Analisi Matematica 3 (Fisica e Astronomia)
Esercizi di autoverifica sulle equazioni differenziali lineari

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

giovedì 5 dicembre 2024

Istruzioni generali. Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento, che sarà fornito lunedì 09/12. Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 20 pt (8+7+5). **Ex. 2:** 20 pt (5+6+9). **Ex. 3:** 20 pt (10+10). **Ex. 4:** 20 pt (10+10). **Ex. 5:** 20 pt (6+9+5). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in due sedute da 3 ore).

---

1. [(*)] È data l'equazione differenziale $y'' - 2ay' + a^2 y = e^{at}$, ove $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determinarne le soluzioni.

(b) Scrivere il sistema equivalente del primo ordine, e trovarne una risolvente.

(c) Per quale $a \in \mathbb{R}$ la soluzione tale che $(y(0), y'(0)) = (0,0)$ soddisfa $\int_0^{+\infty} y(t)\,dt = 1$?

2. Si consideri l'equazione differenziale $y'' = -4y + 2\,e^x \sqrt{y} + y'(2 + \frac{y'}{2y})$ nell'incognita $y(x) > 0$.

(a) Cosa si può dire a priori riguardo a esistenza e unicità delle soluzioni?

(b) Vi sono soluzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$?

(c) Usando il cambio $u(x) = \sqrt{y(x)}$, trovare le soluzioni $y(x)$ tali che $y(0) = 1$ e $|y'(0)| = 2$.

3. [(*)] È dato il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha+1)x + (\alpha-1)y \\ \dot{y} = (\alpha-2)x + \alpha y \end{cases}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinarne l'integrale generale al variare di α.

(b) Per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione tale che $(x(0), y(0)) = (1,0)$ soddisfa $\int_0^1 (x(t) + y(t))\,dt = 1$?

4. [(*)] Si considerino $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare e^{tA}, e usarla per risolvere il problema di Cauchy dato da $y' = A\,y$ e $y(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Risolvere il problema di Cauchy dato da $y' = A\,y + b(t)$ e $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[(*)] Esercizio tratto da prove d'esame composte da Giuseppe De Marco.

5. Si consideri il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x - y + e^{2t} \\ \dot{y} = 5x - y + 1 - e^{2t} \end{cases}$.

(a) Trovare un integrale primo per il sistema omogeneo associato, e descriverne le orbite.

(b) Risolvere il sistema non omogeneo.

(c) Usando i risultati precedenti con (y, z) in luogo di (x, y), risolvere $\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1) \\ \dot{y} = x + y - z - 1 \\ \dot{z} = -x + 5y - z + 2 \end{cases}$.

Soluzioni.

1. (a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata a $y'' - 2ay' + a^2 y = e^{at}$ è $\tau^2 - 2a\tau + a^2 = 0$, che ha radice doppia $\tau = a$: dunque le soluzioni dell'omogenea sono $y(t) = (k_1 + k_2 t)\, e^{at}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa avrà la forma $\tilde{y} = kt^2\, e^{at}$ con $k \in \mathbb{R}$ da determinare: essendo $\tilde{y}' = k(at^2 + 2t)\, e^{at}$ e $\tilde{y}'' = k(a^2t^2 + 4at + 2)\, e^{at}$, imponendo che sia soluzione si trova $k(a^2t^2 + 4at + 2)\, e^{at} - 2ak(at^2 + 2t)\, e^{at} + a^2kt^2\, e^{at} = e^{at}$, da cui $k = \frac{1}{2}$. Le soluzioni sono dunque $y(t) = (k_1 + k_2 t + \frac{1}{2}t^2)\, e^{at}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Posto $p = y'$ si ha il sistema equivalente $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2ap - a^2 y + e^{at} \end{cases}$, che si può esprimere nella forma $\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} + b(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}$. Come sappiamo, in questo caso una risolvente (sottointeso: per il sistema omogeneo associato) è la matrice wronskiana di due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea originale, ad esempio le due generatrici $y_1(t) = e^{at}$ e $y_2(t) = t\, e^{at}$: si ottiene dunque $W(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & t\, e^{at} \\ a\, e^{at} & (1+at)e^{at} \end{pmatrix}$. Giusto per esercizio, si può verificare che $A = W'(t)\, W(t)^{-1}$; inoltre, la matrice esponenziale risulta $e^{tA} = W(t)\, W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} (1-at)\, e^{at} & t\, e^{at} \\ -a^2 t\, e^{at} & (1+at)e^{at} \end{pmatrix}$, e la stessa si può ricalcolare notando che A ha autovalore doppio a e dunque $N = A - a\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}$ è nilpotente, da cui $e^{tA} = e^{at}(\mathbf{1}_2 + t\, N)$, tale e quale a prima.

(c) La soluzione dell'equazione tale che $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$ è $\hat{y}_a(t) = \frac{1}{2}t^2\, e^{at}$. L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \hat{y}_a(t)\, dt$ converge se e solo se $a < 0$: in tale ipotesi, una primitiva di $\hat{y}_a(t)$ si calcola per parti ed è $\frac{a^2t^2 - 2at + 2}{2a^3}\, e^{at}$, così l'integrale $(\frac{a^2t^2-2at+2}{2a^3}\, e^{at}]_0^{+\infty} = (0) - (\frac{1}{a^3}) = -\frac{1}{a^3}$ vale 1 quando $a = -1$.

2. (a) Posto $p = y'$, l'equazione differenziale $y'' = -4y + 2\, e^x \sqrt{y} + y'(2 + \frac{y'}{2y})$ corrisponde al sistema $(y, p)' = f(x, (y, p)) = (p\,, -4y + 2\, e^x \sqrt{y} + p(2 + \frac{p}{2y}))$. Poiché f è una funzione $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, si può senz'altro affermare che ci sarà esistenza e unicità locale per ogni dato iniziale (x_0, y_0, p_0) con $y_0 > 0$. D'altra parte il dominio di (y, p) non è tutto $\mathbb{R}^2$ (per applicare il teorema di Cauchy-Lipschitz globale), ne' f è limitata in (y, p) (per ragionare con la fuga dai compatti), dunque non si può affermare nulla a priori su esistenza globale.

(b) Imponendo che $y(x) = e^{\lambda x}$ soddisfi l'equazione si trova che $\lambda^2 e^{\lambda x} = -4e^{\lambda x} + 2\, e^{(1+\frac{\lambda}{2})x} + \lambda\, e^{\lambda x}(2 + \frac{\lambda}{2})$ per ogni x: questo implica che deve essere $e^{(1+\frac{\lambda}{2})x} = e^{\lambda x}$, ovvero $\lambda = 2$, e in tal caso semplificando per e^{2x} si ottiene $4 = -4 + 2 + 2(2 + \frac{2}{2})$, che effettivamente è vera. Dunque l'unica soluzione di questo tipo è $y(x) = e^{2x}$.

(c) Da $u(x) = \sqrt{y(x)}$, ovvero $y = u^2$ con $u > 0$, si ricava $y' = 2u\, u'$ e $y'' = 2(u')^2 + 2u\, u''$, dunque sostituendo si ottiene $2(u')^2 + 2u\, u'' = -4u^2 + 2\, e^x\, u + 2u\, u'(2 + \frac{2u\, u'}{2u^2})$ ovvero, moltiplicando e semplificando, $u'' - 2u' + 2u = e^x$, equazione a coefficienti costanti. Le soluzioni sono $u(x) = e^x(A\cos x + B\sin x + 1)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ (valide fintanto che $u > 0$), da cui $y(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x + 1)^2$. Infine, esaminiamo le condizioni iniziali proposte. Imponendo per iniziare che $y(0) = 1$ si trova $1 = (A+1)^2$, da cui $A = -2$ (che però è soluzione spuria in quanto in questo caso sarebbe $u(0) = -1 < 0$, impossibile) oppure $A = 0$ (accettabile), dunque $y(x) = e^{2x}(B\sin x + 1)^2$. Derivando si ha $y' = e^{2x}(2(B\sin x + 1)^2 + 2B\cos x\,(B\sin x + 1)$, e la condizione $|y'(0)| = 2$ equivale alle due eventualità in cui $y'(0) = 2$ oppure $y'(0) = -2$; nel primo caso si ottiene

$2 = 2 + 2B$, da cui $B = 0$, ovvero la già nota $y(x) = e^{2x}$; nel secondo si ha $-2 = 2 + 2B$, da cui $B = -2$, e la soluzione è dunque $y(x) = e^{2x}(1 - 2\sin x)^2$.

3. (a) La matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha-1 \\ \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$ ha autovalori 2 e $2\alpha - 1$: vanno dunque distinti i casi $\alpha \neq \frac{3}{2}$ (in cui essi sono distinti) e $\alpha = \frac{3}{2}$ (in cui essi valgono entrambi 2, doppio).

– Se $\alpha \neq \frac{3}{2}$, autovettori relativi a 2 e $2\alpha - 1$ sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \alpha-2 \end{pmatrix}$: ne ricaviamo che una risolvente è $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & (\alpha-1)\, e^{(2\alpha-1)t} \\ -e^{2t} & (\alpha-2)\, e^{(2\alpha-1)t} \end{pmatrix}$, da cui le soluzioni $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, (\alpha-1)\, e^{(2\alpha-1)t} \\ y(t) = -k_1\, e^{2t} + k_2\, (\alpha-2)\, e^{(2\alpha-1)t} \end{cases}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

– Se $\alpha = \frac{3}{2}$ l'autovalore 2 è doppio, dunque $N = A - 2\,\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è nilpotente e la matrice esponenziale è $e^{tA} = e^{2t}(\mathbf{1}_2 + t\,N) = \begin{pmatrix} (1+\frac{t}{2})\, e^{2t} & \frac{t}{2}\, e^{2t} \\ -\frac{t}{2}\, e^{2t} & (1-\frac{t}{2})\, e^{2t} \end{pmatrix}$, che è già una risolvente. Pertanto le soluzioni sono $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2k_1 \\ 2k_2 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x(t) = (2k_1 + (k_1+k_2)t)\, e^{2t} \\ y(t) = (2k_2 - (k_1+k_2)t)\, e^{2t} \end{cases}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Cerchiamo ora caso per caso la soluzione tale che $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, e calcoliamo $\int_0^1 (x(t) + y(t))\, dt$.

– Se $\alpha \neq \frac{3}{2}$, la soluzione cercata è $\Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha-3} \begin{pmatrix} (\alpha-2)\, e^{2t} + (\alpha-1)\, e^{(2\alpha-1)t} \\ -(\alpha-2)\, e^{2t} + (\alpha-2)\, e^{(2\alpha-1)t} \end{pmatrix}$: perciò si ha $x(t) + y(t) = e^{(2\alpha-1)t}$, e l'integrale $\int_0^1 (x(t) + y(t))\, dt$ vale $\frac{e^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1}$ quando $\alpha \neq \frac{1}{2}$ (valore che, si noti, è sempre diverso da 1), e vale 1 quando $\alpha = \frac{1}{2}$.

– Se $\alpha = \frac{3}{2}$ la soluzione cercata è $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\frac{t}{2})\, e^{2t} \\ -\frac{t}{2}\, e^{2t} \end{pmatrix}$ perciò $x(t) + y(t) = e^{2t}$, e l'integrale $\int_0^1 (x(t) + y(t))\, dt$ vale $\frac{e^2-1}{2}$.

Pertanto l'unico valore di α tale che $\int_0^1 (x(t) + y(t))\, dt = 1$ è $\alpha = \frac{1}{2}$.

4. (a) Si ha $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}_3 + N$, ove $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente: si ottiene dunque $e^{tA} = e^{-t}\,(\mathbf{1}_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -t\, e^{-t} & \frac{1}{2}t^2\, e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -t\, e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, e la soluzione cercata è $e^{tA} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6 + 2t + \frac{1}{2}t^2)\, e^{-t} \\ -(2+t)\, e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

(b) In generale, la soluzione con $y(t_0) = y_0$ è data $y(t) = e^{(t-t_0)A}\, y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}\, b(\tau)\, d\tau$: nel nostro caso otteniamo $y(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A}\, b(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} (2\tau - t)\, e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} (2\tau - t - 2)\, e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \\ 0 \end{pmatrix}]_0^t = \begin{pmatrix} (t+2)\, e^{-t} + t - 2 \\ 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) La forma differenziale lineare associata al sistema omogeneo è $\omega = (5x - y)\, dx - (x - y)\, dy$, che è esatta (è chiusa nel dominio $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso): la sua primitiva $F(x, y) = \frac{5}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$ è l'integrale primo cercato. Le orbite delle soluzioni del sistema omogeneo sono dunque le curve di livello di F, ovvero $5x^2 - 2xy + y^2 = k$: per $k = 0$ si tratta del solo punto $(0, 0)$ (equilibrio del sistema omogeneo), mentre per $k > 0$ si tratta di ellissi di centro $(0, 0)$, con assi ruotati di un angolo $\operatorname{arctg}(\sqrt{5} - 2)$ in senso orario.

(b) La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\pm 2i$, con autovettori associati $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \mp 2i \end{pmatrix}$: prendendo parte reale e immaginaria della soluzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{2it}$ otteniamo dunque la risolvente reale $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t & \sin 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix}$. Per la ricerca della soluzione particolare del sistema non omogeneo separiamo $b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix}$ nella somma di $b_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $b_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$. Poiché 0 non è autovalore di A, una soluzione particolare per $b_1(t)$ sarà un vettore costante $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ da determinare, e i calcoli danno $a = b = -\frac{1}{4}$; similmente, poiché 2 non è autovalore di A una soluzione per $b_2(t)$ sarà del tipo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{2t}$ con il vettore costante $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ da determinare, e i calcoli danno $(a, b) = (\frac{3}{5}, 1)$. La soluzione generale di $\begin{cases} \dot{x} = x - y + e^{2t} \\ \dot{y} = 5x - y + 1 - e^{2t} \end{cases}$ è dunque $\begin{cases} x(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t - \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\, e^{2t} \\ y(t) = (k_1 - 2k_2) \cos 2t + (2k_1 + k_2) \sin 2t - \frac{1}{4} + e^{2t} \end{cases}$ al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

(c) L'equazione disaccoppiata $\dot{x} = 2(x - 1)$ è lineare del primo ordine, e si risolve facilmente dando $x(t) = k\, e^{2t} + 1$: sostituendo tale espressione di $x(t)$ nelle due equazioni per y e z si ottiene $\begin{cases} \dot{y} = y - z + k\, e^{2t} \\ \dot{z} = 5y - z + 1 - k\, e^{2t} \end{cases}$, che è esattamente il problema piano originale con (y, z) in luogo di (x, y) e con $b_2(t)$ moltiplicato per la costante arbitraria k, il che provoca solo che la relativa soluzione particolare sarà anch'essa moltiplicata per k. Dunque la soluzione del sistema è $\begin{cases} x(t) = k\, e^{2t} + 1 \\ y(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t - \frac{1}{4} + \frac{3}{5} k\, e^{2t} \\ z(t) = (k_1 - 2k_2) \cos 2t + (2k_1 + k_2) \sin 2t - \frac{1}{4} + k\, e^{2t} \end{cases}$ al variare di k, k_1, $k_2 \in \mathbb{C}$.