(t)$ risolve (5.2), dunque $S - \tilde{\varphi}(t) \subset S_0$, ovvero $S \subset \tilde{\varphi}(t) + S_0$, e pertanto $S = \tilde{\varphi}(t) + S_0$. (4) Imponendo che $\tilde{\varphi}(t) = \Phi(t)c(t)$ sia soluzione di (5.1) (ovvero che $\tilde{\varphi}'(t) = A(t)\tilde{\varphi}(t) + b(t)$) si ottiene $\Phi(t)'c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$; notando però che $\Phi(t)' = A(t)\Phi(t)$ (vedi (2)) questo dà $\Phi(t)c'(t) = b(t)$, da cui $c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t)$. Si ottiene dunque $c(t) = \int \Phi(t)^{-1}b(t)dt$ (come integrale vettoriale indefinito, qualunque primitiva va bene), da cui la descrizione esplicita $S = \{\varphi(t) = \Phi(t)k + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}b(t)dt : k \in \mathbb{C}^n\}$. Fissato poi $t_0 \in I$ scriviamo lo spazio delle soluzioni usando la funzione integrale di punto iniziale t_0 , ovvero $\varphi(t) = \Phi(t)k + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau$ al variare di $k \in \mathbb{C}^n$; imponendo che $\varphi(t_0) = y_0$ si ottiene $y_0 = \Phi(t_0)k$, da cui $k = \Phi(t_0)^{-1}y_0$. (5) Basta sommare membro a membro le equazioni soddisfatte da $\tilde{\varphi}_1(t)$ e $\tilde{\varphi}_2(t)$. $\square$

Esercizio. (1) Un sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ha tra le sue soluzioni le funzioni $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -2t \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 3 \end{pmatrix}$: dire di che sistema si tratta, e dove saranno definite le sue soluzioni. Trovarne poi la soluzione generale, e quella tale che $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2) Trovare tutte le soluzioni del sistema lineare non omogeneo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, ove $A(t)$ è come in precedenza.

Risoluzione. (1) Le due soluzioni proposte sono linearmente indipendenti ad esempio per $\tilde{t} = 0$ (infatti il loro valore è rispettivamente $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$), dunque per la Proposizione 5.1.1(2) devono esserlo in ogni t del loro dominio: in altre parole, la matrice $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 \\ -2t & 3 \end{pmatrix}$ deve essere una risolvante del sistema. Ciò significa che necessariamente $\det \Phi(t) = 2t^2 + 5t - 3$ non si deve annullare, ovvero $t \neq -3$ e $t \neq \frac{1}{2}$: pertanto il sistema avrà senso su uno degli intervalli $I_1 =]-\infty, -3[$, $I_2 =]-3, \frac{1}{2}[$ oppure $I_3 =]\frac{1}{2}, +\infty[$. In tal caso sappiamo che $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2t^2+5t-3} \begin{pmatrix} 3 & -t-1 \\ 2t & t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t+3}{2t^2+5t-3} & -\frac{2}{2t^2+5t-3} \\ -\frac{6}{2t^2+5t-3} & \frac{2t+2}{2t^2+5t-3} \end{pmatrix}$: pertanto il sistema omogeneo cercato è $\begin{cases} x' = \frac{2t+3}{2t^2+5t-3}x - \frac{2}{2t^2+5t-3}y \\ y' = -\frac{6}{2t^2+5t-3}x + \frac{2t+2}{2t^2+5t-3}y \end{cases}$. Per l'esistenza e unicità globale, le soluzioni massimali di questo sistema saranno definite su uno degli intervalli I_1, I_2, I_3 . La soluzione generale è $\Phi(t)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)t - a_1 + a_2 \\ -2a_1t + 3a_2 \end{pmatrix}$ al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, e quella tale che $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ si può trovare da questa, o direttamente come $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 \\ -2t & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}t+2 \\ \frac{1}{3}t-1 \end{pmatrix}$. (2) Usando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare del sistema non omogeneo è data da $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-1)c_1(t) + (t+1)c_2(t) \\ -2tc_1(t) + 3c_2(t) \end{pmatrix}$, ove $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t-1}{2t^2+5t-3} \\ \frac{2t^2+t-1}{2t^2+5t-3} \end{pmatrix}$, che per integrazione dà $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \log |2t-1| + \frac{7}{4} \log |t+3| \\ t - \frac{3}{2} \log |2t-1| - \frac{5}{2} \log |t+3| \end{pmatrix}$; la soluzione generale sarà allora $\begin{pmatrix} (a_1+a_2)t - a_1 + a_2 + \tilde{x}(t) \\ -2a_1t + 3a_2 + \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

I ragionamenti fatti in precedenza presumono di poter arrivare a costruire in qualche modo una risolvante, ovvero un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea: tuttavia, a parte il caso dei coefficienti costanti che esamineremo più tardi, non esistono formule risolutive generali ma solo osservazioni relative a casi particolari. Uno è quello dei sistemi lineari reali nel piano cartesiano (x, y) in cui $A(t) = \begin{pmatrix} u(t) & -v(t) \\ v(t) & u(t) \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix}$ con $u(t), v(t), r(t)$ e $s(t)$ funzioni di un intervallo I a valori reali, ovvero

$$\begin{cases} x' = u(t)x - v(t)y + r(t) \\ y' = v(t)x + u(t)y + s(t) \end{cases},$$

sistema che è equivalente all'unica equazione scalare lineare complessa $z' = a(t)z + b(t)$ con $z = x + iy$, $a(t) = u(t) + iv(t)$ e $b(t) = r(t) + is(t)$.

Esempio. Il sistema reale $\begin{cases} x' = 2tx - y + 2t \\ y' = x + 2ty + 1 \end{cases}$ è della forma precedente con $(u(t), v(t), r(t), s(t)) = (2t, 1, 2t, 1)$: si ottiene dunque l'equazione complessa $z' = (2t + i)z + (2t + i)$, lineare del primo ordine. Posto $p(t) = -(2t + i)$ e $q(t) = 2t + i$ si ha dunque $z' + p(t)z = q(t)$: essendo $P(t) = \int p(t) dt = -t^2 - it$ e $\int e^{P(t)} q(t) dt = -e^{-t^2 - it}$ si ottiene $z(t) = k e^{t^2 + it} - 1$ con $k \in \mathbb{C}$; scritta $k = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$, si ottiene $x(t) + iy(t) = (u + iv)e^{t^2}(\cos t + i \sin t) - 1$, da cui le soluzioni reali $\begin{cases} x(t) = -1 + e^{t^2}(u \cos t - v \sin t) \\ y(t) = e^{t^2}(u \sin t + v \cos t) \end{cases}$.

Come sappiamo, anche un'equazione lineare scalare di ordine n può essere ricondotta a un'equazione vettoriale lineare del primo ordine: all'equazione scalare

$$(5.3) \quad y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t),$$

ove $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ e $\beta(t)$ sono funzioni continue definite in un certo intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{C}$, posto $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ viene associata $z' = A(t)z + b(t)$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0(t) & & \cdots & -\alpha_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, in questo caso il dato iniziale $z'(t_0) = z_0$ va inteso come l'assegnazione dei valori in t_0 della funzione scalare $y(t)$ e delle sue derivate $y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$.

Consideriamo anche l'equazione omogenea associata

$$(5.4) \quad y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = 0.$$

In questo ambito, la matrice costruita con n soluzioni scalari $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ di classe $\mathcal{C}^n$ (dunque in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$) di (5.4) è la *matrice wronskiana*

**Matrice
wronskiana**

$$W_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

che dunque è una risolvante dell'equazione vettoriale lineare del primo ordine associata nel caso in cui tali soluzioni siano linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$. La rilettura della Proposizione 5.1.1 dà allora quanto segue:

Proposizione 5.1.2. *Sia S (risp. S_0) l'integrale generale di (5.3) (risp. di (5.4)).*

- (1) *S_0 è un $\mathbb{C}$ -sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ di dimensione n , ovvero vi sono n soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in S_0$ definite su tutto I tali che*

$$S_0 = \{\lambda_1 \varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

Una tale insieme $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$, ovvero una base di S_0 su $\mathbb{C}$, si dirà essere un sistema fondamentale di soluzioni di (5.4).

- (2) Date n soluzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ di (5.4), vale $W'_\varphi(t) = A(t)W_\varphi(t)$. Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono funzioni linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$;
- (ii) esiste $\tilde{t} \in I$ per cui la matrice wronskiana $W_\varphi(\tilde{t})$ non è singolare ($\det W_\varphi(\tilde{t}) \neq 0$);
- (iv) per ogni $t \in I$ la matrice wronskiana $W_\varphi(t)$ non è singolare (cioè $\det W_\varphi(t) \neq 0$).

Si noti che, se valgono queste affermazioni, allora $A(t) = W'_\varphi(t)W_\varphi^{-1}(t)$.

- (3) S è il sottospazio affine di $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ ottenuto traslando il sottospazio vettoriale S_0 con una qualsiasi soluzione particolare di (5.4), ovvero

$$S = S_0 + \tilde{\varphi}(t) = \{\lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) + \tilde{\varphi}(t) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\},$$

ove $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ è sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea, e $\tilde{\varphi}(t) \in S$.

- (4) (Metodo della variazione delle costanti arbitrarie) Nelle notazioni precedenti, una soluzione particolare di (5.3) è

$$\tilde{\varphi}(t) = c_1(t) \varphi_1(t) + \dots + c_n(t) \varphi_n(t) \quad \text{con} \quad c'_j(t) = (-1)^{n+j} \frac{\det W_{\varphi,j}(t)}{\det W_\varphi(t)} \beta(t)$$

ove $W_{\varphi,j}(x)$ è il minore di ordine $n-1$ della matrice wronskiana $W_\varphi(x)$ ottenuto eliminando l'ultima riga e la j -esima colonna (se $n=1$ si pone $\det W_{\varphi,j}(x) := 1$).

- (5) (Principio di sovrapposizione) Se $\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)$, e $\tilde{\varphi}_1(t)$ (risp. $\tilde{\varphi}_2(t)$) è una soluzione di (5.1) ove $b(t)$ sia sostituito da $\beta_1(t)$ (risp. da $\beta_2(t)$) allora $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)$ è una soluzione di (5.1).

Esercizio. (1) Determinare un'equazione scalare lineare omogenea $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ che abbia $\varphi_1(t) = e^{2t}$ e $\varphi_2(t) = t$ tra le soluzioni; trovare poi tutte le altre. **(2)** Dire quali sono le soluzioni dell'equazione non omogenea $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 2t - 1$, determinando quella per cui $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Risoluzione. (1) I coefficienti $a_1(t)$ e $a_0(t)$ possono essere determinati direttamente imponendo che $\varphi_1(t) = e^{2t}$ e $\varphi_2(t) = t$ siano soluzioni, perché infatti si ottiene $4e^{2t} + 2a_1e^{2t} + a_0e^{2t} = 0$ e $a_1 + ta_0 = 0$, da cui $a_0(t) = \frac{4}{2t-1}$ e $a_1(t) = -\frac{4t}{2t-1}$: si noti che, non a caso, la matrice wronskiana $W_\varphi(x) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t \\ 2e^{2t} & 1 \end{pmatrix}$ è singolare solo per $t = \frac{1}{2}$, e che $W_\varphi(x)'W_\varphi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 1 \\ 4e^{2t} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(1-2t)e^{2t}} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2t-1} \\ -\frac{4}{2t-1} & \frac{4t}{2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$, la matrice del sistema associato alla nostra equazione lineare del secondo ordine. L'equazione potrà essere studiata dunque su uno degli intervalli $I_1 =]-\infty, \frac{1}{2}[$ oppure $I_2 =]\frac{1}{2}, +\infty[$, sui quali saranno definite tutte le soluzioni massimali, che sono dunque $\varphi(t) = a_1e^{2t} + a_2t$ al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. (2) Usando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)t$ con $c'_1(t) = -\frac{t}{(1-2t)e^{2t}}(2t-1) = te^{-2t}$ e $c'_2(t) = \frac{e^{2t}}{(1-2t)e^{2t}}(2t-1) = -1$, da cui $c_1(t) = -\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t}$ e $c_2(t) = -t$: pertanto $\tilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{4}(4t^2 + 2t + 1)$, e le soluzioni dell'equazione non omogenea sono $\varphi(t) = a_1e^{2t} + a_2t - \frac{1}{4}(4t^2 + 2t + 1)$ al variare

di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Infine, imponendo che $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ si ottiene $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_2 = 0$, da cui la soluzione $\varphi(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - 4t^2 - 2t - 1)$ (si noti che $\varphi(t) = \frac{1}{4}(1 + 2t + 2t^2 + o_0(t^2) - 4t^2 - 2t - 1) \sim_0 -\frac{1}{2}t^2$).

5.2 Il caso a coefficienti costanti

Come detto, non esistono formule risolutive generali per determinare un sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione lineare del primo ordine (in particolare, nemmeno di un'equazione lineare scalare di ordine n). Questo è però possibile nel caso dei *coefficienti costanti*, in cui $A(t)$ è in realtà una matrice costante $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$(5.5) \quad y' = Ay + b(t).$$

Iniziamo come al solito dal sistema omogeneo

$$(5.6) \quad y' = Ay.$$

Applicando, a partire dalla costante $\psi_0(t) \equiv y_0$, la tecnica di costruzione della soluzione di (5.6) con $y(0) = y_0$ tramite iterazione dell'operatore $(T\psi)(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau$ (Teorema 4.1.2, in cui scegliamo $t_0 = 0$) si ottiene

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= (T\psi_0)(t) = y_0 + \int_0^t Ay_0 d\tau = y_0 + tAy_0 = (\mathbf{1}_n + tA)y_0, \\ \psi_2(t) &= (T\psi_1)(t) = y_0 + \int_0^t A(y_0 + tAy_0) d\tau = (\mathbf{1}_n + tA + \frac{1}{2}t^2A^2)y_0, \\ &\vdots \\ \psi_k(t) &= (T\psi_{k-1})(t) = (\mathbf{1}_n + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k)y_0. \end{aligned}$$

Il contenuto dell'operatore che va approssimandosi all'interno delle parentesi ha l'aspetto familiare della ridotta k -esima della serie esponenziale: ricordiamo dunque la costruzione della *matrice esponenziale* di una data matrice quadrata.

Proposizione - Definizione 5.2.1. *Data una matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} = \mathbf{1}_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots$$

converge in $M_n(\mathbb{C})$; la somma, detta matrice esponenziale di X , è denotata usualmente con $\exp X$ oppure e^X , e ha le seguenti proprietà.

Matrice
esponenziale

- (i) *Se $X = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è una matrice diagonale, allora $e^X = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. In particolare vale $e^{0_n} = \mathbf{1}_n$.*

- (ii) Se N è nilpotente, detto r l'indice di nilpotenza⁽¹⁰⁰⁾ vale $e^N = \mathbf{1}_n + N + \cdots + \frac{1}{(r-1)!} N^{r-1}$.
- (iii) Se D è idempotente (cioè $D^2 = D$, da cui $D^r = D$ per $r \in \mathbb{N}$) vale $e^D = \mathbf{1}_n + (e-1)D$.
- (iv) Se X e Y commutano tra loro (ovvero $XY = YX$) allora $e^X e^Y = e^Y e^X = e^{X+Y}$, in particolare si ha $e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}$ per ogni $s, t \in \mathbb{C}$ e $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- (v) Vale $e^X e^{-X} = \mathbf{1}_n$, dunque e^X è invertibile con inversa e^{-X} .
- (vi) Se $P \in M_n(\mathbb{C})$ è invertibile, allora $e^{PXP^{-1}} = P e^X P^{-1}$.
- (vii) Vale $e^{X^T} = (e^X)^T$, $e^{\bar{X}} = \overline{e^X}$ e $\det e^X = e^{\text{tr } X}$, ove X^T , $\bar{X}$ e $\text{tr } X$ rappresentano rispettivamente la matrice trasposta, la matrice coniugata e la traccia di X .⁽¹⁰¹⁾

Dimostrazione. Pensando $M_n(\mathbb{C})$ munito di una qualsiasi norma sottomoltiplicativa, ovvero una norma $p : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty[$ tale che $p(AB) \leq p(A)p(B)$ ⁽¹⁰²⁾ (si possono prendere ad esempio la norma di operatoriale $\|A\|_{\text{op}} := \max\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$, indotta da quella di $\mathbb{C}^n$, o la norma di Frobenius $\|A\|_F := \text{tr}(\bar{A}A) = (\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2)^{\frac{1}{2}}$, che tratta $M_n(\mathbb{C})$ come $\mathbb{C}^{n^2}$), si ha $p(\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} X^j) \leq \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} p(X^j) \leq \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} p(X)^j$, dunque per confronto la serie converge assolutamente, a fortiori semplicemente. Vediamo ora le proprietà. (i-ii-iii) sono ovvie dalla definizione. La dimostrazione di (iv) si svolge come quella della proprietà di omomorfismo dell'esponenziale complesso, solo che ora si ha a che fare con matrici e non con numeri e dunque, per ripercorrere la suddetta dimostrazione, ad un certo punto bisogna usare il fatto che $XY = YX$ (d'altra parte è facile trovare esempi in cui la conclusione può non valere se le due matrici non commutano tra loro, si veda alla fine di questa dimostrazione). Per il resto, ovviamente sA e tA commutano tra loro e dunque $e^{sA} e^{tA} = e^{sA+tA} = e^{(s+t)A}$; in particolare, scegliendo $A = X$, $s = 1$ e $t = -1$ si ottiene $e^X e^{-X} = e^{0_n} = \mathbf{1}_n$, ovvero (v). Infine, anche i punti (vi-vii) seguono facilmente dalla definizione (le relazioni valgono per ogni termine della somma), tranne il fatto che $\det e^X = e^{\text{tr } X}$. Per dimostrare quest'ultima relazione, se scriviamo $X = PJP^{-1}$ ove J è in forma canonica di Jordan (vedi (5.8) più sotto) e P è la matrice invertibile del cambio di base, abbiamo $\text{tr } J = \text{tr } X$ ⁽¹⁰¹⁾ e $e^X = P e^J P^{-1}$ (per (vi)), da cui $\det e^X = \det e^J$. Ora, per una matrice in forma di Jordan non è difficile notare che vale $\det e^J = e^{\text{tr } J}$ (basta ripetere a blocchi diagonali il ragionamento che porterà alla formula (5.7) della nota di pag. 148 nel caso di un solo autovalore): dunque $\det e^X = \det e^J = e^{\text{tr } J} = e^{\text{tr } X}$. $\square$

Esempi. Illustriamo la Proposizione 5.2.1 con qualche calcolo. **(1)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è idempotente, dunque per (iii) $e^X = \mathbf{1}_n + (e-1)X = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(2)** $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $Y^2 = 0$), dunque per (ii) si ha $e^Y = \mathbf{1}_n + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(3)** $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ soddisfa $Z^n = \mathbf{1}_n$ se n è pari e $Z^n = Z$ se n è dispari, dunque $e^Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \mathbf{1}_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} Z = (\cosh 1) \mathbf{1}_n + (\sinh 1) Z = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$. Arriviamo allo stesso risultato in un altro modo. Gli autovalori di Z sono 1 e -1 , e due autovettori sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: pertanto la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è quella che diagonalizza Z , nel

⁽¹⁰⁰⁾Una matrice $N \in M_n(\mathbb{C})$ è detta *nilpotente* se esiste un intero r tale che $N^r = \mathbf{0}_n$; il minimo tra tali interi è detto *indice di nilpotenza* di N , ed è sempre $\leq n$.

⁽¹⁰¹⁾La *traccia* di $X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ è la somma dei suoi termini diagonali $x_{11} + \cdots + x_{nn}$. Assieme a $\det X$, la traccia è uno degli invarianti fondamentali dell'operatore lineare associato a X , in altre parole non cambia alterando X in PXP^{-1} con P invertibile: in effetti, nell'equazione caratteristica $\det(\tau \mathbf{1}_n - X) = 0$ con indeterminata τ , la traccia e il determinante sono (a meno del segno $(-1)^{n-j}$) i coefficienti dei termini di grado rispettivamente $j = n-1$ e $j = 0$. Ad esempio, per $n = 2$ si ha $\det(\tau \mathbf{1}_2 - X) = \tau^2 - (x_{11} + x_{22})\tau + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$, e per $n = 3$ si ha $\det(\tau \mathbf{1}_3 - X) = \tau^3 - (x_{11} + x_{22} + x_{33})\tau^2 + (x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32})\tau - (x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) - x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31}) + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}))$.

⁽¹⁰²⁾Sappiamo che su uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti tra loro; tuttavia per comodità ci serve usare una norma sottomoltiplicativa, come apparirà chiaro tra breve.

senso che $Z = PJP^{-1}$ ove $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ora, per (i) si ha $e^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$, dunque per (vi) si ritrova $e^Z = Pe^JP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$. (4)
 $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è idempotente, dunque per (iii) vale $e^{X+Y} = \mathbf{1}_n + (e - 1)(X + Y) = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 Notiamo che e^{X+Y} è diverso sia da $e^Xe^Y = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che da $e^Ye^X = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: ciò non deve sorprendere, in quanto X e Y non commutano (infatti $XY = Y$ mentre $YX = \mathbf{0}_2$).

Per quanto detto in precedenza, possiamo dunque affermare che

Proposizione 5.2.2. *Dato un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti $y' = Ay$ ove $A \in M_n(\mathbb{C})$, la soluzione del problema di Cauchy dato da $y(0) = y_0$ è $e^{tA}y_0$. In particolare e^{tA} è una risolvante (più precisamente, è proprio la risolvante che per $t = 0$ diventa l'identità), e il flusso (4.5) all'istante t è dato da $\Phi^t(y) = e^{tA}y$.*

Per risolvere un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti risulta pertanto importante saper calcolare l'esponenziale di una matrice. La prima osservazione è la seguente:

Proposizione 5.2.3. *Dati $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$, la funzione $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ è soluzione del sistema lineare omogeneo $y' = Ay$ se e solo se λ è autovalore di A e v è un λ -autovettore. Inoltre, se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono r diversi autovalori di A con rispettivi autovettori $v_1, \dots, v_r$, allora le soluzioni $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, \varphi_r(t) = e^{\lambda_r t}v_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Posto $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$, poiché $\varphi'(t) = \lambda \varphi(t)$ si ha che $\varphi(t)$ è soluzione di $y' = Ay$ se e solo se $\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$, ovvero (semplificando per $e^{\lambda t} > 0$) se e solo se $\lambda v = Av$. Se poi $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono r diversi autovalori di A con rispettivi autovettori $v_1, \dots, v_r$, allora i vettori $\varphi_1(0) = v_1, \dots, \varphi_r(0) = v_r$ sono linearmente indipendenti (ricordiamo che autovettori riferiti a diversi autovalori sono sempre linearmente indipendenti tra loro), dunque (vedi Proposizione 5.1.1(2)) le soluzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ sono linearmente indipendenti. $\square$

La Proposizione 5.2.3 mostra come il calcolo di una risolvante —in particolare della matrice esponenziale— per il sistema $y' = Ay$ sia legato alla conoscenza degli autovalori dell'operatore rappresentato dalla matrice A , che, lo ricordiamo, sono le soluzioni $\lambda \in \mathbb{C}$ dell'equazione caratteristica

$$\det(\tau \mathbf{1}_n - A) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \det \begin{pmatrix} \tau - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \tau - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \tau - a_{nn} \end{pmatrix} = 0 :$$

trattandosi di un'equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi, per il Teorema Fondamentale dell'Algebra le soluzioni saranno n se contate con la loro molteplicità. È importante ricordare che gli autovalori dipendono dall'operatore e non dalla particolare matrice che lo rappresenta in una certa base: più in concreto, se P è una matrice invertibile (un cambio di base) allora A e PAP^{-1} rappresentano lo stesso operatore espresso in basi differenti, e danno luogo, con l'equazione caratteristica, agli stessi risultati (ovvero, stessi autovalori con le stesse molteplicità). In realtà la sola conoscenza degli autovalori di A con le loro molteplicità non sarà in generale sufficiente per il calcolo della matrice esponenziale e^{tA} , ma bisognerà avere maggiori informazioni per riuscire ad esprimere l'operatore in una forma matriciale opportunamente semplificata, la migliore delle quali sarebbe la forma

canonica di Jordan (vedi (5.8), più sotto). Tuttavia, poiché i calcoli necessari a questa semplificazione diventano rapidamente laboriosi all'aumentare dell'ordine n della matrice, conviene partire esaminando alcuni casi particolari nei quali si possono impiegare metodi semplificati per portare a termine il calcolo.

- Se la matrice A ha n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (ovvero l'operatore A è diagonalizzabile), sappiamo che n vettori non nulli $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ tali che v_j sia un λ_j -autovettore sono linearmente indipendenti, dunque una base di $\mathbb{C}^n$; per la Proposizione 5.2.3 le funzioni $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ sono soluzioni di $y' = Ay$ linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ e pertanto generano lo spazio delle soluzioni S_0 . In altre parole, la matrice $\Phi(t)$ costruita con le colonne $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ per $j = 1, \dots, n$ è una risolvante di $y' = Ay$; e, ricordando la Proposizione 5.1.1(2) e il fatto che e^{tA} è la risolvante che per $t = 0$ diventa l'identità $\mathbf{1}_n$ otteniamo che

$$e^{tA} = \Phi(t) \Phi(0)^{-1}.$$

Alternativamente, dette P la matrice le cui colonne sono i vettori $v_1, \dots, v_n$ e J la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (una forma canonica di Jordan per A) sappiamo che vale $A = PJP^{-1}$, dunque ricordando la Proposizione-Definizione 5.2.1(i, vi) possiamo concludere che vale anche

$$e^{tA} = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) P^{-1}.$$

Esempi. (1) Il sistema $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ è scritto in forma compatta come $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, con autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: si ha così la risolvante $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$, da cui $e^{tA} = \Phi(t) \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 4e^{3t} & -e^{-2t} + e^{3t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$, che si verifica direttamente essere uguale a $P \text{diag}(e^{-2t}, e^{3t}) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Ricordiamo poi che la soluzione del problema di Cauchy con dato $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è data da $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. **(2)** Nel sistema $\begin{cases} x' = 2x - (3+i)y \\ y' = x - y \end{cases}$, gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -(3+i) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = 1 - i$, con autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$: si ha così $\Phi(t) = \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} & (2-i)e^{(1-i)t} \\ e^{it} & e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$, da cui $e^{tA} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} & (2-i)e^{(1-i)t} \\ e^{it} & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1+2i}{5} \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} & (2-i)e^{(1-i)t} \\ e^{it} & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(2-i) \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$.

Prima di procedere con altri casi particolari, è opportuno precisare fin d'ora il caso dei sistemi reali, ovvero dei $y' = Ay$ in cui A è una matrice a coefficienti reali. In tal caso la matrice esponenziale e^{tA} sarà ovviamente reale, così come sarà reale la soluzione di un problema di Cauchy con dato iniziale reale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ (possiamo anzi già dire che tale soluzione sarà, come sappiamo, $y(t) = e^{tA}y_0$). Tuttavia gli autovalori di A potrebbero essere complessi, con autovettori complessi, dunque bisogna precisare come fare, alla fine dei calcoli, a rientrare nel caso reale.

Caso dei sistemi reali

Proposizione 5.2.4. Se A è una matrice reale e $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A con autovettore $v \in \mathbb{C}^n$, allora anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore di A della stessa molteplicità di λ , e $\bar{v}$ è un suo autovettore.

Dimostrazione. Coniugando ambo i membri di $Av = \lambda v$ si ottiene $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$. Ora, poiché $\overline{A} = A$ vale $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v} = A\overline{v}$, mentre $\overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$: pertanto si ottiene $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, ovvero anche $\overline{\lambda}$ è un autovalore di A , e $\overline{v}$ è un suo autovettore. Quanto alla molteplicità, l'equazione caratteristica $\det(\tau \mathbf{1}_n - A) = 0$ è polinomiale a coefficienti reali, e dunque, se λ è un autovalore non reale, nella decomposizione in fattori lineari complessi il fattore $(\tau - \lambda)^m$ dovrà essere bilanciato dal fattore $(\tau - \overline{\lambda})^m$, di modo che il prodotto dei due risulti il polinomio reale $(\tau - (2 \operatorname{Re} \lambda)\tau + |\lambda|^2)^m$. $\square$

Dato un sistema $y' = Ay$ con A matrice reale, da una famiglia di soluzioni del tipo $e^{\lambda t} v$ ove λ è un autovalore reale per A con autovettore v possiamo ricavare una famiglia equivalente di soluzioni reali come segue.

- Se l'autovalore λ è reale (dunque anche l'autovettore v può essere scelto reale), allora la soluzione $e^{\lambda t} v$ è già reale, dunque va lasciata così com'è.
- Se invece λ non è reale, grazie alle Proposizioni 5.2.3 e 5.2.4 le funzioni $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ e $\overline{\varphi}(t) = e^{\overline{\lambda} t} \overline{v}$ sono soluzioni linearmente indipendenti di $y' = Ay$ (perché λ e $\overline{\lambda}$ sono autovalori diversi), e possiamo sostituire la coppia di soluzioni complesse $\{\varphi(t), \overline{\varphi}(t)\}$ con la coppia di soluzioni reali $\{\operatorname{Re} \varphi(t), \operatorname{Im} \varphi(t)\} = \left\{ \frac{\varphi(t) + \overline{\varphi}(t)}{2}, \frac{\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)}{2i} \right\}$, che genera lo stesso spazio di soluzioni complesse.

Esempi. (1) Il sistema $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono $\lambda = -1 + 2i$ e $\overline{\lambda} = -1 - 2i$, con autovettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ e $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \end{pmatrix}$, pertanto otteniamo le soluzioni (già sufficienti per costruire una risolvante) $\varphi(t) = e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i \end{pmatrix}$ e $\overline{\varphi}(t) = e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \end{pmatrix}$. Si ha $\varphi(t) = e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t + i(2 \sin 2t) \\ (\cos 2t + \sin 2t) + i(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$, pertanto $\varphi(t)$ e $\overline{\varphi}(t)$ possono essere sostituite dalle soluzioni reali $\operatorname{Re} \varphi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$ e $\operatorname{Im} \varphi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$, con le quali si può costruire una risolvante reale. (2) Il sistema $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y + 3z \\ z' = -z \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono $\lambda = 2 + i$, $\overline{\lambda} = 2 - i$ e $\mu = -1$, con autovettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. La soluzione $\psi(t) = e^{-t} w = \begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ 5e^{-t} \\ -4e^{-t} \end{pmatrix}$ è già reale; invece la soluzione complessa $\varphi(t) = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i \sin t) \\ e^{2t}(\sin t - i \cos t) \\ 0 \end{pmatrix}$ ha parte reale $\operatorname{Re} \varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ e parte immaginaria $\operatorname{Im} \varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \sin t \\ -e^{2t} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, due soluzioni reali che possono sostituire $\{\varphi(t), \overline{\varphi}(t)\}$.

- Le considerazioni fatte in precedenza per una matrice A con n autovalori distinti possono essere usate anche nella situazione più generale in cui A , pur non avendo necessariamente autovalori tutti distinti tra loro, *abbia comunque n autovettori linearmente indipendenti* (in altre parole, quando A sia *diagonalizzabile*).

Esempio. Il sistema $\begin{cases} x' = 8x - 3y + 6z \\ y' = 6x - y + 6z \\ z' = -6x + 3y - 4z \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. L'equazione caratteristica $\det(\tau \mathbf{1}_3 - A) = 0$ dà gli autovalori -1 (semplice) e 2 (doppio). Un autovettore relativo a -1 risulta $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre $w' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono due autovettori

indipendenti relativi a 2: ne segue che la matrice $P = (v, w', w'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalizza A , ovvero $A = PJP^{-1}$ con $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Essendo $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ ricaviamo $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^{-t} & -e^{2t} + e^{-t} & 2(e^{2t} - e^{-t}) \\ 2(e^{2t} - e^{-t}) & e^{-t} & 2(e^{2t} - e^{-t}) \\ -2(e^{2t} - e^{-t}) & e^{2t} - e^{-t} & -e^{2t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$ (si noti che per $t = 0$ si ottiene la matrice identica). Alternativamente, una risolvete per il sistema è $\Phi(t) = (e^{-t}v, e^{2t}w', e^{2t}w'') = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 2e^{2t} \\ -e^{-t} & e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$, e si ritrova $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ (in effetti $\Phi(t) = Pe^{tJ}$, in particolare $\Phi(0) = P$, da cui $\Phi(t)\Phi(0)^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1} = e^{tA}$).

- Supponiamo ora che la matrice A abbia *un solo autovalore* $\lambda \in \mathbb{C}$ di molteplicità n : dopo quello diagonalizzabile, questo è il secondo caso trattabile con relativa facilità. Il prototipo di questa situazione è quello di una matrice triangolare superiore del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{1}_n + N \quad \text{con} \quad N = A - \lambda \mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ove al posto di $*$ ci possono essere numeri complessi qualsiasi. Il punto importante da osservare è che la matrice N , che è strettamente triangolare superiore, è evidentemente nilpotente⁽¹⁰³⁾; in realtà ciò accade anche quando A non è triangolare superiore, come mostra il ragionamento che segue.

La prima osservazione è che se A ha un solo autovalore λ di molteplicità n , allora $N = A - \lambda \mathbf{1}_n$ ha solo autovalori nulli.⁽¹⁰⁴⁾ Ma a questo punto va ricordato che:

Proposizione 5.2.5. *Una matrice è nilpotente se e solo se ha solo autovalori nulli.*

Dimostrazione. Se una matrice nilpotente $N \in M_n(\mathbb{C})$ avesse un autovalore non nullo μ , detto v un autovettore relativo a μ , per ogni $r \in \mathbb{N}$ si avrebbe $N^r v = \mu^r v \neq 0$, il che sarebbe assurdo (appunto perché N è nilpotente, e dunque $N^r = \mathbf{0}_n$ per ogni $r \geq n$). Viceversa, se $N \in M_n(\mathbb{C})$ ha tutti gli autovalori nulli allora per la teoria di Jordan essa è simile a una matrice T strettamente triangolare superiore, ovvero si ha $N = PTP^{-1}$ per una matrice invertibile P : ma allora, poiché (come osservato poco fa) si ha $T^n = \mathbf{0}_n$, segue che $N^n = (PTP^{-1})(PTP^{-1}) \cdots (PTP^{-1}) = PT^n P^{-1} = P \mathbf{0}_n P^{-1} = \mathbf{0}_n$, in altre parole N è nilpotente. $\square$

Dunque $N = A - \lambda \mathbf{1}_n$ è nilpotente; inoltre le matrici $\lambda \mathbf{1}_n$ e N commutano tra loro⁽¹⁰⁵⁾, dunque per la Proposizione 5.2.1(i-ii-iv) possiamo dire che

$$e^A = e^{\lambda \mathbf{1}_n + N} = e^{\lambda \mathbf{1}_n} e^N = e^\lambda (\mathbf{1}_n + N + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} N^{n-1}). \quad (106)$$

⁽¹⁰³⁾ Infatti ad ogni potenza di N i coefficienti non nulli stanno su diagonalì sempre più alte, così che certamente $N^n = \mathbf{0}_n$.

⁽¹⁰⁴⁾ Infatti il polinomio caratteristico di A è $\det(\tau \mathbf{1}_n - A) = (\tau - \lambda)^n$, pertanto quello di N è $\det(\tau \mathbf{1}_n - N) = \det((\tau + \lambda) \mathbf{1}_n - A) = ((\tau + \lambda) - \lambda)^n = \tau^n$, da cui quanto asserito.

⁽¹⁰⁵⁾ Questo è chiaro, perché $\lambda \mathbf{1}_n$ è una matrice scalare e dunque commuta con ogni altra matrice.

⁽¹⁰⁶⁾ In particolare, se A è triangolare superiore, poiché anche $e^A = e^\lambda (\mathbf{1}_n + N + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} N^{n-1})$ risulta

Ai nostri scopi, finalizzati soprattutto alla risoluzione dei sistemi differenziali, possiamo notare che quanto detto resta valido anche dopo aver moltiplicato le matrici per t , dunque

$$e^{tA} = e^{t\lambda \mathbf{1}_n + tN} = e^{t\lambda \mathbf{1}_n} e^{tN} = e^{t\lambda} (\mathbf{1}_n + tN + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} N^{n-1}).$$

Esempi. (1) Il sistema $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. L'unico autovalore di A è $\lambda = -3$ (di molteplicità 2), pertanto $N = A - (-3)\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ è nilpotente di indice ≤ 2 (cioè $N^2 = 0$) e si ha $e^{tA} = e^{-3t}(1 + tN) = e^{-3t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t & -4t \\ 4t & -4t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (1+4t)e^{-3t} & -4te^{-3t} \\ 4te^{-3t} & (1-4t)e^{-3t} \end{pmatrix}$. (2) Il sistema $\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 4x + 2y + z \\ z' = z - x \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'unico autovalore di A è $\lambda = 2$ (di molteplicità 3), pertanto $N = A - 2\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è nilpotente di indice ≤ 3 (cioè $N^3 = 0$) e si ha $e^{tA} = e^{2t}(1 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & t \\ 4t & 0 & t \\ -t & 0 & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & \frac{3}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ (4t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} & e^{2t} & (t+\frac{3}{2}t^2)e^{2t} \\ -te^{2t} & 0 & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$.

- Occupiamoci infine del caso generale, in cui vi siano almeno due autovalori distinti e l'operatore non sia diagonalizzabile. Un principio da tener presente è che se un sottospazio $V \subset \mathbb{C}^n$ è *invariante* per l'operatore espresso da A (cioè se $AV \subset V$, ovvero se $Av \in V$ per ogni $v \in V$) allora esso resta invariante anche per l'operatore espresso da e^{tA} ,⁽¹⁰⁷⁾ e dunque la porzione della matrice esponenziale relativa a V può essere calcolata restando nello spazio più piccolo V . Diventa dunque importante riuscire a decomporre $\mathbb{C}^n$ in sottospazi invarianti per l'operatore, ovvero individuare un cambio di base nel quale la matrice che lo esprime è in forma a blocchi diagonali

$$B = \begin{pmatrix} B_{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{a_k} \end{pmatrix}$$

ove B_{a_j} è una matrice quadrata di ordine a_j e $a_1 + \cdots + a_k = n$, forma nella quale è evidente che i k sottospazi $V_j = \langle e_{a_1+\cdots+a_{j-1}+1}, \dots, e_{a_1+\cdots+a_{j-1}+a_j} \rangle$ (per $j = 1, \dots, k$) sono invarianti per l'operatore. Particolare rilievo avrebbe il portare l'operatore in forma canonica di Jordan, nella quale ciascun blocco è della forma

Forma canonica di Jordan

$$(5.8) \quad B_{a_j} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

triangolare superiore con tutti e^λ sulla diagonale, vale

$$(5.7) \quad \det e^A = e^{n\lambda}.$$

⁽¹⁰⁷⁾ Infatti la ridotta r -esima $e_{(r)}^{tA} = \mathbf{1}_n + tA + \cdots + \frac{1}{r!} t^r A^r$ manda ancora V in se stesso, e questo vale anche per l'operatore limite e^{tA} , in quando V è chiuso.

che è una forma triangolare superiore estremamente semplificata ed efficiente, le cui componenti sono uno stesso λ sulla diagonale, degli 1 nella diagonale appena sopra e degli 0 altrove, situazione alla quale si può applicare a ciascun sottospazio V_j quanto detto poco fa nel caso di un unico autovalore. I punti essenziali di un procedimento che porta l'operatore a una forma a blocchi diagonali (ed eventualmente, con una scelta accurata delle basi di ciascuno spazio invariante, alla stessa forma canonica di Jordan: per maggiori dettagli rimandiamo a un testo di algebra lineare) sono i seguenti:

- siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori, di molteplicità $a_1, \dots, a_k$ con $a_1 + \dots + a_k = n$;
- definito $V(\lambda_j) = \ker(A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j} = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j} v = 0\}$, si ha $\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$, e ciascun $V(\lambda_j)$ è invariante per l'operatore A ; ⁽¹⁰⁸⁾
- su ciascun sottospazio $V(\lambda_j)$ l'operatore A agisce come $\lambda_j \mathbf{1}_{V(\lambda_j)} + N_j$ ove N_j è nilpotente, e si può applicare quanto detto nel caso di un unico autovalore.

Ricapitolando, la strategia a partire da A diventa dunque la seguente:

- individuare una base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{C}^n$ nella quale l'operatore associato ad A si esprime in una forma matriciale favorevole B come descritto sopra (ad esempio, meglio di tutte, nella forma canonica di Jordan);
- detta P la matrice invertibile costruita con i vettori-colonna v_j (che rappresenta dunque il cambio di base opportuno per passare da A a B) si avrà $A = PBP^{-1}$;
- una volta calcolata la matrice esponenziale e^{tB} (compito abbordabile, come appena spiegato sopra), usando la Proposizione 5.2.1(vi) si avrà $e^{tA} = P e^{tB} P^{-1}$.

Esempio. Il sistema $\begin{cases} x' = -8x - 11y + 6z \\ y' = 5x + 8y - 5z \\ z' = -x - y - z \end{cases}$ corrisponde a $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} -8 & -11 & 6 \\ 5 & 8 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. L'equazione caratteristica $\det(\tau \mathbf{1}_3 - A) = 0$ dà gli autovalori -2 (doppio) e 3 (semplice). Per il sottospazio $V(-2)$ si calcola che $(A - (-2)_j \mathbf{1}_2)^2 = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 6 \\ 5 & 10 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -25 & -50 & 25 \\ 25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dunque $V(-2) = \ker(A - (-2)_j \mathbf{1}_2)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \right\}$ è generato ad esempio da $w' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; quanto a $V(3)$, esso sarà di dimensione 1, generato dall'autovettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Posto allora $Q = (w', w'', v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (da cui $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$), già sappiamo che si avrà $A = QBQ^{-1}$ con B matrice a blocchi relativi agli autospazi generalizzati, e infatti il conto dà $B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il blocco $B_{-2} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha, come già sappiamo, l'autovalore -2 doppio: pertanto $N_{-2} = B_{-2} - (-2)\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è nilpotente, e $e^{tB_{-2}} = e^{-2t}(\mathbf{1}_2 + tN_{-2}) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-2t} & -te^{-2t} \\ te^{-2t} & (1+t)e^{-2t} \end{pmatrix}$, così $e^{tB} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ te^{-2t} & (1+t)e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. Da $A =$

⁽¹⁰⁸⁾ $V(\lambda_j)$ è detto *autospatio generalizzato* relativo a λ_j , e contiene ovviamente l'autospazio relativo a λ_j (ovvero i λ_j -autovettori, che sono $\ker(A - \lambda_j \mathbf{1}_n)$). Il fatto poi che ciascun $V(\lambda_j)$ sia invariante per l'operatore A si nota come segue: dato $v \in V(\lambda_j)$, ovvero un $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $(A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j} v = 0$, poiché gli operatori $(A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j}$ e A commutano tra loro (infatti il primo è combinazione lineare di potenze di A) si ha che $(A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j}(Av) = A((A - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{a_j}v) = A0 = 0$, dunque anche $Av \in V(\lambda_j)$.

QBQ^{-1} ricaviamo allora $e^{tA} = Q e^{tB} Q^{-1} = \begin{pmatrix} (2-t)e^{-2t} - e^{3t} & (2-t)e^{-2t} - 2e^{3t} & (t-1)e^{-2t} + e^{3t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & -e^{-2t} + 2e^{3t} & e^{-2t} - e^{3t} \\ -te^{-2t} & -te^{-2t} & (t+1)e^{-2t} \end{pmatrix}$.

• Alternativamente, una volta determinato $V(-2)$, se anziché scegliere come sua base w' e w'' seguiamo il procedimento per determinare la forma canonica di Jordan notiamo che l'autospazio riferito a -2 (ovvero $\ker(A - (-2)_j \mathbf{1}_2) \subset V(-2)$) è di dimensione 1, con autovettore $u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; cercando poi un $u'' \in V(-2)$ tale che $Au'' = u' + (-2)u''$ (ovvero $(A - (-2)_j \mathbf{1}_2)u'' = u'$) si ottiene $u'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Scegliendo allora per $\mathbb{C}^3 = V(-2) \oplus V(3)$ la base $\{u', u'', v\}$, la matrice dell'operatore sarà $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, che è in forma canonica di Jordan, e, posto $P = (u', u'', v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (da cui $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$), già sappiamo che si avrà $A = PJP^{-1}$. Il blocco $J_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha esponenziale $e^{tJ_{-2}} = e^{-2t}(\mathbf{1}_2 + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$, così $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$: e da $A = PJP^{-1}$ ricaviamo $e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}$, che torna come sopra.

Quanto detto finora riguarda la risoluzione del sistema lineare omogeneo (5.6) $y' = Ay$. Circa invece il sistema non omogeneo (5.5) $y' = Ay + b(t)$, resta sempre valido il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (Proposizione 5.1.1(4)), che, nel caso in cui la risolvente $\Phi(t)$ sia proprio la matrice esponenziale e^{tA} , fornisce come soluzione del problema di Cauchy (4.1) con $y(t_0) = y_0$ la seguente formula:

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} b(\tau) d\tau.$$

Poiché tuttavia i conti possono risultare piuttosto faticosi, può essere utile individuare un metodo pratico per trovare una soluzione particolare del problema non omogeneo, perlomeno in alcuni casi particolari. Iniziamo dalla situazione più semplice.

Proposizione 5.2.6. *Sia dato il sistema non omogeneo $y' = Ay + e^{\lambda t}v$, ove $v \in \mathbb{C}^n$ è un vettore costante. Se λ non è autovalore di A , allora il sistema ha una e una sola soluzione del tipo $e^{\lambda t}u$ per un certo vettore costante $u \in \mathbb{C}^n$ da determinare.*

Dimostrazione. Imponendo che $e^{\lambda t}u$ sia soluzione di $y' = Ay + e^{\lambda t}v$ si ottiene $\lambda e^{\lambda t}u = A e^{\lambda t}u + e^{\lambda t}v$, da cui $(\lambda \mathbf{1}_n - A)u = v$: essendo $\lambda \mathbf{1}_n - A$ per ipotesi invertibile (perché λ non è autovalore di A), si determina $u = (\lambda \mathbf{1}_n - A)^{-1}v$. $\square$

Esempi. (1) Determiniamo l'integrale generale del sistema $\begin{cases} x' = x + e^{2t} \\ y' = -2x + y + e^{-3t} \end{cases}$, che si può interpretare come $y' = Ay + b_1(t) + b_2(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b_2(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice A è $\mathbf{1}_2 + N$ con $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, dunque si calcola facilmente $e^{tA} = e^t(\mathbf{1}_2 + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -2te^t & e^t \end{pmatrix}$. Poiché $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ non sono autovalori di A (che ha autovalore doppio 1), per la Proposizione 5.2.6 due soluzioni particolari per $b_1(t)$ e $b_2(t)$ saranno rispettivamente del tipo $e^{2t}u_1$ e $e^{-3t}u_2$ per certi vettori costanti $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^2$, e i calcoli danno $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$: pertanto l'integrale generale del sistema dato è $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x(t) = a_1 e^{-t} + e^{2t} \\ y(t) = -2ta_1 e^{-t} + a_2 e^t - 2e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \end{cases}$

al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. **(2)** (*Trasformatore*)⁽¹⁰⁹⁾ Un trasformatore è un apparecchio utilizzato lungo una linea di alimentazione per variare il valore della tensione e della corrente. Nella sua struttura più classica esso è costituito da due avvolgimenti elettrici su un comune nucleo (tipicamente un anello ferromagnetico), detti rispettivamente “avvolgimento primario” (per la tensione in entrata) e “secondario” (per quella in uscita); schematicamente esso può essere rappresentato da due circuiti RL, uno dei due (il primario) munito un generatore di corrente alternata, accoppiati da una mutua induttanza (Figura 5.1). È noto che le intensità di corrente $x(t)$ e $y(t)$ in funzione del tempo t nei due circuiti obbediscono a un

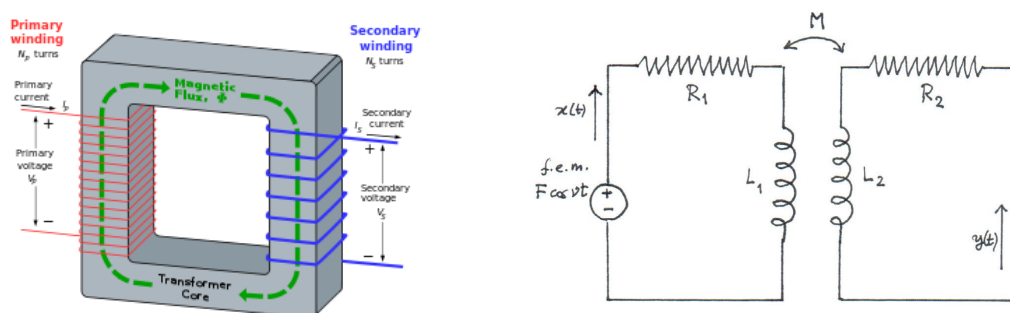


Figura 5.1: Un trasformatore, e sua rappresentazione schematica.

sistema lineare non omogeneo del tipo $\begin{cases} L_1 \dot{x} + M \dot{y} + R_1 x = F \cos \nu t \\ M \dot{x} + L_2 \dot{y} + R_2 y = 0 \end{cases}$, ove $L_1, L_2 > 0$ e $R_1, R_2 > 0$ sono rispettivamente i coefficienti di autoinduzione magnetica e le resistenze di ciascun circuito, M è il coefficiente di mutua induzione e $F \cos \nu t$ è una forza elettromotrice alternata presente nel primario. Considerazioni fisiche⁽¹¹⁰⁾ implicano che il determinante $\Delta = L_1 L_2 - M^2$ della matrice dei coefficienti delle derivate è > 0 , dunque si può esplicitare il sistema rispetto alle derivate ottenendo $\dot{Y} = AY + b(t)$ ove $Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -R_1 L_2 & MR_1 \\ MR_2 & -R_2 L_1 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} FL_2 \\ -FM \end{pmatrix} \cos \nu t$. Poiché $b(t)$ è la parte reale di $\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} FL_2 \\ -FM \end{pmatrix} e^{i\nu t}$ verrebbe spontaneo cercare una soluzione particolare del sistema del tipo $\tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{i\nu t}$ (ove $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$) per poi prenderne la parte reale, ma ne esiste una così? Il buonsenso (detto familiarmente in questo caso “regola dell’elettrotecnico”) dice di sì, perché i circuiti senza generatore (la parte omogenea del sistema) hanno soluzioni smorzate, cioè la matrice A deve avere autovalori con parte reale strettamente negativa e dunque tra essi non può esserci $i\nu$ (che ha parte reale nulla); ma ciò è vero anche nel modello matematico, perché l’equazione caratteristica $\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (con $a = \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{\Delta}$ e $b = \frac{R_1 R_2}{\Delta}$) ha radici con parte reale strettamente negativa (in quanto $a, b > 0$)⁽¹¹¹⁾. Imponendo dunque che $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{i\nu t}$ sia soluzione si ottiene $\begin{cases} L_1 i\nu x_0 + M i\nu y_0 + R_1 x_0 = F \\ M i\nu x_0 + L_2 i\nu y_0 + R_2 y_0 = 0 \end{cases}$, da cui $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =$

⁽¹⁰⁹⁾ Esempio tratto dal testo *Sistemi dinamici* di Andrea Milani e Giacomo Mazzini; consultabile nel sito <http://adams.dm.unipi.it/~milani/dinsis/dinsis.html>.

⁽¹¹⁰⁾ Si tratta essenzialmente (per maggiori informazioni rimandiamo a un testo di Fisica o di Elettrotecnica) della positività dell’energia magnetica immagazzinata nel trasformatore, una forma di dispersione inevitabile nella realtà (si parla di “circuiti non perfettamente accoppiati”); analogamente, il “coefficiente di accoppiamento” $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ deve soddisfare a $|k| < 1$. Il rendimento massimo si otterrebbe nel caso del “trasformatore ideale” in cui $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ e non c’è dispersione (si parla in questo caso di “circuiti perfettamente accoppiati”).

⁽¹¹¹⁾ Si tratta in realtà di due radici reali negative, perché il discriminante dell’equazione è $\frac{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 4R_1 R_2 M^2}{\Delta^2} > 0$ e dunque risulta $\lambda_{\pm} = \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm \sqrt{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 4R_1 R_2 M^2}}{2\Delta} < 0$.

$$\begin{pmatrix} L_1 i\nu + R_1 & M i\nu \\ M i\nu & L_2 i\nu + R_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_2 i\nu + R_2}{(R_1 R_2 - \nu^2 \Delta) + i\nu(R_2 L_1 + R_1 L_2)} F \\ -\frac{M i\nu}{(R_1 R_2 - \nu^2 \Delta) + i\nu(R_2 L_1 + R_1 L_2)} F \end{pmatrix} \text{ (poi va presa la parte reale di } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{i\nu t} \text{)}.$$

Più in generale rispetto alla Proposizione 5.2.6, possiamo considerare la situazione in cui $b(t)$ sia nella forma di un *quasi-polinomio* che potrebbe eventualmente contenere anche termini “risonanti”, ovvero esponenziali dati da autovalori di A .

Proposizione 5.2.7. *Si assuma che $b(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$ e certi polinomi $p_1(t), \dots, p_n(t)$ di grado $\leq d$. Detta $m \geq 0$ la molteplicità di λ come autovalore di A , esiste una soluzione particolare di $y' = Ay + b(t)$ del tipo $\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ per certi polinomi $q_1(t), \dots, q_n(t)$ di grado $\leq d + m$ da determinare (non unici se $m \geq 1$).*

Dimostrazione. Omessa. $\square$

Va anche aggiunto che nel caso di sistema a coefficienti reali e termine $b(t)$ reale si potrebbe evidenziare una soluzione particolare reale: per questo rimandiamo a quanto verrà detto tra breve per le equazioni lineari scalari di ordine n a coefficienti costanti (Proposizione 5.2.10(ii)).

Esercizio. *Trovare le soluzioni del sistema $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 1 \\ y' = x - y + t \end{cases}$, e quella con $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Risoluzione. Gli autovalori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono -2 e 3 , con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$: ne ricaviamo subito che una risolvete del sistema omogeneo è $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 4e^{3t} \\ -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$, e la matrice esponenziale è $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 4e^{3t} & -4e^{-2t} + 4e^{3t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{pmatrix}$. Per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare del sistema non omogeneo è del tipo $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} e^{-t} \begin{pmatrix} e^{3t} & -4e^{3t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4t+1}{5} e^{2t} \\ \frac{t-1}{5} e^{-3t} \end{pmatrix}$, da cui $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-4t}{45} e^{2t} \\ -\frac{3t-2}{45} e^{-3t} \end{pmatrix}$: ne ricaviamo che $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 4e^{3t} \\ -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-4t}{45} e^{2t} \\ -\frac{3t-2}{45} e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-12t}{6t-18} \\ \frac{6t-1}{18} \end{pmatrix}$. (All'identico risultato si sarebbe arrivati cercando, come suggerito nella Proposizione 5.2.7, una soluzione particolare del tipo $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$.) La soluzione generale è dunque $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-2t} + 4a_2 e^{3t} + \frac{5-12t}{6t-18} \\ -a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t} + \frac{6t-1}{18} \end{pmatrix}$ per $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, e la condizione $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + \frac{5}{18} \\ -a_1 + a_2 - \frac{1}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dà $(a_1, a_2) = (-\frac{11}{10}, -\frac{2}{45})$.

Esercizio. *Trovare l'integrale generale del sistema $\begin{cases} x' = 2y - x + (t+1)e^t + 2 \\ y' = 3y - 2x - t^2 \end{cases}$.*

Risoluzione. L'unico autovalore di $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ è 1 , dunque $N = A - \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ è nilpotente e si ha $e^{tA} = e^t(\mathbf{1}_2 + tN) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^t & 2te^t \\ -2te^t & (1+2t)e^t \end{pmatrix}$. Per il problema non omogeneo conviene poi pensare a $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ con $b_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$ e $b_2(t) = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, e usare la Proposizione 5.2.7. Per $b_1(t)$ si potrà trovare un'unica soluzione particolare del tipo $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{y}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + ft + g \end{pmatrix}$, che imponendo sia soluzione del sistema con $b_1(t)$ dà $\begin{cases} 2at + b = 2(dt^2 + ft + g) - (at^2 + bt + c) + 2 \\ 2dt + f = 3(dt^2 + ft + g) - 2(at^2 + bt + c) - t^2 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} 0 = 2d - a, & 2a = 2f - b, & b = 2g - c + 2 \\ 0 = 3d - 2a - 1, & 2d = 3f - 2b, & f = 3g - 2c \end{cases}$, ovvero $(a, b, c, d, f, g) = (-2, -8, -18, -1, -6, -14)$, ovvero la soluzione $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{y}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^2 - 8t - 18 \\ -t^2 - 6t - 14 \end{pmatrix}$. Quanto a $b_2(t)$, bisogna notare che $\lambda = 1$ è autovalore doppio per

A , dunque si potrà trovare una (non unica) soluzione del tipo $\begin{pmatrix} \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at^3 + bt^2 + ct + d)e^t \\ (ft^3 + gt^2 + ht + l)e^t \end{pmatrix}$, che imponendo sia soluzione del sistema con $b_2(t)$ dovrebbe dare $(a, b, c, d, f, g, h, l) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, c, d, -\frac{1}{3}, -1, c - 1, d + \frac{1}{2}(c - 1))$ con $c, d \in \mathbb{C}$ arbitrari: scegliendo ad esempio $c = 1$ e $d = 0$ si ottiene $\begin{pmatrix} \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t)e^t \\ (-\frac{1}{3}t^3 - t^2)e^t \end{pmatrix}$. L'integrale generale risulta così $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{y}_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x(t) = ((1 - 2t)a_1 + 2ta_2)e^t + (-2t^2 - 8t - 18) + (-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t)e^t \\ y(t) = (-2ta_1 + (1 + 2t)a_2)e^t + (-t^2 - 6t - 14) + (-\frac{1}{3}t^3 - t^2)e^t \end{cases}$, al variare di $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Esercizio. Dato il sistema $\begin{cases} x' = 2z \\ y' = x - y - 2t \\ z' = y \end{cases}$, determinarne una risolvante per il sistema omogeneo associato; trovare poi la soluzione generale, e quella con $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Risoluzione. Gli autovalori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono 1 e $-1 \pm i$; un autovettore per 1 è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e uno per $-1 + i$ è $\begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -1 - i \end{pmatrix}$, da cui la risolvante $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & -2e^{-t} \sin t & 2e^{-t} \cos t \\ e^t & 2e^{-t} \cos t & 2e^{-t} \sin t \\ e^t & -e^{-t}(\cos t - \sin t) & -e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$ per il sistema omogeneo associato (le ultime due colonne sono parte reale e immaginaria di $e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ -1 - i \end{pmatrix}$).

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo è data da $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)c(t)$ con $c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t) = -\frac{1}{10e^{-t}} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & -2e^{-2t} & -4e^{-2t} \\ \cos t + 3 \sin t & -4 \cos t - 2 \sin t & 2 \cos t - 4 \sin t \\ -3 \cos t + \sin t & 2 \cos t - 4 \sin t & 4 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5} \begin{pmatrix} t e^{-t} \\ t e^t(2 \cos t + \sin t) \\ -t e^t(\cos t - 2 \sin t) \end{pmatrix}$, che dà $c(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(t+1)e^{-t} \\ -\frac{1}{5}e^t((t+1)\cos t + (3t-2)\sin t) \\ \frac{1}{5}e^t((3t-2)\cos t - (t+1)\sin t) \end{pmatrix}$, da cui risulta $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)c(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; in questo caso era però nettamente più semplice cercare una soluzione particolare della forma $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ ft + g \end{pmatrix}$, che imponendo sia soluzione del sistema completo dà $(a, b, c, d, f, g) = (2, 0, 0, 0, 0, 1)$ (la stessa di prima). La soluzione generale è perciò $\begin{cases} x = 2Ae^t - 2Be^{-t} \sin t + 2Ce^{-t} \cos t + 2t \\ y = Ae^t + 2Be^{-t} \cos t + 2Ce^{-t} \sin t \\ z = Ae^t - Be^{-t}(\cos t - \sin t) - Ce^{-t}(\cos t + \sin t) + 1 \end{cases}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$. Chiedendo infine che $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si determina $(A, B, C) = (\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{9}{10})$.

Per finire, esaminiamo l'equazione lineare scalare di ordine n a coefficienti costanti

$$(5.9) \quad y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta(t),$$

ove $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ e $\beta: I \rightarrow \mathbb{C}$, che, posto $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$, corrisponde al sistema del primo ordine a coefficienti costanti $z' = Az + b(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & & \dots & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Il polinomio

$$P(\tau) = \tau^n + \alpha_{n-1}\tau^{n-1} + \dots + \alpha_1\tau + \alpha_0,$$

ottenuto sostituendo formalmente la derivata j -esima $y^{(j)}$ con la potenza τ^j , è detto *polinomio caratteristico* dell'equazione (5.9).

**Polinomio
caratteristico**

Proposizione 5.2.8. Vale $\det(\tau \mathbf{1}_n - A) = P(\tau)$; in particolare, l'equazione caratteristica per il sistema $z' = Az + b(t)$ coincide con quella data dal polinomio caratteristico.

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che

$$\det(\tau \mathbf{1}_n - A) = \det \begin{pmatrix} \tau & -1 & 0 & & \\ & \tau & -1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_0 & & & \tau & -1 \\ & & & \cdots & \tau + \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = P(\tau).$$

Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 1$ la matrice diventa $(\tau + \alpha_0)$, e la conclusione è vera. Nel caso generale, sviluppando il determinante secondo la prima colonna e usando l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\tau \det \begin{pmatrix} \tau & -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & \tau & -1 & \\ \alpha_1 & & \cdots & \tau + \alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1} \alpha_0 (-1)^{n-1} = \tau(\tau^{n-1} + \alpha_{n-1}\tau^{n-2} + \cdots + \alpha_2\tau + \alpha_1) + \alpha_0$$

che è uguale a $P(\tau)$, come voluto. $\square$

Per esprimere le soluzioni dell'equazione, in questo caso c'è un metodo diretto:

Proposizione 5.2.9. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici, di molteplicità $a_1, \dots, a_k$, dell'equazione caratteristica $P(\tau) = 0$, con $a_j \geq 1$ e $\sum_{j=1}^k a_j = n$.

(i) Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata a (5.9) è

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{a_1-1} e^{\lambda_1 t}; \quad e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{a_2-1} e^{\lambda_2 t}; \quad \dots; \quad e^{\lambda_k t}, \dots, t^{a_k-1} e^{\lambda_k t}.$$

(ii) Per determinare una soluzione particolare $\tilde{y}(t)$ dell'equazione completa (5.9) si può usare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (Proposizione 5.1.2(4)).

Tuttavia, se il termine non omogeneo è del tipo $\beta(t) = A(t)e^{\gamma t}$ con $A(t)$ polinomio complesso e $\gamma \in \mathbb{C}$, detta $m \in \{0, \dots, n\}$ la molteplicità di γ come soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare di (5.9) è del tipo $\tilde{y}(t) = t^m B(t)e^{\gamma t}$ ove $B(t)$ è un polinomio complesso da determinare, di grado uguale a quello di $A(t)$.

Dimostrazione. Omessa (quella di (i) sarebbe curiosa e non molto difficile, ma piuttosto lunga e tecnica; (ii) potrebbe essere tratta dalla Proposizione 5.2.7). $\square$

Come per i sistemi lineari, nel caso reale si possono cercare soluzioni reali.

Proposizione 5.2.10. Si assuma che l'equazione (5.9) abbia coefficienti reali, e le soluzioni di $P(\tau) = 0$ siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ reali di molteplicità $a_1, \dots, a_r$, e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ non reali (con $\mu_\ell = \xi_\ell + i\eta_\ell$) di molteplicità $b_1, \dots, b_s$, ove $a_j, b_\ell \geq 1$ e $\sum_{j=1}^r a_j + 2 \sum_{\ell=1}^s b_\ell = n$.

(i) Un sistema fondamentale di soluzioni reali dell'omogenea è ottenuto come segue:

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{a_1-1} e^{\lambda_1 t}; \\ \vdots$$

$$\begin{aligned}
 & e^{\lambda_k t}, \quad \dots, \quad t^{a_k-1} e^{\lambda_k t}; \\
 & e^{\xi_1 t} \cos(\eta_1 t), \quad e^{\xi_1 t} \sin(\eta_1 t), \quad \dots, \quad t^{b_1-1} e^{\xi_1 t} \cos(\eta_1 t), \quad t^{b_1-1} e^{\xi_1 t} \sin(\eta_1 t); \\
 & \vdots \\
 & e^{\xi_s t} \cos(\eta_s t), \quad e^{\xi_s t} \sin(\eta_s t), \quad \dots, \quad t^{b_s-1} e^{\xi_s t} \cos(\eta_s t), \quad t^{b_s-1} e^{\xi_s t} \sin(\eta_s t). \quad (112)
 \end{aligned}$$

(ii) Se il termine non omogeneo è una funzione reale del tipo $\beta(t) = e^{ut}(P(t) \cos vt + Q(t) \sin vt)$, per certi $u, v \in \mathbb{R}$ e polinomi reali $P(t)$ e $Q(t)$, detta m la molteplicità di $u+iv$ come soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione completa è del tipo $\tilde{y}(t) = t^m e^{ut}(R(t) \cos vt + S(t) \sin vt)$ ove R e S sono polinomi reali da determinare, di grado al più uguale al massimo tra i gradi di P e Q .

Dimostrazione. (i) Nelle soluzioni della famiglia fondamentale della Proposizione 5.2.9(i), la coppia $\{\varphi(t) = t^j e^{\mu_\ell t}, \bar{\varphi}(t) = t^j e^{\bar{\mu}_\ell t}\}$ può essere sostituita da $\{\operatorname{Re} \varphi(t) = t^j e^{\xi_\ell t} \cos(\eta_\ell t), \operatorname{Im} \varphi(t) = t^j e^{\xi_\ell t} \sin(\eta_\ell t)\}$ per ogni $\ell = 1, \dots, s$ e ogni $j = 0, \dots, b_\ell - 1$. (ii) Applicando la Proposizione 5.2.9(ii) prima con $\beta_1(t) = P(t) e^{(u+iv)t}$ e poi con $\beta_2(t) = Q(t) e^{(u+iv)t}$ si trovano due soluzioni particolari $\tilde{y}_1(t) = t^m B_1(t) e^{(u+iv)t}$ e $\tilde{y}_2(t) = t^m B_2(t) e^{(u+iv)t}$: allora $\tilde{y}(t) = \operatorname{Re} \tilde{y}_1(t) + \operatorname{Im} \tilde{y}_2(t)$ è una soluzione particolare per $\beta(t) = \operatorname{Re} \beta_1(t) + \operatorname{Im} \beta_2(t)$ che ha le caratteristiche descritte. $\square$

Esercizio. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali nell'incognita $y(x)$:

(1) $y'' + 2y' + 5y = 10x + e^{-x} \cos 2x$; (2) $y'' - y' - 2y = \frac{3}{e^x+1} - 2x^2$; (3) $y''' + iy = 2 \cos x + 3x - e^{2x}$.

Risoluzione. (1) L'equazione caratteristica $\tau^2 + 2\tau + 5 = 0$ ha radici semplici $-1 \pm 2i$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y(x) = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Una soluzione per $\beta_1(x) = 10x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax + b$, e da $\tilde{y}_1'' + 2\tilde{y}_1' + 5\tilde{y}_1 = 10x$ si ricava $2a + 5ax + 5b = 10x$, da cui $a = 2$ e $b = -\frac{2}{5}a = -\frac{4}{5}$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = 2x - \frac{4}{5}$; una soluzione per $\beta_2(x) = e^{-x} \cos 2x$ (si noti che $\lambda = -1 + 2i$ è radice semplice caratteristica) sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = x e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x)$, e da $\tilde{y}_2'' + 2\tilde{y}_2' + 5\tilde{y}_2 = e^{-x} \cos 2x$ si ricava $(a, b) = (0, \frac{1}{4})$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{4} x e^{-x} \sin 2x$. Alternativamente, notiamo che $e^{-x} \cos 2x = \operatorname{Re} e^{\lambda x}$: una soluzione particolare per $e^{\lambda x}$ è del tipo $\psi(x) = k x e^{\lambda x}$, e da $\psi''(x) + 2\psi'(x) + 5\psi(x) = e^{\lambda x}$, si ricava $k = -\frac{1}{4}i$; perciò una soluzione per $\beta_2(x) = e^{-x} \cos 2x$ sarà nuovamente $\tilde{y}_2(x) = \operatorname{Re} \psi(x) = \operatorname{Re}(-\frac{1}{4}i x e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)) = \frac{1}{4} x e^{-x} \sin 2x$. • (2) L'equazione caratteristica $\tau^2 - \tau - 2 = 0$ ha radici semplici -1 e 2 , dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y(x) = A e^{-x} + B e^{2x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Per una soluzione particolare per $\beta_1(x) = \frac{3}{e^x+1}$, usando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (Proposizione 5.1.2(4)) ce ne sarà una della forma $\tilde{y}_1(x) = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{2x}$ con $c_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{3e^x} \frac{3}{e^x+1} dx = -\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = -\log(e^x+1)$ e $c_2(x) = \int \frac{e^{-x}}{3e^x} \frac{3}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{e^{2x}(e^x+1)} dx = [\text{posto } u = e^x] \int \frac{1}{u^3(u+1)} du = \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u+1}) du = \log u + \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} - \log(u+1) = x + e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \log(e^x+1)$, da cui $\tilde{y}_1(x) = -\log(e^x+1) e^{-x} + (x + e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \log(e^x+1)) e^{2x} = x e^{2x} + e^x - (e^{-x} + e^{2x}) \log(e^x+1) - \frac{1}{2}$. Quanto invece a $\beta_2(x) = -2x^2$, ci sarà una soluzione particolare del tipo $\tilde{y}_2(x) = ax^2 + bx + c$, e imponendo che $\tilde{y}_2'' - \tilde{y}_2' - 2\tilde{y}_2 = -2x^2$ si ottiene $2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = -2x^2$, ovvero $-2ax^2 - 2(a+b)x + (2a-b-2c) = -2x^2$, da cui $(a, b, c) = (1, -1, \frac{3}{2})$, cioè $\tilde{y}_2(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}$. L'integrale generale è dato pertanto da $y(x) = A e^{-x} + B e^{2x} +$

⁽¹¹²⁾ Lo spazio $C_1 t^j e^{\xi_\ell t} \cos(\eta_\ell t) + C_2 t^j e^{\xi_\ell t} \sin(\eta_\ell t)$ (per $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) delle soluzioni reali dell'omogenea generato dalle due soluzioni reali $t^j e^{\xi_\ell t} \cos(\eta_\ell t)$ e $t^j e^{\xi_\ell t} \sin(\eta_\ell t)$ (rispettivamente parte reale e immaginaria della soluzione complessa $t^j e^{\mu_\ell t}$) viene spesso espresso anche come $A t^j e^{\xi_\ell t} \cos(\eta_\ell t + \phi)$, ove le costanti $A > 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$ da determinare si dicono rispettivamente *ampiezza* e *fase*.

$\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = A e^{-x} + (B+x) e^{2x} - (e^{-x} + e^{2x}) \log(e^x + 1) + e^x + x^2 - x + 1$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. • (3) L'equazione caratteristica $\tau^3 + i = 0$ ha come radici semplici le tre radici cubiche di $-i$, ovvero i e $\frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è $y(x) = A e^{ix} + (B e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}) e^{-ix}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$; passiamo ora alla ricerca di una soluzione particolare per l'equazione non omogenea. Per $\beta_1(x) = 2 \cos x$, notiamo che tale termine è uguale a $e^{ix} + e^{-ix}$: una soluzione per e^{ix} (notando che i è radice caratteristica semplice) sarà del tipo $k x e^{ix}$, e imponendo che soddisfi $y''' + iy = e^{ix}$ si trova $k = -\frac{1}{3}$; una soluzione per e^{-ix} sarà del tipo $h e^{ix}$, e imponendo che soddisfi $y''' + iy = e^{-ix}$ si trova $k = -\frac{i}{2}$; pertanto una soluzione particolare per $\beta_1(x) = 2 \cos x$ è $\tilde{y}_1(x) = -\frac{1}{3} x e^{ix} - \frac{i}{2} e^{-ix}$. Per $\beta_2(x) = 3x$ una soluzione particolare è del tipo $\tilde{y}_2(x) = ax + b$, e imponendo che soddisfi $y''' + iy = 3x$ si trova $i(ax + b) = 3x$, da cui $(a, b) = (-3i, 0)$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = -3ix$. Infine, per $\beta_3(x) = -e^{2x}$ una soluzione particolare è del tipo $\tilde{y}_3(x) = a e^{2x}$, e imponendo che soddisfi $y''' + iy = -e^{2x}$ si trova $a(8+i)e^{2x} = -e^{2x}$, da cui $a = -\frac{1}{8+i} = -\frac{8-i}{65}$, ovvero $\tilde{y}_3(x) = -\frac{8-i}{65} e^{2x}$. L'integrale generale è dato pertanto da $y(x) = A e^{ix} + (B e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}) e^{-ix} + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \tilde{y}_3(x) = (A - \frac{1}{3}x) e^{ix} + (B e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + C e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} - \frac{i}{2}) e^{-ix} - 3ix - \frac{8-i}{65} e^{2x}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Una delle applicazioni fondamentali delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti è nella meccanica newtoniana: in esse, tipicamente, il termine non omogeneo $\beta(t)$ rappresenta una sollecitazione esterna al sistema, come nel seguente classico esempio.

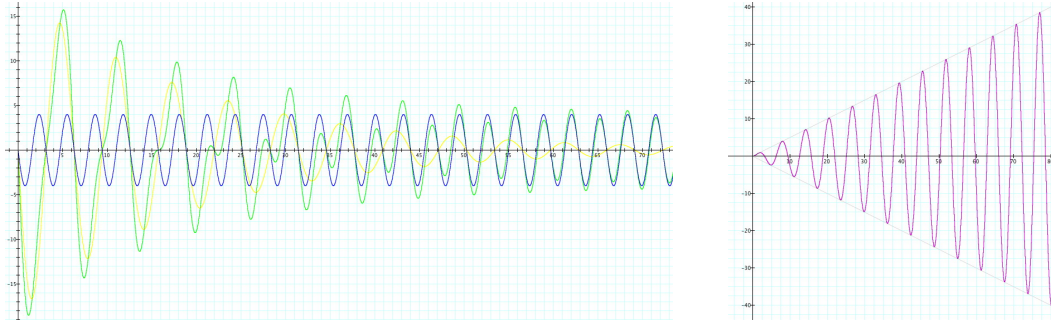


Figura 5.2: (a) Oscillazioni smorzate e forzate: regime transitorio (giallo), regime stazionario (blu) e loro somma (verde). (b) Risonanza.

Oscillazioni armoniche smorzate e forzate. Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e costante elastica k , smorzato da un attrito viscoso di coefficiente $\nu > 0$ e soggetto a una forzante esterna $F(t)$ che varia col tempo, ha la dinamica data da $m\ddot{x} = -\nu\dot{x} - kx + F(t)$. Considerata ad esempio una forzante di tipo sinusoidale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \phi)$, e posto $f_0 = F_0/m$ e, come di consueto, $\omega = \sqrt{k/m}$ e $\eta = \nu/2m$, l'equazione diventa

$$\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \phi).$$

Le soluzioni sono dunque del tipo $x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t)$, ove $x_0(t)$ e $\tilde{x}(t)$ sono rispettivamente una soluzione generica dell'omogenea associata (problema senza forzante) e una soluzione del problema con la forzante.

- Le soluzioni dell'omogenea associata tendono a spegnersi a 0, in quanto la parte reale delle radici dell'equazione caratteristica è in ogni caso < 0 , e sono dette non a caso *regime transitorio*. Posto per comodità $\sigma = \sqrt{|\eta^2 - \omega^2|}$ (vale perciò $0 \leq \sigma \leq \max\{\eta, \omega\}$):

- se $\eta > \omega$ (viscosità forte, o molla debole) si ottengono le due radici reali $-\eta \pm \sigma < 0$, dunque

$$x_0(t) = ae^{-(\eta-\sigma)t} + be^{-(\eta+\sigma)t}, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

- nel caso $\eta = \omega$ (oscillatore perfetto) si ottiene la radice reale negativa doppia $-\eta < 0$, da cui

$$x_0(t) = e^{-\eta t}(a + bt), \quad a, b \in \mathbb{R};$$

- se infine $\eta < \omega$ (viscosità scarsa, o molla forte) si ottengono le radici coniugate $-\eta \pm i\sigma$, da cui

$$x_0(t) = e^{-\eta t}(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

che tende sempre a spegnersi, stavolta con delle oscillazioni sempre più strette di pulsazione σ .

- Più significativa è la ricerca della soluzione particolare $\tilde{x}(t)$, detta *regime stazionario*, destinata a diventare nel tempo il termine significativo (vedi Figura 5.2(a)). Poiché $i\Omega$ non è radice dell'equazione caratteristica, si potrà cercare $\tilde{x}(t)$ della forma $L \cos(\Omega t + \psi)$ con ampiezza $L > 0$ e fase ψ da determinare, e i calcoli danno come ampiezza $L = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2}}$, mentre la fase ψ è caratterizzata da $\cos(\psi - \phi) = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2}}$ e $\sin(\psi - \phi) = -\frac{2\eta}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2}}$. Si ottiene pertanto

$$x(t) = x_0(t) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\eta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \psi) :$$

la presenza dell'attrito (stiamo assumendo $\eta > 0$) porta a oscillazioni di ampiezza limitata, che tende comunque a diventare molto grande quando η è piccolo e le due pulsazioni Ω (della forzante) e ω (quella caratteristica dell'oscillatore) sono molto vicine. In effetti, in assenza di attrito e con forzante di pulsazione uguale a quella caratteristica dell'oscillatore si entrerebbe nel fenomeno della *risonanza*, con oscillazioni di ampiezza divergente. In tal caso l'equazione da risolvere sarebbe $\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos(\omega t + \phi)$: le soluzioni dell'omogenea sono $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ con $a, b \in \mathbb{C}$, mentre una soluzione particolare della non omogenea stavolta sarà del tipo $L t \cos(\omega t + \psi)$ con ampiezza $L > 0$ e fase ψ da determinare, e i calcoli danno $L = \frac{f_0}{2\omega}$ e $\psi = \phi - \frac{\pi}{2}$, dunque l'integrale generale diventa $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin(\omega t + \phi)$, funzione illimitata caratterizzata da oscillazioni che crescono di ampiezza in modo lineare col tempo (vedi Figura 5.2(b)).⁽¹¹³⁾

A volte un opportuno cambio di variabile indipendente può trasformare un'equazione lineare a coefficienti non costanti in una a coefficienti costanti: ad esempio, è questo il caso dell'*equazione di Eulero*, che nella funzione incognita $y(x)$ ha la forma

Equazione
di Eulero

$$(5.10) \quad x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0$$

con $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dopo aver notato che se $\varphi(x)$ è soluzione su $]0, +\infty[$ allora $\varphi(-x)$ è soluzione su $] -\infty, 0[$, ci si può ricondurre al caso $x > 0$; ponendo allora $x = e^t$ e $z(t) = y(x) = y(e^t)$, si osserva (indicando col punto le derivate rispetto a t) che $\dot{z} = y' e^t = x y'$, poi $\ddot{z} = (x y')' e^t = (y' + x y'') x = x^2 y'' + x y'$ da cui $x^2 y'' = \ddot{z} - \dot{z}$, poi $\ddot{\ddot{z}} = (x^2 y'' + x y')' e^t = (2x y'' + x^2 y''' + y' + x y'') x$ da cui $x^3 y''' = \ddot{\ddot{z}} - 3\dot{z} \ddot{z} + 2\dot{z}^2$, e così via (in generale si può mostrare per induzione che $x^k y^{(k)} = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} - 1) \dots (\frac{d}{dt} - k + 1) z$). Pertanto, operando queste sostituzioni,

⁽¹¹³⁾ È per questo motivo che, di solito, all'ingresso dei ponti le truppe di fanteria devono rompere il passo: se infatti la frequenza del passo di marcia entrasse in risonanza con la frequenza caratteristica del ponte, quest'ultimo inizierebbe a oscillare con ampiezza sempre crescente, e il rischio di crollo sarebbe reale.

l'equazione lineare a coefficienti non costanti (5.10) per $y(x)$ diventa un'equazione lineare a coefficienti costanti per $z(t)$. E, per arrivare più rapidamente all'equazione caratteristica di quest'ultima equazione, basta osservare che le soluzioni del tipo $y(x) = x^\tau$ corrispondono a $z(t) = e^{\tau t}$, dunque basta imporre a $y(x) = x^\tau$ di soddisfare l'equazione originale (5.10).

Esempi. (1) L'equazione $4x^2 y'' + y = 0$ in $y(x)$ corrisponde a $4(\ddot{z} - \dot{z}) + z = 0$, ovvero $4\ddot{z} - 4\dot{z} + z = 0$, la cui equazione caratteristica $4\tau^2 - 4\tau + 1 = 0$ (cui si arriva anche imponendo che $y = x^\tau$ sia soluzione, ottenendo $4x^2\tau(\tau - 1)x^{\tau-2} + x^\tau = 0$ per ogni $x > 0$, ovvero $4\tau(\tau - 1) + 1 = 0$) ha radice doppia $-\frac{1}{2}$: pertanto $z(t) = (A + Bt)e^{-\frac{1}{2}t}$, da cui $y(x) = (A + B \log |x|)\sqrt{|x|}$ per $x \neq 0$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$ con costanti indipendenti su $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Tra queste, l'unica soluzione prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ è quella nulla (si noti che se $(A, B) \neq (0, 0)$ c'è prolungabilità per continuità anche per $x = 0$ con valore nullo, ma senza derivabilità). **(2)** Nell'equazione di Eulero $x^3 y''' + 6y = 0$, imponendo che $y = x^\tau$ sia soluzione si ottiene $x^3\tau(\tau - 1)(\tau - 2)x^{\tau-3} + 6x^\tau = 0$ per ogni $x > 0$, ovvero $\tau(\tau - 1)(\tau - 2) + 6 = 0$, che ha radici semplici -1 e $2 \pm \sqrt{2}i$. Pertanto si ha $z(t) = A e^{-t} + e^{2t}(B \cos(\sqrt{2}t) + C \sin(\sqrt{2}t))$, da cui $y(x) = A \frac{1}{|x|} + x^2(B \cos(\sqrt{2} \log |x|) + C \sin(\sqrt{2} \log |x|))$ per $x \neq 0$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$, con costanti indipendenti su $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Tra queste soluzioni, quelle con $A_- = A_+ = 0$ possono essere estese come soluzioni (dunque come funzioni $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}$, ponendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Domande e risposte

01. D. Ho alcune domande sulla Proposizione 5.1.1 delle dispense di Analisi 3.

1. Nel punto 2) del teorema, bisogna dimostrare che (iii) $\Rightarrow$ (i). Trovo scritto che “poiché la funzione di valutazione $v_{\tilde{t}}$ è un isomorfismo, si ha necessariamente che le colonne devono essere una base di S_0 ”. Non ho capito come, se i vettori $\varphi_1(\tilde{t}), \dots, \varphi_n(\tilde{t})$ sono linearmente indipendenti (ma nel punto $\tilde{t}$, giusto?), lo sono allora ovunque.
2. Poi, per dimostrare che (i) $\Rightarrow$ (iv) non basta notare che, se $\Phi(t)$ è matrice risolvente, per definizione allora le colonne $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono linearmente indipendenti e quindi la matrice non è singolare? A che serve mettere di nuovo in gioco la funzione di valutazione? Non è superfluo?
3. Infine, per dimostrare che se Φ è risolvente, allora lo sono anche le ΦL , con L matrice, mi chiedevo se, per caso, ciò non sia dimostrabile andando a sostituire ΦL nella equazione $y' = A(t)y$.

R. 1. Grazie al teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità globale, che si applica al caso lineare senza problemi già nella forma debole, per ogni dato iniziale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ (ove $I \subset \mathbb{R}$ è l'intervallo-dominio della matrice $A(t)$, ovvero delle sue funzioni componenti $a_{ij}(t)$) c'è una e una sola soluzione di $y' = A(t)y$ tale che $y(t_0) = y_0$: detto con altre parole, denotato con S_0 lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione $y' = A(t)y$, la funzione di valutazione $v_{t_0} : S_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ (quella che manda una soluzione $\varphi(t)$ nel suo valore $\varphi(t_0)$ in $t = t_0$) è un isomorfismo qualunque sia $t_0 \in I$. Essere “isomorfismo” vuol dire identificare in tutto e per tutto gli spazi vettoriali S_0 e $\mathbb{C}^n$ tra loro, in particolare mandare basi dell'uno in basi dell'altro: dunque, se per un certo $\tilde{t} \in I$ sappiamo che i vettori $\varphi_1(\tilde{t}), \dots, \varphi_n(\tilde{t})$ formano una base di $\mathbb{C}^n$, poiché $v_{\tilde{t}}$ è un isomorfismo non si può che concludere che le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ devono formare una base di S_0 .

2. In generale, senza parlare ne' pensare alle equazioni differenziali, delle funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_r : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ sono linearmente indipendenti se, dati $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tali che $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_r \varphi_r = 0$ (ovvero, tali che $\alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_r \varphi_r(t) = 0$ per ogni $t \in I$) allora deve essere necessariamente $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Se ci pensiamo un attimo, per delle funzioni essere linearmente indipendenti tra loro è facile, perché in realtà è difficile che accada il contrario: per essere linearmente dipendenti bisogna infatti che non solo i vettori $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ di $\mathbb{C}^n$ siano sempre linearmente dipendenti tra loro (ovvero per ogni $t \in I$), ma che lo siano tramite un'unica r -upla di numeri che vada bene per ogni t . In particolare, anche se le $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sono linearmente indipendenti potrebbe benissimo accadere che esista qualche $t_0 \in I$ tale che i vettori $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_r(t_0)$ siano linearmente dipendenti in $\mathbb{C}^n$. Ad esempio, le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ date da $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ -2t \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 3-t \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ e $\varphi_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (imponendo che $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$ si

ottiene $\begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2)t + (-\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) \\ (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)t - (-\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni t , il che equivale a $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$,

che implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$), mentre ovviamente i vettori $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ sono linearmente dipendenti per ogni t (tre vettori sono sempre linearmente dipendenti in $\mathbb{C}^2$); anche riducendo il numero di funzioni, naturalmente φ_1 e φ_2 restano linearmente indipendenti ma per $t = -1$ si ottengono i vettori $\varphi_1(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, che sono linearmente dipendenti. •

Come messo in chiaro fin da subito, quanto detto finora lo si è detto senza parlare ne' pensare alle equazioni differenziali. Se invece ci si chiede se è possibile che $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ siano un sistema fondamentale di soluzioni per un sistema lineare omogeneo $y' = A(t)y$, accade un fenomeno del tutto particolare, dovuto proprio all'esistenza e unicità globale della soluzione su tutto I (o, equivalentemente, al fatto che le funzioni di valutazione $v_t : S_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ siano degli isomorfismi per ogni $t \in I$): le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ non solo devono essere soluzioni del sistema e linearmente indipendenti tra loro, ma necessariamente i vettori $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ di $\mathbb{C}^n$ devono essere *sempre* (per ogni t) linearmente indipendenti. Tale è, insomma, la gravità del compito di essere non una generica famiglia di funzioni, ma di rappresentare un sistema fondamentale di soluzioni per un sistema lineare omogeneo. Ad esempio, le funzioni $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ -2t \end{pmatrix}$ e $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 3-t \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ dell'esempio precedente non potranno rappresentare un sistema fondamentale di soluzioni per un sistema lineare omogeneo $y' = A(t)y$ definito su tutto $\mathbb{R}$, perché ci sono alcuni t (ad esempio, abbiamo scoperto $t = -1$) per i quali $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono linearmente dipendenti, e questo non è permesso. Potrebbe darsi che esse lo siano, ma per un sistema definito su un intervallo I più piccolo che non contenga alcuno di questi valori problematici come -1 . Ma quali sono questi valori problematici che rendono $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ linearmente dipendenti? Chiaramente essi sono tutti e soli quelli tali che $\det \begin{pmatrix} t-1 & 3-t \\ -2t & 3t-1 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $(t+1)^2 = 0$, ovvero, alla fine, il solo $t = -1$ (in questo caso è così, ma in generale potrebbero essercene diversi altri). Escludendo pertanto $t = -1$, possiamo concentrarci su $I_1 =]-\infty, -1[$ oppure su $I_2 =]-1, +\infty[$: se su di essi $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ saranno un sistema fondamentale di soluzioni per un sistema lineare omogeneo, una risolvente per tale sistema sarà per l'appunto la matrice $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 3-t \\ -2t & 3t-1 \end{pmatrix}$ fatta con loro. E allora

necessariamente, come sappiamo, sarà $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3t-1}{(t+1)^2} & \frac{t-3}{(t+1)^2} \\ \frac{2t}{(t+1)^2} & \frac{t-1}{(t+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t-1}{(t+1)^2} & -\frac{2}{(t+1)^2} \\ \frac{2}{(t+1)^2} & \frac{t+3}{(t+1)^2} \end{pmatrix}$. Abbiamo così ricostruito il sistema lineare omogeneo su I_1 o su I_2 di cui $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ saranno un sistema fondamentale di soluzioni: si tratta di $y' = A(t)y$, ovvero $\begin{cases} x' = \frac{t-1}{(t+1)^2} x - \frac{2}{(t+1)^2} y \\ y' = \frac{2}{(t+1)^2} x + \frac{t+3}{(t+1)^2} y \end{cases}$.

3. Per mostrare che se Φ è risolvente allora lo sono anche le ΦL , con L matrice costante (naturalmente lei ha scordato di dire che L deve essere invertibile, altrimenti le colonne di ΦL non saranno più linearmente indipendenti e dunque ΦL non potrà più essere una risolvente) lei può certamente

andare a sostituire ΦL nella equazione $y' = A(t)y$: vale infatti $(\Phi L)' = \Phi' L = (A(t)\Phi) L = A(t)(\Phi L)$, il che mostra per l'appunto che ΦL è una risolvante. Ma se io le chiedessi di spiegarmi perché, data una risolvante Φ , tutte le altre risolventi sono del tipo ΦL per una certa matrice costante invertibile L , lei come farebbe? In realtà il modo più corretto di operare è con un ragionamento basilare di algebra lineare, come segue. In generale, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n e $v_1, \dots, v_n$ è una sua base, tutte le altre basi di V si ottengono facendo combinazioni lineari invertibili dei v_j : ovvero, costruita la matrice M le cui le colonne sono i vettori v_j , tutte le altre basi di V si trovano scegliendo una matrice costante invertibile L e prendendo le colonne della matrice prodotto ML : questi infatti sono tutti e soli i modi per fare combinazioni lineari invertibili delle colonne di M . Basta ora applicare questo ragionamento a $V = S_0$ (che abbiamo già dimostrato in precedenza essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n) e $M = \Phi$.