

Analisi Matematica II

CORRADO MARASTONI

Indice

1	Serie numeriche, serie di potenze e funzioni olomorfe	3
1.1	Serie reali	3
1.2	Funzioni olomorfe I: derivabilità complessa	9
1.3	Serie di potenze e funzioni analitiche	11
1.4	L'esponenziale complesso e altre funzioni elementari	16
	Domande e risposte	21
2	Integrazione generalizzata	24
2.1	Integrazione generalizzata delle funzioni positive	25
2.2	Integrazione generalizzata delle funzioni oscillanti	28
2.3	Nozioni ulteriori	29
3	Curve parametriche affini	32
3.1	Preliminari	32
	- Spazi vettoriali normati	32
	- Sistemi di coordinate speciali nel piano e nello spazio tridimensionale	33
	- Rette e coniche	34
3.2	Curve parametriche affini	40
3.3	Lunghezza, integrali al differenziale d'arco	43
4	Topologia degli spazi affini	47
4.1	Nozioni generali	47
4.2	Limiti e continuità	49
4.3	Proprietà delle funzioni continue	53
5	Calcolo differenziale negli spazi affini	57
5.1	Preliminari	57
	- Spazi di funzioni lineari tra \mathbb{R} -spazi vettoriali	57
	- Il caso di dimensione finita	59
5.2	Funzioni differenziabili	61
5.3	Derivabilità ulteriore	68
5.4	Estremi locali	71
5.5	Funzioni implicite, invertibilità locale	73
5.6	Immersioni e sommersioni	79
5.7	Complementi sulle funzioni integrali e sul problema di Cauchy	81

6	Forme differenziali lineari e campi vettoriali	84
6.1	Cammini e omotopia	84
6.2	Forme differenziali lineari e campi vettoriali	89
6.3	Funzioni olomorfe II: formula di Cauchy, residui e calcolo integrale	101
	Domande e risposte	115
A	Appendici	120
A.1	Completezza, convergenza uniforme	120

1 Serie numeriche, serie di potenze e funzioni oloedorfe

1.1 Serie reali

Una *serie* (numerica reale) è una coppia di successioni reali $(a_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ legate da

Serie

$$s_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + \dots + a_n ;$$

a_n si dirà *termine n-esimo* della serie, s_n la *somma parziale* (o *ridotta*) *n-esima*. La notazione standard per una serie è $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, o semplicemente $\sum a_n$ se è chiaro da dove parte l'indice di somma n (a volte conviene farlo partire da 0, altre da un naturale > 1).

Una serie $\sum a_n$ si dirà *convergente* (risp. *divergente* a $\pm\infty$, *indeterminata*) se tale è la successione delle ridotte s_n ; capire quale delle tre eventualità si verifica è detto comunemente “determinare il carattere della serie”. Se la serie converge, il limite $s = \lim s_n$ si dirà *somma della serie*, e si scriverà $s = \sum a_n$.

Serie convergente,
divergente,
indeterminata

Somma della serie

Esempi. (1) La serie $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ (cioè tutti gli a_n sono uguali a 1) chiaramente diverge a $+\infty$: infatti $s_n = 1 + \dots + 1$ (n volte) $= n \rightarrow +\infty$. **(2)** La serie $\sum (-1)^n = (-1) + 1 + (-1) + \dots$ è indeterminata: infatti $s_n = -1$ (per n dispari) o $s_n = 0$ (per n pari), dunque s_n è indeterminata. **(3)** La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ converge a 2: infatti è facile rendersi conto che $s_n = 2 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 2$. **(4)** La *serie aritmetica* $\sum x_n$ con $x_n = na$ (per un certo $a \in \mathbb{R}$) ha ridotta $s_n = (1 + 2 + \dots + n)a = \frac{n(n+1)}{2}a$, dunque converge se e solo se $a = 0$ (con somma 0), e diverge a $(\text{sign } a)\infty$ negli altri casi. **(5)** La *serie armonica* $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ converge o no? E, più generalmente, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$? E la stessa cosa col segno alterno, ovvero $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$? Visto che non siamo (ne' saremo) in grado di calcolare s_n , per ora restiamo nell'incertezza, nell'attesa di conoscere altri metodi per determinare il carattere di una serie. **(6)** La *serie di Mengoli* $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$ converge a 1: infatti, essendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si ottiene $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$.

Già da alcuni esempi riportati qui sopra emerge che *non sempre si riesce a calcolare la ridotta s_n* , dunque bisognerà elaborare qualche metodo per capire il carattere di una serie senza essere costretti a calcolarne (cosa in realtà piuttosto rara) la ridotta, e di conseguenza senza ambire (nel caso la serie converga) di trovarne la somma esatta.

Iniziamo allora a trattare il problema a partire dagli esempi più semplici, che ne costituiranno i punti di riferimento. In questo senso, le serie più importanti sono la *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ (di ragione $q \in \mathbb{R}$) e la *serie armonica* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (di “esponente” $\alpha \in \mathbb{R}$). Iniziamo dalla prima, più facile perché ne sappiamo calcolare la ridotta.

Proposizione 1.1.1. (Serie geometrica) *La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ converge se $|q| < 1$, con somma $\frac{1}{1-q}$; se $q \geq 1$ diverge a $+\infty$; se $q \leq -1$ è indeterminata.*

Dimostrazione. È ben noto che se $q \neq 1$ si ha $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, mentre se $q = 1$ si ha $s_n = n$. Il risultando segue dunque cercando il limite di s_n . □

Quanto alla seconda, limitiamoci per il momento a capire qual è il carattere per $\alpha = 1$:

Proposizione 1.1.2. *La serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.*

Dimostrazione. Sia $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ la ridotta n -esima: se $\sum \frac{1}{n}$ fosse convergente, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avrebbe limite finito $s \in \mathbb{R}_{>0}$, e così tutte le sue sottosuccessioni, tra cui quella degli elementi di posto pari $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$: pertanto dovrebbe aversi $\lim(s_{2n} - s_n) = s - s = 0$. Ma ciò non è possibile, in quanto $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Perciò la successione s_n , monotona crescente, diverge a $+\infty$. \square

Le seguenti osservazioni sono importanti.

Proposizione 1.1.3. *Sia $\sum a_n$ una serie.*

- (1) (Il termine generale di una serie convergente è infinitesimo) *Se $\sum a_n$ converge, allora a_n tende a 0. Il viceversa è invece falso.*
- (2) (Definitività del carattere di una serie) *Se $\sum b_n$ è una serie di termine generale definitivamente uguale a quello di $\sum a_n$,⁽¹⁾ le due serie hanno lo stesso carattere.*
- (3) (Linearità della somma di una serie convergente) *Se $\sum a_n$ converge con somma s , dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\sum(\alpha a_n)$ converge con somma αs ; data poi un'altra serie convergente $\sum b_n$ con somma t , si ha che $\sum(a_n + b_n)$ converge con somma $s + t$.⁽²⁾*

Dimostrazione. (1) Sia s la somma di $\sum a_n$. Essendo $a_n = s_n - s_{n-1}$ e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, poiché le due successioni al secondo membro convergono entrambe a s si ha che $\lim a_n = s - s = 0$. Per far vedere che non è detto che una serie con termine generale infinitesimo sia convergente, basta ricordare $\sum \frac{1}{n}$ (Proposizione 1.1.2). (2) Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = b_n$ per ogni $n > n_0$. Se s_n (risp. t_n) denota la ridotta n -esima di $\sum a_n$ (risp. di $\sum b_n$), per $n > n_0$ si ha $t_n = s_n + (b_1 - a_1) + \dots + (b_{n_0} - a_{n_0})$, ovvero le due ridotte differiscono della quantità $\sum_{j=1}^{n_0} (b_j - a_j)$, indipendente da n : dunque, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ è ovvio che s_n converge (risp. diverge a $\pm\infty$, è indeterminata) se e solo se t_n fa lo stesso. (3) Discende dalla linearità del limite di successioni. \square

Esempi. (1) Se $\alpha \leq 0$, la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ non può essere convergente: infatti il suo termine generale non è infinitesimo. Idem dicasi per $\sum \arctg n$ e $\sum (-1)^n$: il loro termine generale non è infinitesimo, dunque non possono essere convergenti. (2) Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$ e $|y| < 1$ allora $\sum(x^n - y^n) = \sum(x^n + (-1)y^n) = \sum x^n - \sum y^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-y} = \frac{x-y}{(1-x)(1-y)}$.

Serie a termini positivi Come le successioni monotone per le successioni, le serie a termini positivi (ovvero le $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)⁽³⁾ hanno un comportamento buono, e possono essere studiate in modo particolare.

Proposizione 1.1.4. *Una serie a termini positivi è sempre determinata: o converge (con somma positiva), o diverge a $+\infty$.*

Dimostrazione. La successione delle ridotte di una serie a termini positivi è monotona crescente e a termini positivi, dunque come noto o converge (con somma positiva), o diverge a $+\infty$. \square

Per capire il carattere di una serie a termini positivi, i criteri più usati sono quelli del *confronto* e di *asintoticità*, che ora descriviamo. A tal fine, diremo che due successioni

⁽¹⁾ovvero, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = b_n$ per ogni $n > n_0$.

⁽²⁾Attenzione: l'enunciato vale solo quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono entrambe convergenti.

⁽³⁾Come abbiamo già osservato nella Proposizione 1.1.3, ciò che conta è il comportamento definitivo: quello che diremo ora vale, più in generale, per le serie con termini di segno definitivamente costante.

a_n e b_n sono dello stesso ordine (scrivendo $a_n \sim^* b_n$) se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $a_n = \lambda(1 + \sigma_n)b_n$ per una qualche successione infinitesima σ_n : è facile vedere che, se b_n è definitivamente non nulla, ciò equivale a $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}^\times$. È chiaro che si tratta di una relazione d'equivalenza.⁽⁴⁾

Proposizione 1.1.5. *Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi.*

- (1) (Criterio del confronto) *Sia $a_n \leq b_n$ definitivamente (ad esempio, sia $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$). Allora, se $\sum b_n$ converge, anche $\sum a_n$ converge; se $\sum a_n$ diverge, anche $\sum b_n$ diverge.*
- (2) (Criterio di asintoticità) *Se $a_n \sim^* b_n$ (ad esempio, se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$) allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. (1) Poiché il carattere di una serie non dipende da un numero finito di termini iniziali, possiamo supporre che sia $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora, dette s_n e t_n le ridotte di $\sum a_n$ e $\sum b_n$, si ha $s_n \leq t_n$, e basta applicare il teorema del confronto per le successioni. (2) Per definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2}\lambda < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda$, ovvero (essendo $b_n > 0$) tale che $\frac{\lambda}{2}b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2}b_n$. Ma allora basta applicare il teorema del confronto appena provato in (1): se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum(\frac{3\lambda}{2}b_n)$ converge, e per confronto converge pure $\sum a_n$, mentre se $\sum b_n$ diverge allora anche $\sum(\frac{\lambda}{2}b_n)$ diverge, e per confronto diverge pure $\sum a_n$. \square

Esempi. (1) Torniamo a parlare della serie armonica (a termini positivi) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Poiché si è mostrato (Proposizione 1.1.2) che $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, per il criterio del confronto si ha che quando $\alpha < 1$ anche $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge a $+\infty$. Notiamo poi che $a_n = \frac{1}{n^2}$ è asintotico al termine generale della serie di Mengoli $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (infatti $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$), dunque, per il criterio di asintoticità, $\sum \frac{1}{n^2}$ ha lo stesso carattere della serie di Mengoli, ovvero converge. Ancora per confronto possiamo allora risolvere i casi $\alpha > 2$: poiché in quel caso $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$, anche tali serie convergono. Ci resta da capire cosa accade quando $1 < \alpha < 2$, e lo faremo tra breve. **(2)** $\sum a_n$ con $a_n = \frac{2n-37}{3n^2+1}$ è a termini definitivamente positivi; poiché a_n è dello stesso ordine di $\frac{1}{n}$ (ovvero $\lim \frac{a_n}{1/n} = \lim n a_n = \frac{2}{3} > 0$) e sappiamo che $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, lo stesso farà $\sum a_n$ per il criterio di asintoticità. **(3)** Sia abbia $\sum(1 - \cos \frac{1}{n^\alpha})$ con $\alpha > 0$. Si tratta di una serie a termini positivi, dunque o converge (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) o diverge a $+\infty$. Poiché $\frac{1}{n^\alpha}$ è infinitesima, il termine generale della serie è infinitesimo: il limite di variabile reale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$ ci dice che $1 - \cos \frac{1}{n^\alpha} \sim^* \frac{1}{n^{2\alpha}}$, e perciò la nostra serie ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. Anticipando quello che mostreremo tra breve, diciamo che la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge se e solo se $\beta > 1$, e diverge per $\beta \leq 1$: dunque la nostra serie converge per $\alpha > \frac{1}{2}$, e diverge a $+\infty$ per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (Due parole sul caso $\alpha \leq 0$: qui si ha $\lim \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, e –ma è difficile da mostrare– il termine $1 - \cos \frac{1}{n^\alpha}$ non è mai infinitesimo, dunque la serie, non potendo convergere, diverge a $+\infty$.) **(4)** Sia abbia $\sum |\alpha - 2 \arctg n|^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Poiché $\arctg n \rightarrow \frac{\pi}{2}$, se $\alpha \neq \pi$ il termine generale della serie non è infinitesimo, dunque la serie (a termini positivi) diverge a $+\infty$; la stessa cosa accade se $\alpha = \pi$ e $\beta \leq 0$. Dunque l'unico caso interessante è quello in cui $\alpha = \pi$ e $\beta > 0$. Notando che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\frac{1}{x}} = 2$ (ad esempio si ricordi che per $x > 0$ si ha $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} \equiv \frac{\pi}{2}$, e che $\arctg t \sim_0 t$) si ha che $\pi - 2 \arctg n \sim^* \frac{1}{n}$, ovvero il termine generale della serie ha lo stesso ordine di $\frac{1}{n^\beta}$: la serie converge dunque se e solo se $\beta > 1$ (vedi più sotto per la serie armonica). **(5)** Si abbia la serie

⁽⁴⁾Si abbia $a_n = f(n)$ e $b_n = g(n)$ per due opportune funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di variabile reale definite all'intorno di $+\infty$: in tal caso, nelle notazioni dei limiti di variabile reale è chiaro che se $f(x) \sim_{+\infty}^* g(x)$ allora $a_n \sim^* b_n$. Dunque la conoscenza dei comportamenti asintotici delle funzioni permette un uso più ampio e disinvolto dei criteri che seguono, ed è proprio questo a suggerire l'opportunità di affrontare lo studio delle serie numeriche dopo quello dei limiti di funzioni di variabile reale, anziché subito dopo le successioni.

$\sum (\frac{\alpha n}{n+1})^n$ con $\alpha > 0$. Se $0 < \alpha < 1$ si ha $\frac{\alpha n}{n+1} < \alpha$, dunque $(\frac{\alpha n}{n+1})^n < \alpha^n$ e la serie converge per il confronto; se invece $\alpha \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$ perché il termine generale non è infinitesimo (in particolare, se $\alpha = 1$, il termine generale tende a $\frac{1}{e} > 0$, mentre se $\alpha > 1$ tende a $+\infty$ perché $\frac{\alpha n}{n+1} > 1$ definitivamente). Va comunque osservato che una serie come questa sarà più facilmente comprensibile col criterio della radice, che vedremo tra poco.

Citiamo, senza dimostrarlo, il seguente

Proposizione 1.1.6. (Criterio di condensazione di Cauchy) *Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini positivi e decrescente ha lo stesso carattere della serie “condensata” $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$.* (5)

Esempio. Il criterio di condensazione di Cauchy ci permette di chiudere finalmente la questione della serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ nel caso $\alpha > 0$, in cui è rimasto il dubbio per $1 < \alpha < 2$: infatti la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^k$ converge se e solo se $|q| = 2^{1-\alpha} < 1$, ovvero $1 - \alpha < 0$, ovvero $\alpha > 1$. Pertanto la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$, e permette di definire, con la sua somma, una delle più importanti funzioni non elementari, ovvero $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (la “zeta di Riemann”, il cui grafico è in Figura 1). Di tale funzione si conoscono solo pochi valori esatti, essenzialmente quelli nei naturali pari, ad esempio si sa che $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (il calcolo della somma di questa serie è dovuto a Eulero).

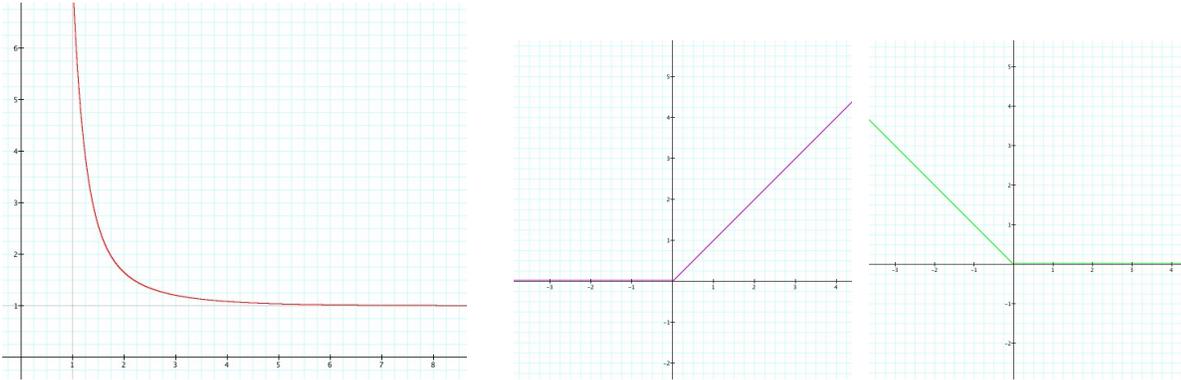


Figura 1: Grafici della funzione zeta di Riemann e delle funzioni parte positiva e negativa.

Serie a termini di segno qualunque

Dopo la parentesi sulle serie a termini positivi (che riguarda più in generale le serie definitivamente a segno costante), torniamo a occuparci del caso generale.

Una serie $\sum a_n$ si dirà *assolutamente convergente* se la serie (a termini positivi) dei suoi moduli $\sum |a_n|$ converge. Nel caso di serie a termini positivi (o anche a termini definitivamente a segno costante), chiaramente l'assoluta convergenza equivale alla (semplice) convergenza; nel caso generale si ha che

Serie
assolutamente
convergente

Proposizione 1.1.7. *Una serie assolutamente convergente è anche convergente; invece il viceversa è falso.*

(5) In sostanza, i termini della serie $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = (a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots$ vengono “condensati” in quelli di posto la potenza di 2 precedente, ovvero $(a_1) + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots$.

Dimostrazione. Ricordiamo le funzioni $(\cdot)^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*parte positiva*) e $(\cdot)^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*parte negativa*) date rispettivamente da $x^+ := \max(x, 0)$ e $x^- := \max(-x, 0)$ (vedi Figura 1): si noti che entrambe queste funzioni sono a valori positivi, che $x = x^+ - x^-$ e che $|x| = x^+ + x^-$ (ad esempio $3^+ = 3$ e $3^- = 0$, $(-7)^+ = 0$ e $(-7)^- = 7$). Data una serie $\sum a_n$, consideriamo le serie (a termini positivi) $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$: poiché per ipotesi $\sum |a_n|$ converge, essendo $a_n^-, a_n^+ \leq |a_n|$ si ha che anche le serie $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergono per il criterio del confronto, ma allora (Proposizione 1.1.3) converge anche la serie differenza $\sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$. Invece la serie (di Leibniz) $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge semplicemente (lo vedremo tra poco) ma non assolutamente (infatti la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ diverge). \square

Esempio. Per $\alpha > 1$ la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge assolutamente (infatti in questi casi la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge), dunque converge anche semplicemente.

Dunque, in presenza di una serie con termini di segno qualunque, la prima cosa da fare è verificare se sia assolutamente convergente (usando, per la serie dei moduli, le cose studiate per le serie a termini positivi, in particolare i criteri del confronto e di asintoticità): se sì, allora è anche convergente. A tal fine, sono di grande importanza pratica anche i seguenti due criteri.⁽⁶⁾

Proposizione 1.1.8. *Sia $\sum a_n$ una serie.*

- (1) (Criterio del rapporto) *Sia $a_n \neq 0$ definitivamente. Se esiste $0 \leq \alpha < 1$ tale che $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \alpha$ definitivamente (es., se esiste $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$), allora $\sum a_n$ converge assolutamente. Se invece $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ definitivamente (es., se esiste $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$), allora $\sum a_n$ non converge.*
- (2) (Criterio della radice) *Se esiste $0 \leq \alpha < 1$ tale che $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha$ definitivamente (es., se esiste $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$), allora $\sum a_n$ converge assolutamente. Se invece $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ definitivamente (es., se esiste $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$), allora $\sum a_n$ non converge.*

Dimostrazione. Limitiamoci alla prova del criterio del rapporto, lasciando per esercizio quella (simile) di quello della radice. Se esiste $0 \leq \alpha < 1$ tale che $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \alpha$ definitivamente (diciamo per $n \geq n_0$) allora vale $|a_{n+1}| \leq \alpha |a_n| \leq \alpha^2 |a_{n-1}| \leq \dots \leq \alpha^{n-n_0+1} |a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{\alpha^{n_0+1}} \alpha^n$, in altre parole $|a_{n+1}|$ è maggiorato da (un multiplo scalare di) una serie geometrica di ragione $\alpha < 1$: dunque $\sum a_n$ converge assolutamente. Se invece $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ definitivamente (diciamo per $n \geq n_0$) si ha $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \dots \geq |a_{n_0}|$, dunque (essendo $a_{n_0} \neq 0$) si ha che $\sum a_n$ non può convergere perché il termine generale non è infinitesimo. \square

Esempi. (1) Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ converge assolutamente (criterio del rapporto: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$ tende a $0 < 1$), in particolare converge. Tale serie si chiama *serie esponenziale* perché la sua somma è il numero $\exp(x) := \lim(1 + \frac{x}{n})^n$, di cui costituisce una definizione alternativa.⁽⁷⁾ La successione $e_n(1) = (1 + \frac{1}{n})^n$ che, crescendo, definisce $e = 2,7182818\dots$ è $e_1(1) = 2$, $e_2(1) = \frac{9}{4} = 2,25$, $e_3(1) = \frac{64}{27} = 2,370$, $e_4(1) = \frac{625}{256} = 2,441$ e così via; d'altra parte, la successione delle ridotte s_n della serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ cresce ben più rapidamente, essendo $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + 1 = 2$, $s_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$, $s_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sim 2,666$, $s_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \sim 2,708$ e così via. È interessante anche stimare la

Serie esponenziale

⁽⁶⁾ Il criterio della radice è leggermente più efficace di quello del rapporto (infatti se funziona il rapporto funziona anche la radice), mentre quello del rapporto è generalmente di uso più facile.

⁽⁷⁾ La dimostrazione si basa sul provare che $\lim(\sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} - (1 + \frac{x}{n})^n) = 0$, affermazione che si prova direttamente usando la formula del binomio di Newton (si omettono i calcoli).

differenza tra la ridotta n -esima s_n e la somma finale e :

$$e - s_n = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Si nota che, effettivamente, la serie esponenziale approssima e in modo estremamente efficace: ad esempio, la ridotta di ordine $m = 7$ approssima e a meno di un errore inferiore a $\frac{1}{7!7} \sim 3 \cdot 10^{-5}$. È facile, a questo punto, dimostrare anche che

Il numero di Nepero è irrazionale.

Supponiamo infatti che sia $e = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Da $e - s_n < \frac{1}{n!n}$ si ricava che $0 < n!(e - s_n) < \frac{1}{n}$. Poiché sia $n!e = n! \frac{m}{n} = m(n-1)! \in \mathbb{N}$ che $n!s_n = n!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}) = n! + n! + n(n-1) \dots 3 + n(n-1) \dots 4 + \dots + n + 1 \in \mathbb{N}$, si ha pure $n!(e - s_n) \in \mathbb{Z}$: ma ciò è assurdo, perché non vi sono numeri interi tra 0 e $\frac{1}{n} < 1$. **(2)** Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$ ha $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \frac{n}{n+1}$ che tende a $|x|$: dunque converge assolutamente per $|x| < 1$, non converge per $|x| > 1$ (in particolare per $x < -1$ diverge a $-\infty$), converge solo semplicemente per $x = 1$ (risulta l'opposto della serie di Leibniz) e non converge per $x = -1$ (risulta l'opposto della serie armonica). Tale serie si chiama *serie logaritmica* perché si dimostra che per $-1 < x \leq 1$ la sua somma è il numero $f(x) = \log(1+x)$, di cui costituisce una definizione alternativa. **(3)** La serie $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge (criterio del rapporto); invece la serie $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge (il criterio del rapporto dà $e > 1$; oppure il criterio della radice, ricordando che $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$).

Irrazionalità di e

Serie logaritmica

Terminiamo esaminando una particolare famiglia di serie a termini di segno alterno.

Proposizione 1.1.9. (Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno) *Sia α_n una successione di termini > 0 , decrescente e infinitesima. Allora la serie “di Leibniz” con termini di segno alterno $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge.*

Dimostrazione. Si dimostra facilmente che: (a) la sottosuccessione delle ridotte di posto pari $s_{2n} = -\alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}$ è decrescente (infatti $s_{2(n+1)} - s_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0$); (b) la sottosuccessione delle ridotte di posto dispari $s_{2n+1} = -\alpha_1 + \alpha_2 - \dots + \alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}$ è crescente (infatti $s_{2n+1} - s_{2n-1} = -\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n} \geq 0$); (c) tutti i termini della prima sottosuccessione sono maggiori di tutti i termini della seconda, ovvero $s_{2k} \geq s_{2l+1}$ per ogni $k, l \in \mathbb{N}$ (infatti se $k = l$ si ha $s_{2k} - s_{2k+1} = -(-\alpha_{2k+1}) > 0$, poi se $k > l$ si ha $s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_{2l+1}$ e se $k < l$ si ha $s_{2k} \geq s_{2l} \geq s_{2l+1}$); (d) la differenza $s_{2n} - s_{2n+1}$ tende a zero (infatti $s_{2n} - s_{2n+1} = -(-\alpha_{2n+1}) \rightarrow 0$). Grazie a (a) e (c) (risp. a (b) e (c)) si conclude che la sottosuccessione s_{2n} (risp. s_{2n+1}) è decrescente ed inferiormente limitata (risp. crescente e superiormente limitata) e dunque convergente; grazie a (d), i limiti di s_{2n} e s_{2n+1} saranno lo stesso, che sarà anche il limite di s_n ,⁽⁸⁾ ovvero per definizione la somma di $\sum (-1)^n \alpha_n$. \square

Esempi. (1) La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$, ove $p \in \mathbb{R}$, non converge se $p \leq 0$ (perché il termine generale non è infinitesimo), converge solo semplicemente se $0 < p \leq 1$ (non converge assolutamente, ma il criterio di Leibniz assicura almeno la convergenza semplice) e converge assolutamente se $p > 1$. **(2)** Esaminiamo la convergenza della serie $\sum \frac{(1-5 \cos x)^n}{\log(1+n)}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Notiamo innanzitutto che $-4 < 1 - 5 \cos x < 6$, e poniamo per brevità $\theta := \arccos \frac{1}{5}$ e $\varphi := \arccos \frac{2}{5}$ (si ha dunque $\frac{\pi}{3} < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$). Se $1 - 5 \cos x = 0$ (ovvero se $\cos x = \frac{1}{5}$, ovvero se $x = \pm\theta + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$) tutti i termini sono nulli, e la serie ovviamente converge (a 0). Supponiamo ora che $1 - 5 \cos x \neq 0$, e cerchiamo di applicare il criterio del rapporto: posto $a_n = \frac{(1-5 \cos x)^n}{\log(1+n)}$, si ha $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim |1 - 5 \cos x| \frac{\log(1+n)}{\log(2+n)} = |1 - 5 \cos x|$ e dunque, se $|1 - 5 \cos x| < 1$ (ovvero se $-1 < 1 - 5 \cos x < 1$, cioè se $0 < \cos x < \frac{2}{5}$, cioè se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\varphi + 2k\pi$ oppure $\varphi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) la serie converge assolutamente e dunque converge; se invece $|1 - 5 \cos x| > 1$ (ovvero

⁽⁸⁾Va notato che una successione c_n ha limite ℓ se e solo se entrambe le sottosuccessioni dei termini di posto pari c_{2n} e dispari c_{2n+1} hanno limite ℓ .

se $1 - 5 \cos x < -1$ oppure $1 - 5 \cos x > 1$, cioè se $\cos x < 0$ oppure $\cos x > \frac{2}{5}$, cioè se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ oppure $-\varphi + 2k\pi < x < \varphi + 2k\pi$ la serie non converge (si noti anzi che se $\cos x < 0$, ovvero se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, essendo $1 - 5 \cos x > 1$ si ha $a_n > 0$, e dunque la serie diverge a $+\infty$). Resta da chiarire il solo caso in cui $|1 - 5 \cos x| = 1$, ovvero in cui $1 - 5 \cos x = \pm 1$, ovvero in cui $\cos x = 0$ (cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$) oppure $\cos x = \frac{2}{5}$ (cioè $x = \pm\varphi + 2k\pi$). Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la serie diventa $\sum \frac{1}{\log(1+n)}$: poiché si ha definitivamente $n > \log(1+n) > 0$ si ricava $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\log(1+n)}$ e dunque, poiché la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, anche la serie $\sum \frac{1}{\log(1+n)}$ divergerà a $+\infty$. Se invece $x = \pm\varphi + 2k\pi$ la serie diventa $\sum (-1)^n \frac{1}{\log(1+n)}$, che converge per il criterio di Leibniz (infatti la successione positiva $\frac{1}{\log(1+n)}$ è decrescente e infinitesima) ma non converge assolutamente (per quanto appena visto nel caso in cui $\cos x = 0$). Ricapitolando, la serie converge assolutamente se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\varphi + 2k\pi$ oppure $\varphi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; converge semplicemente ma non assolutamente per $x = \pm\varphi + 2k\pi$; diverge a $+\infty$ per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; non converge se $-\varphi + 2k\pi < x < \varphi + 2k\pi$ (i termini sono di segno alterno e non sono infinitesimi, anzi divergono a $+\infty$ in valore assoluto).

Esercizio. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$(1) \sum \frac{2n-37}{n^x}; \quad (2) \sum \frac{1}{1+x^n}; \quad (3) \sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n^2x}; \quad (4) \sum \left(\frac{2nx+3}{n(x^2+1)} \right)^{2n}.$$

Risoluzione. (1) La serie è definitivamente a termini positivi, e il termine $\frac{2n-37}{n^x}$ è dello stesso ordine di $\frac{n}{n^x} = \frac{1}{n^{x-1}}$: dunque, per asintoticità, se $x-1 > 1$ (ovvero se $x > 2$) la serie converge, mentre se $x-1 \leq 1$ (ovvero se $x \leq 2$) la serie diverge a $+\infty$. (2) Intanto dovrà essere $x \neq -1$. Se $x > -1$ la serie è a termini positivi: si noti che se $-1 < x \leq 1$ il termine generale non è infinitesimo e dunque la serie diverge a $+\infty$, mentre se $x > 1$ il termine $\frac{1}{1+x^n}$ è dello stesso ordine di $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ (termine della serie geometrica, con $0 < \frac{1}{x} < 1$), dunque la serie converge. Similmente, se invece $x < -1$ si ha che $|\frac{1}{1+x^n}|$ è dello stesso ordine di $|\frac{1}{x^n}| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ (termine della serie geometrica, con $0 < \frac{1}{|x|} < 1$), dunque la serie converge assolutamente. (3) Per $x = 0$ la serie non converge, perché il termine generale non è infinitesimo. Per $x \neq 0$ il criterio del rapporto non dà informazioni (infatti $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$), ma basta notare che in tal caso il termine $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{|1+n^2x|}$ è dello stesso ordine di $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ per concludere che la serie è assolutamente convergente. (4) Il criterio della radice ci dà $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{|2nx+3|}{n(x^2+1)} \right)^2$ che tende a $\left(\frac{|2x|}{x^2+1} \right)^2$ se $x \neq 0$, e a 0 se $x = 0$: dunque per $\frac{|2x|}{x^2+1} < 1$ (ovvero per $x \neq \mp 1$, compreso $x = 0$) la serie converge assolutamente, mentre se $x = \mp 1$ essa diverge a $+\infty$: infatti se $x = 1$ si ha che $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+3}{2n} \right)^2 \geq 1$, mentre se $x = -1$ ciò non si può dire ma il termine generico della serie $\left(\frac{-2n+3}{2n} \right)^{2n} = \left(1 + \frac{-3/2}{n} \right)^{2n}$ non è infinitesimo perché tende a $(e^{-\frac{3}{2}})^2 = e^{-3}$.

1.2 Funzioni olomorfe I: derivabilità complessa

In questa sezione ci occupiamo di funzioni di variabile complessa a valori complessi. Una tale funzione può essere vista, da un lato, semplicemente come una funzione di \mathbb{R}^2 in sè, con le già note nozioni di differenziabilità e così via; ma, dall'altro lato, usando le operazioni di \mathbb{C} si possono applicare ad essa i procedimenti del calcolo differenziale in una variabile per

definire una derivata complessa, la cui esistenza in ogni punto del dominio, come vedremo tra breve, assicura alla funzione la massima regolarità auspicabile.

Sia Ω un sottoinsieme aperto del piano complesso \mathbb{C} , e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione: ad ogni punto $z = x + iy \in \Omega$ (con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$) è dunque associato un valore $f(z) = u(z) + iv(z)$, ove $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono dette rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di f .

Esempi. (1) Se $f(z) = 2z^2 - \bar{z} - i$ si ha $f(z) = 2(x+iy)^2 - (x-iy) - i = (2x^2 - 2y^2 - x) + i(2xy + y - 1)$, pertanto $u(z) = 2x^2 - 2y^2 - x$ e $v(z) = 2xy + y - 1$. **(2)** Se $f(z) = \frac{2\bar{z}+3}{iz-1}$ si ha $f(z) = \frac{\bar{iz}-1}{|iz-1|^2}(2\bar{z}+3) = \frac{-y-1-ix}{(-y-1)^2+(-x)^2}(2x+3-2iy) = -\frac{(4xy+2x+3y+3)+i(2x^2-2y^2+3x-2y)}{x^2+(y+1)^2}$, dunque $u(z) = -\frac{4xy+2x+3y+3}{x^2+(y+1)^2}$ e $v(z) = -\frac{2x^2-2y^2+3x-2y}{x^2+(y+1)^2}$.

Si dirà che f è *derivabile in senso complesso* in $z_0 \in \Omega$ se esiste finito in \mathbb{C} il seguente limite:

Derivabilità complessa

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ovvero se esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ (che sarà detta per l'appunto la *derivata complessa* $f'(z_0)$) tale che

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(h). \quad (9)$$

Proposizione 1.2.1. *Se f è derivabile in senso complesso in z_0 essa è anche continua in z_0 . Valgono inoltre le note proprietà della derivata reale: somme, prodotti e composizioni di funzioni derivabili in senso complesso in z_0 sono ancora tali in z_0 , la regola di Leibniz, la regola della catena, eccetera.*

Dimostrazione. Del tutto simile a quanto fatto per la derivata reale. □

Esempi. (1) Le potenze z^n (con $n = 0, 1, 2, \dots$) sono derivabili in senso complesso in ogni z_0 ; più in generale, le funzioni razionali $P(z)/Q(z)$ (ove P e Q sono polinomi) lo sono in ogni z_0 tale che $Q(z_0) \neq 0$ (verifica diretta). **(2)** Invece $g(z) = \bar{z}$ e $h(z) = \operatorname{Re} z$ non sono derivabili in senso complesso in alcun punto: infatti $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}$ non esistono (se $h \in \mathbb{R}$ valgono entrambi 1, ma se $h \in i\mathbb{R}$ valgono -1 e 0).

Ora, da un punto di vista topologico il piano complesso \mathbb{C} è identificato a \mathbb{R}^2 , pensando z come la coppia (x, y) : è dunque naturale vedere f sia come funzione complessa di variabile complessa z che come funzione reale vettoriale (a due componenti u e v) di due variabili reali (x, y) , e chiedersi quale sia la relazione tra la derivabilità complessa (appena introdotta) da un lato, e le già note differenziabilità e regolarità C^k reali dall'altro. In altre parole: se e quale delle precedenti proprietà implichi l'altra.

Proposizione 1.2.2. *La funzione f è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se è differenziabile in z_0 e soddisfa la seguente condizione (detta di Cauchy-Riemann):*

Sistema di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0 \quad (\text{ovvero} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)).$$

⁽⁹⁾Qui $h = z - z_0$ è un incremento complesso, e $o(h)$ significa una $r : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(z_0+h)|}{|h|} = 0$.

Dimostrazione. Come detto, che f sia derivabile in senso complesso in z_0 significa che esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(z - z_0)$, mentre sappiamo che il fatto che f sia differenziabile in z_0 significa che esistono due vettori $\beta = (\beta', \beta'')$ e $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ di \mathbb{R}^2 (assimilati a due numeri complessi $\beta = \beta' + i\beta''$ e $\gamma = \gamma' + i\gamma''$) tali che $f(z) = f(z_0) + \beta(x - x_0) + \gamma(y - y_0) + o(z - z_0)$ (vale chiaramente $\beta = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ e $\gamma = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$). Dunque se f è derivabile in senso complesso in z_0 basta porre $(\beta, \gamma) = (\alpha, i\alpha)$, ed è chiaro che $\beta + i\gamma = 0$; viceversa, se f è differenziabile in z_0 con $\beta + i\gamma = 0$ basta porre $\alpha = \beta$. La riformulazione in termini di u e v è un calcolo diretto. \square

Esempio. Le funzioni $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ date da $f(z) = \operatorname{Re} z$ e $g(z) = \bar{z}$ sono ovviamente differenziabili ovunque (viste come funzioni di \mathbb{R}^2 in sè corrispondono a $f(x, y) = (x, 0)$ e a $g(x, y) = (x, -y)$), ma non soddisfano mai il sistema di Cauchy-Riemann (infatti $\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \equiv 1 + i0 = 1 \neq 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(z) + i\frac{\partial g}{\partial y}(z) \equiv 1 + i(-i) = 2 \neq 0$), dunque non sono mai derivabili in senso complesso, come già visto.

La Proposizione 1.2.2 non è sorprendente, in quanto l'esistenza di un limite complesso (in cui la variabile ha molta più libertà di quella reale) è intuitivamente una proprietà piuttosto forte; va detto tuttavia che la mera esistenza in un punto della derivata complessa non assicura una soddisfacente regolarità reale in quel punto, ovvero che la funzione sia ivi differenziabile con continuità, cioè di classe \mathcal{C}^1 .

Esempio. La funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita come $f(0) = 0$ e $f(z) = |z|^2 \sin(\frac{1}{|z|})$ per $z \neq 0$ è derivabile in senso complesso in 0 (con derivata complessa nulla), ma non è ivi di classe \mathcal{C}^1 .

Se però parliamo di funzioni *olomorfe* (cioè derivabili in senso complesso in *ogni* punto del loro dominio; e se il dominio è tutto \mathbb{C} , una funzione olomorfa su \mathbb{C} viene comunemente detta *intera*) la situazione cambia radicalmente, perché queste sono in effetti le funzioni più regolari con cui si possa avere a che fare: esse sono di classe \mathcal{C}^∞ , anzi ancora meglio, come vedremo tra breve. Ma quali funzioni possiamo sperare siano olomorfe nel loro dominio? Come visto, lo sono le funzioni razionali del tipo $P(z)/Q(z)$; più in generale, come stiamo per vedere ora, lo saranno tutte e sole quelle definite da serie di potenze convergenti.

Funzioni olomorfe
Funzioni intere

1.3 Serie di potenze e funzioni analitiche

Una *serie di potenze centrata in* $z_0 \in \mathbb{C}$ è una serie del tipo

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

ove i coefficienti a_n sono complessi; è chiaro che, a meno di cambiare le coordinate nel piano di Gauss, non è restrittivo supporre che $z_0 = 0$, ovvero occuparsi di serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Iniziamo con lo studiare come è fatto l'*insieme di convergenza* D_a della serie $\sum a_n z^n$,

Insieme di convergenza

ovvero $D_a = \{z \in \mathbb{C} : \text{la serie } \sum a_n z^n \text{ converge}\}$; a tal fine poniamo

$$r_a := \sup\{|w| : w \in D_a\} \quad (\text{raggio di convergenza di } \sum a_n z^n).$$

Raggio di convergenza

Notiamo che $D_a \neq \emptyset$ (infatti ovviamente $0 \in D_a$), dunque la definizione di r_a ha senso e dà un numero in $[0, +\infty]$.

Proposizione 1.3.1. *La serie $\sum a_n z^n$ converge assolutamente se $|z| < r_a$, e non converge se $|z| > r_a$.*

Dimostrazione. Se $|z| < r_a$, per le proprietà del sup esiste $w \in D_a$ tale che $|z| < |w|$; essendo $|a_n z^n| = |a_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n$ ed essendo la successione $|a_n w^n|$ limitata (è addirittura infinitesima, visto che $\sum a_n w^n$ converge) e $|\frac{z}{w}| < 1$, si conclude per confronto con la serie geometrica. Se invece $|z| > r_a$, di certo $z \notin D_a$. \square

Denotando rispettivamente con $B(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ e con $\overline{B}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ le palle aperte e chiuse nel piano di Gauss di centro 0 e raggio r , abbiamo allora dimostrato che l'insieme di convergenza D_a è compreso tra $B(r_a)$ e $\overline{B}(r_a)$, e che la convergenza è assoluta in tutta $B(r_a)$. Nessuna informazione è invece data in generale per i punti della circonferenza esterna (detta *circonferenza di convergenza*), nei quali si può avere convergenza assoluta (ma allora lo stesso accade per tutti gli altri punti della circonferenza!), o convergenza semplice, o non convergenza, come mostreranno tra breve gli esempi. Prima però notiamo che il calcolo del raggio di convergenza r_a è spesso immediato:

Circonferenza di convergenza

Proposizione 1.3.2. *Se esiste $\ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$, allora $r_a = 1/\ell$ (ove si intende che $r_a = 0$ se $\ell = +\infty$, e che $r_a = +\infty$ se $\ell = 0$).⁽¹⁰⁾*

Dimostrazione. Al fine di applicare il criterio della radice, si tratta di studiare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|}$. Se $0 < \ell < +\infty$ tale limite vale $\ell|z|$, dunque se $\ell|z| < 1$ (ovvero $|z| < 1/\ell$) si ha convergenza assoluta mentre se $|z| > 1/\ell$ non c'è convergenza: ne segue che $r_a = 1/\ell$. Se $\ell = 0$ il limite vale 0 per ogni $z \in \mathbb{C}$, dunque c'è convergenza assoluta per ogni z , il che dice che $r_a = +\infty$. Infine, se $\ell = +\infty$ il limite vale 0 solo se $z = 0$, altrimenti vale $+\infty$: pertanto $D_a = \{0\}$, dunque $r_a = 0$. \square

⁽¹⁰⁾Il risultato più preciso, detto *teorema di Cauchy-Hadamard*, usa la nozione di *limite superiore* (detto anche *massimo limite*), che ricordiamo brevemente. In generale, data una successione di numeri reali c_n , sia E_c l'insieme dei suoi "punti-limite" in $\widetilde{\mathbb{R}}$, ovvero $\gamma \in E_c$ quando esiste una sottosuccessione di c_n che ha come limite γ (si noti che E_c non è mai vuoto: infatti se la successione è illimitata esiste una sottosuccessione che diverge a uno tra $\mp\infty$, mentre se è limitata, come sappiamo, ammette almeno una sottosuccessione convergente): si pone allora $\limsup c_n := \sup_{\mathbb{R}} E_c$ e $\liminf c_n := \inf_{\mathbb{R}} E_c$. A differenza del limite $\lim c_n$, che può non esistere, $\limsup c_n$ e $\liminf c_n$ esistono sempre, e anzi si ha che $\lim c_n$ esiste se e solo se $\limsup c_n = \liminf c_n$ (in tal caso esso coincide col loro valore comune, e ovviamente E_c è costituito dal solo limite). Si dimostra facilmente che $c^* := \limsup c_n$ ha le seguenti proprietà caratteristiche (a-b) (quelle di $c_* := \liminf c_n$ sono le analoghe speculari): (a) $c^* \in E_c$, (b) per ogni $x > c^*$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $c_n < x$ per ogni $n \geq N$. Inoltre ad esempio $\limsup(-c_n) = -\liminf c_n$, e se $c'_n \leq c''_n$ definitivamente allora $\liminf c'_n \leq \liminf c''_n$ e $\limsup c'_n \leq \limsup c''_n$. Diamo un paio di esempi: $\limsup(-1)^n = 1$ e $\liminf(-1)^n = -1$, $\limsup(\frac{n}{n+1} - 2 \sin n) = 3$ e $\liminf(\frac{n}{n+1} - 2 \sin n) = -1$.

Il teorema di Cauchy-Hadamard dice allora che $r_a = 1/\ell$ ove $\ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, e si dimostra facilmente con le proprietà caratteristiche, come vediamo. • Sia $\ell \neq 0$ e $\ell \neq +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell + \varepsilon$ (ovvero $|a_n| < (\ell + \varepsilon)^n$) per ogni $n \geq N$, dunque se $|z| < \frac{1}{\ell + \varepsilon}$ la serie converge assolutamente: poiché ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, concludiamo che se $|z| < \frac{1}{\ell}$ la serie converge assolutamente. Presa poi una sottosuccessione a_{n_k} tale che $(a_{n_k})^{1/n_k}$ converga a ℓ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ vale definitivamente $a_{n_k} > (\ell - \varepsilon)^{n_k}$, dunque se $|z| > \frac{1}{\ell}$ vale $|a_{n_k} z^{n_k}| = |a_{n_k}| |z^{n_k}| > (1 - \frac{\varepsilon}{\ell})^{n_k}$, e ciò mostra che $a_{n_k} z^{n_k}$ non è infinitesima: ma ciò impedisce la convergenza di $\sum a_n z^n$. • I casi $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$ si provano adattando opportunamente i due precedenti argomenti.

Facciamo alcune osservazioni.

- La Proposizione 1.3.2 fornisce un semplice criterio di calcolo, basato sul criterio della radice; notiamo anche che, se la successione a_n è definitivamente non nulla ed esiste $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ in \mathbb{R} , allora per il lemma di Cesaro esiste anche $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ ed è uguale ad esso (il viceversa è falso), dunque per calcolare il raggio di convergenza si può anche usare il criterio del rapporto, se ritenuto più conveniente.
- Il caso delle *serie reali* $\sum a_n x^n$, ove i coefficienti a_n sono reali e $x \in \mathbb{R}$, è incluso in questo quadro generale, nel senso che tale serie reale si pensa indotta dalla serie complessa $\sum a_n z^n$ limitandosi ai soli $z = x$ della retta reale: pertanto, se D_a e r_a sono l'insieme e il raggio di convergenza di $\sum a_n z^n$, per la serie reale $\sum a_n x^n$ si parlerà di *intervallo di convergenza* $D_a \cap \mathbb{R}$, che conterrà $] -r_a, r_a[$ (intervallo aperto su cui c'è convergenza assoluta) e sarà contenuto in $[-r_a, r_a]$.
- Alcune considerazioni sul raggio di convergenza.
 - (1) In generale, una serie $\sum a_n z^n$ con $|a_n| \sim^* n^\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ ha sempre raggio di convergenza 1 (usare il criterio del rapporto); si noti che se $\alpha < -1$ una tale serie converge assolutamente su tutta la circonferenza $|z| = 1$ (per confronto con $\sum n^\gamma$, ove $\alpha < \gamma < -1$).
 - (2) Se $|a_n| \sim^* \alpha^n$ per qualche $\alpha > 0$ allora il raggio di convergenza è $1/\alpha$, senza convergenza sulla circonferenza $|z| = 1/\alpha$.
 - (3) Se invece non esiste $\alpha > 0$ tale che $|a_n| \leq \alpha^n$ definitivamente, allora il raggio di convergenza è 0: tale è il caso ad esempio di $\sum n! z^n$ o di $\sum n^n z^n$.
- Quelle che seguono sono serie di potenze di grande importanza, da (ri)conoscere e saper maneggiare con naturalezza.
 - (1) (*Serie geometrica*) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$ ha raggio di convergenza 1; quando $|z| < 1$ la somma è $\frac{1}{1-z}$, mentre sulla circonferenza $|z| = 1$ non converge mai (i termini non sono infinitesimi).
 - (2) (*Serie esponenziale*) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots$ ha raggio di convergenza $+\infty$; la somma è l'esponenziale complesso $\exp z$, di cui parleremo più diffusamente tra breve.
 - (3) (*Serie logaritmica*) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{1}{2} z^2 + \dots$ ha raggio di convergenza 1. Dimosteremo nella Proposizione 1.4.6 che per $|z| < 1$ la somma è $\log(1+z)$, la funzione che tra breve definiremo come "logaritmo principale complesso"; si può anzi dimostrare⁽¹¹⁾ che sulla circonferenza $|z| = 1$ la serie converge per ogni $z \neq -1$, e grazie al Teorema di Abel 1.3.6 la sua somma è ancora $\log(1+z)$ (così ad esempio vale $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2$: ci ritorneremo più tardi). È comodo anche considerare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{1}{2} z^2 + \dots$, ottenuta dalla precedente cambiando il segno alla serie e a z : in tal caso la somma sarà dunque $-\log(1-z)$, che sulla circonferenza $|z| = 1$ converge per ogni $z \neq 1$.

Serie di potenze reali

Serie geometrica

Serie esponenziale

Serie logaritmica

⁽¹¹⁾usando la teoria delle serie di Fourier, che va oltre i limiti di questo corso.

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ abbia raggio di convergenza $r_a > 0$. Si ha allora $B(r_a) \subset D_a \subset \overline{B}(r_a)$, e resta definita una funzione

$$f_a : D_a \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Mostriamo ora che in $B(r_a)$ (cioè nei punti interni dell'insieme di convergenza) la funzione f_a ha la massima regolarità possibile; e, come è spontaneo pensare, la sua derivata si ottiene “derivando la serie termine a termine”.

Teorema 1.3.3. *La funzione f_a è olomorfa in tutto $B(r_a)$, e la sua derivata complessa è la somma della “serie derivata”, che ha anch'essa lo stesso raggio di convergenza r_a :*

$$f'_a : B(r_a) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f'_a(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Dimostrazione. Sarà svolta in due passi. (1) Iniziamo mostrando che la serie originale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e la sua serie derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza. Denotiamo con r'_a quello della serie derivata. Per tutti gli $n \geq |z|$ si ha $|a_n z^n| = |z| |a_n z^{n-1}| \leq n |a_n z^{n-1}| = |n a_n z^{n-1}|$, e ciò mostra che se la serie derivata converge assolutamente allora anche la serie originale converge assolutamente: in altre parole, che $r'_a \leq r_a$. Viceversa, sia $|z| < r_a$, e sia w tale che $|z| < |w| < r_a$: si ha $|n a_n z^{n-1}| = (\frac{1}{|w|} n |\frac{z}{w}|^{n-1}) |a_n| |w|^n$; osserviamo che al secondo membro la successione in parentesi è limitata (perché infinitesima, essendo $|\frac{z}{w}| < 1$), dunque $|n a_n z^{n-1}| \leq K |a_n w^n|$ per un opportuno $K > 0$, e per confronto ciò implica che la serie derivata converge assolutamente in z , ovvero che $r_a \leq r'_a$. Ne concludiamo che $r'_a = r_a$. (2) Per quanto appena visto, resta definita la funzione $g_a : B(r_a) \rightarrow \mathbb{C}$ data da $g_a(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$: ci resta da mostrare che g_a è la derivata complessa di f_a . Sia dunque $z_0 \in B(r_a)$, e studiamo $\frac{f_a(z) - f_a(z_0)}{z - z_0} - g_a(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1})$. L'espressione in parentesi è nulla per $n = 1$, ed è uguale a $(z - z_0) \sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{k-1} z^{n-k-1}$ per $n \geq 2$: considerato un $r > 0$ con $|z_0| < r < r_a$, per $|z| < r$ si ha $|\sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{k-1} z^{n-k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n-1} k r^{k-1} r^{n-k-1} = \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$, da cui ricaviamo che $|\frac{f_a(z) - f_a(z_0)}{z - z_0} - g_a(z_0)| \leq (\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 |a_n| r^{n-2}) |z - z_0|$: basta allora osservare che la serie in parentesi è convergente (perché $r < r_a$: ragionando come nel passo precedente della dimostrazione si mostra che la serie $\sum n^2 a_n z^n$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum a_n z^n$), dunque il limite per $z \rightarrow z_0$ è nullo, come si voleva. \square

Corollario 1.3.4. *La funzione f_a ha derivate complesse di ogni ordine in $B(r_a)$, date da*

$$(1.1) \quad f_a^{(k)} : B(r_a) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_a^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n z^{n-k},$$

(per $k = 0, 1, 2, \dots$) e, vista come funzione reale, è di classe \mathcal{C}^∞ in $B(r_a)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.3.3 la derivata f'_a è nelle stesse condizioni di f_a , dunque basta applicare ancora il teorema a lei, e così via. L'affermazione sulla classe reale segue dalla Proposizione 1.2.2 anch'essa applicata più volte. \square

In generale, dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dirà *analitica* in Ω se per ogni palla aperta $B \subset \Omega$ esiste una serie di potenze convergente a $f(z)$ per ogni $z \in B$. Per quanto appena detto:

Funzione analitica

Proposizione 1.3.5. *Una funzione analitica è olomorfa; essa ha derivate complesse di ogni ordine e, vista come funzione reale, è di classe \mathcal{C}^∞ . Se è descritta su una palla aperta $B_{z_0}(r) \subset \Omega$ dalla serie di potenze $\sum a_n(z - z_0)^n$, le sue derivate sono date da*

$$f^{(k)} : B_{z_0}(r) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k};$$

in particolare $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, perciò la serie di potenze è univocamente individuata da f .

Facciamo ancora alcune osservazioni.

- È importante notare subito che vale anche il viceversa della Proposizione 1.3.5, cioè *una funzione è olomorfa se e solo se è analitica*⁽¹²⁾; in altre parole, la derivabilità complessa in tutto il dominio implica la sviluppabilità in serie di potenze su *ogni* palla aperta contenuta nel dominio stesso, con tutto quello che ne consegue. Torneremo su questo fatto più tardi (vedi Corollario 6.3.7).
- (*Serie di potenze nel campo reale*) Come già detto, naturalmente si possono considerare serie di potenze $\sum a_n x^n$ a coefficienti a_n reali e variabile x reale, restringendo la variabile z dalla corrispondente serie di potenze complessa $\sum a_n z^n$ ai soli reali; si parlerà anche in questo caso di raggio di convergenza, e l'insieme di convergenza sarà un intervallo di convergenza, con gli estremi inclusi o meno. Le funzioni analitiche saranno, in ambito reale, quelle $f(x)$ che all'intorno di ogni punto ammettono una serie di potenze reale convergente a $f(x)$ per ogni x nell'intorno stesso: è proprio quello che si ottiene restringendo ai reali una funzione analitica complessa. Si noti che rispetto all'analiticità complessa sono calate le pretese, perché ora non si dice più "per ogni palla aperta contenuta nel dominio" ma solo "all'intorno di ogni punto del dominio". Questo indebolimento, dovuto all'incompletezza algebrica dei reali, può dare adito a dubbi se si guarda solo al campo reale senza rendersi conto che si sta restringendo qualcosa che deve vivere anche sul piano complesso, sul quale possono dunque spuntare problemi invisibili nel campo reale.

Funzione analitica
reale

Esempio. La funzione reale $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ può essere sviluppata in serie di potenze all'intorno di $x_0 = 0$, notando che $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$. Tuttavia, a dispetto dell'evidente regolarità di $f(x)$ su tutto l'asse reale, il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ è solo 1. Questo risulterebbe incomprensibile se le cose dovessero funzionare come nei complessi (vedi sopra: si è detto che la derivabilità complessa in tutto il dominio implica la sviluppabilità in serie di potenze su *ogni* palla aperta contenuta nel dominio stesso), ma basta notare che $f(x)$ è indotta sui reali dalla funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, che è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ (i punti $\pm i$ sono invisibili nel campo reale!), dunque la palla aperta di raggio 1 è effettivamente la più grande possibile tra quelle centrate in $z_0 = 0$ che sono contenute nel dominio di f .

- Abbiamo visto che la funzione f_a ha la massima regolarità possibile all'interno dell'insieme di convergenza. Per quanto riguarda invece un punto della circonferenza di

⁽¹²⁾come conseguenza, in analisi complessa i due termini "olomorfo" e "analitico" sono usati in modo indifferente.

convergenza che sta in D_a , il seguente noto risultato di Abel⁽¹³⁾ afferma che f_a è continua lungo il raggio che raggiunge tale punto:

Teorema 1.3.6. (Abel) *Se $|w| = r_a$ e $w \in D_a$, vale $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_a(tw) = f_a(w) = \sum a_n w^n$.*

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ è semplicemente converge per il criterio di Leibniz, dunque $w = 1$ appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$. D'altra parte, una volta dimostrato che per $|z| < 1$ vale $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \log(1+z)$ (logaritmo principale, vedi Proposizione 1.4.6), il Teorema di Abel 1.3.6 dice che $\log 2 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \log(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1.4 L'esponenziale complesso e altre funzioni elementari

L'esponenziale complesso, certamente la più importante funzione della matematica, è stata definita in precedenza come

Esponeziale complesso

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$$

Proposizione 1.4.1. *L'esponenziale complesso gode delle seguenti proprietà.*

- (1) \exp è una funzione intera (significa: olomorfa in tutto \mathbb{C}), e vale $\exp' = \exp$.
- (2) (Proprietà di omomorfismo) Vale $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.
- (3) Per ogni z si ha $\exp z \neq 0$, e vale $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$.
- (4) Vale $\exp z = \lim(1 + \frac{z}{n})^n$. In particolare, se $z = x$ è reale allora $\exp x$ è il noto esponenziale reale (e dunque si userà spesso per $\exp z$ la notazione alternativa e^z).
- (5) Vale $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$ e $|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z}$. In particolare:
 - (i) si ha $|\exp z| = 1$ se e solo se z è immaginario puro (ovvero $z = it$ con $t \in \mathbb{R}$);
 - (ii) se $z = x + iy$ è in forma algebrica, allora $\exp z = e^x e^{iy}$ è la forma polare di $\exp z$.

Dimostrazione. (1) Per la Proposizione 1.3.5 \exp è intera e vale $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp z$. (2) Date due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, la serie prodotto $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è definita tramite $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$.⁽¹⁴⁾ Si può allora dimostrare⁽¹⁵⁾ che:

Lemma 1.4.2. (Convergenza della serie prodotto) *Le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono, con somme s_a e s_b .*

- (a) *Se almeno una delle due converge assolutamente, allora anche $\sum c_n$ converge, con somma $s_c = s_a s_b$.*
- (b) *Se già si sa che anche $\sum c_n$ converge con somma s_c , allora di certo $s_c = s_a s_b$ (senza ulteriori ipotesi).*

⁽¹³⁾per la dimostrazione si veda W. Rudin, "Principi di Analisi Matematica". McGraw-Hill, 1991; §8.1

⁽¹⁴⁾La definizione si comprende meglio se si pensa al caso delle serie di potenze, in cui $a_n = \alpha_n t^n$ e $b_n = \beta_n t^n$: in tal caso c_n è il coefficiente di t^n nel prodotto delle ridotte n -esime delle due serie.

⁽¹⁵⁾si veda ad esempio W. Rudin, "Principi di Analisi Matematica". McGraw-Hill, 1991; §3.13.

La proprietà di omomorfismo ne segue subito ponendo $a_n = \frac{z^n}{n!}$, $b_n = \frac{w^n}{n!}$ e $c_n = \frac{(z+w)^n}{n!}$: basta notare che vale $\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^n \frac{z^j w^{n-j}}{j! (n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = c_n$. (3) Da (2) si ricava $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$, da cui $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$. (4) Il fatto che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim(1 + \frac{z}{n})^n$ si ottiene con una paziente stima della differenza tra le due ridotte $(\sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!}) - (1 + \frac{z}{n})^n = \sum_{j=2}^n (1 - (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{j-1}{n})) \frac{z^j}{j!}$, che si dimostra essere infinitesima in ogni prefissato intorno di 0 (si omettono i dettagli). Ne segue l'affermazione sull'esponenziale reale, definito a suo tempo tramite la successione $\lim(1 + \frac{x}{n})^n$. (5) Si ha $\sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{\bar{z}^j}{j!}$, da cui passando al limite si ottiene $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$. Se ne ricava $|\exp z|^2 = \exp z \cdot \overline{\exp z} = \exp z \cdot \exp \bar{z} = \exp(z + \bar{z}) = e^{2\operatorname{Re} z}$, da cui $|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z}$; quindi (i) ne segue subito, e (ii) segue da (i) e da (4). \square

Si è visto che $|e^{it}| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero, l'esponenziale avvolge l'asse immaginario $i\mathbb{R}$ sulla circonferenza \mathbb{U} dei numeri complessi di modulo 1: in termini più precisi, si ha un morfismo di gruppi

$$e^{it} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{U}, \cdot) \quad (\text{nel senso che } e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} e^{it_2} \text{ per ogni } t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Le funzioni *coseno* $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e *seno* $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono definite nel modo seguente:

Coseno e seno reali

$$\cos t := \operatorname{Re} e^{it} \quad \sin t := \operatorname{Im} e^{it}.$$

Tutta la teoria delle funzioni circolari può essere finalmente costruita in modo rigoroso a partire dalla precedenti definizioni, senza sorprese.

Proposizione 1.4.3. *Le funzioni circolari cos e sin godono delle seguenti proprietà.*

- (1) (Formule di Eulero) $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.
- (2) (Identità fondamentale) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (in particolare, $|\cos t| \leq 1$ e $|\sin t| \leq 1$).
- (3) *Valgono le note formule di addizione, duplicazione etc.*
- (4) *Si hanno i seguenti sviluppi in serie di potenze, con raggio di convergenza infinito:*

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots, \quad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{1}{6}t^3 + \dots.$$

- (5) *Esiste un minimo numero $\pi > 0$ in cui il coseno vale -1 ; vale*

$$e^{it} = 1 \quad \text{se e solo se} \quad t = (2\pi)k \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z},$$

e le funzioni e^{it} , $\cos t$ e $\sin t$ sono periodiche di periodo 2π .

Dimostrazione. (1-2-3) seguono dalla definizione (esempio: $\sin 2t = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = 2 \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = 2 \sin t \cos t$). (4) Si ha $e^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}) + i(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!})$, e anche $e^{it} = \cos t + i \sin t$: basta confrontare parti reali e immaginarie. (5) Seguiamo il ragionamento di G. De Marco⁽¹⁶⁾, basato sulla continuità del coseno, sulla struttura delle serie di seno e coseno e su proprietà algebriche dei morfismi. L'insieme $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, \cos t = 0\}$ è chiuso (il coseno è continuo) e inferiormente limitato, dunque ammette un minimo t_0 , che sarà > 0 perché $\cos 0 = 1$: definiamo $\pi := 2t_0$ (dalla serie di potenze del coseno non è difficile vedere che $1 < t_0 < 2$, dunque $2 < \pi < 4$; con maggior dettaglio si arriva ad approssimare meglio il noto valore di $\pi = 3,14\dots$). Essendo $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$, si ha che $\cos 2t = -1$ se e solo se

⁽¹⁶⁾G. De Marco, "Analisi Uno". Decibel-Zanichelli, 1996; §12.11

$\cos t = 0$, dunque π è il minimo numero positivo in cui il coseno vale -1 . Dall'identità fondamentale si ricava allora $\sin \pi = 0$, dunque $\cos 2\pi = 2 \cos^2 \pi - 1 = 1$ e $\sin 2\pi = 2 \sin \pi \cos \pi = 0$; il numero 2π è inoltre il minimo numero positivo tale che $\cos 2\pi = 1$, perché se ce ne fosse un altro α con $0 < \alpha < 2\pi$ si ricaverebbe (applicando ripetutamente la formula di bisezione, e sfruttando la minimalità di π) che $\cos \frac{\alpha}{2^n} = 1$ per $n \in \mathbb{N}$, il che sarebbe assurdo perché è facile rendersi conto dalla serie del coseno che $\cos t < 1$ quando $|t| < 1$; ragionamenti simili mostrano che π è il minimo zero positivo del seno e che $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, da cui $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ e dunque $e^{-i\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{-1} = -i$. Ora, l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : \cos t = 1\}$ è precisamente il nucleo del morfismo $e^{it} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{U}, \cdot)$ (cioè l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : e^{it} = 1\}$), e l'esistenza di un minimo elemento $2\pi > 0$ con tali proprietà implica algebricamente che tale nucleo è costituito dai multipli interi di tale elemento 2π , come vediamo ora.

Proposizione 1.4.4. *Se un sottogruppo H di $(\mathbb{R}, +)$ ha un minimo elemento positivo α , allora*

$$H = \mathbb{Z}\alpha = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dimostrazione della Proposizione 1.4.4. Poiché $\alpha \in H$ si ha ovviamente $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. D'altra parte sia h un elemento positivo di H : per archimedietà esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\alpha \leq h < (n+1)\alpha$. Se fosse $n\alpha < h$, posto $x = (n+1)\alpha - h$ si avrebbe $0 < x < \alpha$, ma questo sarebbe assurdo perché $x \in H$ (in quanto sia $(n+1)\alpha$ che h stanno in H , e H è sottogruppo additivo di \mathbb{R}) e la minimalità di α verrebbe contraddetta. Se ne ricava che $h = n\alpha$, da cui $H = \mathbb{Z}\alpha$. \square

Infine, vale $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, da cui $e^{i(t+2\pi)} = e^{it} e^{2\pi i} = e^{it}$ per ogni t : in altre parole 2π è un periodo per e^{it} (dunque per $\cos t$ e $\sin t$), e come visto è anche il minimo tra i periodi, perché da un lato $\cos 2\pi = \cos(0 + 2\pi) = 1$, e dall'altro il seno è niente altro che un traslato del coseno (infatti $e^{i(t-\frac{\pi}{2})} = e^{it} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{it}$ da cui $\sin t = \operatorname{Re}(-ie^{it}) = \operatorname{Re}(e^{i(t-\frac{\pi}{2})}) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$). \square

Studiamo ora le fibre dell'esponenziale. A tal fine ricordiamo che, dato $z \in \mathbb{C}^\times$, si definisce $\arg z$ (*argomento principale* di z) come l'unico argomento di z compreso in $]-\pi, \pi]$. L'argomento principale è esprimibile a seconda dei casi nei seguenti modi, che non coprono il solo semiasse reale negativo (ai cui punti viene attribuito convenzionalmente l'argomento π , dunque in essi c'è un salto rispetto al semipiano $\operatorname{Im} z < 0$):

Argomento principale

$$\arg z = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \arcsin\left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) & \text{per } \operatorname{Re} z > 0 \\ \operatorname{arccotg}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{per } \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{arccotg}\left(\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right) - \pi = -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{per } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Proposizione 1.4.5. *Si ha $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$; e la fibra di \exp sopra $w \in \mathbb{C}^\times$ è*

$$\exp^{-1}(w) = \{\log w + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\},$$

ove $\log w$ è il *logaritmo principale* di w (il \log al secondo membro è il *logaritmo reale*):

Logaritmo principale

$$\log w := \log |w| + i \arg w.$$

Dimostrazione. Risolvendo l'equazione $\exp z = w$ nell'incognita $z = x + iy$ si ha $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = w = |w| e^{i \arg w}$, e dal confronto delle forme polari ciò vale se e solo se $e^x = |w|$ e $y = \arg w + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, come asserito. \square

Il *logaritmo complesso* è dunque una funzione a valori multipli, distinti tra loro da traslazioni di $2\pi i$ della parte immaginaria; la scelta del *logaritmo principale* come quello con parte immaginaria in $]-\pi, \pi]$ è la più diffusa ma è puramente convenzionale, e può essere sostituita con una qualunque delle altre *determinazioni* del *logaritmo* (cioè, inverse locali

dell'esponenziale): se $\alpha \in \mathbb{R}$, la restrizione di \exp alla striscia orizzontale $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \in]\alpha - \pi, \alpha + \pi[\}$ è una biiezione sull'immagine $\mathbb{C}^\times \setminus \{re^{i(\alpha+\pi)} : r > 0\}$ (il piano privato della semiretta di argomento $\alpha + \pi$), e la corrispondente determinazione del logaritmo non è altro che la sua inversa. Il logaritmo principale corrisponde alla scelta $\alpha = 0$.

Proposizione 1.4.6. Per $|z| < 1$ la somma della serie logaritmica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ è il logaritmo principale $\log(1+z)$.

Dimostrazione. Detta $h(z)$ la funzione somma della serie logaritmica $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ per $|z| < 1$, si ha $h'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n+1} \frac{z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-z)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z}$ da cui si ottiene $(e^{-h(z)}(1+z))' = -h'(z)e^{-h(z)}(1+z) + e^{-h(z)} = (-h'(z)(1+z) + 1)e^{-h(z)} \equiv 0$, pertanto la funzione $k(z) = e^{-h(z)}(1+z)$ è costante su tutto il disco $B(1)$: avendosi $k(0) = 1$ si avrà dunque $k(z) \equiv 1$ su tutto $B(1)$, ovvero $e^{h(z)} \equiv 1+z$, e questo ci dice che $h(z)$ è effettivamente un logaritmo di $1+z$. Resta da mostrare che $h(z)$ è proprio il logaritmo principale, cioè che $\text{Im } h(z) \subset]-\pi, \pi[$. Ora, $\text{Im } h(z) : B(1) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, dunque la sua immagine sarà un intervallo I di \mathbb{R} contenente $\text{Im } h(0) = 0$; ma tale intervallo I non può contenere né $\frac{\pi}{2}$ né $-\frac{\pi}{2}$ (infatti, se esistesse $z_0 \in B(1)$ tale che $\text{Im } h(z_0) = \mp \frac{\pi}{2}$, essendo $e^{h(z)} = 1+z$ si avrebbe che $1+z_0 = it$ per qualche $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da cui $z_0 = -1+it$ e dunque $|z_0| = \sqrt{1+t^2} > 1$, il che sarebbe assurdo perché $z_0 \in B(1)$ e dunque $|z_0| < 1$), dunque $I \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset]-\pi, \pi[$. \square

Esercizio. Trovare raggio r e insieme di convergenza D , e la somma f delle seguenti serie ($x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$):

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} z^n, \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}, \quad (c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (d) \sum_{n=0}^{+\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n.$$

Risoluzione. (a) Col criterio della radice si trova subito $r = \frac{1}{2}$; per $|z| = \frac{1}{2}$ il termine generale della serie non è infinitesimo, dunque $D = B(\frac{1}{2})$. Per la somma si ha $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n (1 + \frac{1}{n+1}) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2z)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (-2z)^n = \frac{1}{1-(-2z)} + \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (2z)^{n+1} = \frac{1}{1+2z} + \frac{\log(1+2z)}{2z}$. (b) Il criterio del rapporto dà $r = +\infty$, dunque $D = \mathbb{R}$; la somma è $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)!} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} = \frac{1}{x^3} \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{x^3} (e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2)$ (c) Anche in questo caso il criterio del rapporto dà $r = +\infty$, dunque $D = \mathbb{R}$. La somma è $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3}x)^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{3}x)$. Altrimenti, da $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{(2n)!}$ si ricava $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ e $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{3^{m+1} x^{2m}}{(2m)!} = 3 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{3^m x^{2m}}{(2m)!}$, dunque $f(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $y'' = 3y$, che ha soluzioni $y = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}$; essendo poi $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ si ottiene $A = B = \frac{1}{2}$, da cui nuovamente $f(x) = \cosh(\sqrt{3}x)$. (d) La successione $\sqrt[n]{|a_n|} = 3 + (-1)^n$ non ha limite, ma ha limite superiore 4 (e inferiore 2): dunque per Cauchy-Hadamard si ha $r = \frac{1}{4}$. Se $|z| = \frac{1}{4}$ il termine generale della serie non è infinitesimo, dunque $D = B(\frac{1}{4})$. Per la somma si ha $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (16z^2)^n + 2z \sum_{n=0}^{+\infty} (4z^2)^n = \frac{1}{1-16z^2} + \frac{2z}{1-4z^2}$.

È possibile definire le funzioni circolari (\cos e \sin) e iperboliche (\cosh e \sinh) su tutto \mathbb{C} , in modo naturale:

Funzioni circolari e iperboliche complesse

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si noti che vale $\cosh z = \cos(iz)$ e $\sinh z = -i \sin(iz)$: dunque in ambito complesso le funzioni iperboliche non aggiungono nulla di nuovo rispetto alle circolari, essendo ottenute da queste ultime tramite una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ della variabile. Va notato che tali funzioni non saranno più limitate, come accade per le circolari sui reali: in effetti sull'asse immaginario si ha $\cos(it) = \cosh t$ e $\sin(it) = i \sinh t$, dunque $\lim_{t \rightarrow \infty} |\cos(it)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\sin(it)| = +\infty$. Possono essere utili anche queste espressioni delle forma algebriche (si intende che $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$):

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cosh y + i(-\sin x \sinh y), & \sin z &= \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y), \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + i(\sinh x \sin y), & \sinh z &= \sinh x \cos y + i(\cosh x \sin y). \end{aligned}$$

Esercizio. Si risolvano le equazioni $\cos z = -5$ e $\sin(2z - i) = i$.

Risoluzione. L'equazione $\cos z = -5$ equivale a $e^{iz} + e^{-iz} = -10$, ovvero (posto $w = e^{iz}$) a $w^2 + 10w + 1 = 0$ che dà $w = -5 \mp 2\sqrt{6} = (5 \pm 2\sqrt{6})e^{i\pi}$, ovvero $iz = \log(5 \pm 2\sqrt{6}) + i(\pi + 2k\pi)$, ovvero $z = \pi + 2k\pi - i \log(5 \pm 2\sqrt{6}) = \pi + 2k\pi + i \log(5 \mp 2\sqrt{6})$ con $k \in \mathbb{Z}$. • Posto $w = 2z - i$, l'equazione $\sin(2z - i) = i$ equivale a $e^{iw} - e^{-iw} = -2$, cioè (posto $\zeta = e^{iw}$) a $\zeta^2 + 2\zeta - 1 = 0$, che dà $\zeta_1 = -1 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)e^{i\pi}$ oppure $\zeta_2 = -1 + \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)e^{i0}$, cioè $iw = \log(\sqrt{2} + 1) + i(\pi + 2k\pi)$ oppure $iw = \log(\sqrt{2} - 1) + i(2k\pi)$, cioè (essendo $iw = 1 + 2iz$) le soluzioni $z = \frac{\pi}{2} + k\pi + i \frac{1 - \log(\sqrt{2} + 1)}{2}$ oppure $z = k\pi + i \frac{1 - \log(\sqrt{2} - 1)}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Si può anche definire la potenza complessa come funzione a valori multipli: se $z, w \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, si pone

Potenza complessa

$$z^w := \{ \exp(w(\log z + 2k\pi i)) = \exp(w \log z) \cdot \exp(2k\pi iw), k \in \mathbb{Z} \},$$

ove $\log z$ è il logaritmo principale di z . Tutte le determinazioni di z^w si ottengono dunque moltiplicando la determinazione principale $\exp(w \log z)$ per i vari numeri $\exp(2k\pi iw)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Per evitare equivoci, nel caso particolare in cui $z = e = \exp 1$ (il numero di Nepero), col simbolo e^w si intende per convenzione —se non altrimenti specificato— solo il numero complesso $\exp w$, e non una delle possibili (pure esistenti) altre determinazioni.

Proposizione 1.4.7. (Proprietà della potenza complessa)

- (a) Se $w = r \in \mathbb{Z}$, tutte le determinazioni di z^w sono uguali alla nota potenza intera z^r .
- (b) Se $w = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, le determinazioni di z^w sono le s radici s -esime di z^r .
- (c) Se $w \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni di z^w sono un'infinità numerabile.
- (d) Se $w \in \mathbb{R}$, tutte le determinazioni di z^w hanno lo stesso modulo.
- (e) Se $w \in i\mathbb{R}$, tutte le determinazioni di z^w hanno lo stesso argomento.

Dimostrazione. (a) Se $w = r \in \mathbb{Z}$ allora $\exp(2k\pi ir) = 1$. (b) Se $w = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ allora $\exp(2k\pi i \frac{r}{s})$ descrive le s radici s -esime dell'unità (basta limitarsi a $k = 0, 1, \dots, s - 1$) e dunque le determinazioni di $z^{\frac{r}{s}}$ sono le s radici s -esime di z^r . (c) Se $w \notin \mathbb{Q}$ allora i numeri $\exp(2k\pi iw)$ sono tutti distinti al variare di $k \in \mathbb{Z}$. (d) Se $w \in \mathbb{R}$ si ha $|\exp(2k\pi iw)| = 1$. (e) Se $w \in i\mathbb{R}$ si ha $\exp(2k\pi iw) \in \mathbb{R}_{>0}$. \square

Esercizio. Risolvere i seguenti quesiti sulle potenze complesse.

- (a) Si trovino le determinazioni di $\sqrt{2}^{-i}$ e di $i^{-\sqrt{2}}$.
 (b) Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che -1 è la determinazione principale di i^z ; più in generale, dire per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che -1 è una delle determinazioni di i^z .
 (c) Stesse domande per z^i in luogo di i^z .

Risoluzione. (a) Si ha $\sqrt{2}^{-i} = \exp(-i(\log \sqrt{2} + 2k\pi i)) = e^{2k\pi} e^{(-\frac{1}{2} \log 2)i}$ (multipli positivi del numero di modulo 1 e argomento $-\frac{1}{2} \log 2$), e $i^{-\sqrt{2}} = \exp(-\sqrt{2}(\log i + 2k\pi i)) = \exp(-\sqrt{2}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i)$ (famiglia di numeri di modulo 1). (b) La determinazione principale di i^z è $e^{z \log i} = e^{zi \frac{\pi}{2}}$: essa è uguale a $-1 = e^{i\pi}$ quando $zi \frac{\pi}{2} = i\pi + 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero quando $z = 2 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Più in generale, le determinazioni di i^z sono $e^{z \log i} = e^{zi(\frac{\pi}{2} + 2h\pi)}$ al variare di $h \in \mathbb{Z}$: una di esse sarà uguale a $-1 = e^{i\pi}$ quando $zi(\frac{\pi}{2} + 2h\pi) = i\pi + 2k\pi i$ per qualche $h, k \in \mathbb{Z}$, ovvero quando $z = \frac{2+4k}{1+4h}$ con $h, k \in \mathbb{Z}$ (dunque $z = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ con r qualsiasi intero pari congruo a 2 modulo 4 e s qualsiasi intero dispari positivo: in effetti si ha $i^z = 1$ quando si fa una radice dispari di una potenza pari di i di esponente non divisibile per 4, ovvero quando si fa una radice dispari di -1). (c) La determinazione principale di z^i è $e^{i \log z} = e^{i(\log |z| + i \arg z)} = e^{-\arg z + i \log |z|}$: essa è uguale a $-1 = e^{i\pi}$ quando $-\arg z = 0$ e $\log |z| = \pi + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero quando $z = e^{(1+2k)\pi} \in \mathbb{R}_{>0}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Più in generale, le determinazioni di z^i sono $e^{i(\log z + 2h\pi i)} = e^{(-\arg z + 2h\pi) + i \log |z|}$ al variare di $h \in \mathbb{Z}$: una di esse sarà uguale a $-1 = e^{i\pi}$ quando $\arg z = 2h\pi$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$ e $\log |z| = \pi + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, il che forza $h = 0$ e dunque $z = e^{(1+2k)\pi} \in \mathbb{R}_{>0}$ con $k \in \mathbb{Z}$, come prima.

Domande e risposte

01. D. Si è detto che una funzione in \mathbb{C} si dirà derivabile in senso complesso se essa è differenziabile e risolve un sistema di equazioni con derivate, mentre per una funzione in \mathbb{R}^2 abbiamo l'implicazione inversa (ovvero differenziabilità implica derivabilità), l'esatto opposto. Mi potrebbe spiegare in cosa consiste questa differenza?

R. Io ho definito una funzione $f(z)$ come derivabile in senso complesso in un certo punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ se in quel punto esiste il limite del rapporto incrementale *complesso* $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$; poi ho dimostrato che la funzione è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se, vista come funzione di \mathbb{R}^2 in sè (interpretando $z = x + iy$ come la coppia (x, y)), essa è differenziabile in (x_0, y_0) e soddisfa al sistema di Cauchy-Riemann. Il fatto che la derivabilità *complessa* in un punto implichi la differenziabilità reale in quel punto (mentre come noto la derivabilità reale in un punto rispetto alle varie direzioni non la implica affatto, ma ne è solo implicata) non dovrebbe sorprendere più di tanto: infatti l'esistenza del limite del rapporto incrementale complesso è molto più impegnativa di quella del limite del rapporto incrementale reale (nel complesso la variabile ha una libertà ben maggiore che nel reale) ed è anzi più impegnativa del limite che definisce la differenziabilità: infatti, in quest'ultimo, a denominatore tutto viene "banalizzato" con la distanza $\|z - z_0\| = |z - z_0|$ e dunque si perde un po' d'informazione sulla direzione; mentre, nel limite complesso, a denominatore c'è proprio il numero complesso $z - z_0$ in carne e ossa (in questo senso, la condizione di Cauchy-Riemann offre proprio la necessaria "compatibilità tra derivate direzionali" che permette di passare dalla differenziabilità reale alla derivabilità complessa). Abbiamo parlato finora di derivabilità al punto: se vogliamo poi passare alla derivabilità in tutto il dominio, tale è la forza della condizione di esistenza della derivata complessa che, come abbiamo visto, se la funzione è olomorfa (cioè

derivabile in senso complesso in *tutti* i punti del suo dominio, non solo in un z_0) allora essa è addirittura analitica, in particolare derivabile infinite volte in senso sia reale che complesso su ogni palla contenuta nel suo dominio.

02. D. *Non ho capito bene cosa può succedere sui punti della circonferenza di convergenza, soprattutto in riferimento alla convergenza assoluta.*

R. Sui punti della circonferenza di convergenza ci può essere convergenza semplice o assoluta, o non convergenza. Per quanto riguarda però la convergenza assoluta, se c'è in un punto c'è anche in tutti gli altri: ciò è ovvio dalla definizione stessa di convergenza assoluta (se r è il raggio di convergenza, per tutti i punti della circonferenza di convergenza la serie dei moduli $\sum |a_n z^n|$ diventa $\sum |a_n| r^n$, dunque converge o per tutti o per nessuno).

03. D. *In un esercizio si è detto che se due serie di potenze $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ hanno raggio di convergenza r_a e r_b , allora la serie somma $\sum (a_n + b_n) z^n$ ha raggio di convergenza $r_{a+b} = \min\{r_a, r_b\}$. Tuttavia, se $r_a = r_b$ la cosa non mi pare sempre vera: molto banalmente, se $b_n = -a_n$ la serie somma (che è zero) ha raggio di convergenza $+\infty$ indipendentemente da quanto valevano $r_a = r_b \dots$*

R. Lei ha ragione. In generale si dimostra che vale sempre $r_{a+b} \geq \min\{r_a, r_b\}$, mentre il viceversa si dimostra solo nel caso in cui r_a e r_b sono diversi tra loro: questo non è strano, perché nel caso in cui $r_a = r_b$ può accadere quello che cita lei. Dunque: se $r_a \neq r_b$ allora $r_{a+b} = \min\{r_a, r_b\}$; mentre se $r_a = r_b =: r$, in generale si può dire solo che $r_{a+b} \geq r$.

04. D. *Mettiamo che una serie di potenze abbia raggio di convergenza $r > 0$ (eventualmente $+\infty$), e sia $f(z)$ la sua somma. Se io sviluppo $f(z)$ in serie di Taylor in un punto $z_0 \in B(r)$ diverso da 0 come insegnato a lezione (cioè $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$), come diventa il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$?*

R. La domanda, così com'è formulata, è piuttosto ingannevole. La funzione somma $f(z)$ ha senso ed è definita solo in $B(r)$, dunque il raggio di convergenza (stavolta centrato in z_0) della serie di Taylor in $z_0 \in B(r)$ dovrà avere raggio di convergenza che non faccia uscire da $B(r)$, ovvero $r - |z_0|$. D'altra parte, però, una volta che si sia riusciti a scrivere $f(z)$ in forma finita (cioè, non più come serie) ci si potrebbe accorgere che $f(z)$ è interpretabile come funzione olomorfa su un aperto Ω ben più grande di $B(r)$ (ricordiamo che comunque tale forma finita coincide con la somma della serie data in partenza solo su $B(r)$), e dunque, come detto, essa è sviluppabile in serie di potenze su tutta la più grande palla aperta centrata in z_0 e contenuta in Ω : e il raggio di convergenza di tale serie potrebbe allora essere molto maggiore di $r - |z_0|$. Ad esempio, sappiamo che per la serie geometrica $\sum_{n \geq 0} z^n$ la somma è $f(z) = \frac{1}{1-z}$ sulla palla aperta unitaria $B(1)$. Tuttavia la funzione in forma finita $f(z) = \frac{1}{1-z}$, che coincide solo su $B(1)$ con la somma della serie, è olomorfa non solo in $B(1)$ ma in tutto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, dunque la sua serie di Taylor centrata in un punto $z_0 \in B(1)$ (ma a questo punto potremmo dire: centrata in un qualsiasi punto $z_0 \neq 1$) avrà raggio di convergenza pari alla distanza di z_0 da 1, ovvero $|1 - z_0|$, che per gli $z_0 \in B(1)$ è in generale ben maggiore di $1 - |z_0|$. In effetti la derivata k -esima di $f(z) = \frac{1}{1-z}$ è $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$, dunque la serie di Taylor di $f(z)$ in $z_0 \neq 1$ è $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$, che ha raggio di convergenza esattamente $|1 - z_0|$.

05. D. *Non ho capito come si comporta l'indice della serie dopo l'operazione di derivata. Devo*

ricontrollare ogni volta i primi termini della serie? C'è un metodo “veloce per capire se può rimanere lo stesso indice della prima serie o se devo per forza aumentarlo di 1?”

R. La serie derivata di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$ è sempre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$, punto e basta (stesso indice di partenza): dunque ad esempio, la derivata di $\sum_{n=3}^{+\infty} n z^n$ è $\sum_{n=3}^{+\infty} n^2 z^{n-1}$ (che, riscaldando n , si può anche scrivere come $\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)^2 z^n$). Tuttavia, nel caso in cui la somma parta dall'indice zero (cioè $n_0 = 0$) si usa scrivere che la serie derivata di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$: rispetto a scrivere $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ non cambia nulla (l'addendo con $n = 0$ è nullo), solo che si evita lo sgradevole effetto di far apparire anche solo visivamente che per $n = 0$ venga una potenza negativa di z (cioè $z^{-1} = \frac{1}{z}$), che ci farebbe uscire dalla teoria della serie di potenze “di Taylor” o “olomorfe” (in cui appaiono sviluppi con potenze ≥ 0 , di cui ci stiamo occupando) e ci farebbe entrare in quella delle serie di potenze “di Laurent” o “meromorfe” (in cui appaiono sviluppi con potenze intere, dunque anche a esponente negativo, che non abbiamo modo di affrontare per mancanza di tempo). Morale: si parte sempre da n_0 anche con la serie derivata, ma poi si cerca di far partire la somma dal primo indice utile, eliminando quelli iniziali che danno addendi nulli.

06. D. Alla luce di quanto visto fino ad ora sulle serie di potenze nello spazio complesso, mi sorge un dubbio. Se r è il raggio di convergenza per una serie di potenze, allora, per dimostrare che, per $|z| = r$, la serie non converge, come bisogna procedere? Mi riferisco in particolare all'esercizio delle sue dispense con $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} z^n$. Il fatto è che solo mettendo un valore reale al posto di z — es. $z = \frac{1}{2}$ — mi rendo conto del fatto che, effettivamente, quella determinata serie non converge. Ma allora come faccio a dire che su tutta la circonferenza la serie non converge — per esempio, va bene considerare il modulo del termine generale della serie?

R. Come già detto, a priori il comportamento della serie di potenze sulla “circonferenza di convergenza” $|z| = r$ può variare punto per punto, tranne che per un fatto: la convergenza assoluta o va bene per tutti questi punti, o per nessuno. La prima cosa da fare è allora guardare la serie dei moduli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n z^n|$ sulla circonferenza $|z| = r$, in cui questa serie diventa $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| r^n$. Se tale serie converge, tutto è chiaro: ci sarà convergenza assoluta su tutti i punti con $|z| = r$. Anche nel caso in cui il termine generico $|a_n| r^n = |a_n z^n|$ non è infinitesimo (è quello che accade quando $|z| = \frac{1}{2}$ nella serie che mi ha ricordato sopra), tutto è chiaro: infatti allora non può essere infinitesimo nemmeno $a_n z^n$, e dunque nemmeno la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$ può convergere, per nessun z tale che $|z| = r$. Resta solo il caso dubbio in cui la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| r^n$ non converge ma il termine generale $|a_n| r^n = |a_n z^n|$ è comunque infinitesimo: in tal caso per $|z| = r$ non ci può essere convergenza assoluta, ma la questione non è chiusa, perché in questi punti ci potrebbe essere convergenza semplice o non convergenza, a priori senza alcuna relazione tra ciò che accade in un punto e ciò che accade negli altri. È quello che accade per la serie logaritmica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n = z + \frac{1}{2} z^2 + \dots$: in questo caso, se $|z| = 1$ la serie dei moduli diventa l'armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, che diverge a $+\infty$ ma con termine generale infinitesimo. Dunque siamo certi solo del fatto che in nessun punto con $|z| = 1$ ci può essere convergenza assoluta; per il resto, nebbia. Andiamo un po' a tentativi per vedere che succede. Se $z = 1$ la serie diverge, e se $z = -1$ converge semplicemente (Leibniz). E per tutti gli altri? Proviamo ad esempio con $z = i$. La ridotta $4k$ -esima è $\sum_{n=1}^{4k} \frac{1}{n} i^n = (\sum_{n=1}^k \frac{1}{4n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{4n-2}) + i(\sum_{n=1}^k \frac{1}{4n-3} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{4n-1}) = -2 \sum_{n=1}^k \frac{1}{4n(4n-2)} + 2i \sum_{n=1}^k \frac{1}{(4n-1)(4n-3)}$, il cui limite per $k \rightarrow +\infty$ converge (entrambe le ridotte della parte reale e immaginaria sono $\sim^* \frac{1}{n^2}$), dunque pare probabile che ci sia convergenza semplice. In effetti, come detto a lezione, la teoria (che non tratteremo) delle serie di Fourier mostra che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge semplicemente per ogni z tale che $|z| = 1$ e $z \neq 1$ (con somma $-\log(1-z)$ ove \log è il logaritmo principale), ma dobbiamo accettarlo sulla fiducia, perché con le nostre conoscenze attuali non siamo in grado di provarlo.

07. D. Quali sono i particolari accorgimenti da seguire quando, una volta calcolata la serie derivata con relativa somma, si deve risalire alla somma della serie originaria integrando?

R. Se ci si limita alla serie reale e ai punti interni dell'intervallo di convergenza, nessuno: si tratta tipicamente di fare il solito integrale di funzione reale, e di determinare la costante d'integrazione tramite il valore della serie di potenze in $x = 0$. Nel caso complesso serve più attenzione, ma, come detto, durante il corso non abbiamo tempo di soffermarci su questi punti che richiederebbero una trattazione più approfondita delle funzioni olomorfe. L'idea è comunque che bisogna restare sempre all'interno della palla di convergenza limitandosi all'integrazione indefinita (ricerca di una primitiva), e in ogni caso, se si vuole ragionare oltre, rimanendo su domini semplicemente connessi. Un esempio per capirci. La serie $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ ha, per $|z| < 1$, derivata $f'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}$; quest'ultima espressione, vista in sè e per sè, definisce una funzione su tutto $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, e indubbiamente $\log(1+z)$ (logaritmo principale) come ci si attende, è una sua primitiva (nel senso che è una sua antiderivata), ma non si può dire che $\log(1+z)$ è una primitiva di $\frac{1}{1+z}$ su tutto $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, in effetti $\log(1+z)$ non è olomorfa su tutto $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Si può solo dire che in $B(1)$ la somma $f(z)$ della serie originaria è del tipo $\log(1+z) + k$, ed essendo $f(0) = 0$ è in realtà $k = 0$; in realtà ci si potrebbe spingere anche a dire che $\log(1+z)$ è una primitiva di $\frac{1}{1+z}$, ma solo sull'aperto semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq -1\}$.

2 Integrazione generalizzata

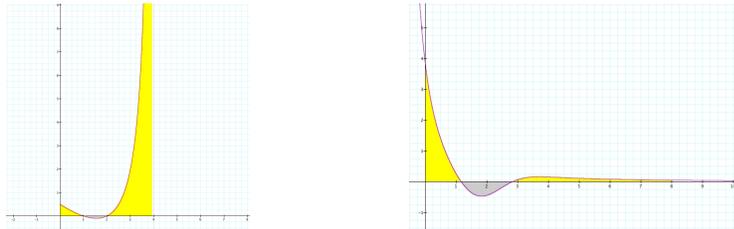
Una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), si dice essere *integrabile (alla Riemann) su $[a, b[$ in senso generalizzato* (d'ora in poi scriveremo solo "in s.g.", o lo ometteremo), o anche *in senso improprio*, se

Integrabilità in s.g.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \quad \text{esiste finito in } \mathbb{R}.$$

In tal caso, il valore finito del limite si indicherà con $\int_a^b f(x) dx$, e si dirà anche che *l'integrale generalizzato (o improprio) $\int_a^b f(x) dx$ converge*. D'altra parte, f si dice *assolutamente integrabile in s.g. (o sommabile)* se $|f|$ è integrabile in s.g.. Trattandosi di proprietà locali in b^- , che non cambiano se al posto di a scegliamo un altro $c \in [a, b[$,⁽¹⁷⁾ si usa dire più semplicemente che f è *integrabile (o assolutamente integrabile) in s.g. in b^-* .

Assoluta integrabilità in s.g.



L'integrazione generalizzata studia la convergenza di integrali su intervalli non compatti di \mathbb{R} : (a) su $[0, 4[$, (b) su $[0, +\infty[$.

⁽¹⁷⁾ Infatti $\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt$, e il limite per $x \rightarrow b^-$ del primo membro è finito se e solo se lo è quello del secondo membro.

Come per le serie numeriche, anziché calcolare precisamente il valore di tale limite (il che richiederebbe il calcolo di una primitiva, cosa spesso impossibile in termini elementari) spesso interessa solo sapere se esso esiste finito o no. Chiaramente una definizione analoga vale per l'integrabilità generalizzata (in c^+ , con $-\infty \leq c < d \leq +\infty$) di una funzione localmente integrabile su $]c, d]$; e una funzione localmente integrabile su $]c, d[$ (aperto, con $-\infty \leq c < d \leq +\infty$) si dirà integrabile in s.g. su $]c, d[$ se essa lo è separatamente sia in c^+ che in d^- , e in tal caso, preso un qualsiasi $a \in]c, d[$, si porrà

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^d f(x) dx = \lim_{x \rightarrow c^+} \int_x^a f(t) dt + \lim_{y \rightarrow d^-} \int_a^y f(t) dt.$$

Pertanto ci si può limitare al solo studio dell'integrabilità generalizzata in b^- di una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Proposizione 2.0.8. (Linearità) *Se $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni integrabili in b^- , allora lo è anche la funzione $\lambda f + \mu g$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e vale*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Dimostrazione. Discende dalla linearità dell'integrale di Riemann e del limite. □

Esempi. (1) La funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in 0^+ ma non in $+\infty$: infatti vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{t})_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{x}) = 2 \in \mathbb{R}$ mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t})_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} - 2) = +\infty$. Similmente si vede che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in $+\infty$ ma non in 0^+ , mentre $\frac{1}{x}$ non è integrabile ne' in 0^+ ne' in $+\infty$. (2) Usando sempre la definizione (e ricordando che $\int \log t dt = t(\log t - 1) + k$) si nota che $\log x$ è integrabile in 0^+ ma non in $+\infty$. (3) La funzione $\sin x$ non è integrabile a $+\infty$ secondo la definizione data: infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\cos t)_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cos x)$ non esiste. (4) Negli casi precedenti la risposta è stata data solo dopo aver calcolato una primitiva: dunque, ad esempio, per ora non sapremmo dire nulla sull'integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ a $+\infty$. Tuttavia, come accennato, bisognerà saper determinare l'integrabilità di una funzione anche senza calcolare esplicitamente una sua primitiva.

Se f non cambia segno all'intorno di b^- (ovvero, esiste un intorno di b^- in cui f è sempre ≥ 0 , o sempre ≤ 0) lo studio dell'integrabilità di f in b^- equivale a quello dell'assoluta integrabilità:⁽¹⁸⁾ dunque, ciò che si può dire per l'integrabilità in b^- delle funzioni ≥ 0 vale anche per le funzioni f che non cambiano segno all'intorno di b^- , considerando eventualmente $-f$ al posto di f . Nel seguito divideremo allora la trattazione in due casi distinti:

- (1) $f \geq 0$ all'intorno di b^- ; (2) f oscilla⁽¹⁹⁾ all'intorno di b^- .

2.1 Integrazione generalizzata delle funzioni positive

È di grande importanza iniziare notando che:

⁽¹⁸⁾Se $f \geq 0$ all'intorno di b^- ciò è ovvio (ivi vale $f = |f|$); se invece $f \leq 0$, è chiaro che f è integrabile in b^- se e solo se lo è $-f \geq 0$, dunque se e solo se $-f$ è assolutamente integrabile: ma $|-f| = |f|$.

⁽¹⁹⁾Nel seguito, per "oscilla" si intende "non esiste alcun intorno di b^- su cui f abbia segno costante".

Proposizione 2.1.1. La potenza x^α è integrabile in 0^+ (più generalmente, $(x - c)^\alpha$ è integrabile in c^+) se e solo se $\alpha > -1$, ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.

Dimostrazione. Una primitiva è $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ($\alpha \neq -1$) o $\log x$ ($\alpha = -1$): la tesi segue per calcolo diretto. \square

La Proposizione 2.1.1, usata in combinazione col seguente teorema, risolve gran parte delle questioni di integrabilità generalizzata di funzioni positive.

Teorema 2.1.2. Siano $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ due funzioni localmente integrabili positive.

- (i) (Criterio del confronto) Sia $0 \leq f \leq g$ all'intorno di b^- (ad es. sia $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$). Se g è integrabile in b^- , allora lo è anche f ; se f non è integrabile in b^- , allora non lo è nemmeno g .
- (ii) (Criterio di asintoticità) Se $f \sim_{b^-}^* g$,⁽²⁰⁾ allora f è integrabile in b^- se e solo se lo è g .

Dimostrazione. (i) Le funzioni integrali $\int_a^x f(t) dt$ e $\int_a^x g(t) dt$ sono monotone crescenti perché $f, g \geq 0$, dunque il loro limite in b^- esiste (finito o $+\infty$); e per l'isotonia dell'integrale si ha $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$. Basta allora applicare il teorema del confronto per i limiti. (ii) Per definizione esistono $\lambda > 0$ e una funzione σ infinitesima in b^- tali che $g = (\lambda + \sigma)f$: per definizione di limite, esiste dunque un intorno di b^- in cui $\frac{\lambda}{2} f \leq g \leq \frac{3\lambda}{2} f$. Il risultato segue allora dal criterio del confronto. \square

Da questi criteri segue subito la risposta per due situazioni piuttosto evidenti.

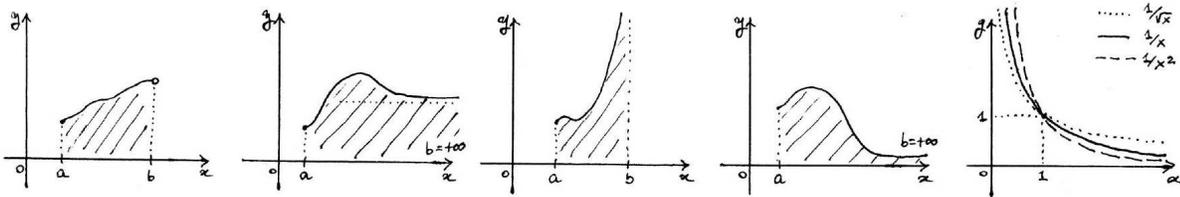
Corollario 2.1.3. Sia $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (con $a < b \leq +\infty$) una funzione localmente integrabile positiva tale che esista (finito o infinito) il limite $\ell = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

- (i) Se $b \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, allora f è integrabile in b^- .
- (ii) Se $b = +\infty$ e $\ell \neq 0$, allora f non è integrabile in $+\infty$.⁽²¹⁾

Dimostrazione. Chiaramente una funzione costante non nulla è integrabile in $b^- \in \mathbb{R}$ e non integrabile in $b = +\infty$. Ciò detto, si usi il criterio del confronto: (i) se $\ell = 0$, con la costante 1; se invece $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, con la costante $\frac{3}{2}\ell$; (ii) se $\ell = +\infty$, con la costante 1; se invece $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, con la costante $\frac{1}{2}\ell$. \square

Nel caso in cui $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ esista in $\widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, i soli casi realmente interessanti sono pertanto:

- (1) $b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$;
- (2) $b = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.



⁽²⁰⁾Ricordiamo che il simbolo $f \sim_{b^-}^* g$ significa che f è dello stesso ordine di g in b^- , ovvero che esiste $\lambda > 0$ tale che $f \sim_{b^-} \lambda g$; se $g \neq 0$ all'intorno di b^- (escluso eventualmente b) ciò equivale al fatto che $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito e > 0 .

⁽²¹⁾Ma non è vero che se f non è infinitesima a $+\infty$, allora non è integrabile in $+\infty$: ad esempio, se $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ è definita come 1 sugli intervalli $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ e 0 altrove, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste ma $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$.

(a) (b) La prima funzione è ovviamente integrabile in b^- , e la seconda ovviamente non lo è in $b = +\infty$. (c) (d) La terza e la quarta sono i casi interessanti. (e) Le potenze $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ nell'integrabilità a 0^+ e a $+\infty$.

Esempi. (1) La funzione $f(x) = e^{-x}$ decresce molto rapidamente a 0^+ quando $x \rightarrow +\infty$: è dunque naturale pensare che debba essere integrabile a $+\infty$. Ed infatti lo è, per il criterio del confronto: $g(x) = \frac{1}{x^2}$ lo è, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Il calcolo dà $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = (-e^{-x})_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) - (-e^{-1}) = 0 - (-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$. **(2)** La funzione pari $f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile a $\pm\infty$ (ad esempio, lo è a $+\infty$ per confronto con e^{-x}). In questo caso non si riesce a calcolare una primitiva di $f(x)$ in forma elementare, e dunque sembrerebbe impossibile calcolare ad esempio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$; il valore di tale integrale, detto *integrale di Gauss*, è comunque noto e vale $\sqrt{\pi}$ (il calcolo sarà effettuabile con gli strumenti del calcolo integrale in più variabili). **(3)** La funzione $f(x) = \frac{2x}{3x^2-5}$ non è integrabile a $+\infty$: infatti $g(x) = \frac{1}{x}$ non lo è, ed essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2-5} = \frac{2}{3} \neq 0$ basta applicare il criterio di asintoticità. **(4)** La funzione $f(x) = \log x$ è continua, dunque localmente integrabile, in $]0, +\infty[$, ed ha segno costante sia all'intorno di 0^+ che di $+\infty$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log x}{1/\sqrt{x}} = 0$, $f(x)$ è integrabile in 0^+ ; infine, poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, essa non è integrabile in $+\infty$. **(5)** La funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è localmente integrabile in $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, ed ha segno costante all'intorno di 0^+ , 1^- , 1^+ e $+\infty$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{\log x}) = 0$, $f(x)$ è integrabile in 0^+ . Ricordando che $\log x \sim_1 (x-1)$, si ha $f(x) \sim_1 \frac{1}{x-1}$ e dunque $f(x)$ non è integrabile in 1^\mp per il criterio di asintoticità (perché non lo è nemmeno $\frac{1}{x-1}$). Infine, $f(x)$ non è integrabile a $+\infty$ per il criterio del confronto, in quanto $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non lo è, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$. **(6)** La funzione $f(x) = \frac{4}{3x\sqrt{x-1}}$ è integrabile a $+\infty$ perché è dello stesso ordine di $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, che lo è (si noti che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{3} \neq 0$). **(7)** La funzione $x^\alpha |\log x|^\beta$, definita e continua su $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$ (e β qualunque) o se $\alpha = -1$ e $\beta < -1$; è integrabile in 1^\mp se e solo se $\beta > -1$; infine, è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$ (e β qualunque) o se $\alpha = -1$ e $\beta < -1$. **(8)** La funzione $x^\alpha e^{\beta x}$, definita e continua su $]0, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$ (e β qualunque), ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < 0$ (e α qualunque), o se $\beta = 0$ e $\alpha < -1$. **(9)** Nell'integrazione generalizzata, la formula di sostituzione non dà problemi (nel senso che, sostituendo $x = \phi(t)$ con $a = \phi(c)$ e $b = \phi(d)$, l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ converge in b se e solo se $\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t) dt$ converge in d), mentre la formula per parti va usata con cautela, nel senso che la convergenza di $\int_a^b F(x)g(x) dx$ in b equivale a quella di $\lim_b (F(x)G(x) - \int_a^x f(t)G(t) dt)$, ma quest'ultima non equivale alla convergenza di ciascuno dei due limiti $\lim_b F(x)G(x)$ e $\lim_b \int_a^x f(t)G(t) dt$ che, presi separatamente, potrebbero non convergere. Ad esempio, l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^3} dx$ converge (infatti $\frac{\log x}{(x+1)^3} \sim_0 \log x$ e $\frac{\log x}{(x+1)^3} \sim_{+\infty} \frac{\log x}{x^3} = x^{-3} \log x$); volendolo però calcolare per parti, se si scrive $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^3} dx = (-\frac{\log x}{2(x+1)^2})_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x(x+1)^2} dx$ si ottiene un'espressione priva di senso, perché $\lim_0 (-\frac{\log x}{2(x+1)^2}) = +\infty$ e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x(x+1)^2} dx$ non converge in 0 . Bisogna invece calcolare $\int \frac{\log x}{(x+1)^3} dx = -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \int \frac{1}{2x(x+1)^2} dx = -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}) dx = -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} (\log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1})$ e poi sottrarre i limiti del secondo membro in $+\infty$ e 0^+ , ottenendo $(0) - (\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ (la funzione integranda è negativa in $]0, 1[$ e positiva in $]1, +\infty[$, con prevalenza della prima area).

È da notare anche il seguente

Proposizione 2.1.4. (Criterio di convergenza assoluta per le serie numeriche) *Sia $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una funzione decrescente e positiva. Allora la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ è convergente se e solo se f è integrabile in s.g. in $+\infty$. Inoltre, in questo caso, l'errore della ridotta N -esima rispetto alla somma finale è stimato da $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x) dx$.*

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni a scalino $s^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\chi_{[n, n+1[}$ e $s^- = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)\chi_{[n, n+1[}$, ove χ_I indica la funzione caratteristica dell'intervallo I ; è chiaro che $s^- \leq f \leq s^+$, da cui $\sum_{n=1}^{[x]} f(n) =$

$\sum_{n=0}^{[x]-1} f(n+1) = \int_0^{[x]} s^-(t) dt \leq \int_0^x s^-(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x s^+(t) dt \leq \int_0^{[x]+1} s^+(t) dt = \sum_{n=0}^{[x]} f(n)$. Ne ricaviamo che $\sum_{n=1}^{[x]} f(n) \leq \int_0^x f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{[x]} f(n)$, da cui il risultato segue per il Teorema del confronto nei limiti. Da $s^- \leq f$ si ha poi $\int_N^x s^-(t) dt \leq \int_N^x f(t) dt$, da cui $\sum_{n=N+1}^{[x]} f(n) \leq \int_N^x f(t) dt$, e la stima sull'errore segue passando al limite per $x \rightarrow +\infty$, sempre in base al Teorema del confronto nei limiti. \square

Esempio. La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in $+\infty$, ovvero (come noto) se e solo se $\alpha > 1$. In tal caso, si ha la stima $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

2.2 Integrazione generalizzata delle funzioni oscillanti

Data una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ (con $a < b \leq +\infty$) con segno oscillante all'intorno di b^- , come per le serie a termini di segno alterno la prima cosa da vedere è se f sia assolutamente integrabile (e ciò si verifica applicando a $|f|$ quanto detto in precedenza): infatti

Proposizione 2.2.1. *Se f è assolutamente integrabile in b^- , essa è integrabile in b^- .*

Dimostrazione. Si considerino $f^+ = \sup(f, 0)$ e $f^- = \sup(0, -f)$ (parte positiva e parte negativa di f , che sono entrambe funzioni ≥ 0). Se f è assolutamente integrabile in b^- , ovvero se $|f| = f^+ + f^-$ è integrabile in b^- , allora anche f^\pm sono integrabili per il Criterio del confronto; ma allora anche $f = f^+ - f^-$ è integrabile in b^- . \square

Esempio. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^\beta - 1}$ non è positiva da un certo punto in poi (il segno di $\sin x$ oscilla), ma possiamo vedere che essa è assolutamente integrabile a $+\infty$. Infatti, per $x > 1$ si ha $|f|(x) = \frac{|\sin x|}{x^\beta - 1}$: presa $g(x) = \frac{1}{x^4}$, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, dunque f è assolutamente integrabile (e dunque integrabile) a $+\infty$ per il criterio del confronto.

Altrimenti va ricordato il seguente risultato, paragonabile al Criterio di Leibniz per le serie. Si ricorda che se I è un intervallo⁽²²⁾ di \mathbb{R} e $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e di classe \mathcal{C}^1 a tratti, la *variazione totale* di ψ su I è la quantità

$$\int_I |\psi'(x)| dx \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0};$$

poiché ψ' ha segno costante dove ψ è monotona, il significato è la “distanza totale percorsa in verticale (indipendentemente dal verso) dal punto $(x, \psi(x))$ mentre x percorre I ”. La funzione ψ si dirà a *variazione limitata* in I se la sua variazione totale in I è finita (cioè se la derivata ψ' è assolutamente integrabile su I): ad esempio, una ψ monotona ha variazione limitata in I se e solo se ha limiti finiti negli estremi di I .

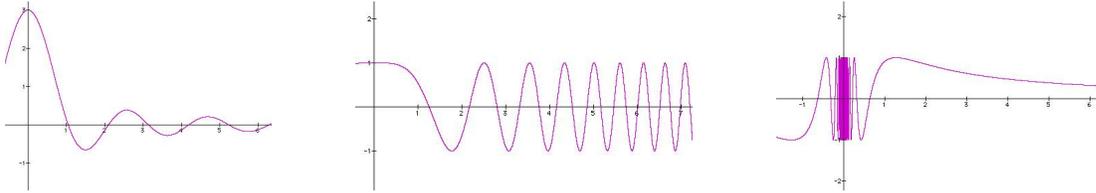
Funzione a variazione limitata

Teorema 2.2.2. (Abel-Dirichlet) *Si assuma che $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, ove φ abbia una primitiva limitata⁽²³⁾, e ψ sia di classe \mathcal{C}^1 , a variazione limitata in $[a, b[$ e infinitesima in b^- (es.: ψ di classe \mathcal{C}^1 , decrescente e infinitesima in b^-). Allora $f(x)$ è integrabile in b^- .*

⁽²²⁾Ricordiamo che, qui e nel seguito, il termine *intervallo* significa “sottoinsieme connesso (privo di buchi) di \mathbb{R} ”: si tratta degli intervalli limitati, delle semirette, o di tutto \mathbb{R} .

⁽²³⁾Più in generale, la primitiva limitata Φ di φ potrebbe essere anche continua e di classe \mathcal{C}^1 solo a tratti, e dunque φ continua a tratti: ad esempio, $\varphi(x) = (-1)^{[x]}$ soddisfa tale ipotesi.

Dimostrazione. Se Φ è una primitiva limitata di φ , dalle ipotesi si ha che $\Phi\psi$ è infinitesima in b^- e che $\Phi\psi'$ è assolutamente integrabile (dunque integrabile) in b^- . Integrando per parti, si ha allora $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)\psi(x) - \Phi(a)\psi(a) - \int_a^x \Phi(t)\psi'(t) dt$, e il risultato segue passando al limite per $x \rightarrow b^-$. \square



Tre integrali oscillanti convergenti: (a) l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, (b) l'integrale di Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, (c) l'integrale del "seno del topologo" $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$. (I grafici sono riscaldati per una migliore visibilità).

Esempi. (1) L'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è localmente integrabile in $]0, +\infty[$; all'intorno di 0^- essa ha segno costante e si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, dunque l'integrale converge in 0^+ ; invece per $+\infty$ si può applicare Abel-Dirichlet con $\varphi(x) = \sin x$ e $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Tuttavia l'integrale non converge assolutamente: infatti se $n \geq 2$ vale $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$, e questa serie diverge per $n \rightarrow +\infty$. **(2)** L'integrale di Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge: infatti, posto $x = \sqrt{t}$ si ha $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos t dt$, e si applica Abel-Dirichlet con $\varphi(t) = \cos t$ e $\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Anche questo integrale non converge assolutamente. **(3)** Il seno del topologo $\sin \frac{1}{x}$ è integrabile in 0^+ : infatti, posto $t = \frac{1}{x}$ si ha $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \sin t dt$, e si applica Abel-Dirichlet con $\varphi(t) = \sin t$ e $\psi(t) = \frac{1}{t^2}$. In questo caso si ha convergenza assoluta: infatti $|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$. **(4)** La funzione $x^\alpha \sin(x^\beta)$, definita e continua su $]0, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $|\beta| > -\alpha - 1$ ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $|\beta| > \alpha + 1$. In particolare, l'integrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(x^\beta) dx$ converge se e solo se $|\beta| > |\alpha + 1|$.

2.3 Nozioni ulteriori

• **La funzione Gamma di Eulero.** La funzione più importante dopo quelle elementari è probabilmente la *Gamma di Eulero-Legendre*, definita da un integrale generalizzato:

Funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Integrando per parti, si nota facilmente che per ogni $x > 0$ vale $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$; pertanto, da $\Gamma(1) = 1$ si ricava $\Gamma(n+1) = n!$. In altre parole, la funzione Gamma è (a meno di una traslazione della variabile) un'interpolazione del fattoriale, dunque in particolare cresce più rapidamente dell'esponenziale.

• **Integrabilità generalizzata di funzioni complesse.** Una funzione a valori complessi $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ può essere vista come una coppia di funzioni a valori reali $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, entrambe definite nel dominio $[a, b[$; si dirà *integrabile in s.g. in b^-* se lo sono entrambe $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$, ponendo $\int_a^b f(x) dx := \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x) dx + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(x) dx \in \mathbb{C}$.

Integrabilità di funzioni complesse

Invece, essendo $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$ una funzione a valori reali, la nozione di assoluta integrabilità in s.g. ha pienamente senso per f , ed implica l'integrabilità in s.g.

Absoluta integrabilità di funzioni complesse

Esempi. (1) La funzione $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(x) = e^{-x} + ix^2$ non è integrabile a $+\infty$: infatti $(\operatorname{Re} f)(x) = e^{-x}$ lo è, ma $(\operatorname{Im} f)(x) = x^2$ no. **(2)** Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è data da $g(x) = \frac{ix}{x^3 + i(x-1)}$, si ha $g(x) =$

$ix \frac{x^3 - i(x-1)}{x^6 + (x-1)^2} = \frac{x^2 - x - ix^4}{x^6 + x^2 - 2x + 1}$, da cui $(\operatorname{Re} g)(x) = \frac{x^2 - x}{x^6 + x^2 - 2x + 1}$ e $(\operatorname{Im} g)(x) = -\frac{x^4}{x^6 + x^2 - 2x + 1}$. Poiché sia $\operatorname{Re} g$ che $\operatorname{Im} g$ sono integrabili a $\mp\infty$ (infatti $|(\operatorname{Re} g)(x)| \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^4}$ e $|(\operatorname{Im} g)(x)| \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^2}$), anche g lo è. Ma si poteva (ed era meglio) vedere direttamente che g è assolutamente integrabile: infatti $|g(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^6 + (x-1)^2}} \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^2}$.

(3) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è assolutamente integrabile, la *trasformata di Fourier* di f è la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ixt} dt$. Si noti che la funzione $t \mapsto f(t)e^{-2\pi ixt}$ è assolutamente integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (infatti $|f(t)e^{-2\pi ixt}| = |f(t)||e^{-2\pi ixt}| = |f(t)|$, essendo $|e^{i\theta}| = 1$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$), dunque $\widehat{f}(x)$ ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questa trasformazione è di grande importanza, e si rimanda a corsi più avanzati per un suo studio ulteriore: osserviamo solo una delle sue proprietà più notevoli (che la rende utile nella risoluzione delle equazioni differenziali), ovvero quella di *scambiare la derivazione con la moltiplicazione per x* (a meno di una costante moltiplicativa). In effetti, data f assolutamente integrabile, se f è derivabile e anche f' è assolutamente integrabile si ha $\widehat{f'}(x) = -2\pi i x \widehat{f}(x)$; viceversa, se anche $g(x) := x f(x)$ è assolutamente integrabile allora $\widehat{f}(x)$ è derivabile e risulta $\widehat{g}(x) = -\frac{1}{2\pi i} (\widehat{f})'(x)$.⁽²⁴⁾

• **Alcune funzioni integrali.** Siano I e J intervalli di \mathbb{R} , con variabili x e t , e si abbiano funzioni $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : I \rightarrow J$ e $\psi : I \rightarrow J$. Se $f(t)$ è localmente integrabile in J , si può definire la *funzione integrale*⁽²⁵⁾

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt .$$

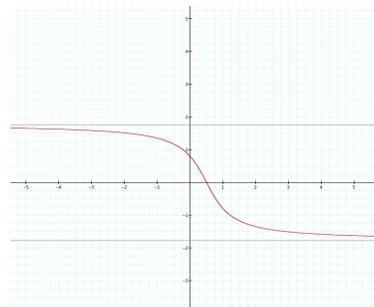
Proposizione 2.3.1. (Derivabilità di una funzione integrale) *Si assuma che $f(t)$ sia continua in J , e che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano di classe \mathcal{C}^1 in I . Allora $F(x)$ è derivabile, con*

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x) .$$

Dimostrazione. Preso un qualsiasi $t_0 \in J$ si ha $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{t_0} f(t) dt + \int_{t_0}^{\psi(x)} f(t) dt$. Per il Teorema di Torricelli, $U(x) = \int_{t_0}^x f(t) dt$ è derivabile con $U'(x) = f(x)$: essendo $F(x) = U(\psi(x)) - U(\varphi(x))$, basta derivare applicando la regola della catena. \square

La Proposizione 2.3.1 fornisce un valido strumento per lo studio dell'andamento qualitativo di $F(x)$, come mostrano i seguenti esempi.

Esempi. (1) Sia $F(x) = \int_x^{1-x} e^{-t^2} dt$. La funzione $f(t) = e^{-t^2}$ è continua (dunque localmente integrabile) su tutto \mathbb{R} : perciò il dominio di $F(x)$ è \mathbb{R} . Per il segno, la funzione $f(t)$ è sempre positiva, mentre $1 - x \geq x$ per $x \leq \frac{1}{2}$: dunque $F(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{2}$. Poiché $f(t)$ è integrabile in s.g. su \mathbb{R} , si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\int_x^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{1-x} e^{-t^2} dt) = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, che è finito e si dimostra valere $\sqrt{\pi}$; allo stesso modo si vede che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\sqrt{\pi}$. Dunque la retta $y = \pm\sqrt{\pi}$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$ per $F(x)$. Ora, $F(x)$ è derivabile in \mathbb{R}

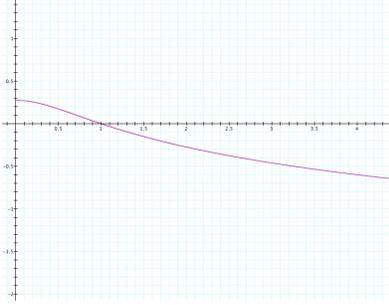


per la Proposizione 2.3.1, e derivando si ottiene $F'(x) = (-1)e^{-(1-x)^2} - (1)e^{-x^2} = -e^{-x^2}(e^{2x-1} + 1)$,

⁽²⁴⁾La prima proprietà si dimostra facilmente usando l'integrazione per parti; la seconda necessita della derivazione sotto il segno d'integrale (vedi Teorema 5.7.1).

⁽²⁵⁾Quella che segue è una funzione integrale di forma particolare, in cui x non appare nell'integrando e gli estremi di integrazione sono finiti. Nel seguito, acquisiti gli strumenti del calcolo differenziale a più variabili, ci si occuperà brevemente di funzioni integrali in forma generale (vedi pag. 81).

sempre negativa: dunque $F(x)$ è strettamente decrescente. Derivando ulteriormente si ha $F''(x) = 2e^{-x^2}((x-1)e^{2x-1} + x)$, ed un facile confronto grafico mostra che $F''(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{2}$: dunque $F(x)$ è convessa per $x > \frac{1}{2}$ ed ha un punto di flesso in $x = \frac{1}{2}$ (in cui $F(\frac{1}{2}) = 0$ e $F'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$).



(2) Studiamo ora $G(x) = \int_1^{1/x} \frac{1}{t(t^2+2)} dt$ facendo finta, per il momento, di non saper calcolare una primitiva di $g(t) = \frac{1}{t(t^2+2)}$. Essendo $g(t)$ non integrabile in 0 (infatti $g(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$), il dominio di $G(x)$ è per $\frac{1}{x} > 0$, ovvero $x > 0$: poiché allora $g(t)$ viene integrata dove è positiva, si avrà $G(x) \geq 0$ nei punti del dominio ove $\frac{1}{x} \geq 1$, ovvero per $0 < x \leq 1$. I limiti notevoli sono $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t^2+2)} dt$, che è ignoto ma di certo finito (infatti $g(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}$), e $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \int_1^0 \frac{1}{t(t^2+2)} dt = -\int_0^1 \frac{1}{t(t^2+2)} dt = -\infty$ (perché, come detto, si ha $g(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$); essendo poi $G'(x) = f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})' - f(1)(1)' = -\frac{x}{2x^2+1}$, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$ usando de l'Hôpital

risulta 0, e ciò mostra che non vi è asintoto lineare a $+\infty$. Si ha poi che G è strettamente decrescente, perché $G'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Infine, derivando ancora si ha $G''(x) = \frac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2}$, dunque $G(x)$ è convessa per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ed ha un flesso in $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a quota ignota $G(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ma con pendenza nota $G'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Fin qui si può arrivare con il solo studio della funzione integrale; si noti però che, già dal fatto che $G'(x) = -\frac{x}{2x^2+1}$ si potrebbe aver dedotto immediatamente che $G(x) = -\frac{1}{4} \log(2x^2+1) + k$ per una certa costante $k \in \mathbb{R}$, e dovendo essere $G(1) = 0$ si avrebbe $0 = -\frac{1}{4} \log 3 + k$, ovvero $k = \frac{1}{4} \log 3$, da cui infine la forma finita $G(x) = \frac{1}{4} \log \frac{3}{2x^2+1}$. A tale forma si arriva anche calcolando una primitiva di $g(t)$: infatti $\int \frac{1}{t(t^2+2)} dt = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{t} - \frac{t}{2t^2+1}) dt = \frac{1}{4} \log \frac{t^2}{t^2+2}$, e perciò nuovamente $F(x) = (\frac{1}{4} \log \frac{t^2}{t^2+2})^{1/x} \Big|_1^{1/x} = \frac{1}{4} (\log \frac{1}{2x^2+1} - \log \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} \log \frac{3}{2x^2+1}$. Ora si possono calcolare le cose in sospenso: $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \frac{1}{4} \log 3 \sim 0,27$, e il flesso è a quota $G(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4} \log \frac{3}{2} \sim 0,1$.

3 Curve parametriche affini

3.1 Preliminari

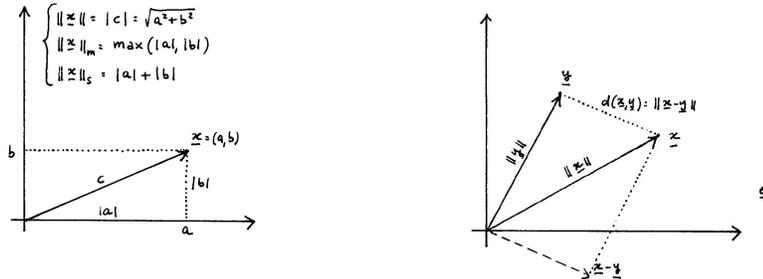
Spazi vettoriali normati

La nozione di *norma*, che introduciamo ora, generalizza quella di lunghezza di un vettore.

Sia V un k -spazio vettoriale, con $k = \mathbb{R}$ oppure $k = \mathbb{C}$.

Una *norma* su V è una funzione $p : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *positiva* (cioè $p(x) = 0$ se e solo se $x = 0_V$), *positivamente omogenea* (ovvero $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ per ogni $x \in V$ e $\lambda \in k$) e che soddisfa la *disuguaglianza triangolare* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in V$. Norma

Esempi. (1) Sul \mathbb{R} -spazio vettoriale $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, di dimensione finita n , vi sono la **norma euclidea** $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e le altre norme $\|x\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ **Norma euclidea** (**norma del massimo**) e $\|x\|_s = |x_1| + \dots + |x_n|$ (**norma perimetrale**). Su $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, queste tre norme si riducono tutte all'usuale modulo. **(2)** Sul \mathbb{C} -spazio vettoriale $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$, di dimensione finita n , vi è la **norma hermitiana** $\|z\|_h = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$. **(3)** Su $\mathbb{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, ovvero il \mathbb{C} -spazio vettoriale (di dimensione infinita) delle funzioni continue dall'intervallo compatto $[a, b]$ in \mathbb{C} , vi è la **sup-norma** $\|f\|_{\text{sup}} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ (si ricordi il Teorema di Weierstrass). **Sup-norma** Più in generale, su $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{C})$ (le funzioni di classe \mathcal{C}^k su $[a, b]$) con $k \geq 0$ si può considerare $\|f\|_{\text{sup}, k} = \max_{j=0, \dots, k} \|f^{(j)}\|_{\text{sup}} = \max_{x \in [a, b]; j=0, \dots, k} |f^{(j)}(x)|$.



(a) Norme euclidea, del massimo e perimetrale in \mathbb{R}^2 . (b) Distanza in \mathbb{R}^2 secondo la norma euclidea.

In uno *spazio vettoriale normato* (V, p) vi è una nozione di *distanza* $d_p(x, y) := p(x - y)$, e viene dunque generata una topologia. Dati $x \in V$ e $\varepsilon > 0$, la *p-palla aperta di centro x e raggio ε* è $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in V : d_p(x, y) < \varepsilon\}$, cioè gli $y \in V$ che distano meno di ε da x ; per la *p-palla chiusa* $B_p(x, \varepsilon]$ si chiede invece che $d_p(x, y) \leq \varepsilon$. Sia le palle aperte che le chiuse costituiscono una famiglia fondamentale di intorni di x per la topologia data da p .

Due norme p e q si dicono *equivalenti* se esistono $\lambda, \mu > 0$ tali che $\lambda q(x) \leq p(x) \leq \mu q(x)$ per ogni $x \in V$; ciò equivale⁽²⁶⁾ al fatto che le distanze d_p e d_q sono “confrontabili”. Norme equivalenti

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ tali che $B_q(x, \varepsilon') \subset B_p(x, \varepsilon) \subset B_q(x, \varepsilon'')$ per ogni $x \in V$.

L'idea è che “ p e q , pur essendo diverse, danno vita a topologie equivalenti su V ” (e, con esse, a nozioni topologiche equivalenti come aperto/chiuso, limite, continuità...)

⁽²⁶⁾dato $\varepsilon > 0$, basta che $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{\mu}$ e $\varepsilon'' \geq \frac{\varepsilon}{\lambda}$; viceversa, presi $x = 0_V$ e $\varepsilon = 1$ si scelgano $\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon''}$ e $\mu \geq \frac{1}{\varepsilon'}$.

Esempio. Le norme $\|x\|$, $\|x\|_m$ e $\|x\|_s$ su \mathbb{R}^n sono equivalenti tra loro (infatti vale $\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n\|x\|_m$); si descrivano le palle in \mathbb{R}^n (iniziando da \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) rispetto $\|x\|$, $\|x\|_m$ e $\|x\|_s$, e si spieghi come si visualizza questa equivalenza. In realtà vale il fatto generale descritto qui di seguito.

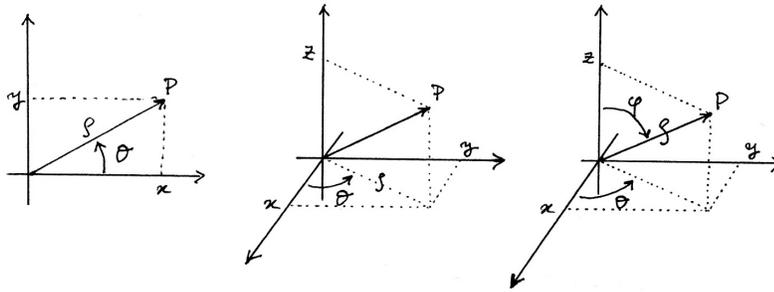
Proposizione 3.1.1. *Tutte le norme su uno spazio di dimensione finita sono equivalenti.*

Dimostrazione. Omessa. □

Nel seguito, come consueto, si penserà \mathbb{R}^n munito della norma euclidea $\|x\|$, la cui palle si denoteranno con $B_n(x, \varepsilon)$ e $B_n(x, \varepsilon]$; ma per la Proposizione 3.1.1 si potrebbe usare una qualsiasi altra norma su \mathbb{R}^n senza alterare le proprietà topologiche da essa determinate.

Sistemi di coordinate speciali nel piano e nello spazio tridimensionale

Introduciamo alcuni classici sistemi di coordinate alternative alle cartesiane nel piano e nello spazio tridimensionale.



(a) Coordinate polari nel piano. (b) Coordinate cilindriche e (c) coordinate sferiche nello spazio.

- **Coordinate polari nel piano:** utili in situazioni con spiccata simmetria radiale.⁽²⁷⁾

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}, \quad \text{ove } \left[\begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[\end{array} \right.$$

ρ è detto *modulo*, e θ *argomento* (o *anomalia*) del punto. Se $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ si ha $\theta = \arctg \frac{y}{x}$.

- **Coordinate cilindriche nello spazio tridimensionale:** le coordinate polari (ρ, θ) del piano orizzontale (x, y) con la coordinata cartesiana verticale z . Sono utili in situazioni con spiccata simmetria cilindrica.

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}, \quad \text{ove } \left[\begin{array}{l} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- **Coordinate sferiche nello spazio tridimensionale:** utili per descrivere situazioni con spiccata simmetria sferica.

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \cos \varphi = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}, \quad \text{ove } \left[\begin{array}{l} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \varphi \in]0, \pi[\end{array} \right.$$

⁽²⁷⁾ A seconda della convenienza, si può scegliere θ in $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ per un opportuno angolo α . Idem per le coordinate cilindriche e sferiche.

Per analogia terrestre, θ e φ sono detti rispettivamente *longitudine* e *latitudine* del punto.

Queste coordinate possono essere usate al posto delle cartesiane per esprimere un luogo geometrico nel piano o nello spazio tridimensionale tramite un conveniente numero di equazioni e disequazioni.

Ad esempio, un'equazione (in coordinate polari nel piano) del tipo

$$\rho = f(\theta)$$

è, nel caso generico, la più classica *forma polare di una curva piana*, che esprime la distanza dall'origine del punto della curva in funzione dell'argomento θ , che potrebbe eventualmente essere lasciato libero di percorrere più giri. In tale espressione, sebbene la coordinata polare ρ sia solitamente definita come un numero positivo, è d'uso tollerare anche valori di θ per cui $f(\theta) < 0$ (intendendo, in tal caso, che la distanza va contata "negativamente", percorrendo a ritroso la semiretta individuata da θ).

Esempi. (1) In coordinate polari, $\rho = a$ (ove $a > 0$) è l'equazione della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio a , mentre $\theta = \beta$ (con $\beta \in [0, 2\pi[$) è l'equazione della semiretta per $(0, 0)$ che forma l'angolo β col verso positivo dell'asse x ; in coordinate cartesiane, tali luoghi sono rappresentati rispettivamente come $x^2 + y^2 = a^2$ e come (scegliendo ad esempio $\beta = \frac{4\pi}{3}$) il sistema $(y = -x\sqrt{3}; y < 0)$. Altre equazioni rappresentano insiemi di tipo meno facilmente riconoscibile: ad esempio, $\rho = 2 \cos \theta$ rappresenta la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1: lo si può vedere moltiplicando i due membri per ρ , ottenendo così l'equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 2x$. **(2)** Dati $0 < a < b$, il luogo $\{(x, y) : ax \leq x^2 + y^2 \leq bx; 0 \leq y\sqrt{3} \leq x\}$ è quello dei punti compresi tra le circonferenze $x^2 + y^2 - ax = 0$ e $x^2 + y^2 - bx = 0$, che stanno sopra l'asse x e sotto la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; in coordinate polari tale luogo si descrive più semplicemente come il "rettangolo" $\{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, a \cos \theta \leq \rho \leq b \cos \theta\}$. **(3)** L'equazione $\rho = a$ (con $a > 0$) rappresenta, in coordinate cilindriche, la superficie cilindrica infinita con asse z e raggio a ; mentre in coordinate sferiche rappresenta la superficie sferica centrata in $(0, 0, 0)$ di raggio a . **(4)** Il cono circolare retto in \mathbb{R}^3 con asse lungo l'asse z , base nel cerchio di raggio a sul piano $z = h$ (con $a, h > 0$) e vertice nell'origine ha espressione cartesiana $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}$, espressione cilindrica (preferibile) $\{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq z, 0 \leq z \leq h\}$ ed espressione sferica $\{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{a}{h}, 0 \leq \rho \leq \frac{h}{\cos \varphi}\}$.

Rette e coniche

• *Rette nello spazio affine* \mathbb{R}^n . Dati in \mathbb{R}^n un punto P ed un vettore non nullo v , la *retta* r passante per P e parallela a v è il luogo dei punti ottenuti applicando a P dei multipli scalari di v . Se P ha coordinate (a_1, \dots, a_n) e $v = (v_1, \dots, v_n)$, il luogo è descritto come

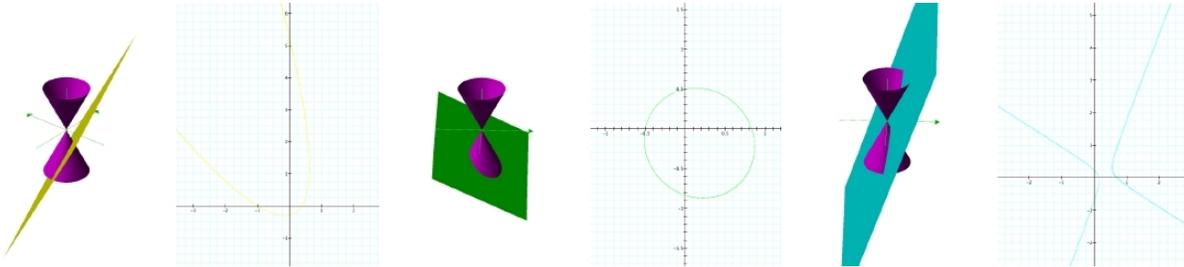
$$r = \{(a_1 + t v_1, \dots, a_n + t v_n) : t \in \mathbb{R}\} .$$

Si noti che r è l'immagine della funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da $\gamma(t) = (a_1 + t v_1, \dots, a_n + t v_n)$: si tratta di una *forma parametrica* della retta, primo esempio del concetto di *curva parametrica* di cui parleremo in seguito. Sostituendo il punto P con un altro punto di r , ed il vettore v con un suo multiplo scalare non nullo, il luogo geometrico r non cambia: ciò che cambia è solo la forma parametrica che di esso si ottiene (parleremo in seguito più generalmente di *riparametrizzazione* di una curva parametrica).

Cartesianamente, dati $n - 1$ iperpiani di \mathbb{R}^n di equazione $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n + b_i = 0$ (con $i = 1, \dots, n - 1$) tali che la matrice $A = (a_{i,j})$ (con $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = 1, \dots, n$) abbia rango massimo $n - 1$, la loro intersezione (ovvero il sistema delle loro $n - 1$ equazioni) dà luogo ad una retta in *forma cartesiana*. Per passare da una forma parametrica ad una cartesiana, basta ricavare il *parametro* t da una delle n equazioni $x_j = a_j + t v_j$ (possibile, perché il vettore v è non nullo), e sostituirlo nelle altre $n - 1$; viceversa, dalle $n - 1$ equazioni linearmente indipendenti di una forma cartesiana si potranno ricavare $n - 1$ delle n coordinate in funzione della rimanente, che potrà essere assunta come parametro.

Esempi. (1) (*Rette nel piano*) Dati $P(-1, 3)$ e $v = (2, 5)$ nel piano \mathbb{R}^2 , una forma parametrica della retta r passante per P e parallela a v è $\{(-1 + 2t, 3 + 5t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $x = -1 + 2t$ e $y = 3 + 5t$ si può ricavare ad esempio $t = \frac{x+1}{2}$, da cui la forma cartesiana $y = 3 + 5\frac{x+1}{2}$, ovvero $5x - 2y + 11 = 0$. Viceversa, data la retta in forma cartesiana $3x + 4y - 5 = 0$, si ricava ad esempio $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ da cui, posto $x = 4t$, la forma parametrica $\{(x, y) = (4t, -3t + \frac{5}{4}) = (0, \frac{5}{4}) + t(4, -3) : t \in \mathbb{R}\}$; o dalla forma cartesiana $x + 7 = 0$, posto $y = t$ si ha subito la forma parametrica $\{(x, y) = (-7, t) = (-7, 0) + t(0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. **(2)** (*Rette nello spazio tridimensionale*) Dati $P(2, 0, -1)$ e $v = (3, 5, -4)$ in \mathbb{R}^3 , una forma parametrica della retta r passante per P e parallela a v è $\{(2 + 3t, 5t, -1 - 4t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2 + 3t$, $y = 5t$ e $z = -1 - 4t$ si può ricavare ad esempio $t = \frac{2-x}{3}$, da cui la forma cartesiana $(y = 5\frac{2-x}{3}, z = -1 - 4\frac{2-x}{3})$, ovvero $(5x + 3y - 10 = 0, 4x - 3z - 11 = 0)$. Viceversa, data la retta di \mathbb{R}^3 in forma cartesiana $(x - 2y + z - 7 = 0, 2x + y + 6z + 1 = 0)$, dal sistema si ricava ad esempio $x = 1 - \frac{13}{5}z$ e $y = -3 - \frac{4}{5}z$. Posto $z = 5t$, si ottiene così la forma parametrica $\{(x, y, z) = (1 - 13t, -3 - 4t, 5t) = (1, -3, 0) + t(-13, -4, 5) : t \in \mathbb{R}\}$.

• *Coniche nel piano cartesiano.* Le *coniche affini* sono le curve piane ottenute secando un cono a due falde con un piano non passante per il vertice del cono: esse si classificano come *parabole* (quando il piano seca una sola falda ed è parallelo ad una retta generatrice del cono), *ellissi* (quando il piano seca una sola falda ma non è parallelo ad una retta generatrice del cono), o *iperboli* (quando il piano seca entrambe le falde).



Le tre possibili intersezioni affini tra un piano e un cono in \mathbb{R}^3 : (a) parabola; (b) ellisse; (c) iperbole.

Fissato un riferimento cartesiano (x, y) nel piano secante, è noto che le equazioni cartesiane delle coniche sono polinomi di secondo grado in x e y . Viceversa, una qualsiasi equazione quadratica

$$(3.1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dà una conica in posizione generica: se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ si ha un'ellisse (in particolare una circonferenza se $a = c$ e $b = 0$); se $\Delta = 0$ una parabola; se $\Delta > 0$ un'iperbole.⁽²⁸⁾

⁽²⁸⁾Alcune equazioni quadratiche possono dare luogo a coniche degeneri. In particolare un'ellisse può

Coniche in forma cartesiana

L'equazione cartesiana e la geometria di una conica. Ricordiamo alcune relazioni tra la forma cartesiana (3.1) di una conica e gli enti geometrici notevoli ad essa associati. Per uniformità tra i vari casi, quando si passerà dal sistema (x, y) ad un sistema di riferimento (X, Y) opportuno per raggiungere una forma canonica dell'equazione si intenderà che il verso positivo dell'asse X formi col verso positivo dell'asse x un angolo acuto (ciò determina anche direzione e verso dell'asse Y).

- **Ellisse** $[\Delta < 0]$. Il centro è $(x_0, y_0) = (\frac{2cd-be}{\Delta}, \frac{2ae-bd}{\Delta})$, e per esso passano due assi di simmetria ortogonali (X, Y) di coefficienti rispettivamente $q := \sqrt{(\frac{a-c}{b})^2 + 1} - \frac{a-c}{b}$ (si noti che $q \geq 0$) e $-\frac{1}{q}$.⁽²⁹⁾ Usando il cambio di coordinate tra (x, y) e (X, Y) ⁽³⁰⁾ l'equazione assume forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$, ove $\alpha, \beta > 0$ rappresentano le lunghezze dei semiassi; poi, se $\alpha > \beta$ (risp. se $\alpha < \beta$), i due fuochi si trovano sull'asse X (risp. sull'asse Y) a distanza $\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2|}$ dal centro, e l'ellisse è il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze dai due fuochi sia uguale a 2α (risp. 2β). Il caso particolare della circonferenza corrisponde all'equazione (3.1) nella forma $a = c$ e $b = 0$, con centro $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2a})$ e raggio $r = \frac{\sqrt{d^2+e^2-4af}}{2a}$; la forma canonica diventa $X^2 + Y^2 = r^2$ (dunque $\alpha = \beta = r$), ed i due fuochi coincidono col centro.
- **Iperbole** $[\Delta > 0]$. Centro e assi di simmetria (X, Y) sono gli stessi dell'ellisse; gli asintoti sono le due rette $y - y_0 = -\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2c}(x - x_0)$ (se $c \neq 0$) oppure $x = x_0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (se $c = 0$). Rispetto a (X, Y) l'equazione assume una delle due forme canoniche $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ con $\alpha, \beta > 0$, e gli asintoti hanno equazione $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha}X$; poi, se si ha il "+1" (risp. "-1") allora vertici e fuochi si trovano sull'asse X (risp. sull'asse Y) rispettivamente a distanza α (risp. β) e $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dal centro, e l'iperbole è il luogo dei punti tali che il modulo della differenza delle loro distanze dai due fuochi sia uguale a 2α (risp. 2β).
- **Parabola** $[\Delta = 0, \text{ cioè } b = \pm 2\sqrt{ac}]$. Posto $a, c \geq 0$ (altrimenti, ricordando che deve essere $ac \geq 0$, basterà cambiare segno all'equazione), l'asse di simmetria della parabola è dato da $2(a+c)(y\sqrt{c} + \sigma_b x\sqrt{a}) + (e\sqrt{c} + \sigma_b d\sqrt{a}) = 0$ (se $b \neq 0$, con $\sigma_b = \text{sign } b$) o $x = -\frac{e}{2c}$ (se $a = b = 0$) o $y = -\frac{d}{2a}$ (se $b = c = 0$), e il vertice si trova intersecando parabola e asse. Scegliendo come sistema (X, Y) quello con origine nel vertice e avente l'asse della parabola come uno dei due assi coordinati (che sarà l'asse X o Y a seconda della convenzione adottata in partenza per l'asse X), l'equazione assume una delle forme canoniche $X = \alpha Y^2$ (se l'asse X è l'asse della parabola, cioè quando $b < 0$ oppure quando $a = b = 0$) o $Y = \alpha X^2$ (se l'asse Y è l'asse della parabola, cioè quando $b > 0$ oppure $b = c = 0$) con $\alpha \neq 0$; sempre rispetto (X, Y) , il fuoco si trova sull'asse della parabola a quota $\frac{1}{4\alpha}$, la direttrice è la retta ortogonale all'asse della parabola che interseca quest'ultimo a quota $-\frac{1}{4\alpha}$; la parabola, infine, è il luogo dei punti equidistanti da fuoco e direttrice.

Per portare l'equazione (3.1) in una delle forme canoniche descritte, si può usare anche questo procedimento.

- (1) Se $b \neq 0$, sostituire⁽³¹⁾ (x, y) con $(x - qy, qx + y)$ ove si ricorda che $q = \sqrt{(\frac{a-c}{b})^2 + 1} - \frac{a-c}{b}$ (ciò

degenerare in un punto $(x^2 + y^2 = 0 \text{ è } \{(0, 0)\})$ o nel vuoto $(x^2 + y^2 + 2 = 0)$; una parabola in una retta doppia $(x^2 + 2xy + y^2 = 0 \text{ è } x + y = 0 \text{ contata due volte})$ o in due rette parallele $(x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \text{ è unione di } x + y = \pm 1)$ o nel vuoto $(x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0)$; un'iperbole in due rette che si intersecano $(xy = 0 \text{ è l'unione degli assi; } xy + y^2 - y = 0 \text{ è unione dell'asse } x \text{ e di } x + y - 1 = 0)$.

⁽²⁹⁾Bisogna specificare cosa accade nei casi particolari in cui $a = c$ oppure $b = 0$: (1) se $b = 0$ e $a \neq c$ si intende $q = 0$; (2) se $a = c$ e $b \neq 0$ vale $q = 1$; (3) se $a = c$ e $b = 0$ il coefficiente q è privo di significato (in effetti questo è il caso delle circonferenze, per le quali gli assi di simmetria sono indeterminati).

⁽³⁰⁾In generale, se (X, Y) è ottenuto per *rototraslazione* da (x, y) spostando l'origine in (x_0, y_0) e ruotando in senso antiorario di un angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la trasformazione di coordinate è data da $\begin{cases} x = (\cos \theta)X - (\sin \theta)Y + x_0 \\ y = (\sin \theta)X + (\cos \theta)Y + y_0 \end{cases}$ e, inversamente, da $\begin{cases} X = (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) \\ Y = -(\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) \end{cases}$. Nel nostro caso, essendo $\theta = \arctg q$ (dunque $\text{tg } \theta = q$) si ha $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{q^2+1}}$ e $\sin \theta = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}$, mentre (x_0, y_0) è il centro.

⁽³¹⁾L'azione di sostituire (x, y) con $(f(x, y), g(x, y))$ equivale a considerare il cambio di variabili $(x, y) = (f(x', y'), g(x', y'))$, salvo poi ridare a (x', y') il nome (x, y) una volta fatto il cambio (la funzione di due variabili $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dovrà essere un *diffeomorfismo*, in particolare invertibile: questo sarà chiaro più

equivale ad applicare al sistema (x, y) una rotazione antioraria di angolo $\theta = \arctg q \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ⁽³²⁾ e un'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}}$: ora l'equazione avrà $b = 0$. D'ora in poi supporremo anche $a \neq 0$ (se invece $a = 0$ sarà senz'altro $c \neq 0$, e si farà lo stesso usando (c, e, d) al posto di (a, d, e) nei passi seguenti).

- (2) Se $d \neq 0$, sostituire x con $x - \frac{d}{2a}$ (ciò equivale a una traslazione di x): l'equazione avrà $b = d = 0$ e $a \neq 0$. A questo punto vi sono due alternative, a seconda che $c \neq 0$ oppure $c = 0$.
- (3') Sia $c \neq 0$. Se $e \neq 0$, sostituire y con $y - \frac{e}{2c}$ (traslazione di y): l'equazione sarà del tipo $ax^2 + cy^2 + f = 0$, con $ac \neq 0$. Se $f = 0$ si ottiene una conica degenera (più precisamente: se $ac > 0$ si ottiene il solo punto origine $\{(0, 0)\}$, mentre se $ac < 0$ si ha l'unione delle due rette $y = \mp \sqrt{-\frac{a}{c}}x$). Se invece $f \neq 0$ si divide per f ottenendo: un'ellisse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \sqrt{-\frac{f}{a}}$ e $\beta = \sqrt{-\frac{f}{c}}$ (se $af < 0$ e $cf < 0$); un'iperbole $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \pm 1$ con $\alpha = \sqrt{|\frac{f}{a}|}$ e $\beta = \sqrt{|\frac{f}{c}|}$ (se $ac < 0$); il vuoto (se $af > 0$ e $cf > 0$).
- (3'') Sia $c = 0$. Se $e \neq 0$, sostituire y con $y - \frac{e}{c}$ (traslazione di y) ottenendo un'equazione del tipo $ax^2 + ey = 0$ con $a \neq 0$, che è una parabola $y = \alpha x^2$ (con $\alpha = -\frac{a}{e}$) avente l'asse y come asse di simmetria. Se invece $e = 0$ si ottiene una conica degenera (più precisamente: se $f = 0$ si ha l'asse y contato due volte; se $af < 0$ si hanno le due rette distinte parallele $x = \mp \sqrt{-\frac{f}{a}}$; se $af > 0$ si ha il vuoto).
- (4) Una volta determinata la forma canonica è possibile, seguendo a ritroso le sostituzioni effettuate, calcolare le coordinate degli enti geometrici notevoli della conica (vertici, assi, fuochi, direttrici...) nel sistema originale (x, y) .

Esempi. (1) Si abbia la conica $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 30x + 20y + 13 = 0$: poiché $\Delta = -400 < 0$, si tratta di un'ellisse. Il centro risulta $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, e gli assi di simmetria (X, Y) per esso hanno pendenze risp. $q = 2$ e $-\frac{1}{q} = -\frac{1}{2}$, pertanto $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y + \frac{3}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y - \frac{4}{5})$: sostituendo e calcolando, la conica diventa $5X^2 + 20Y^2 - 4 = 0$, ovvero la forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ con semiassi $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Rispetto (X, Y) i fuochi hanno coordinate $(\mp \sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$, dunque (usando la trasformazione) rispetto (x, y) sono i due punti $(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{5}, -\frac{2(2 \mp \sqrt{3})}{5})$. • Usiamo ora il procedimento alternativo. Sostituendo (x, y) con $(x - 2y, 2x + y)$ si ha $25x^2 + 100y^2 + 10x + 80y + 13 = 0$. Sostituendo poi x con $x - \frac{1}{5}$ si ottiene $25x^2 + 100y^2 + 80y + 12 = 0$, e poi sostituendo y con $y - \frac{2}{5}$ l'equazione diventa $25x^2 + 100y^2 - 4 = 0$, ovvero la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con semiassi $\alpha = \frac{2}{5}$ e $\beta = \frac{1}{5}$: si noti che, a causa dell'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ applicata nel primo passaggio, rispetto alla forma canonica trovata in precedenza le misure lineari (come le lunghezze dei semiassi) si sono coerentemente accorciate di un fattore $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Rispetto quest'ultimo sistema i fuochi hanno coordinate $(\mp \frac{\sqrt{3}}{5}, 0)$: risalendo all'indietro le trasformazioni percorse si trova nell'ordine $(\mp \frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$, poi $(\frac{\mp \sqrt{3}-1}{5}, -\frac{2}{5})$, ed infine $((\frac{\mp \sqrt{3}-1}{5}) - 2(-\frac{2}{5}), 2(\frac{\mp \sqrt{3}-1}{5}) + (-\frac{2}{5})) = (\frac{3 \mp \sqrt{3}}{5}, -\frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{5})$, gli stessi punti di prima.

(2) La conica $4x^2 + 3xy - 2y + 1 = 0$ è un'iperbole ($\Delta = 9 > 0$). Il centro risulta $(\frac{2}{3}, -\frac{16}{9})$, gli asintoti sono le rette $x = \frac{2}{3}$ e $4(x - \frac{2}{3}) + 3(y + \frac{16}{9}) = 0$ (ovvero $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}$), e gli assi di simmetria (X, Y) per il centro hanno pendenze risp. $q = \frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{q} = -3$, pertanto $(x, y) = (\frac{3}{\sqrt{10}}X - \frac{1}{\sqrt{10}}Y + \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{10}}X + \frac{3}{\sqrt{10}}Y - \frac{16}{9})$: sostituendo si arriva alla forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = -1$, con $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{9}$ e $\beta = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. • Col procedimento

avanti, parlando di funzioni di più variabili). Se ad esempio si ha a che fare con una trasformazione affine $(f(x, y), g(x, y)) = (\alpha x + \beta y + x_0, \gamma x + \delta y + y_0)$, ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (come nel caso presente per le rotazioni, le traslazioni, le omotetie e le loro composizioni), dovrà essere $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, e allora $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$.

⁽³²⁾Facendo un legame con nozioni di geometria, la matrice ortogonale $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q^2+1}} & -\frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \\ \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{q^2+1}} \end{pmatrix}$ è quella che diagonalizza la forma quadratica $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

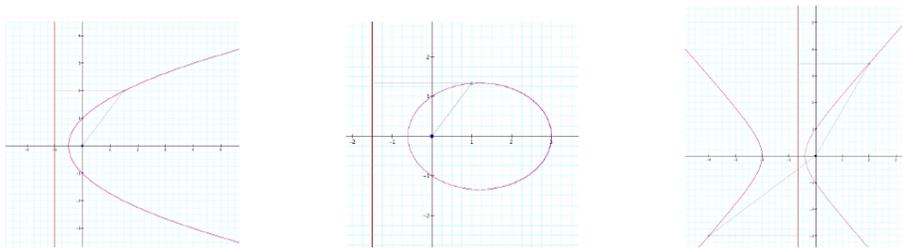
alternativo: sostituendo (x, y) con $(x - \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x + y)$, poi x con $x + \frac{1}{15}$ e infine y con $y - \frac{9}{5}$ si arriva alla forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$, con $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\beta = \sqrt{5}$ (come prima, si noti l'azione dell'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ rispetto alla forma canonica precedente). **(3)** La conica $x^2 + 2xy + y^2 + 3y - 1 = 0$ è una parabola ($\Delta = 0$). L'asse di simmetria è $4(y + x) + 3 = 0$, ovvero $y = -x - \frac{4}{3}$, che intersecato col luogo dà il vertice $(-\frac{43}{48}, \frac{7}{48})$. Poiché $b > 0$ l'asse della parabola sarà scelto come asse Y , mentre l'asse X sarà quello passante per il vertice e con pendenza 1. Il cambio di riferimento sarà perciò $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y - \frac{43}{48}, \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{7}{48})$, e sostituendo si ricava $4X^2 + 3\sqrt{2}Y = 0$, ovvero la forma canonica $Y = \alpha X^2$ con $\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$. Rispetto (X, Y) il fuoco è il punto $(0, -\frac{3}{16}\sqrt{2})$ e la direttrice la retta $Y = \frac{3}{16}\sqrt{2}$: usando la trasformazione, rispetto (x, y) essi diventano il punto $(-\frac{17}{24}, -\frac{1}{24})$ e la retta $y = x + \frac{17}{12}$. • Col procedimento alternativo: sostituendo (x, y) con $(x - y, x + y)$, poi x con $x - \frac{3}{8}$ e infine y con $y + \frac{25}{48}$ si arriva alla forma canonica $y = \alpha x^2$ con $\alpha = -\frac{4}{3}$. In questo riferimento il fuoco ha coordinate $(0, -\frac{3}{16})$, dunque, risalendo a ritroso i cambi, nel sistema originario ha coordinate $(-\frac{17}{24}, -\frac{1}{24})$, come già calcolato.

Le coniche possono essere descritte polarmente anche in questo modo: data una retta d (direttrice), un punto F (fuoco) a distanza $f > 0$ da d , e un numero $e \geq 0$ (eccentricità), si considera l'insieme dei punti del piano tali che il rapporto tra la loro distanza da F e la loro distanza da d sia uguale a e . Fissato un sistema di coordinate polari in cui il polo sia F ed il semiasse x positivo (asse polare) sia la semiretta uscente da F ortogonale a d e orientata nel verso che si allontana da d , si dimostra facilmente che ciò si riscrive come

Coniche in forma polare

$$(3.2) \quad \rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ove $p = ef$ (parametro): questo luogo (simmetrico rispetto all'asse polare perché $\cos \theta$ è pari) è un'ellisse se $e < 1$, una parabola se $e = 1$ e un'iperbole se $e > 1$. Si noti che $\rho_{\min} = \rho(\pi) = \frac{p}{1+e}$ (distanza tra fuoco e pericentro), mentre per le ellissi si ha anche $\rho_{\max} = \rho(0) = \frac{p}{1-e}$ (distanza tra fuoco e apocentro).



Tre coniche con parametro $p = 1$ ed eccentricità **(a)** $e = 1$ (parabola); **(b)** $e = \frac{2}{3}$ (ellisse); **(c)** $e = \frac{3}{2}$ (iperbole).

Relazione tra le forme cartesiane e polare di una conica. Considerando il sistema cartesiano (x, y) avente origine in F e asse x di direzione e verso concordi all'asse polare, da (3.2) si ottiene subito l'equazione cartesiana

$$(3.3) \quad x^2 + y^2 = (p + ex)^2.$$

Per capire la relazione dell'equazione (3.3) con le forme canoniche viste in precedenza, vediamo ciascuno dei tre casi in dettaglio.

- **Ellisse** [$0 \leq e < 1$ (circonferenza se $e = 0$)]. Per passare al riferimento centrale basta sostituire x con $x + \frac{pe}{1-e^2}$, e si ottiene la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}) = \frac{p}{1-e^2}$ e

$\beta = \alpha\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$: i fuochi dell'ellisse (uno è ovviamente F) sono dunque i punti $(\mp \frac{pe}{1-e^2}, 0)$, e la direttrice la retta $x = \frac{pe^3}{1-e^2}$. Viceversa, un'ellisse in forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$ e parametro $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

- **Iperbole** [$e > 1$ (con $\cos \theta \neq \frac{1}{e}$)]. Sostituendo x con $x - \frac{pe}{e^2-1}$ si ottiene la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \frac{p}{e^2-1}$ e $\beta = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. I fuochi (uno dei quali è F) sono i punti $(\mp \frac{pe}{e^2-1}, 0)$, la direttrice è la retta $x = \frac{pe(2-e^2)}{e^2-1}$, i vertici i punti $(\pm \frac{p}{e^2-1}, 0)$ e gli asintoti le rette $y = \pm(\sqrt{e^2-1})x$. Viceversa, un'iperbole in forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}$ e parametro $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$.
- **Parabola** [$e = 1$ (con $\theta \neq 0$)]. L'equazione (3.3) diventa $y^2 - 2px - p^2 = 0$; per passare al riferimento nel vertice basta sostituire x con $x - \frac{p}{2}$ ottenendo la forma canonica $x = \alpha y^2$ con $\alpha = \frac{1}{2p}$, dunque il fuoco F ha coordinate $(\frac{p}{2}, 0)$ e la direttrice è la retta $x = -\frac{p}{2}$. Viceversa, una parabola in forma canonica $x = \alpha y^2$ ha eccentricità $e = 1$ e parametro $p = \frac{1}{2\alpha}$.

Esempio: le leggi di Keplero. Per dare una classica applicazione della forma polare delle coniche vediamo come, dalla conoscenza dell'interazione gravitazionale, si possa risalire alle tre leggi di Keplero. Si abbia un punto materiale di massa m nello spazio tridimensionale, individuato dal vettore posizione r (pertanto $v = \dot{r}$ è la sua velocità e $a = \ddot{r}$ l'accelerazione)⁽³³⁾; indicheremo le norme euclidee di tali vettori con r , v e a . Il punto sia soggetto ad una *forza centrale posizionale a simmetria sferica*, ovvero del tipo $F(r) = F(r) (r/r)$ per un'opportuna funzione continua $F(r)$ (si noti che r/r è il versore di r , e dunque $\|F(r)\| = |F(r)|$). La funzione $U(r) = U(r) = -\int F(r) dr$, definita a meno di una costante additiva, è l'*energia potenziale*⁽³⁴⁾ associata al campo: esempi classici sono $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (forza elastica di costante k centrata nell'origine e lunghezza a riposo nulla, caso base di oscillatore armonico) e $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ (forza gravitazionale generata da un corpo di massa M prominente rispetto a m , di cui ci occuperemo qui sotto). In tali condizioni, è noto⁽³⁵⁾ che lungo il moto si conservano i seguenti integrali primi:

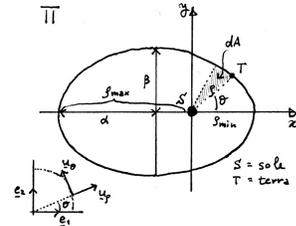
- il *momento angolare* $\ell = r \wedge mv$ (in particolare *il moto è piano*, più precisamente si svolge nel piano Π contenente i vettori posizione iniziale r_0 e velocità iniziale v_0);
- l'*energia totale* $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$.

Poniamoci dunque nel piano Π con coordinate polari (ρ, θ) (si noti che $\rho = r$), e studiamo le traiettorie $\rho(\theta)$ del punto, finché possibile con $U(\rho)$ non specificato; d'ora in poi ℓ e E saranno considerati dati del problema. Oltre alla base canonica (e_1, e_2) (fissa), in Π conviene introdurre anche la base (u_ρ, u_θ) (mobile) dei versori radiale $u_\rho = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$ e tangenziale $u_\theta = (-\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2$: si ha dunque $\dot{u}_\rho = \dot{\theta}u_\theta$ e $\dot{u}_\theta = -\dot{\theta}u_\rho$. Da $r = \rho u_\rho$ si ricava allora $v = \dot{\rho}u_\rho + \rho\dot{\theta}u_\theta$ (da cui $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$), perciò $\ell = m\rho^2\dot{\theta}(u_\rho \wedge u_\theta)$, con norma $\ell = m\rho^2\dot{\theta}$, da cui

$$(3.4) \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{m} \rho^{-2}.$$

In particolare, l'elemento d'area spazzato dal raggio vettore in Π (visto come un triangolo di base infinitesima $\rho d\theta$ e altezza ρ) è $dA = \frac{1}{2}(\rho)(\rho d\theta) = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$, da cui $\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2m}$: in altre parole la velocità areolare \dot{A} è costante, fatto noto come *seconda legge di Keplero* (vera dunque non solo per il caso gravitazionale). D'altra parte, dalla conservazione dell'energia totale e usando (3.4) si ricava

$$(3.5) \quad \dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{\ell^2}{2m\rho^2})}.$$



⁽³³⁾Come di consueto, il punto denota la derivazione rispetto al tempo.

⁽³⁴⁾per una discussione, si veda a pag. 65.

⁽³⁵⁾Per il momento angolare si ha $\dot{\ell} = (r \wedge mv)' = v \wedge mv + r \wedge ma = 0 + r \wedge F = 0$ perché per ipotesi F è parallela a r ; per l'energia totale si veda a pag. 67.

Per ricavare la traiettoria basta notare che $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta}}$ e usare (3.4) e (3.5), ricavando la seguente equazione del primo ordine a variabili separate:

$$(3.6) \quad \pm \frac{\ell}{\rho \sqrt{2m\rho^2(E-U(\rho))-\ell^2}} d\rho = d\theta.$$

Concentriamoci ora sul caso gravitazionale, sostituendo $U(\rho) = -\frac{GMm}{\rho}$ in (3.6). Usando il cambio di variabile $\rho = \frac{\ell}{\sigma}$ (da cui $d\rho = -\frac{\ell}{\sigma^2}d\sigma$) e ponendo $a = 2mE$ e $b = \frac{GMm^2}{\ell}$ si ricava $\mp \frac{1}{\sqrt{a+2b\sigma-\sigma^2}} d\sigma = d\theta$, ovvero $\mp \frac{1}{\sqrt{a+b^2-(\sigma-b)^2}} d\sigma = d\theta$, che nell'ipotesi $a + b^2 \geq 0$ (ovvero $E \geq -\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}$) si integra dando $\mp \arccos \frac{\sigma-b}{\sqrt{a+b^2}} = \theta + k$, da cui $\frac{\sigma-b}{\sqrt{a+b^2}} = \cos(\theta + k)$; risostituendo $\sigma = \frac{\ell}{\rho}$ e imponendo che $\rho(\theta)$ diventi massimo per $\theta = 0$ si determina la costante d'integrazione $k = \pi$ trovando $\rho(\theta) = \frac{\ell/b}{1-(\sqrt{a+b^2}/b)\cos\theta}$, ovvero

$$(3.7) \quad \rho(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \text{con} \quad \begin{cases} p = \frac{\ell^2}{GMm^2} \\ e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3}} \end{cases}.$$

Basta ricordare (3.2) per concludere che, nel caso $-\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} \leq E < 0$ (in cui $0 \leq e < 1$), la forma (3.7) conferma la *prima legge di Keplero* (il pianeta percorre un'ellisse di cui il sole occupa uno dei fuochi); inoltre quando $E \geq 0$, ovvero $e \geq 1$, si vede che il corpo celeste⁽³⁶⁾ percorre traiettorie paraboliche o iperboliche.

Per completezza ricaviamo nel caso ellittico (ovvero $-\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} \leq E < 0$) la *terza legge di Keplero*, che afferma che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è una costante indipendente dai pianeti. Iniziamo notando che da (3.7) il semiasse maggiore dell'ellisse è $\alpha = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\ell^2}{(1-e^2)GMm^2}$, da cui $\ell = \ell(\alpha) = \sqrt{(1-e^2)GMm^2\alpha}$ (notiamo anche che, inserendo $\ell(\alpha)$ nell'eccentricità e in (3.7), si ottiene $E = E(\alpha) = -\frac{GMm}{2\alpha}$, il che esprime i due integrali primi ℓ e E in funzione di α). Ora, ricordando che il semiasse minore è $\beta = \alpha\sqrt{1-e^2}$, l'area dell'ellisse è come noto $A = \pi\alpha\beta = \pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}$; d'altra parte, se T indica il periodo di rivoluzione, tale area è anche uguale a $A = \int_0^T \dot{A}(t) dt = \frac{\ell T}{2m}$ (qui $\dot{A}(t) = \frac{\ell}{2m}$ è la velocità areolare, costante). Confrontando le due espressioni di A , inserendo $\ell(\alpha)$ e semplificando si trova $\pi\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{GM}}{2}T$, ovvero $\frac{\alpha^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$, che è quanto si voleva.

3.2 Curve parametriche affini

Una *curva parametrica affine* è una funzione

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

ove I è un intervallo di \mathbb{R} ; se $1 \leq j \leq n$ e $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione j -esima (cioè $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$), la funzione $\gamma_j = \pi_j \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *j -esima componente* di γ , e

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

Molto spesso, al posto della funzione $\gamma(t)$ (che descrive la variazione di un punto in \mathbb{R}^n che dipende da un solo parametro reale t) e delle sue componenti $\gamma_j(t)$, si scrive direttamente il punto affine variabile $x(t)$ e le sue coordinate variabili $x_j(t)$. Il *sostegno*⁽³⁷⁾ di γ è l'insieme

⁽³⁶⁾ in questo caso sarebbe forse meglio pensare ad un meteorite che passa velocemente nei paraggi della Terra ricavandone un'incurvatura della sua traiettoria.

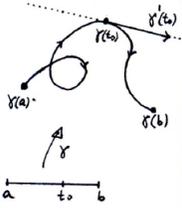
⁽³⁷⁾ o talvolta, meno correttamente, *supporto*.

Curva parametrica affine

Componenti di una curva

Sostegno di una curva

immagine $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$, che non va confuso con γ .⁽³⁸⁾ La curva γ si dirà *piana* se è a valori in \mathbb{R}^2 , o più generalmente se il sostegno è in un piano affine bidimensionale di \mathbb{R}^n .



La curva γ si dirà *continua* in $t_0 \in I$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| = 0$.

Curva continua

La curva γ si dirà *derivabile* in t_0 se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che

Curva derivabile

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} - v \right\| = 0.$$

Tale vettore v , che se esiste è unico,⁽³⁹⁾ è detto *derivata* (o *vettore derivato*) a γ in t_0 , e viene denotato con $\gamma'(t_0)$; geometricamente, $\gamma'(t_0)$ è un vettore tangente (eventualmente nullo) al sostegno di γ nel punto $\gamma(t_0)$.

Derivata di una curva

Continuità e derivabilità di una curva equivalgono a quelle di ciascuna componente:

Proposizione 3.2.1. γ è continua in t_0 se e solo se ogni γ_j è continua in t_0 .

Dimostrazione. Segue da $\max_j |\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)| \leq \|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| \leq \sum_j |\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)|$. \square

Proposizione 3.2.2. Se γ è derivabile in t_0 , essa è anche continua in t_0 . Inoltre, γ è derivabile in t_0 se e solo se ogni γ_j è derivabile in t_0 , e vale $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$.

Dimostrazione. Se γ è derivabile in t_0 , allora $\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| = \left\| \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} \right\| |h| \leq (\|\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} - \gamma'(t_0)\| + \|\gamma'(t_0)\|) |h|$ tende a 0 quando $h \rightarrow 0$, ovvero γ è continua in t_0 ; il resto dell'enunciato segue da $\max_j \left| \frac{\gamma_j(t_0+h) - \gamma_j(t_0)}{h} - v_j \right| \leq \left\| \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} - v \right\| \leq \sum_j \left| \frac{\gamma_j(t_0+h) - \gamma_j(t_0)}{h} - v_j \right|$. \square

In generale, la curva γ si dice *di classe \mathcal{C}^k* se tutte le sue componenti γ_j sono di classe \mathcal{C}^k .

Curva di classe \mathcal{C}^k

È il caso di evidenziare i seguenti due casi importanti.

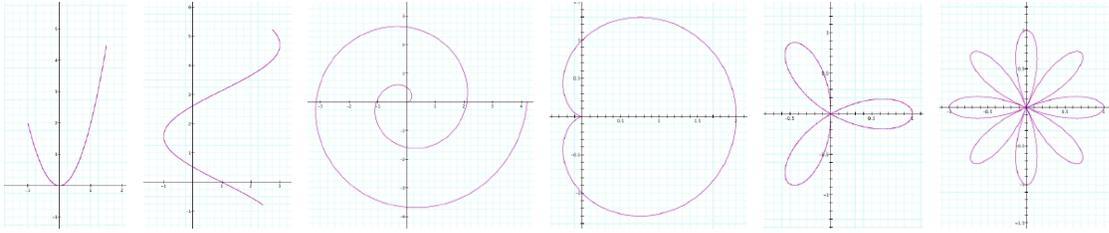
- (1) Se I è un intervallo di \mathbb{R} ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione, la *curva-grafico* di f è $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ data da $\gamma_f(t) = (t, f(t))$. Il sostegno di γ_f è nient'altro che il grafico di f (sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1}), cioè $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I\}$.
- (2) Se una curva piana è data tramite in *forma polare* $\rho = f(\theta)$, ovvero $\rho(\theta)$, si ottiene una parametrizzazione tramite $\gamma : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$.

Esempi. (1) (Vedi Figure 1) Se $f : [-1, \frac{3}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $f(t) = 2t^2$, la curva-grafico $\gamma_f : [-1, \frac{3}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha componenti $(\gamma_f)_1(t) = t$ e $(\gamma_f)_2(t) = 2t^2$, ed il sostegno di γ_f è il tratto di parabola $y = 2x^2$ nel piano cartesiano con $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Ma i ruoli delle coordinate x e y si possono eventualmente invertire: se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $g(t) = 1 - 2 \sin t$, anche la curva $\gamma_g : [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di componenti $(\gamma_g)_1(t) = g(t)$ e $(\gamma_g)_2(t) = t$ può essere vista come una curva-grafico (in questo caso, il sostegno di γ_g è il tratto di funzione $x = 1 - 2 \sin y$ nel piano cartesiano con $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{5\pi}{3}$). **(2)** (Vedi Figure 2) Alcuni esempi di curve polari: (a) la *spirale di Archimede* è data da $\rho(\theta) = k\theta$ (ove $k > 0$); (b) la *cardioide* è data da $\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ (ove $a > 0$); (c) la *rodonea* è data da $\rho(\theta) = a \cos n\theta$ (ove $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$); il sostegno è una rosa a n petali se n è

⁽³⁸⁾Tuttavia spesso, nell'uso corrente, parlando di *curva* si fa riferimento al suo sostegno, e si parla di *parametrizzazione* per indicare la funzione. Questa terminologia apparirà più chiara quando si parlerà, più generalmente, di *varietà parametriche affini*.

⁽³⁹⁾Se v_1 e v_2 sono due tali vettori, si ha $\|v_1 - v_2\| \leq \left\| \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} - v_1 \right\| + \left\| \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} - v_2 \right\|$, da cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ha $\|v_1 - v_2\| = 0$: ma allora $v_1 - v_2 = 0$, ovvero $v_1 = v_2$.

dispari (ad esempio, per $n = 1$ si ha, come visto, la circonferenza $x^2 + y^2 - ax = 0$), e una rosa a $2n$ petali se n è pari. **(3)** Si è visto in precedenza come le *coniche affini* abbiano un'equazione polare del tipo $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$, dalla quale si ottiene una parametrizzazione $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\frac{p \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1 - e \cos \theta})$. Dunque, il vettore tangente alla conica nel suo punto di argomento θ_0 è $\gamma'(\theta_0) = (-\frac{p \sin \theta_0}{(1 - e \cos \theta_0)^2}, -\frac{p(e - \cos \theta_0)}{(1 - e \cos \theta_0)^2})$. **(4)** Dati $n \in \mathbb{Z}$ e $r > 0$, la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (r \cos(nt), r \sin(nt))$ percorre n volte in senso antiorario (se $n > 0$) o orario (se $n < 0$) il suo sostegno, che è la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$. Dunque non è detto che una curva γ sia iniettiva, e ciò mostra l'importanza di distinguere tra γ e il suo sostegno. **(5)** Sul seguente esempio torneremo anche più tardi parlando di varietà. La curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ ha sostegno $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ che è un "otto" orizzontale percorso da $\gamma(t)$ infinite volte (vedi figura a pag. 80): si noti che $\gamma(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (0, 0)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, mentre gli altri punti di Γ sono raggiunti da $\gamma(t)$ con periodicità 2π (ad esempio $\gamma(2k\pi) = (1, 0)$ e $\gamma(\pi + 2k\pi) = (-1, 0)$).



(1.a), (1.b) Curve-grafico. (2.a) Spirale ($k = \frac{1}{3}$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$). (2.b) Cardioide. (2.c'), (2.c'') Rodonee con $n = 3$ e $n = 4$.

Data una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed un altro intervallo $J \subset \mathbb{R}$, un *cambiamento di parametro* (o *riparametrizzazione*) è una funzione $\alpha : J \rightarrow I$ biiettiva di classe C^1 con α' mai nulla: in particolare α è strettamente monotona (infatti α' , continua, ha segno costante), dunque nel caso in cui $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ vale $\alpha(c) = a$ e $\alpha(d) = b$, o viceversa. La curva ottenuta da γ col cambiamento di parametro α è $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$: si tratta solo di un cambio della legge oraria (eventualmente anche del verso) di percorrenza del sostegno, che resta geometricamente lo stesso.

Cambio di parametro

Proposizione 3.2.3. (Formula del cambio di velocità) *Se $\alpha(\tau_0) = t_0$, la curva γ è derivabile in t_0 se e solo se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$ è derivabile in τ_0 . I vettori tangenti $\tilde{\gamma}'(\tau_0)$ e $\gamma'(t_0)$ di \mathbb{R}^n sono paralleli, e vale $\tilde{\gamma}'(\tau_0) = \gamma'(t_0)\alpha'(\tau_0)$ (in particolare $\|\tilde{\gamma}'(\tau_0)\| = |\alpha'(\tau_0)| \|\gamma'(t_0)\|$).*

Dimostrazione. Le componente j -esima di $\tilde{\gamma}$ è $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j \circ \alpha$, dunque $\tilde{\gamma}_j$ è derivabile in τ_0 se e solo se γ_j è derivabile in t_0 , e vale $\tilde{\gamma}'_j(\tau_0) = \gamma'_j(t_0)\alpha'(\tau_0)$. La conclusione segue allora dalla Proposizione 3.2.2. \square

Esempio. Dato $r > 0$, la semicirconferenza $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, x \leq 0\}$ si può parametrizzare tramite la coordinata $t = y$ con $\gamma : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y) = (-\sqrt{r^2 - y^2}, y)$, o, usando la coordinata polare $\tau = \theta$, anche da $\tilde{\gamma} : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\gamma}(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Il cambio di parametro $\alpha : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-r, r]$ è dunque $y = \alpha(\theta) = r \sin \theta$: si tratta effettivamente di una funzione biiettiva, con inversa $\alpha^{-1} : [-r, r] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ data da $\alpha^{-1}(y) = \pi - \arcsin \frac{y}{r}$.

D'ora in poi *supporremo che sia $I = [a, b]$, intervallo chiuso e limitato. In tal caso, se $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dirà *circuito*, con ovvio significato geometrico. Se le componenti di $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ sono localmente integrabili (ad esempio, se γ è una curva continua), si definisce l'*integrale (vettoriale)* di γ come il vettore*

Circuito

Integrale vettoriale

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Nel caso $n = 2$, identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 si ritrova l'integrale di funzioni a valori complessi.

Proposizione 3.2.4. (Proprietà dell'integrale vettoriale) *L'integrale vettoriale ha le seguenti proprietà (ove $\gamma, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono curve e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):*

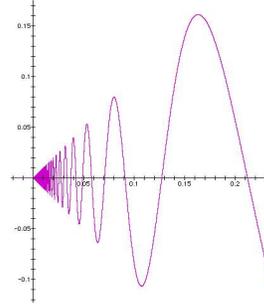
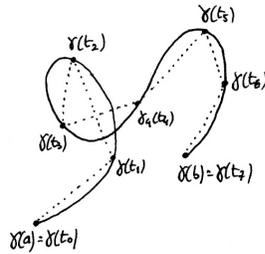
- (i) (Linearità) $\int_a^b (\lambda\gamma + \mu\psi)(t) dt = \lambda \int_a^b \gamma(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt$.
- (ii) (Disuguaglianza fondamentale) $\| \int_a^b \gamma(t) dt \| \leq \int_a^b \| \gamma(t) \| dt$.

Dimostrazione. (i) Immediato. (ii) Sia $p_r = \{t_0, \dots, t_r\}$ la partizione dell'intervallo $[a, b]$ in r parti uguali (con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$, e $t_k = a + k \frac{b-a}{r}$): per le proprietà di positiva omogeneità e di disuguaglianza triangolare delle norme (qui in \mathbb{R}^n) si ha $\| \sum_{k=1}^r \gamma(t_k)(t_k - t_{k-1}) \| \leq \sum_{k=1}^r \| \gamma(t_k)(t_k - t_{k-1}) \| = \sum_{k=1}^r \| \gamma(t_k) \| (t_k - t_{k-1})$. Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, il Teorema del Confronto dà la disuguaglianza desiderata (i membri estremi sono somme di Riemann dei rispettivi integrali). \square

3.3 Lunghezza, integrali al differenziale d'arco

Data una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una partizione $p = \{t_0, \dots, t_r\}$ dell'intervallo $[a, b]$ (con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$), la somma $L_p = \sum_{j=1}^r \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \|$ rappresenta la lunghezza geometrica della poligonale in \mathbb{R}^n ottenuta congiungendo in successione gli $r + 1$ punti $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r)$; ed è chiaro che se $p_1 \subset p_2$ allora $L_{p_1} \leq L_{p_2}$. Si porrà allora $L_\gamma = \sup_{\mathbb{R}} \{ L_p : p \text{ partizione di } [a, b] \}$, e si dirà che γ è *rettificabile* se $L_\gamma < +\infty$ (e in tal caso L_γ si dirà *lunghezza* della curva γ). Ciò non è sempre vero⁽⁴⁰⁾, ma lo è nel caso assai frequente in cui γ è di classe C^1 , o perlomeno di classe C^1 a tratti.⁽⁴¹⁾

Lunghezza di una curva



(a) Rettificazione parziale di una curva. (b) Parte del sostegno della curva non rettificabile $(t, t \cos \frac{1}{t})$.

Proposizione 3.3.1. (Lunghezza di una curva di classe C^1 a tratti) *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 a tratti, allora γ è rettificabile e vale*

$$L_\gamma = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt .$$

⁽⁴⁰⁾un controesempio è la curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(t) = (t, t \cos \frac{1}{t})$ per $0 < t \leq 1$, mostrata in figura.

⁽⁴¹⁾ovvero γ è continua ed esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sia di classe C^1 per ogni $i = 1, \dots, k$.

Dimostrazione. Ragionando tratto per tratto, possiamo supporre che γ sia di classe \mathcal{C}^1 . Dimostriamo che $L_\gamma \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, il che prova in particolare la rettificabilità di γ . Sia $p = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$ una qualsiasi partizione dell'intervallo $[a, b]$: poiché per ogni $j = 1, \dots, r$ vale $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt$, sommando su j si ottiene $L_p \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$: per l'arbitrarietà di p , ciò deve valere anche per L_γ (che è l'estremo superiore degli L_p). Diamo infine una traccia⁽⁴²⁾ della dimostrazione che vale l'uguaglianza. Quando la partizione p di $[a, b]$ diventa sempre più fine, si ha che da un lato L_p tende a L_γ , e dall'altro la somma di Riemann $L'_p = \sum_{j=1}^r \|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$ tende all'integrale $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. D'altra parte, grazie al Teorema di Lagrange applicato alle componenti di γ si ha che per ogni $j = 1, \dots, r$ ed ogni $k = 1, \dots, n$ esiste $\tau_{j,k} \in]t_{j-1}, t_j[$ tale che $\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}) = \gamma'_k(\tau_{j,k})(t_j - t_{j-1})$. Poiché le γ'_k sono tutte continue, rendendo sempre più fine la partizione p si rendono tutti i valori $\gamma'_k(\tau_{j,k})$ arbitrariamente vicini al valore finale $\gamma'_k(t_j)$ (ed in modo uniforme al variare di j e k , indici finiti): ne consegue che $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ è arbitrariamente vicino a $\|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$ per ogni j , e pertanto, sommando su j , che L_p è arbitrariamente vicina a L'_p . Dunque L_p diventa arbitrariamente vicina a $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, e ciò dà $L_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. \square

La funzione $\ell : [a, b] \rightarrow [0, L_\gamma]$ data da $\ell(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$, che descrive l'evoluzione della lunghezza del cammino percorso, è detta *ascissa curvilinea* associata a γ . Ascissa curvilinea

L'interpretazione più naturale del seguente risultato, che generalizza per quanto possibile il Teorema del valor medio di Lagrange in una variabile,⁽⁴³⁾ è il noto fatto che, nel piano, il cammino più breve tra due punti è quello lungo il segmento che li congiunge.

Teorema 3.3.2. (Teorema del valor medio per le curve) *Se γ è di classe \mathcal{C}^1 , vale*

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq L_\gamma \leq \|\gamma'\|_{\text{sup}} |b - a|, \quad \text{ove } \|\gamma'\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\|.$$

Dimostrazione. Usando il Teorema Fondamentale del Calcolo (facilmente valido anche per l'integrale vettoriale) e la disuguaglianza triangolare dell'integrale vettoriale (Proposizione 3.2.4(ii)) per γ' , si ottiene $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = \|\int_a^b \gamma'(t) dt\| \leq (L_\gamma =) \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \|\gamma'\|_{\text{sup}} |b - a|$. \square

Mostriamo tra breve (vedi Proposizione 3.3.3) che, come è da attendersi per quanto detto, la lunghezza L_γ non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta γ , nel senso che non cambia per riparametrazioni. Non si confonda con troppa facilità L_γ (che rappresenta la lunghezza totale del cammino percorso dal punto geometrico $\gamma(t)$ in \mathbb{R}^n) con la *lunghezza geometrica* del sostegno di γ , perché le due nozioni potrebbero differire l'una dall'altra.⁽⁴⁴⁾ Mettiamo nuovamente in evidenza i seguenti casi:

- (1) Per le curve-grafico γ_f con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si ha $\gamma_f(x) = (x, f_1(x), \dots, f_n(x))$, e il numero $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f_1'(x)^2 + \dots + f_n'(x)^2} dx$ coincide con la lunghezza geometrica

⁽⁴²⁾che diventerebbe rigorosa introducendo un arbitrario $\varepsilon > 0$ e facendo le opportune maggiorazioni.

⁽⁴³⁾In effetti un teorico analogo di Lagrange in più variabili (ovvero, che esista $c \in]a, b[$ tale che valga l'uguaglianza vettoriale $\gamma(b) - \gamma(a) = \gamma'(c)(b - a)$) è falso, come si vede subito con l'esempio di un circuito percorso a velocità mai nulla, tipo la circonferenza $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$: in questo caso il primo membro è il vettore nullo, mentre il secondo non lo è mai.

⁽⁴⁴⁾Ciò accade se la parametrizzazione fa percorrere al punto $\gamma(t)$ il sostegno in modo anomalo, ad esempio, passando più volte in alcuni suoi tratti. L'esempio classico è quello della suddetta curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (r \cos(nt), r \sin(nt))$ con $n \in \mathbb{N}$, che fa percorrere a $\gamma(t)$ la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ per n volte: qui si ha $\|\gamma'(t)\| \equiv nr$ da cui $L_\gamma = n(2\pi r)$, mentre ovviamente la lunghezza del sostegno è $2\pi r$.

del sostegno di γ_f , ovvero del grafico di f . Ad esempio, per una curva-grafico piana $\gamma_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma_f(x) = (x, f(x))$ ove $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe \mathcal{C}^1 , la lunghezza diventa $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

(2) Se una curva piana ha equazione polare $\rho = \rho(\theta)$ per $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, da cui la parametrizzazione $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$, si ricava facilmente $L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$.

Esempi. (1) Il tratto di parabola $y = \alpha x^2$ su $[a, b]$ è il sostegno della curva-grafico $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(x) = (x, \alpha x^2)$, e dunque ha lunghezza $\int_a^b \sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2} dx = \frac{b\sqrt{1+4\alpha^2 b^2} - a\sqrt{1+4\alpha^2 a^2}}{2} + \frac{1}{4\alpha} \log \frac{2\alpha b + \sqrt{1+4\alpha^2 b^2}}{2\alpha a + \sqrt{1+4\alpha^2 a^2}}$.

(2) L'ellisse piana di semiassi a e b , ovvero il luogo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si può parametrizzare tramite la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ (attenzione: t non è l'angolo delle coordinate polari, tranne il caso della circonferenza in cui $a = b$) e dunque ha lunghezza $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$ che non può essere calcolata elementarmente tranne quando $a = b$, in cui si ottiene ovviamente $\int_0^{2\pi} a dt = 2a\pi$. **(3)** L'*elica cilindrica* di raggio r e pendenza m è il sostegno di $\gamma : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, mt)$, ed ha lunghezza $\int_0^{\theta_0} \sqrt{r^2 + m^2} dt = \theta_0 \sqrt{r^2 + m^2}$. **(4)** La spirale di Archimede $\rho(\theta) = k\theta$ (ove $k > 0$ e $\theta \in [0, \theta_0]$) ha lunghezza $\int_0^{\theta_0} \sqrt{k^2 \theta^2 + k^2} d\theta = k(\theta_0 \sqrt{1 + \theta_0^2} + \log(\theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2}))$. **(5)** La cardiode $\rho(\theta) = 2a(1 - \cos \theta)$ (con $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$) ha lunghezza $\int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(1 - \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = 4a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\theta}{2}| d\theta = 16a$.

Più in generale, se $A \subset \mathbb{R}^n$ contiene il sostegno di γ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, si può definire $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \circ \gamma$ è continua e γ è di classe \mathcal{C}^1 a tratti, l'*integrale (al differenziale) d'arco* di f lungo γ è dato da

Integrale al differenziale d'arco

$$\int_\gamma f d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt .$$

(Si noti che per $f \equiv 1$ si riottiene la lunghezza L_γ .) Il simbolo $d\sigma = \|\gamma'(t)\| dt$ è detto *elemento d'arco* o *differenziale d'arco*: formalmente, esso rappresenta la lunghezza del percorso infinitesimo fatto dal punto $\gamma(t)$ sul sostegno di γ in corrispondenza di un incremento infinitesimo dt del parametro t .

Elemento d'arco

Proposizione 3.3.3. Il numero $\int_\gamma f d\sigma$ non cambia per riparametrizzazioni di γ .

Dimostrazione. Sia $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una riparametrizzazione: si noti che se $\alpha' > 0$ allora vale $\alpha^{-1}(a) = c$ e $\alpha^{-1}(b) = d$, e viceversa se $\alpha' < 0$. Sia dunque $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$: usando la Proposizione 3.2.3 ed il cambio di variabile $t = \alpha(\tau)$ si ottiene $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(\tau))) \|\gamma'(\alpha(\tau))\| \alpha'(\tau) d\tau = \int_c^d f(\gamma(\alpha(\tau))) \|\gamma'(\alpha(\tau))\| |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau)) \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau$, che è quanto si voleva. \square

Un esempio classico di applicazione degli integrali al differenziale d'arco è nel calcolo delle grandezze fisiche associate a ad una curva materiale $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che Γ sia parametrizzata da $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe \mathcal{C}^1 iniettiva e col vettore tangente $\gamma'(t)$ mai nullo, e si assegni una *densità lineare di massa* $\delta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (di dimensioni fisiche kg/m) per cui la *massa totale* di Γ sia data dall'integrale d'arco $m = \int_\gamma \delta d\sigma$.

Densità lineare di massa

• Il *baricentro* di Γ è il punto $(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) = (\frac{1}{m} \int_\gamma \delta x d\sigma, \frac{1}{m} \int_\gamma \delta y d\sigma, \frac{1}{m} \int_\gamma \delta z d\sigma)$.

Baricentro

• Fissata una retta $r \subset \mathbb{R}^3$, sia $d_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione "distanza da r ";⁽⁴⁵⁾ il *momento*

Momento d'inerzia

d'inerzia di Γ rispetto ad r è definito come il numero positivo $I_r(\Gamma) = \int_{\gamma} \delta d_r^2 d\sigma$.

• Nel caso *omogeneo*, in cui $\delta = m/L_{\gamma}$ è costante, si ottiene il *baricentro geometrico* $(\frac{1}{L_{\gamma}} \int x d\sigma, \frac{1}{L_{\gamma}} \int y d\sigma, \frac{1}{L_{\gamma}} \int z d\sigma)$ ed il momento d'inerzia $I_r(\Gamma) = \frac{m}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} d_r^2 d\sigma$.

Esempio. Si consideri un arco di circonferenza materiale omogenea parametrizzato da $\gamma : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$: poiché $L_{\gamma} = r\theta_0$, il baricentro avrà coordinate (x_G, y_G) date da $x_G = \frac{1}{r\theta_0} \int_0^{\theta_0} (r \cos t) r dt = r \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ e $y_G = \frac{1}{r\theta_0} \int_0^{\theta_0} (r \sin t) r dt = r \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0}$. Supponendo invece che la densità evolva con l'angolo t secondo la legge $\delta(t) = kt + h$ (ove $k, h > 0$ sono parametri con dimensione fisica kg/m), la massa totale è $m = \int_0^{\theta_0} (kt + h) r dt = r \frac{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}{2}$, così si ha $x_G = \frac{1}{m} \int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \cos t) r dt = r \frac{2(k(\theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0 - 1) + h \sin \theta_0)}{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}$ e $y_G = \frac{1}{m} \int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \sin t) r dt = r \frac{2(k(\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0) + h(1 - \cos \theta_0))}{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}$; il caso omogeneo si ritrova per $k = 0$. Infine, il momento d'inerzia rispetto all'asse x è dato da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \sin t)^2 r dt$ e quello rispetto all'asse y da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \cos t)^2 r dt$ (si omettono i calcoli), mentre quello rispetto ad un asse z ortogonale da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r)^2 r dt = \frac{r^3 \theta_0(k\theta_0 + 2h)}{2}$.

⁽⁴⁵⁾ Ad esempio, se r è l'asse x si ha $d_r(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$.

4 Topologia degli spazi affini

4.1 Nozioni generali

L'insieme $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ delle n -uple di numeri reali ha una naturale struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale, di dimensione n ; la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, ove e_j è il vettore nullo ovunque tranne che nella componente j -esima che vale 1, è detta *base canonica*. Come ogni spazio vettoriale, anche \mathbb{R}^n ha una struttura di *spazio affine*, per la quale i suoi elementi possono essere visti sia come *vettori* che come *punti*. Su \mathbb{R}^n si ritiene fissato anche il *prodotto scalare euclideo* dato da $x' \cdot x'' = x'_1 x''_1 + \dots + x'_n x''_n$, che è legato alla *norma euclidea* dalla relazione $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$: si parla allora di \mathbb{R}^n come di *spazio affine euclideo*. Un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n è usualmente chiamato *insieme affine*.

Prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^n

Insieme affine

La norma euclidea induce una topologia su \mathbb{R}^n , per la quale una *base di intorni* di un punto x_0 è la famiglia delle palle aperte $\{B_n(x_0, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$, o delle palle chiuse $\{B_n(x_0, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$.⁽⁴⁶⁾

Base di intorni

Palle aperte e chiuse

Per $n \geq 2$ non è più assegnato un ordine su \mathbb{R}^n , ovvero la relazione “ \leq ” perde senso; ed assieme ad essa perdono senso le nozioni di “insieme superiormente/inferiormente limitato” e di $\pm\infty$. Tuttavia:

Insieme limitato

- un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si può ancora definire *limitato* se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| < r$ per ogni $x \in A$, ovvero se è contenuto in qualche palla centrata nell’origine;
- quanto all’“infinito”, si aggiunge ad \mathbb{R}^n un unico punto ∞_n , ottenendo uno spazio esteso $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty_n\}$. Una base di “intorni” di ∞_n in $\overline{\mathbb{R}^n}$ è data da $\mathbb{R}^n \setminus B(0, M] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > M\}$ (i complementari di palle chiuse) al variare di $M > 0$; tale intorno di ∞_n sarà tanto più piccolo quando più grande è M .⁽⁴⁷⁾

Infinito ∞_n in \mathbb{R}^n

Spazio completato $\overline{\mathbb{R}^n}$

Una successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di punti di \mathbb{R}^n (dunque $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$) ha *limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}^n}$ se essa sta definitivamente in ogni intorno di ℓ , cioè se per ogni intorno (di base) U di ℓ esiste $k_U \in \mathbb{N}$ tale che $x_k \in U$ per ogni $k > k_U$.

Limite di successione in $\overline{\mathbb{R}^n}$

Proposizione 4.1.1. *Il limite di una successione in \mathbb{R}^n si può ricondurre a quello in \mathbb{R} :*

- (i) (Convergenza) *Se $\ell \in \mathbb{R}^n$, si ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \ell$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k,j} = \ell_j$ per ogni j .*
- (ii) (Divergenza) *Si ha $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \infty_n$ se e solo se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty$.*

Dimostrazione. (i) Basta passare al limite per $k \rightarrow +\infty$ nelle disuguaglianze $\max_j |x_{k,j} - \ell_j| \leq \|x_k - \ell\| \leq \sum_j |x_{k,j} - \ell_j|$. (ii) Per definizione. \square

⁽⁴⁶⁾Tuttavia, per la Proposizione 3.1.1, al posto della norma euclidea si potrebbe usare qualsiasi altra norma su \mathbb{R}^n , ad esempio $\|x\|_m$ o $\|x\|_s$, senza alterare la struttura topologica che ne risulta definita su \mathbb{R}^n .

⁽⁴⁷⁾Per visualizzare intuitivamente il “punto all’infinito” ∞_n , si pensi ad una superficie sferica ($n - 1$)-dimensionale (dunque una circonferenza in \mathbb{R}^2 , una superficie sferica in \mathbb{R}^3 ...) centrata in 0 e di raggio che tende all’infinito, i cui punti vengano alla fine “pinzati” per farli diventare uno solo. In questo senso, lo spazio esteso $\overline{\mathbb{R}^n}$ si identifica con la superficie sferica n -dimensionale $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$: ciò si vede al meglio con la *proiezione stereografica* dal polo Nord di \mathbb{S}^n verso \mathbb{R}^n , in cui il polo Nord venga mandato in ∞_n (vedi pag. 56). La scelta fatta per la base di intorni di ∞_n è la naturale conseguenza di questa visualizzazione: gli intorni di ∞_n sono i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n che “avvolgono” tutta questa “($n - 1$)-sfera all’infinito”, e dunque sono proprio quelli che contengono qualche complementare di palla chiusa.

Proposizione 4.1.2. *Ogni successione limitata in \mathbb{R}^n ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $n = 2$, in quanto l'idea è facilmente adattabile al caso generale. Se $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata in \mathbb{R}^2 , entrambe le successioni $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sono limitate in \mathbb{R} . Esisterà in particolare una sottosuccessione $(a_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ di $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, diciamo a $\tilde{a} \in \mathbb{R}$. Anche la successione $(b_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ di $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata, e dunque ammette una sottosuccessione $(b_{k_{\ell_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente, diciamo a $\tilde{b} \in \mathbb{R}$. Allora la sottosuccessione $(a_{k_{\ell_m}}, b_{k_{\ell_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ di $(a_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^2$. \square

Esempi. (1) La successione $x_k = (\frac{1}{k}, \arctg k, -3)$ in \mathbb{R}^3 tende a $\ell = (0, \frac{\pi}{2}, -3)$. Invece, la successione $x_k = (\frac{1}{k}, (-1)^k)$ in \mathbb{R}^2 non ha limite, perché non ce l'ha la successione $(-1)^k$ in \mathbb{R} : tuttavia è evidente che quest'ultima successione è limitata, e dunque deve ammettere sottosuccessioni convergenti (ad esempio, x_{2k+1} converge a $(0, -1)$). **(2)** Topologicamente, i numeri complessi \mathbb{C} vengono identificati al piano euclideo \mathbb{R}^2 : dunque, ad esempio, quando si dice che la successione di numeri complessi $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_k + iy_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $w = (u + iv) \in \mathbb{C}$, si intende che la successione $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a (u, v) in \mathbb{R}^2 . **(3)** Se $\lim x_k = \infty_n$ (ovvero se $\lim \|x_k\| = +\infty$) non è detto che una delle componenti tenda a ∞ in \mathbb{R} : ad esempio, in \mathbb{R}^2 , le successioni $(-k, 0)$ e $(k \cos \frac{k\pi}{2}, k \sin \frac{k\pi}{2})$ divergono entrambe a ∞_2 (infatti $\|(-k, 0)\| = \|(k \cos \frac{k\pi}{2}, k \sin \frac{k\pi}{2})\| = k \rightarrow +\infty$), ma nel primo caso la y è sempre nulla, mentre nel secondo né la x né la y hanno limite. Invece, se una delle componenti di x_k tende a ∞ allora anche $\lim x_k = \infty_n$: infatti $\|x_k\| \geq |x_{k,j}|$ per ogni j .

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^n le definizioni di *insieme aperto*, *insieme chiuso*, *punto interno*, *punto di chiusura*, *punto di accumulazione*, *punto isolato* e *punto di frontiera* così come i risultati che legano queste nozioni tra loro e con le successioni, rimangono formalmente del tutto analoghe a quelle già viste per \mathbb{R} , a patto di sostituire le palle agli intervalli, e dunque la norma euclidea di \mathbb{R}^n al modulo.

Insiemi aperti e chiusi
Punti interni, di chiusura, di accumulazione, isolati, di frontiera

Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dirà *compatto* se è chiuso e limitato⁽⁴⁸⁾, e *compatto per successioni* se da ogni successione in A si può estrarre una sottosuccessione convergente in A .

Insiemi compatti e compatti per successioni

Proposizione 4.1.3. *Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo che $K \subset \mathbb{R}^n$ sia sequenzialmente compatto. Se K non fosse limitato, esisterebbe una successione di elementi di K che tende a ∞_n ; analogamente, se K non fosse chiuso esisterebbe una successione di elementi di K che converge ad un punto in $\mathbb{R}^n \setminus K$. In entrambi i casi, nessuna sottosuccessione delle successioni date potrebbe convergere in K , assurdo. Dunque K è sia chiuso che limitato, ovvero compatto. Supponiamo ora che K sia compatto, e sia $(x_k)_k$ una successione in K . Poiché K è limitato, per la Proposizione 4.1.2 esiste una sottosuccessione $(x_{k_\ell})_\ell$ che converge in \mathbb{R}^n , diciamo a \tilde{x} ; e poiché K è chiuso, deve essere $\tilde{x} \in K$. Dunque K è sequenzialmente compatto. \square

A si dirà *connesso* se non esistono due aperti disgiunti $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tali che $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap V \neq \emptyset$; si dirà *connesso per archi* se per ogni $x_0, x_1 \in A$ esiste un

Insiemi connessi e connessi per archi
Cammino

⁽⁴⁸⁾La definizione generale di *compattezza* in uno spazio topologico sarebbe la seguente: se X è uno spazio topologico, un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *compatto* se, data una qualsiasi famiglia $\{U_\iota : \iota \in I\}$ di aperti di X che ricopre A (ovvero tale che $A \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$), da essa è sempre possibile scegliere una sottofamiglia finita $\{U_{\iota_1}, \dots, U_{\iota_m}\}$ che continua a ricoprire A , ovvero tale che $A \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_m}$. La definizione più semplice di compattezza data sopra (chiusura più limitatezza) si addice agli spazi vettoriali di dimensione *finita* $X = \mathbb{R}^n$, nei quali si dimostra essere equivalente a quella generale; ma non funziona per spazi topologici qualsiasi, in particolare non funziona per gli spazi vettoriali di dimensione infinita come gli *spazi di Hilbert*.

cammino in A (ovvero, una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow A$) tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$.

In generale, la nozione di “connesso per archi” è più forte di quella di “connesso”:

Proposizione 4.1.4. *Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n connesso per archi è anche connesso.*⁽⁴⁹⁾

Dimostrazione. Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia sconnesso, e siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti disgiunti tali che $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap V \neq \emptyset$. Siano ora $x_0 \in A \cap U$ e $x_1 \in A \cap V$, e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva continua in A tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$; come vedremo nella Proposizione 4.3.7, il sostegno $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset A$ è anch’esso connesso. Ma allora si cade in contraddizione, perché $\Gamma \subset U \cup V$, $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ e $\Gamma \cap V \neq \emptyset$. Dunque A non è connesso per archi. \square

Invece in $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ le due nozioni coincidono con quella di *intervallo*, cioè “insieme senza buchi”:

Proposizione 4.1.5. *Un sottoinsieme di \mathbb{R} è connesso se e solo se è connesso per archi, e si tratta di tutti e soli gli intervalli.*

Dimostrazione. Se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, esso è ovviamente connesso per archi: infatti se $x_0, x_1 \in A$ con $x_0 < x_1$, tutto il segmento $[x_0, x_1]$ è contenuto in A e dunque basta considerare il “cammino lineare” $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ dato da $\gamma(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$. • Se A è connesso per archi, esso è anche connesso per la Proposizione 4.1.4. • Infine, se A è connesso deve essere un intervallo: se infatti non lo fosse, esisterebbero $x_0, x_1 \in A$ e $\xi \notin A$ con $x_0 < \xi < x_1$, e allora i due aperti disgiunti $U =]-\infty, \xi[$ e $V =]\xi, +\infty[$ di \mathbb{R} mostrano che A è sconnesso. \square

4.2 Limiti e continuità

Studieremo d’ora in poi funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, di n *variabili reali* (perché il dominio è \mathbb{R}^n , dunque va specificato il valore di f in ogni $x = (x_1, \dots, x_n)$) e *vettoriali* (perché il codominio è \mathbb{R}^m , dunque il valore $f(x)$ sarà un vettore di \mathbb{R}^m). Più generalmente, dovremo aspettarci che f sia definita solo su un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$, ovvero $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$; il *grafico* di f sarà allora

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}^m : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Se $\pi_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione canonica j -esima $\pi_j(y) = y_j$ (con $j = 1, \dots, m$), la funzione $f_j = \pi_j \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *componente j -esima* di f , e si ha $f = (f_1, \dots, f_m)$. Per $n = 1$ (e A un intervallo di \mathbb{R}) ritroviamo la nozione di *curva*; per $m = 1$ si parla anche di funzioni *scalari*.

Componenti di una funzione
Funzione scalare

Esempi. (1) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ privato dell’asse x , le componenti di $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y) = (9x - 3y, \sin xy, \frac{x^2 - e^x}{y})$ sono $f_1, f_2, f_3 : A \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1(x, y) = 9x - 3y$, $f_2(x, y) = \sin xy$ e $f_3(x, y) = \frac{x^2 - e^x}{y}$. (2) Avendo identificato topologicamente \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , le componenti di una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sono $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_1 = \operatorname{Re} f$ e $f_2 = \operatorname{Im} f$. Ad esempio, se $f(z) = z^2 - ze^z$ si ha $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ e $ze^z = (x + iy)(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y)$, dunque $f_1(z) = (\operatorname{Re} f)(z) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$ e $f_2(z) = (\operatorname{Im} f)(z) = 2xy + e^x(x \sin y + y \cos y)$.

Proposizione - Definizione 4.2.1. (Limite di una funzione) *Sia $p \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per A , e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}^m}$. Si dirà che $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$ se sono verificate le*

Limite di funzione

⁽⁴⁹⁾Il viceversa è falso, come è evidenziato nell’esempio del *seno del topologo* in \mathbb{R}^2 , ovvero l’insieme $A = \{(x, y) : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(x, y) : x = 0, |y| \leq 1\}$ che si dimostra essere connesso ma non connesso per archi. Tuttavia, se A è un aperto di \mathbb{R}^n allora le due nozioni sono equivalenti.

seguenti condizioni equivalenti:

- (i) per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di p tale che $f((U \setminus \{p\}) \cap A) \subset V$;
- (ii) per ogni successione x_k in $A \setminus \{p\}$ tale che $\lim x_k = p$ si ha $\lim f(x_k) = \ell$.

Come fatto per le successioni, è molto importante iniziare notando che, nel calcolo dei limiti, ci si può comunque ridurre al caso $m = 1$, cioè alle funzioni scalari $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- Proposizione 4.2.2.** (i) (Limiti finiti) Se $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow p} f_j(x) = \ell_j$ per ogni $j = 1, \dots, m$.
- (ii) (Limiti infiniti) Si ha $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty_m$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow p} \|f(x)\| = +\infty$.

Dimostrazione. Segue subito dalla Proposizione 4.1.1. □

La Proposizione 4.2.2 mostra che a rendere più delicata la nozione di limite rispetto al caso base di funzioni di una sola variabile reale è solo, eventualmente, l'*aumentata dimensione del dominio*. Infatti, per $n \geq 2$, le palle $B_n(x_0, \varepsilon)$ sono insiemi "più compositi" degli intervalli $B_1(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, così come i complementari di palle chiuse lo sono più delle semirette: ora a $p \in \mathbb{R}^n$ si può tendere *in molti modi diversi*, e non solo in due (da sinistra o da destra) come prima, ed $f(x)$ potrebbe avere comportamenti discordanti tra loro a seconda del modo in cui x tende a p . Dunque, anche se la nozione di limite è formalmente la stessa di prima, in realtà essa può diventare più delicata da maneggiare nei casi dubbi, come si vedrà ampiamente negli esempi presentati più in basso.

La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dirà *continua in* $x_0 \in A$ se x_0 è un punto isolato di A , oppure se x_0 è di accumulazione per A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; si dirà che f è *continua in* A se è continua in ogni $x_0 \in A$. Funzione continua

Proposizione 4.2.3. f è continua in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Dimostrazione. Vedi Proposizione 4.2.2(i). □

La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dirà *lipschitziana in* A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che $\|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\|$ per ogni $x, x' \in A$. La migliore (ovvero la minima) di queste costanti $L_A \geq 0$ si dirà *la costante di Lipschitz* per f su A .⁽⁵⁰⁾ Funzione lipschitziana

Proposizione 4.2.4. Se f è lipschitziana in A , essa è anche continua in A .

Dimostrazione. Esercizio (è la stessa di quella per funzioni di una variabile reale). □

Corollario 4.2.5. La norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e le proiezioni $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue.

⁽⁵⁰⁾ Mostriamo che effettivamente esiste la minima costante di Lipschitz. Sia $S = \{L \geq 0 : \|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\| \text{ per ogni } x, x' \in A\}$. Se f è lipschitziana in A si ha $S \neq \emptyset$; è inoltre ovvio che S è inferiormente limitato (0 è un minorante), dunque esiste $L_A = \inf S \geq 0$. Dobbiamo mostrare che $L_A = \min S \geq 0$, cioè che $L_A \in S$. Se infatti esistessero $\tilde{x}, \tilde{x}' \in A$ tali che $\|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')\| > L_A\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|$, si avrebbe di certo $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$ (infatti $0 \not\asymp 0$), dunque ciò equivarrebbe a $\frac{\|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')\|}{\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|} > L_A$; per la proprietà caratteristica dell'estremo inferiore esisterebbe allora $L \in S$ tale che $\frac{\|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')\|}{\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|} > L$, ovvero $\|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}')\| > L\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|$: ma ciò sarebbe assurdo, proprio perché $L \in S$.

Dimostrazione. Sia la norma che le proiezioni sono lipschitziane: infatti da $x' = x + -(x - x')$, da $x = x' + (x - x')$ e dalla disuguaglianza triangolare delle norme discende $||x|| - ||x'||| \leq ||x - x'||$, e da $\max_j |x_j - x'_j| \leq ||x - x'||$ segue $|x_j - x'_j| \leq ||x - x'||$ per ogni j . \square

Le principali proprietà dei limiti e delle funzioni continue restano vere anche in generale, fatto salvo il senso.⁽⁵¹⁾ Assieme alla Proposizione 4.2.2 e al Corollario 4.2.5, oltre al fatto che *le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale*, queste proprietà permettono di risolvere gran parte delle questioni di limiti e continuità: ad esempio

Corollario 4.2.6. *Tutte le funzioni lineari di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m sono continue.*

Dimostrazione. Come noto, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è rappresentata —rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m — da una e una sola matrice Φ ad m righe ed n colonne, ovvero tale che $\varphi(x) = \Phi x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ove il secondo membro indica la moltiplicazione di Φ per il vettore colonna x . Pertanto ogni componente di φ si scrive come combinazione lineare delle proiezioni π_1, \dots, π_n (più precisamente si ha $\varphi_j = \Phi_{j1}\pi_1 + \dots + \Phi_{jn}\pi_n$), e dunque è continua. • Per fare un esempio concreto di quanto detto, la funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x + y - 5z)$ è associata alla matrice $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, e si ha $\varphi_1 = (1)\pi_1 + (-2)\pi_2 + (1)\pi_3$ e $\varphi_2 = (3)\pi_1 + (1)\pi_2 + (-5)\pi_3$. \square

Come detto, i problemi si presentano *quando si vogliono studiare i limiti di f nei punti dubbi*, che possono essere punti di $\overline{\mathbb{R}^n}$ di accumulazione per il dominio e fuori da esso, o punti del dominio in cui f è definita “ad hoc” o in cui vi sono passaggi di definizione per f , e ciò per i motivi descritti in precedenza. Iniziamo col notare il seguente fatto, che generalizza quanto già noto per i limiti “sinistro” e “destro” nel caso di una variabile.

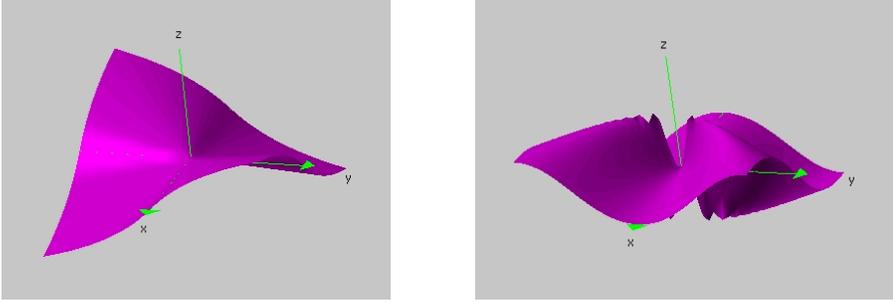
Proposizione 4.2.7. (Limiti e limiti di restrizioni) *Siano $E \subset A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione, e $p \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per E (dunque anche per A). Se esiste $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ allora esiste, ed è uguale, anche $\lim_{x \rightarrow p} (f|_E)(x)$.*

Dimostrazione. Ovvio dalla definizione di limite. \square

La tecnica del limite di restrizioni, ovvero dello studiare il limite di $f(x)$ quando x si avvicina a p *restando in un certo sottoinsieme del dominio* permette dunque di “testare”, pur senza poterla dimostrare, l’eventuale esistenza del limite globale: anzi, permette di dimostrare l’eventuale *non-esistenza* del limite globale, nel caso in cui si trovi un sottoinsieme E tale che $\lim_{x \rightarrow p} (f|_E)(x)$ non esiste, o due sottoinsiemi E_1 ed E_2 tali che $\lim_{x \rightarrow p} (f|_{E_1})(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} (f|_{E_2})(x)$ esistono ma sono diversi. I sottoinsiemi più comunemente usati sono (i sostegni di) *curve* che passano, o tendono, a p , e la ragione è chiara: se $\gamma : I \rightarrow A$ (con I intervallo di \mathbb{R}) parametrizza la curva, restringere f al sostegno di γ significa considerare la composizione $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, e dunque il limite della restrizione è ridotto al limite di una funzione di una sola variabile reale, il parametro $t \in I$.

In base alla Proposizione 4.2.3, possiamo limitarci a studiare il caso delle funzioni scalari.

⁽⁵¹⁾ Ad esempio, la compatibilità con le operazioni e la composizione sono ancora valide, mentre i risultati che usano l’ordine totale di \mathbb{R} (come il confronto e la permanenza del segno) riguardano solo le funzioni scalari, ovvero con $m = 1$.



(a) Grafico di $h(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$. (b) Grafico di $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Esempi. (1) $h(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ è definita e continua per $(x, y) \neq (0, 0)$. Restringendo h agli assi (fuori da $(0, 0)$) si ottiene $h(x, 0) = h(0, y) = 0$, dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$, se esiste, vale 0. L'impressione è rafforzata restringendo a qualunque altra retta $y = mx$: infatti $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m|x|}{1+|m|} = 0$. Ma nemmeno questo prova che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ vale 0. Quanto a ∞_2 , tendendo lungo gli assi si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(0, y) = 0$, mentre tendendo lungo la bisettrice $y = x$ si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{2} = +\infty$: dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} f(x, y)$ non esiste, mentre la questione resta in sospeso per $(0, 0)$.

(2) $\ell(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ è definita e continua fuori dalla retta $y = -x$. Se $a \neq 0$ si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,-a)} \ell(x, y) = \infty$ (il numeratore tende a $-a^2 \neq 0$, il denominatore è infinitesimo). Sugli assi ℓ è nulla, dunque tendendo a $(0, 0)$ lungo le curve-assi si ha che $\lim_{t \rightarrow 0} \ell(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \ell(0, t) = 0$; d'altra parte, in ogni intorno di $(0, 0)$ vi sono punti della retta $y = -x$ vicino ai quali ℓ diverge a ∞ , dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ell(x, y)$ non può esistere.

(3) $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ è definita e continua fuori da $(0, 0)$; inoltre, g è nulla sugli assi, dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$, se esiste, deve essere 0. Inoltre, se $\gamma_\alpha(t) = (t, \alpha t)$ è una generica curva-retta per l'origine, vale $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma_\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\alpha t)^2}{(t)^2+(\alpha t)^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t}{1+\alpha^4 t^2} = 0$; ma, come già visto, nemmeno questo basta per affermare che il limite vale 0. E infatti in questo caso è falso: se si sceglie la curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ (il cui sostegno è il grafico $x = y^2$) si ha $g(\gamma(t)) \equiv \frac{1}{2}$, dunque $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = \frac{1}{2}$. In definitiva $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ non esiste. Per le stesse ragioni non esiste nemmeno $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} g(x, y)$.

(4) $m(x, y) = x$ è definita e continua su tutto \mathbb{R}^2 , e studiamo $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} m(x, y)$. Se $\gamma_1(t) = (t, 0)$ (l'asse x), si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t, 0) = +\infty$, mentre se $\gamma_2(t) = (0, t)$ è l'asse y , si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(0, t) = 0$. Dunque $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} m(x, y)$ non esiste.

(5) Anche $n(x, y) = x^2 + y^2 - x$ è definita e continua su tutto \mathbb{R}^2 . Si verifica facilmente che restringendosi ad una qualunque retta $y = mx + q$ si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x, mx + q) = +\infty$, e lo stesso vale per le rette verticali $x = k$ (ovvero $\lim_{y \rightarrow \infty} n(k, y) = +\infty$); ma ciò non dimostra ancora che $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} n(x, y) = +\infty$, e anche questa questione resta in sospeso.

Come visto, le considerazioni sui limiti di varie restrizioni, anche se tutte concordi, non bastano a provare l'esistenza di un limite globale. A questo fine, risultano invece utili i seguenti criteri (eventualmente con l'ausilio delle coordinate speciali), che generalizzano tecniche già usate nel caso di una variabile.

Proposizione 4.2.8. Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e $p \in \overline{\mathbb{R}^n}$ un punto di accumulazione per A .

- (i) Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se esiste $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesima in p (ovvero tale che $\lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = 0$) per cui $|f(x) - \ell| \leq |\varphi(x)|$ all'intorno di p , allora $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$.
- (ii) Se esiste $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ infinita in p (ovvero tale che $\lim_{x \rightarrow p} \varphi(x) = \infty$) per cui $|f(x)| > |\varphi(x)|$ all'intorno di p , allora $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$.

Dimostrazione. Esercizio (segue dalle definizioni e dal Teorema del confronto in una variabile). \square

Negli esercizi in cui si studiano limiti di funzioni di due variabili $f(x, y)$ in $(0, 0)$ o in ∞_2 può essere utile anche il *cambio di variabili polari*: il seguente criterio dice che il conto con (ρ, θ) funziona se il limite è uniforme rispetto a θ .

Proposizione 4.2.9. *Sia $f(x, y)$ definita in $A \subset \mathbb{R}^2$, e $(0, 0)$ sia di accumulazione per A .*

- (i) *Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se esiste $\varphi(\rho)$ infinitesima per $\rho \rightarrow 0^+$ per cui $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \ell| \leq |\varphi(\rho)|$ all'intorno di $\rho = 0^+$, allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$.*
- (ii) *Se esiste $\varphi(\rho)$ infinita per $\rho \rightarrow 0^+$ per cui $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \geq |\varphi(\rho)|$ all'intorno di $\rho = 0^+$, allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \infty$.*

Le stesse conclusioni valgono con ∞_2 al posto di $(0, 0)$, facendo tendere $\rho \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Esercizio (anche qui, definizioni e Teorema del confronto in una variabile). \square

Esempi. (1) Era rimasto il dubbio se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ valesse 0. Per dimostrare che è così, basta notare che $|h(x, y)| \leq \varphi(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$ (sugli assi h è nulla; mentre, essendo $|x| + |y| \geq 2\sqrt{|xy|}$, fuori dagli assi si ha $|h(x, y)| \leq \frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$), ed essendo $\varphi(x, y)$ infinitesima si conclude. **(2)** Era in dubbio anche se fosse $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} n(x, y) = +\infty$. La risposta è positiva: usando le coordinate polari, se $\rho \geq 2$ si ha $n(x, y) = \rho^2 - \rho \cos \theta = \rho(\rho - \cos \theta) \geq \rho$, e $\varphi(\rho) = \rho$ tende a $+\infty$. **(3)** Riprendiamo la funzione $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$. Passando in coordinate polari si ha $g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$, e si può osservare che per ogni θ fissato il limite per $\rho \rightarrow 0^+$ è 0: dunque g tende a 0? Non si può dire: questa è solo un'errata applicazione della Proposizione 4.2.9, che invece richiede *prima* di maggiorare con una funzione infinitesima di ρ e *poi* di passare al limite (in effetti, che g tenda a 0 per ogni θ fissato equivale solo a dire che g tende a 0 quando si tende all'origine $(0, 0)$ lungo una qualsiasi retta passante per essa). Un discorso perfettamente analogo vale per ∞_2 facendo tendere $\rho \rightarrow +\infty$. In realtà, come già visto in precedenza, i limiti di g in $(0, 0)$ e in ∞_2 non esistono.

4.3 Proprietà delle funzioni continue

Esaminiamo ora le relazioni della continuità con gli insiemi aperti e chiusi, con i compatti e con i connessi; e anche la nozione di *omeomorfismo*, cioè “isomorfismo topologico”.

Proposizione 4.3.1. (Funzioni continue, aperti e chiusi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Se $V \subset \mathbb{R}^m$ è aperto allora $f^{-1}(V)$ è aperto in A , ovvero esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(V) = A \cap U$. Similmente, se $D \subset \mathbb{R}^m$ è chiuso allora $f^{-1}(D)$ è chiuso in A , ovvero esiste un chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(D) = A \cap C$.*

Entrambe le condizioni sono anche sufficienti per la continuità.

Dimostrazione. Sia V un aperto di \mathbb{R}^m , e sia $x \in f^{-1}(V) \subset A$. Poiché V è intorno del suo punto $f(x)$, per continuità esiste un intorno U_x di x in \mathbb{R}^n tale che $f(A \cap U_x) \subset V$, ovvero $A \cap U_x \subset f^{-1}(V)$. Posto $U = \bigcup \{U_x : x \in f^{-1}(V)\}$ si ha allora che U è un aperto di \mathbb{R}^n e che $f^{-1}(V) = A \cap U$, dunque $f^{-1}(V)$ è aperto in A . L'analogo asserito per i chiusi discende poi dall'identità $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$: infatti $\mathbb{R}^m \setminus D$ è aperto, dunque $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus D) = f^{-1}(\mathbb{R}^m) \setminus f^{-1}(D) = A \setminus f^{-1}(D)$ è un aperto di A , dunque $f^{-1}(D)$ è un chiuso di A . \square

Corollario 4.3.2. *I sottoinsiemi di \mathbb{R}^n definiti da un numero finito di disequazioni strette di funzioni continue sono aperti. I sottoinsiemi di \mathbb{R}^n definiti da un numero qualunque di equazioni e/o disequazioni late sono chiusi.*

Dimostrazione. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $a \in \mathbb{R}$, poiché ad esempio $]a, +\infty[$ è un aperto di \mathbb{R} mentre $[a, +\infty[$ e $\{a\}$ sono chiusi di \mathbb{R} si ha che $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$ è un aperto di \mathbb{R}^n mentre $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty[)$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ sono chiusi di \mathbb{R}^n . Il resto delle affermazioni segue dal fatto che intersezioni finite di aperti sono aperte, e che intersezioni arbitrarie di chiuse sono chiuse. \square

Esempi. (1) Gli insiemi $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)e^y > 3x\}$ e $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y^2 < \cos(xyz)\}$ sono aperti: infatti $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$ con $f(x, y) = (x^2 - 1)e^y - 3x$ e $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) > 0, g_2(x, y, z) < 0\}$ con $g_1(x, y, z) = x, g_2(x, y, z) = y^2 - \cos(xyz)$, e le funzioni f, g_1, g_2 sono continue. **(2)** Analogamente, gli insiemi $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \leq 0, x + y - 1 \geq 0\}$, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - x^4 - y^2 + 3y \geq 1, x + 2y = 2\}$ e $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3, x^2 + y^2 \geq 1\}$ sono chiusi.

Proposizione 4.3.3. (Immagini continue di compatti sono compatte) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua, e $K \subset A$ compatto. Allora $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ è compatto.*

Dimostrazione. Usando la Proposizione 4.1.3 si può usare equivalentemente la compattezza sequenziale; la dimostrazione, facile, è allora come quelle per le funzioni di una variabile (esercizio). \square

Se Z è un insieme e $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, il *massimo* (assoluto) *di f* è (se esiste) il numero reale $\alpha = \max f(Z)$. In tal caso, ogni $z \in Z$ tale che $f(z) = \alpha$ si dirà *punto di massimo* (assoluto) per f , e se z è l'unico punto di Z in cui $f(z) = \alpha$ si dirà che z è un punto di massimo *stretto*. Definizioni simili si hanno per il minimo. Massimo e minimo (risp. punti di massimo e minimo) di f sono detti *estremi di f* (risp. *estremanti di f*).

Dalla Proposizione 4.3.3 segue allora il

Teorema 4.3.4. (Weierstrass) *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto, ogni funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo assoluti.*

Dimostrazione. L'insieme $f(K)$ è un compatto di \mathbb{R} : esso dunque ha gli estremi superiore ed inferiore in \mathbb{R} perché limitato, e li contiene perché chiuso. \square

Corollario 4.3.5. *Siano $C \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso non limitato e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continua.*

- (i) *Se $\lim_{x \rightarrow \infty_n} f(x) = +\infty$, oppure se $\lim_{x \rightarrow \infty_n} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ ed esiste $x_0 \in C$ tale che $f(x_0) < \alpha$, allora f ammette minimo assoluto in C .*
- (ii) *Più generalmente, se esistono $\beta \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in C$ tali che f sia definitivamente $> \beta$ e $f(x_0) \leq \beta$, allora f ammette minimo assoluto in C .*

Dimostrazione. Sia $M > 0$ tale che se $x \in C$ e $\|x\| > M$ allora $f(x) > \beta$, e sia $C' = C \cap B(0, M)$: allora di certo $x_0 \in C'$, e $\inf_C f = \inf_{C'} f$. Ma C' è compatto, dunque per Weierstrass f ammette minimo assoluto su C' . \square

Mettiamo in evidenza il seguente legame tra limiti e compattezza, che serve a stabilire con facilità la compattezza di insiemi affini.

Proposizione 4.3.6. *Se C è un chiuso non limitato di \mathbb{R}^n ed $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{x \rightarrow \infty_n} f(x) = +\infty$, allora l'insieme $\{x \in C : f(x) \leq 0\}$ è compatto.*

Più generalmente, se C è un chiuso non limitato di \mathbb{R}^n ed $f_1, \dots, f_r : C \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue tali che almeno una di esse è definitivamente > 0 ,⁽⁵²⁾ allora l'insieme $\{x \in C : f_j(x) \leq 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, r\}$ è compatto.

I risultati sono veri anche cambiando tutte o alcune delle disuguaglianze “ \leq ” con “ $=$ ”.

Dimostrazione. Se C è un chiuso non limitato di \mathbb{R}^n ed $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{x \rightarrow \infty_n} f(x) = +\infty$, allora l'insieme $X = \{x \in C : f(x) \leq 0\}$ è compatto in quanto chiuso (Corollario 4.3.2) e limitato (per definizione di limite). Nel caso generale, basta osservare che un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è esso stesso compatto. \square

Esempi. (1) L'insieme $S_1 = \{(x, y) : x^2 - 4x + y^2 \leq 0, x + y - 1 \geq 0\}$ è compatto, poiché $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} x^2 - 4x + y^2 = +\infty$. Accorgendosi che $x^2 - 4x + y^2 \leq 0$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro $(0, 2)$ e raggio 2, la compattezza di S è chiara in quanto S è chiuso (vedi Corollario 4.3.2) e limitato (infatti $\|(x, y)\| \leq 4$). **(2)** L'insieme $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3, x^2 + y^2 \geq 1\}$ è compatto, perché è $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) \leq 0, f_2(x, y, z) \geq 0\}$ con $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 3$ e $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, e $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty_3} f(x, y, z) = +\infty$. Anche qui la compattezza si può verificare direttamente, notando che da $f_1(x, y, z) \leq 0$ segue subito $|x| \leq \sqrt{3}$, $|y| \leq \sqrt{3}$ e $|z| \leq \sqrt{3/2}$. (Poiché $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$, ovvero $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3/2} \leq 1$, rappresenta i punti interni all'ellissoide di semiassi $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3/2}$, mentre $x^2 + y^2 \geq 1$ rappresenta i punti esterni al cilindro con base la circonferenza unitaria nel piano (x, y) ed asse l'asse z , l'insieme S è l'intersezione di questi due sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 .) **(3)** Naturalmente il criterio può essere usato anche con i segni invertiti, e serve sempre un po' d'intuito. Ad esempio, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - x^4 - y^2 + 3y \geq 1, x + 2y = 2\}$ può essere scritto come $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) \geq 0, f_2(x, y) = 0\}$, con $f_1(x, y) = 4x - x^4 - y^2 + 3y - 1$ e $f_2(x, y) = x + 2y - 2$: poiché vale $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} f_1(x, y) = -\infty$, l'insieme S è certamente compatto.

Proposizione 4.3.7. (Immagini continue di connessi sono connesse) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Se $B \subset A$ è connesso allora $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso. Similmente, se B è connesso per archi allora $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che $A = \mathbb{R}^n$ (lasciando allo studente gli adattamenti nel caso generale). (i) Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ connesso, e supponiamo che $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ sia sconnesso: allora esistono V_1, V_2 aperti disgiunti di \mathbb{R}^m tali che $V_1 \cap f(B) \neq \emptyset, V_2 \cap f(B) \neq \emptyset$ e $f(B) \subset V_1 \cup V_2$. Ma allora $U_1 = f^{-1}(V_1)$ e $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sono aperti (Proposizione 4.3.1) disgiunti di \mathbb{R}^n tali che $U_1 \cap B \neq \emptyset, U_2 \cap B \neq \emptyset$ e $B \subset U_1 \cup U_2$, assurdo. (ii) Sia B connesso per archi, e siano $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ due punti di $f(B)$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow B$ è una curva continua in B da $x_1 = \gamma(a)$ a $x_2 = \gamma(b)$, allora $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow f(B)$ è una curva continua in $f(B)$ da $y_1 = (f \circ \gamma)(a)$ a $y_2 = (f \circ \gamma)(b)$. Dunque $f(B)$ è connesso per archi. \square

Corollario 4.3.8. (Teorema degli zeri) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (con $\alpha < \beta$) due valori assunti da f . Allora per ogni $\gamma \in [\alpha, \beta]$ esiste qualche $x \in A$ tale che $f(x) = \gamma$.*

Dimostrazione. $f(A)$ è un connesso di \mathbb{R} , ovvero è un intervallo: dunque, poiché $\alpha, \beta \in f(A)$ si ha anche $[\alpha, \beta] \subset f(A)$, da cui la conclusione. \square

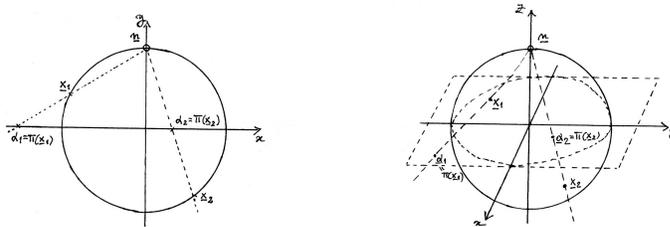
Dati due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow B$ si dirà *omeomorfismo* se è con-

Omeomorfismo

⁽⁵²⁾significa che esistono $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ e $M > 0$ tali che se $\|x\| > M$ allora $f_{j_0}(x) > 0$.

tinua, biiettiva e con inversa continua. Due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ si diranno *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra essi. Il significato è quello che A e B , pur essendo eventualmente diversi, sono in realtà “topologicamente equivalenti”: in effetti, un omeomorfismo preserva le proprietà topologiche (un sottoinsieme $A' \subset A$ è aperto, chiuso, connesso, compatto, etc. se e solo se lo è $f(A') \subset B$).

Esempi. (1) $A = \mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad una palla aperta $B = B(0, r)$, con $f(x) = \frac{r}{1+||x||}x$ (da cui $f^{-1}(y) = \frac{1}{r-||y||}y$). (2) In \mathbb{R}^2 , un quadrato pieno $\{|x| + |y| < 1\}$ è omeomorfo ad un disco pieno $B(0, 1)$, e idem per i corrispondenti insiemi con il bordo incluso; inoltre, un disco bucato $B(0, 1) \setminus \{0\}$ è omeomorfo ad una corona circolare $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ (si provino queste affermazioni per esercizio). Provare poi (magari aiutandosi con un disegno) che un quadrato bucato $A = \{|x| + |y| < 1\} \setminus \{0\}$ è omeomorfo ad una corona circolare $B = B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$. (3) Si consideri la sfera n -dimensionale $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$, e sia $n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ il suo “polo Nord”. Si dimostra che $A = \mathbb{S}^n \setminus \{n\}$ (la sfera privata di un punto) è omeomorfa a \mathbb{R}^n tramite la *proiezione stereografica* $\pi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, che manda un punto $x \in A$ nell’unico punto del “piano orizzontale” $x_{n+1} = 0$ (identificabile a \mathbb{R}^n) che sta sulla retta passante per x e n . In coordinate, se $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in A$ allora $\pi(x) = (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}, 0)$, mentre se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ allora $\pi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2+1}(2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n, |\alpha|^2 - 1)$. Ad esempio, per $n = 1$ si ha $\pi(x, y) = (\frac{x}{1-y}, 0)$ e $\pi^{-1}(\alpha) = (\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1})$; mentre per $n = 2$ si ha $\pi(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$ e $\pi^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}, \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2-1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1})$.



(a) Proiezione stereografica per \mathbb{S}^1 . (b) Proiezione stereografica per \mathbb{S}^2 .

5 Calcolo differenziale negli spazi affini

5.1 Preliminari

Iniziamo ricapitolando rapidamente alcune indispensabili nozioni di algebra lineare (per una trattazione più accurata rimandiamo senz'altro ad un corso di geometria).

Spazi di funzioni lineari tra \mathbb{R} -spazi vettoriali

Siano V e W due \mathbb{R} -spazi vettoriali. Una funzione $f : V \rightarrow W$ si dice *lineare* (o *morfismo*) se $f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$ per ogni $v, v' \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il *nucleo* $\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$ e l'*immagine* $\text{im}(f) = f(V)$ sono un \mathbb{R} -sottospazio vettoriale rispettivamente di V e W ; se V ha dimensione finita, vale $\dim \ker(f) + \dim \text{im}(f) = \dim V$.

Funzioni lineari

Anche l'insieme $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ delle funzioni lineari da V a W è, in modo naturale, un \mathbb{R} -spazio vettoriale. Per $W = \mathbb{R}$, lo spazio $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ viene detto *duale* (algebrico) di V , ed i suoi elementi "forme lineari su V " o "covettori".⁽⁵³⁾

Duale algebrico

Se V' è un altro \mathbb{R} -spazio vettoriale, una funzione $b : V \times V' \rightarrow W$ si dice *bilineare* se è lineare in ciascuna delle due variabili⁽⁵⁴⁾; in particolare vale $b(0_V, v') = b(v, 0_{V'}) = 0$ per ogni $v \in V$ e $v' \in V'$.⁽⁵⁵⁾ Se $V = V'$, una funzione bilineare $b : V \times V \rightarrow W$ si dice *simmetrica* (risp. *antisimmetrica*) se $b(v, v') = b(v', v)$ (risp. se $b(v, v') = -b(v', v)$) per ogni $v, v' \in V$: si noti che, comunque, esistono due sole funzioni bilineari b_s e b_a , risp. simmetrica e antisimmetrica, tali che $b = b_s + b_a$.⁽⁵⁶⁾

Funzione bilineare, simmetrica ed antisimmetrica

Una funzione bilineare $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *forma bilineare* su V ; l'insieme delle forme bilineari su V si identifica naturalmente con $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)$.⁽⁵⁷⁾

Forma bilineare

Una forma bilineare b su V determina una funzione $Q_b : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $Q_b(v) = b(v, v)$, detta *forma quadratica* su V associata a b . Scrivendo $b = b_s + b_a$, si ha $Q_{b_s} = Q_b$ e $Q_{b_a} = 0$: dunque, non è restrittivo definire forme quadratiche solo a partire da forme bilineari simmetriche. La forma quadratica Q_b si dirà *definita positiva* se $Q_b(v) > 0$ per ogni $v \neq 0_V$, e *semidefinita positiva* se $Q_b(v) \geq 0$ per ogni $v \in V$; nozioni simili si hanno per la negatività. In tutti gli altri casi, Q_b si dirà *indefinita*: altrimenti detto, esistono $v, v' \in V$ tali che $Q_b(v) > 0$ e $Q_b(v') < 0$.

Forma quadratica, definita, semidefinita, indefinita

Una forma bilineare b su V simmetrica tale che Q_b è definita positiva viene detta anche *prodotto scalare* in V ; in tal caso, si dimostra che la funzione

Prodotto scalare e norma associata

$$p_b : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p_b(v) = \sqrt{b(v, v)} = \sqrt{Q_b(v)}$$

è una norma su V .⁽⁵⁸⁾

⁽⁵³⁾in contrapposizione ai "vettori", gli elementi di V .

⁽⁵⁴⁾Ciò significa che $b(\lambda v + \mu v', w) = \lambda b(v, w) + \mu b(v', w)$ e $b(v, \lambda w + \mu w') = \lambda b(v, w) + \mu b(v, w')$ per ogni $v, v' \in V, w, w' \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

⁽⁵⁵⁾Ad esempio, per linearità si ha $b(0_V, v') = b(0_V + 0_V, v') = 2b(0_V, v')$, da cui $b(0_V, v') = 0$.

⁽⁵⁶⁾Esse sono date da $b_s(v, v') = \frac{b(v, v') + b(v', v)}{2}$ e $b_a(v, v') = \frac{b(v, v') - b(v', v)}{2}$.

⁽⁵⁷⁾Una forma bilineare b su V definisce $\varphi_b \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)$ tramite $(\varphi_b(v))(v') = b(v, v')$; viceversa, una $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V^*)$ definisce una forma bilineare b_φ su V tramite $b_\varphi(v, v') = (\varphi(v))(v')$.

⁽⁵⁸⁾L'unica proprietà non ovvia è la disuguaglianza triangolare $p_b(v + v') \leq p_b(v) + p_b(v')$, che discende

Esempi. (1) Lo spazio $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ delle funzioni lineari di $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è identificato (non appena si siano fissate delle basi in \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m) allo spazio $M_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici con m righe e n colonne a coefficienti reali: ciò è spiegato meglio più tardi. In \mathbb{R}^n , il *prodotto scalare euclideo*, come noto, è dato da $b(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$; la norma ad esso associata è quella euclidea. Quello euclideo è solo un esempio di prodotto scalare nello spazio di dimensione finita \mathbb{R}^n ; in generale si veda la Proposizione 5.1.2.

(2) Nell' \mathbb{R} -spazio (di dimensione infinita) $V = C^0([a, b])$ delle funzioni $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, presi comunque $f_0 \in V$ e $c \in [a, b]$, la “moltiplicazione” $m_{f_0} : V \rightarrow V$ data da $m_{f_0}(f) = f_0 f$ e la “valutazione” $v_c : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v_c(f) = f(c)$ sono due esempi di funzioni lineari (in particolare si ha $v_c \in V^*$). D'altra parte la forma bilineare $b(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ (l'integrale è quello di Riemann) è un prodotto scalare, che dunque dà luogo ad una norma $p(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ (questo è un esempio primordiale di “norma integrale” che, per essere definita meglio, ha bisogno di una teoria dell'integrazione più raffinata, dovuta a Lebesgue).

Siano ora p e q norme rispettivamente su V e W , e sia $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l' \mathbb{R} -sottospazio di $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ delle *funzioni lineari e continue* da V a W , per le topologie definite dalle norme p e q .⁽⁵⁹⁾ Data $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, si ponga

Funzioni lineari
continue

$$\|f\|_{\text{op}} = \sup_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{q(f(v))}{p(v)} : v \neq 0_V \right\} = \sup_{\mathbb{R}} \{q(f(v)) : p(v) = 1\}$$

(si ha dunque $\|f\|_{\text{op}} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$).

Proposizione - Definizione 5.1.1. *Siano (V, p) e (W, q) spazi normati. Per una funzione lineare $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) f è continua nel punto 0_V ;
- (ii) $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$, ovvero f è continua ovunque;
- (iii) f è lipschitziana;
- (iv) $\|f\|_{\text{op}} < +\infty$.

In tal caso $\|f\|_{\text{op}}$ è la *costante di Lipschitz di f* , cioè il minimo $L \geq 0$ tale che $q(f(v)) \leq Lp(v)$ per ogni $v \in V$. La funzione $\|\cdot\|_{\text{op}} : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ è una norma (detta *norma operatoriale*) su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

Norma operatoriale

Dimostrazione. È ovvio che (ii) implica (i), e già sappiamo che (iii) implica (ii) anche per funzioni non lineari (Proposizione 4.2.4); d'altra parte, (iii) e (iv) sono equivalenti per definizione, ed è chiaro che in tal caso $\|f\|_{\text{op}}$ è la costante di Lipschitz di f . Resta solo da vedere che (i) implica (iii). La continuità di f in 0_V significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $p(v) \leq \delta_\varepsilon$ allora $q(f(v)) \leq \varepsilon$. Dal fatto che per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$ vale $p(\frac{\delta_1}{p(v)}v) = \frac{\delta_1}{p(v)}p(v) = \delta_1$ ricaviamo che $q(f(v)) = q(f(\frac{p(v)}{\delta_1} \frac{\delta_1}{p(v)}v)) = \frac{p(v)}{\delta_1} q(f(\frac{\delta_1}{p(v)}v)) \leq \frac{p(v)}{\delta_1} 1 = \frac{1}{\delta_1} p(v)$, da cui f è lipschitziana con costante $L = \frac{1}{\delta_1}$. \square

dalla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* $b(v, v')^2 \leq b(v, v)b(v', v')$, dimostrabile facilmente sviluppando il fatto che deve essere $b(v + \lambda v', v + \lambda v') \geq 0$ per ogni $v, v' \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (esercizio).

⁽⁵⁹⁾Si è visto che tutte le funzioni lineari $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono continue (più in generale ciò vale per funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow W$); tuttavia, se V ha dimensione infinita, si può mostrare che esistono sempre funzioni lineari di V in W che non sono continue. Ad esempio, se su $V = C^0([a, b])$ si considera la norma $p(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ di prima, o anche la norma di “media integrale” $\tilde{p}(f) = \int_a^b |f(x)| dx$, preso $c \in [a, b]$ la valutazione $v_c : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v_c(f) = f(c)$ non è continua: ad esempio la successione di funzioni gaussiane “a campana” $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-n^2 x^2}$ converge alla funzione nulla per le topologie date dalle norme p e \tilde{p} (infatti, da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ si ottiene $\lim p(f_n) = \lim \tilde{p}(f_n) = 0$), ma $\lim v_0(f_n) = +\infty$.

Quando $W = \mathbb{R}$ (con $q(v) = |v|$), il sottospazio $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ del duale algebrico V^* (costituito dunque dalle “forme lineari e continue” su V) viene detto *duale topologico* di V , e solitamente indicato con V' ; una forma bilineare su V è continua se e solo se lo è come funzione lineare in ciascuna delle due variabili.

Duale topologico

Una funzione $g : V \rightarrow W$ si dice *affine* se è la traslata di una funzione lineare, ovvero se esistono $w_0 \in W$ e $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ tali che $g(v) = f(v) + w_0$ per ogni $v \in V$; si noti che tali w_0 e f sono univocamente determinati da g , in quanto $w_0 = g(0)$ e $f(v) = g(v) - g(0)$. L'immagine di una funzione affine sarà dunque un *sottospazio affine* di W , ovvero il traslato di un sottospazio vettoriale di W .

Funzioni affini

È chiaro che una funzione affine $g = f + w_0$ è continua se e solo se lo è f .

Il caso di dimensione finita

Come noto, un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita d in cui si sia fissata una base ordinata di d vettori viene identificato con \mathbb{R}^d munito della base canonica $\{e_1, \dots, e_d\}$, tramite l'ovvio isomorfismo che manda ciascun vettore della base ordinata dello spazio nel corrispondente vettore della base canonica di \mathbb{R}^d : pertanto, se V e W sono due \mathbb{R} -spazi vettoriali di dimensione finita rispettivamente n e m sui quali si siano fissate delle basi ordinate, lo spazio $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ si identifica naturalmente con $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

D'altra parte, come visto (Corollario 4.2.6), tutte le funzioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m sono continue, ovvero $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (in particolare $(\mathbb{R}^n)' = (\mathbb{R}^n)^*$); inoltre, una volta fissate delle basi (ad esempio quelle canoniche) su \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , sappiamo che $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ viene identificato con l' \mathbb{R} -spazio vettoriale $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (di dimensione nm) delle *matrici con m righe e n colonne*, assegnando ad una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la matrice $F = (f_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tale che $f(e_j) = \sum_{i=1}^m f_{ij}e_i$ per ogni $j = 1, \dots, n$,⁽⁶⁰⁾ così che $f(x) = Fx$ (prodotto matrice-vettore colonna). Ne segue in particolare che le funzioni affini $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole quelle della forma $g(x) = Ax + b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$; l'immagine di g sarà un sottospazio affine di \mathbb{R}^m di dimensione il rango di A .

L'aver fissato una base (ad esempio la canonica) in \mathbb{R}^n porta alle seguenti identificazioni.

Proposizione 5.1.2. *Si consideri \mathbb{R}^n munito della base canonica.*

- (i) (Identificazione tra covettori “vettori-riga” di $(\mathbb{R}^n)'$ e vettori “vettori-colonna” di \mathbb{R}^n) *Per ogni forma lineare $f \in (\mathbb{R}^n)'$ esiste uno ed un solo vettore $v_f \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v) = v_f \cdot v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ (ove “ \cdot ” è il prodotto scalare euclideo). Viceversa, ogni elemento di \mathbb{R}^n definisce in tal modo una forma lineare.*
- (ii) (Identificazione tra forme bilineari su \mathbb{R}^n e matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$) *Per ogni forma bilineare b su \mathbb{R}^n esiste una ed una sola matrice $B_b = (b_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ tale che per ogni $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$ in \mathbb{R}^n si abbia*

$$b(v, v') = {}^t v B_b v' = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i v'_j$$

⁽⁶⁰⁾In altre parole: la j -esima colonna della matrice F rappresenta le componenti del vettore immagine $f(e_j) \in \mathbb{R}^m$ rispetto ai vettori della base canonica di \mathbb{R}^m .

(moltiplicazione tra il vettore-riga v , la matrice B_b ed il vettore-colonna v')⁽⁶¹⁾; inoltre b è (anti)simmetrica se e solo se la matrice B_b è (anti)simmetrica. Viceversa, ogni matrice di $M_n(\mathbb{R})$ definisce in tal modo una forma bilineare.

(iii) (Identificazione tra forme quadratiche su \mathbb{R}^n e matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{R})$) Se b è una forma bilineare simmetrica, la forma quadratica Q_b su \mathbb{R}^n è data da

$$Q_b(v) = {}^t v B_b v = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_i v_j = \sum_{i=1}^n b_{ii} v_i^2 + 2 \sum_{i<j} b_{ij} v_i v_j .$$

Viceversa, ogni matrice simmetrica di \mathbb{R}^n definisce in tal modo una forma quadratica.

Fissata la base canonica di \mathbb{R}^n , si è visto che le forme quadratiche su \mathbb{R}^n sono in corrispondenza con le matrici quadrate simmetriche in $M_n(\mathbb{R})$: si dirà dunque che una matrice simmetrica è (semi)definita positiva o negativa, o indeterminata, se tale è la forma quadratica a lei associata. Cerchiamo dei criteri per dedurre, dalla struttura di una data matrice simmetrica, a quale di queste proprietà essa soddisfa. A tal fine, si ricorda che i *minori principali* di una matrice quadrata M sono tutte le possibili sottomatrici quadrate M_{i_1, \dots, i_k} di M ottenute scegliendo un qualsiasi sottoinsieme $\{i_1, \dots, i_k\}$ di $\{1, \dots, n\}$ (con $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$) e cancellando le $n - k$ righe e $n - k$ colonne di M di indice non appartenente a $\{i_1, \dots, i_k\}$; in particolare, i *minori principali di guida* di M sono le n sottomatrici $M_k = M_{1, \dots, k} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ (per $k = 1, \dots, n$), ovvero quelle ottenute cancellando le ultime $n - k$ righe e $n - k$ colonne di M (dunque $M_1 = m_{11}$ e $M_n = M$).

Matrice definita,
semidefinita, indefinita

Minori principali

Proposizione 5.1.3. Sia $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice quadrata simmetrica.

- (i) M è definita positiva (risp. definita negativa) se e solo se ha tutti gli autovalori > 0 (risp. < 0), o se e solo se $\det M_k > 0$ (risp. $(-1)^k \det M_k > 0$) per ogni $k = 1, \dots, n$;
- (ii) M è semidefinita positiva (risp. semidefinita negativa) se e solo se ha tutti gli autovalori ≥ 0 (risp. ≤ 0), o se e solo se $\det M_{i_1, \dots, i_k} \geq 0$ (risp. $(-1)^k \det M_{i_1, \dots, i_k} \geq 0$) per ogni $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.
- (iii) M è indefinita in tutti gli altri casi.

Esempi. (1) Le forme quadratiche in \mathbb{R}^2 di matrici simmetriche $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ sono rispettivamente indefinita, semidefinita negativa e definita positiva. **(2)** Le forme quadratiche in \mathbb{R}^3 di matrici simmetriche $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -7 & \sqrt{5} & 3 \\ \sqrt{5} & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sono rispettivamente semidefinita positiva, definita negativa e indefinita. **(3)** Si faccia attenzione al fatto che per testare se una matrice è definita (positiva o negativa) bastano i minori principali di guida, mentre per testare se una matrice è semidefinita (positiva o negativa) servono tutti i minori principali. Ad esempio, i minori principali di guida della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno determinanti ≥ 0 (sono 0, 0 e 4), ma è evidente che la matrice non è semidefinita positiva (ad esempio ${}^t e_2 M e_2 = -4 < 0$). In realtà, proprio la presenza di $m_{2,2} = -4 < 0$ e di $\det M = 4 > 0$ ci dice che la matrice è indefinita.

⁽⁶¹⁾In generale, dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ e una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, al posto di ${}^t v A w$ un'altra notazione frequente è $v \cdot Aw$ (prodotto scalare tra i vettori colonna v e Aw : è chiaro che il risultato è lo stesso).

5.2 Funzioni differenziabili

Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione e $x_0 \in A$. Dato un vettore *non nullo* $v \in \mathbb{R}^n$, si definisce (se esiste) la *derivata direzionale lungo v* di f in x_0 come il vettore

Derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

In altre parole, si restringe il dominio di f ai soli punti della retta $\{x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ di \mathbb{R}^n (passante per x_0 e parallela a v) che appartengono ad A , ottenendo così una curva parametrica $t \mapsto f(x_0 + tv)$ in \mathbb{R}^m , e $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è la derivata di questa curva in $t = 0$.

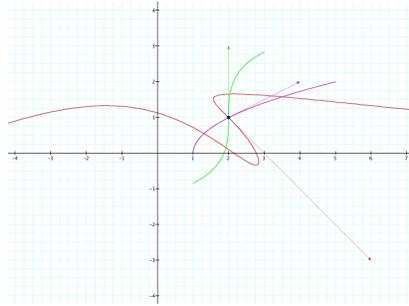
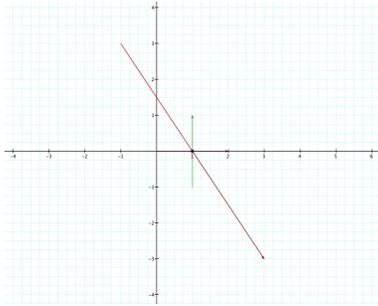
Si noti che $\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ per $\lambda \neq 0$. Nei punti $A'_v \subset A$ in cui ciò è possibile, resta dunque individuata una funzione

$$\frac{\partial f}{\partial v} : A'_v \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{derivata direzionale di } f \text{ lungo } v),$$

che misura punto per punto l'entità della variazione di f lungo la direzione di v .

Per $v = e_j$ (il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n), il vettore $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$ è detto *derivata parziale j -esima* di f in x_0 , e indicato usualmente con $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ oppure $\partial_j f(x_0)$. Dalla definizione è chiaro che si sta studiando come varia $f(x)$ quando x si sposta da x_0 muovendo solo la coordinata j -esima e lasciando fisse le altre: si tratterà dunque di derivare f rispetto alla sola variabile x_j , pensando le altre variabili x_i per $i \neq j$ come fissate.

Derivate parziali



Esempi. (1) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da $f(x, y) = (x^2 + y^3 + 1, x + y + \sin xy)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (2x_0, 1 + y_0 \cos x_0 y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (3y_0^2, 1 + x_0 \cos x_0 y_0)$. D'altra parte, se $v = (2, -3)$, applicando la definizione si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0 + 2t)^2 + (y_0 - 3t)^3 + 1, (x_0 + 2t) + (y_0 - 3t) + \sin(x_0 + 2t)(y_0 - 3t)}{t} - (x_0^2 + y_0^3 + 1, x_0 + y_0 + \sin x_0 y_0)$, ovvero $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(4tx_0 + 4t^2 - 9y_0^2 t + 27y_0 t^2 - 27t^3, -t + \sin(x_0 + 2t)(y_0 - 3t) - \sin x_0 y_0)}{t} = (4x_0 - 9y_0^2, -1 + (2y_0 - 3x_0) \cos x_0 y_0)$. Si noti (ovviamente non è un caso, come si vedrà tra breve) che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Le figure che precedono questo esempio riportano quanto accade per il punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$: a sinistra si notano le curve parametriche nel dominio \mathbb{R}^2 descritte da $\{(1, 0) + te_1 : |t| \leq 1\}$ (viola), $\{(1, 0) + te_2 : |t| \leq 1\}$ (verde) e $\{(1, 0) + tv : |t| \leq 1\}$ (rossa), con le presenze dei vettori e_1 , e_2 e v ; a destra si notano invece le rispettive curve parametriche immagine nel codominio \mathbb{R}^2 date da $\{f((1, 0) + te_1) : |t| \leq 1\}$, $\{f((1, 0) + te_2) : |t| \leq 1\}$ e $\{f((1, 0) + tv) : |t| \leq 1\}$ (per $t = 0$ si ottiene ovviamente il punto $f(1, 0) = (2, 1)$), con le presenze dei vettori derivati che per definizione sono proprio $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (2, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = (0, 2)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = (4, -4)$. **(2)** È d'uso rappresentare la matrice identica $\mathbf{1}_n \in M_n(\mathbb{R})$ con la *notazione di Kronecker* $(\mathbf{1}_n)_{ij} = \delta_{ij}$ (ovvero

$\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). Pertanto è chiaro che $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$: ad esempio, se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si ha $\frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{i,k} a_{ik}x_k) = \sum_{i,k} a_{ik}\delta_{kj} = \sum_i a_{ij}$.

L'esistenza delle derivate direzionali di f in x_0 è *independente* dalla continuità in x_0 .

Esempi. (1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = |x| + |y|$, e sia $x_0 = (0, 0)$. Allora f è continua in x_0 ma, preso un vettore non nullo $v = (v_1, v_2)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|tv_1| + |tv_2|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|(|v_1| + |v_2|)}{t}$ non esiste, perché i limiti $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|(|v_1| + |v_2|)}{t} = |v_1| + |v_2|$ e $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|(|v_1| + |v_2|)}{t} = -(|v_1| + |v_2|)$ sono diversi. **(2)** Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $g(0, 0) = 0$. Come già visto a pag. 52, g non è continua in $(0, 0)$. Tuttavia si ha $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}$: se $v_1 \neq 0$ il limite vale $\frac{v_2^2}{v_1}$, mentre se $v_1 = 0$ (dunque $v_2 \neq 0$) esso vale 0. Dunque le derivate direzionali esistono in $(0, 0)$ per ogni v .

Dunque nel calcolo a più variabili, diversamente dal caso di una variabile, la mera esistenza delle derivate direzionali non è più una condizione affidabile: serve una nozione che, pur riducendosi alla derivabilità nel caso di una variabile, dia sufficienti garanzie di regolarità anche in generale. A tal fine notiamo che, per funzioni scalari di una variabile $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, la derivabilità in $x_0 \in I$ si può esprimere anche dicendo che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h = o_0(h)$ (ovvero $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h|}{|h|} = 0$), cioè che l'incremento della funzione è controllato linearmente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, dall'incremento della variabile (tale α è precisamente $f'(x_0)$): diremo allora che $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è *differenziabile* in $x_0 \in A$ se esiste una funzione lineare $\varphi_{x_0} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

Funzione differenziabile in x_0

$$(5.1) \quad \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_{x_0}(h)\| = o_0(\|h\|), \quad \text{ovvero} \quad \lim_{h \rightarrow 0_n} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_{x_0}(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Il senso è lo stesso: per un piccolo incremento vettoriale h a partire da x_0 in \mathbb{R}^n , il corrispondente piccolo incremento vettoriale $f(x_0 + h) - f(x_0)$ della funzione in \mathbb{R}^m è approssimabile con una funzione lineare di h a meno di un errore infinitesimo di ordine superiore a quello di $\|h\|$.

Proposizione - Definizione 5.2.1. *Se f è differenziabile in x_0 , allora la funzione lineare $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che soddisfa (5.1) è univocamente determinata: essa viene detta differenziale di f in x_0 e usualmente denotata con df_{x_0} o con $f'(x_0)$.*⁽⁶²⁾

Differenziale in x_0

Dimostrazione. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entrambe soddisfacenti la proprietà di essere differenziale di f in x_0 , e sia $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: allora vale $\|\varphi(h)\| = \|(f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_2(h)) - (f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_1(h))\| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_1(h)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi_2(h)\| = o_0(\|h\|)$, dunque $\|\varphi(h)\| = o_0(\|h\|)$. Ma, essendo φ lineare, ciò implica che $\varphi \equiv 0$: infatti, se esistesse un $h_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(h_0) \neq 0$ si avrebbe $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(th_0)\|}{\|th_0\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|t\varphi(h_0)\|}{\|th_0\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\|\varphi(h_0)\|}{t\|h_0\|} = \frac{\|\varphi(h_0)\|}{\|h_0\|} \neq 0$, in contraddizione col fatto che $\|\varphi(h)\| = o_0(\|h\|)$.⁽⁶³⁾ Dunque $\varphi \equiv 0$, ovvero $\varphi_1 = \varphi_2$. \square

Come s'intuisce dalla definizione, il differenziale (in ogni punto del dominio) di una funzione affine è la sua parte lineare:

⁽⁶²⁾La notazione $f'(x_0)$ è espressiva come prolungamento di quella già nota per $n = 1$, ma a patto di rendersi conto che ora, in generale, essa indica una funzione lineare e non un numero o un vettore.

⁽⁶³⁾In altre parole, si è mostrato che se $\|\varphi(h)\| = o_0(\|h\|)$ allora necessariamente $\|\varphi\|_{op} = 0$.

Proposizione 5.2.2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è affine (diciamo $f(x) = \varphi(x) + b$ per una certa $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e un certo $b \in \mathbb{R}^m$) allora $df_{x_0} = \varphi$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Infatti $\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\| = \|(\varphi(x_0 + h) + b) - (\varphi(x_0) + b) - \varphi(h)\| = \|\varphi(x_0 + h) + \varphi(h) + b - \varphi(x_0) - b - \varphi(h)\| = \|0\| = 0$. \square

Nel caso base $n = 1$, la differenziabilità non è un concetto nuovo:

Proposizione 5.2.3. Se $n = 1$ (cioè, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva in \mathbb{R}^m) allora f è differenziabile in $t_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se è derivabile in t_0 , e vale $df_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $df_{t_0}(h) = f'(t_0)h$.

Dimostrazione. Poiché le funzioni lineari $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono del tipo $\varphi(h) = hv$ per un certo vettore $v \in \mathbb{R}^m$, la differenziabilità di f in t_0 significa che esiste $v \in \mathbb{R}^m$ tale che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(t_0+h) - f(t_0) - hv\|}{|h|} = 0$, ovvero (portando $|h|$ dentro la norma) tali che $\lim_{h \rightarrow 0} \|\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} - v\| = 0$: ma questa è la definizione della derivabilità di f in t_0 , con $f'(t_0) = v$, e dunque $df_{t_0}(h) = f'(t_0)h$. \square

In generale, il seguente risultato mostra che la differenziabilità è la naturale generalizzazione, nel caso multidimensionale, della derivabilità per le funzioni di una sola variabile:

Teorema 5.2.4. Se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0 ed ammette tutte le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Si ha inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v).$$

Dimostrazione. Se f è differenziabile in x_0 , da $\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - df_{x_0}(h)\| + \|df_{x_0}(h)\| = \|h\| \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - df_{x_0}(h)\|}{\|h\|} + \|df_{x_0}(h)\|$ si ottiene $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| = 0$, ovvero la continuità in x_0 . Infine, se $v \neq 0$, posto $h = tv$ e usando la continuità della norma si ha per definizione $0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+tv) - f(x_0) - df_{x_0}(tv)\|}{\|t\| \|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - df_{x_0}(v) \right\| = \frac{1}{\|v\|} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) - df_{x_0}(v) \right\|$, da cui $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$. \square

Proposizione 5.2.5. f è differenziabile in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti f_i , e vale

$$(df_{x_0})_i = d(f_i)_{x_0} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Inoltre, se f è differenziabile in x_0 , la matrice di $M_{m,n}(\mathbb{R})$ associata al differenziale df_{x_0} rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m è la matrice jacobiana

Matrice jacobiana

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

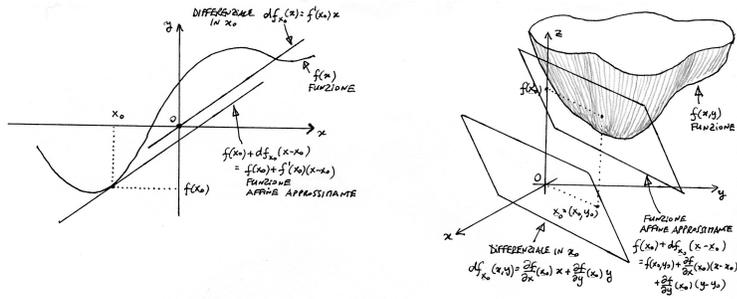
In particolare, se $v \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = J_f(x_0)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j.$$

Dimostrazione. Se $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ si ha $\max_i |f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - \varphi_i(h)| \leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leq \sum_i |f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - \varphi_i(h)|$: dividendo i tre membri per $\|h\|$, per il teorema del confronto dei limiti si ha che $\varphi = df_{x_0}$ se e solo se $\varphi_i = d(f_i)_{x_0}$ per ogni $i = 1, \dots, m$. Veniamo ora alla matrice jacobiana. In generale, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è la matrice associata ad un funzione lineare $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si ha $A_{i,j} = e_i \cdot \alpha(e_j)$: dunque se $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è la matrice associata al differenziale df_{x_0} si avrà $M_{i,j} = e_i \cdot df_{x_0}(e_j) = e_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = (J_f(x_0))_{i,j}$, ovvero $M = J_f(x_0)$. L'ultima uguaglianza segue allora dal Teorema 5.2.4. \square

Esempi. (1) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : yz > 2\}$ e consideriamo la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (2|x - 1|y, z^3 \log(yz - 2) + x^2)$. Allora le derivate parziali sono rispettivamente $\frac{\partial f}{\partial x} : A'_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ove $A'_x = \{(x, y, z) \in A : x \neq 1\}$) data da $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}) = (2y \operatorname{sign}(x - 1), 2x)$; $\frac{\partial f}{\partial y} : A'_y = A \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\frac{\partial f}{\partial y} = (\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}) = (2|x - 1|, z^3 \frac{z}{yz - 2})$; infine, $\frac{\partial f}{\partial z} : A'_z = A \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\frac{\partial f}{\partial z} = (\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}) = (0, 3z^2 \log(yz - 2) + z^3 \frac{y}{yz - 2})$. La matrice jacobiana in $(x_0, y_0, z_0) \in A'_x$ è dunque $J_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2y_0 \operatorname{sign}(x_0 - 1) & 2|x_0 - 1| & 0 \\ 2x_0 & \frac{z_0^4}{y_0 z_0 - 2} & 3z_0^2 \log(y_0 z_0 - 2) + \frac{y_0 z_0^3}{y_0 z_0 - 2} \end{pmatrix}$: ad esempio, si ha $J_f(-2, 4, 1) = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -4 & \frac{1}{2} & 3 \log 2 + 2 \end{pmatrix}$.

(2) Rammentiamo che la funzione $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $g(0, 0) = 0$ ammette tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$, e che il calcolo dava $\frac{\partial g}{\partial(v_1, v_2)}(0, 0) = \frac{v_2^2}{v_1}$ se $v_1 \neq 0$, e $\frac{\partial g}{\partial(0, v_2)}(0, 0) = 0$. Dalla forma di tali derivate possiamo già dedurre che g non è differenziabile in $(0, 0)$: se lo fosse, per la Proposizione 5.2.5 la dipendenza di $\frac{\partial g}{\partial(v_1, v_2)}(0, 0)$ da v_1 e v_2 dovrebbe essere lineare, ma così non è. In effetti, come si ricorderà, f non è nemmeno continua in $(0, 0)$.



Differenziazione in una e due variabili.

La migliore “approssimazione affine” della funzione $f(x)$ all’intorno di un punto x_0 del dominio in cui essa è differenziabile è dunque la funzione affine

Funzione affine approssimante

$$f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)(x_j - x_{0,j}) \\ \vdots \\ f_m(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)(x_j - x_{0,j}) \end{pmatrix}.$$

In \mathbb{R}^{n+m} , il grafico di tale funzione affine sarà il sottospazio affine di dimensione m che “meglio approssima” il grafico di f vicino al punto $(x_0, f(x_0))$: tale idea, rappresentata visivamente nella figura precedente, resterà vaga finché non si parlerà in modo preciso di spazio tangente affine a varietà differenziali.

Nel caso $m = 1$ (funzioni scalari) si ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e dunque il covettore $df_{x_0} \in (\mathbb{R}^n)'$ è rappresentato da un vettore-riga $J_f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$. Il vettore di \mathbb{R}^n associato a $df_{x_0} \in (\mathbb{R}^n)'$ (vedi Proposizione 5.1.2) è detto *gradiente* di f in x_0 , e si denota con $\nabla f(x_0)$: si avrà pertanto

Gradiente

$$df_{x_0}(u) = \nabla f(x_0) \cdot u \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{R}^n.$$

In coordinate, $\nabla f(x_0)$ sarà il vettore-colonna trasposto di $J_f(x_0)$. Per quanto detto, dunque, la migliore “approssimazione affine” della funzione scalare $f(x)$ all’intorno di un punto x_0 del dominio in cui essa è differenziabile è la funzione affine

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)(x_n - x_{0,n}).$$

Sul significato geometrico del vettore $\nabla f(x_0)$ —ove $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare definita in un aperto A di \mathbb{R}^n con $x_0 \in A$ — torneremo più tardi: è comunque il caso di anticipare fin d’ora che esso rappresenta il vettore di \mathbb{R}^n ortogonale all’insieme di livello di f in A passante per x_0 , ovvero $\{x \in A : f(x) = f(x_0)\}$, e orientato nel verso di f crescente.

Esempi. (1) Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. In questo caso il gradiente è $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$, dunque l’“approssimazione affine” di $f(x, y)$ all’intorno di (x_0, y_0) è la funzione $\varphi(x, y) = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 2x_0x + 2y_0y + (-x_0^2 - y_0^2)$. Il grafico di $\varphi(x, y)$ in \mathbb{R}^3 è dato dal piano $z = 2x_0x + 2y_0y + (-x_0^2 - y_0^2)$, che è proprio il piano tangente al grafico di $f(x, y)$ (il paraboloide $z = x^2 + y^2$) nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: ciò è particolarmente chiaro per $(x_0, y_0) = (0, 0)$, in cui si ha il piano orizzontale $z = 0$. Nel caso in questione, quanto anticipato riguardo al significato geometrico del gradiente è chiaro, perché gli insiemi (in questo caso, le curve) di livello di f sono le circonferenze centrate in $(0, 0)$, e il gradiente è parallelo ed equiorientato al vettore posizione (dunque è ortogonale alle circonferenze stesse, e punta verso le circonferenze corrispondenti a valori crescenti di f). **(2)** Più in generale, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 1$ si ha $\nabla(\|x\|^\alpha) = \alpha\|x\|^{\alpha-2}x$ (in particolare $\nabla(\|x\|) = \frac{x}{\|x\|} = \text{vers}(x)$ e $\nabla(\|x\|^2) = 2x$). **(3)** L’energia potenziale associata ad un campo di forze conservativo $F(r)$ definito in un dominio di \mathbb{R}^3 è una funzione scalare differenziabile $U(r)$, definita a meno di una costante additiva, tale che $F(r) = -\nabla U(r)$, ovvero $(F_x, F_y, F_z) = (-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z})$. Esempi noti, oltre al campo di gravità terrestre $F(r) = -mge_3$ con $U(r) = U(z) = mgz$, sono i campi radiali di tipo $F(r) = F(r)(r/r)$ con $U(r) = U(r) = -\int F(r) dr$, di cui abbiamo già parlato per le leggi di Keplero a pag. 39: infatti, ricordando che $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (e dunque ad esempio $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$) si ha ad esempio $-\frac{\partial U}{\partial x} = -U'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = F(r)\frac{x}{r} = F_x$.

La funzione f si dirà *differenziabile in A* se è differenziabile in ogni $x \in A$. In tal caso

Funzione differenziabile

resta determinata una funzione

$$df : A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto df_x,$$

detta *differenziale di f* . Pensando $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dotato della norma operatoriale $\|\cdot\|_{\text{op}}$, ha senso parlare di continuità per df : si dirà che f è *differenziabile con continuità in $x_0 \in A$* se df è continuo in x_0 . Tale proprietà non è di verifica agevole (già non lo è la semplice differenziabilità). Tuttavia introduciamo la seguente nozione, ben più facile da verificare: la funzione f si dirà *di classe \mathcal{C}^1 in x_0* se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ esistono e sono continue in x_0 .

Differenziale

Funzione di classe \mathcal{C}^1

Teorema 5.2.6. (Teorema del differenziale totale) *f è differenziabile con continuità in x_0 se e solo se è di classe \mathcal{C}^1 in x_0* (e si applica dunque il Teorema 5.2.4).

Dimostrazione. Possiamo supporre fin da subito che f sia una funzione scalare (vedi Proposizione 5.2.5). Iniziamo notando che se tutte le $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono continue in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 (con $df_{x_0}(u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)u_j$): infatti, usando più volte il teorema del valor medio di Lagrange in una variabile, si

può scrivere $f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_j (\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \varphi_j(h))h_j$ per certe $\varphi_j(h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_j(h) = 0$,⁽⁶⁴⁾ dunque $\frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)h_j|}{\|h\|} = \frac{|\sum_j \varphi_j(h)h_j|}{\|h\|} \leq \sum_j |\varphi_j(h)| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Visto ciò, si noti che $\max_j |\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)| \leq \sup_{\|u\|=1} |\sum_j (\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0))u_j| \leq \sum_j |\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)|$. Se f è differenziabile con continuità in x_0 allora il secondo membro è $\|df_{x_0+h} - df_{x_0}\|_{op}$ e dunque la prima disuguaglianza implica che ogni $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ è continua in x_0 . Viceversa, se ogni $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ è continua in x_0 allora, applicando quanto visto all'inizio della dimostrazione, si ha che il secondo membro è proprio $\|df_{x_0+h} - df_{x_0}\|_{op}$, e la seconda disuguaglianza implica che f è differenziabile con continuità in x_0 . \square

Osserviamo che, come già accade in una variabile, una funzione può essere differenziabile in un punto senza esserlo con continuità (dunque, per il Teorema 5.2.6, senza essere C^1).

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{xy})$ se $xy \neq 0$, e da $f(x, y) = 0$ se $xy = 0$. La funzione è discontinua nei punti degli assi diversi da $(0, 0)$, mentre in $(0, 0)$ è continua (infatti $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0, \theta \in [0, 2\pi]} \rho^2 \sin(\frac{1}{\rho^2 \sin \theta \cos \theta}) = 0$ perché il seno è limitato). Anzi, in $(0, 0)$ essa è pure differenziabile con differenziale nullo, perché $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - 0|}{\|h\|} = \lim_{\rho \rightarrow 0, \theta \in [0, 2\pi]} \rho \sin(\frac{1}{\rho^2 \sin \theta \cos \theta}) = 0$. Però, ad esempio, se $xy \neq 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin(\frac{1}{xy}) - (\frac{1}{y} + \frac{y}{x}) \sin(\frac{1}{xy})$, e tale derivata parziale è discontinua in $(0, 0)$ (tendervi ad esempio lungo $y = x$), dunque f non è di classe C^1 in $(0, 0)$.

Le proiezioni canoniche $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si indicano anche con x_j , nel senso che $\pi_j(x) = x_j$ è “ j -esima coordinata” di x : perciò i differenziali $d\pi_j$ si denotano spesso con dx_j , e vale $dx_j(x) = d(\pi_j)_x = \pi_j$ per ogni x (infatti π_j è lineare). Pertanto, un modo espressivo di enunciare il Teorema del Differenziale Totale è: se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 , allora

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad \text{ovvero} \quad df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n.$$

Interpretando dunque le quantità dx_1, \dots, dx_n nel senso formale di “piccole variazioni” h_1, \dots, h_n delle coordinate x_1, \dots, x_n da una posizione iniziale $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in A$, la prima uguaglianza può essere (formalmente) vista come “variazione df della funzione f dal valore iniziale $f(x_0)$, stimata a meno di errori poco significativi”.⁽⁶⁵⁾ È in questo senso che, comunemente, si dice che tale scrittura “esprime il differenziale totale df ”.

Differenziale totale

Esempio. Il volume V occupato da un gas perfetto è legato alla sua temperatura T e alla sua pressione p dalla relazione $V = nR\frac{T}{p}$, ove n è il numero di moli di gas presente ed R è la costante dei gas.⁽⁶⁶⁾ Il differenziale totale della funzione $V(T, p)$ è $dV = nR(\frac{1}{p} dT - \frac{T}{p^2} dp)$: dunque, se un certo stato con temperatura e pressione (T_0, p_0) si altera di una piccola quantità (dT, dp) , la corrispondente variazione di volume è, in approssimazione lineare, $dV = nR(\frac{1}{p_0} dT - \frac{T_0}{p_0^2} dp)$.

Proposizione 5.2.7. Nella differenziazione valgono le seguenti regole di calcolo.

⁽⁶⁴⁾ Per $n = 2$ si ha $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)) + (f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi h, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \eta k)k = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varphi_1(\xi h, k))h + (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varphi_2(0, \eta k))k$.

⁽⁶⁵⁾ si intende: a meno di termini di ordine superiore al primo rispetto a h_1, \dots, h_n .

⁽⁶⁶⁾ Se tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del Sistema Internazionale, ovvero il volume V in m^3 , la temperatura T in gradi Kelvin $^\circ K$ e la pressione p in Newton/ m^2 , allora la costante dei gas R vale $8,314 \frac{\text{Newton}\cdot\text{m}}{\text{moli}\cdot^\circ K}$.

- (i) (Linearità) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono funzioni differenziabili in $x_0 \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora anche $\lambda f + \mu g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0 e vale

$$d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0} \quad , \quad \text{ovvero} \quad J_{(\lambda f + \mu g)}(x_0) = \lambda J_f(x_0) + \mu J_g(x_0) \quad .$$

- (ii) (Regola della catena) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0 con $f(A) \subset B$, e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ è differenziabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ è differenziabile in x_0 e vale

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0} \quad , \quad \text{ovvero} \quad J_{(g \circ f)}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) \quad .$$

Dimostrazione. (i) Immediata. (ii) Omessa (ma segue sostanzialmente l'idea della regola della catena in una variabile). \square

Corollario - Definizione 5.2.8. (Derivata totale rispetto ad un parametro) Se I è un intervallo di \mathbb{R} , $\gamma : I \rightarrow A$ una curva derivabile e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare differenziabile, allora $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile. La funzione $(f \circ \gamma)'$ è detta *derivata totale* di f lungo γ , e viene usualmente rappresentata col simbolo $\frac{df}{d\tau}(\tau)$ (ove $\tau \in I$ è il parametro della curva). Denotando cartesianamente $\gamma = x$ e $\gamma_j = x_j$, vale

$$\frac{df}{d\tau}(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(\tau)) x'_1(\tau) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(\tau)) x'_n(\tau) = \nabla f(x(\tau)) \cdot x'(\tau).$$

Dimostrazione. Discende subito dalla Proposizione 5.2.7(ii). \square

Esempi. (1) Se t indica il tempo, il moto di un punto materiale nello spazio fisico \mathbb{R}^3 è descritto da una legge oraria $r : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$; si denoti $v = \dot{r}$ (velocità) e $a = \ddot{r}$ (accelerazione). Se $f(r, t) = f(x, y, z, t)$ è una funzione della posizione e del tempo, la composizione $f(r(t), t) = f(x(t), y(t), z(t), t)$ descrive l'evoluzione di f lungo il moto del punto materiale, in funzione del tempo: è come se si stesse considerando $(f \circ \gamma)(t)$, ove la curva $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ è data da $\gamma(t) = (r(t), t)$. In base al Corollario 5.2.8, se $\nabla_r f$ denota il gradiente di f rispetto alle sole variabili spaziali si ha che la derivata totale di f rispetto a t è

$$\frac{df}{dt} = \nabla_r f \cdot v + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Se ad esempio il punto materiale ha massa m ed è soggetto solo ad una sollecitazione conservativa $F(r) = -\nabla U(r)$ (ove $U(r)$ è l'energia potenziale), allora l'energia totale $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ si conserva lungo i moti $r(t)$: infatti si ha $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv \cdot v + U) = \frac{1}{2}m(a \cdot v + v \cdot a) + \nabla U \cdot v = (ma - F) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. (2) Ma al posto del tempo t potrebbe essere d'interesse un altro parametro: se ad esempio il nostro punto materiale soggetto alla sollecitazione conservativa $F(r) = -\nabla U(r)$ fosse vincolato a stare su una curva $r(\lambda)$ (descritta da un certo parametro $\lambda \in \mathbb{R}$) si avrebbe $\frac{dU}{d\lambda} = \nabla U \cdot \frac{dr}{d\lambda} = -F \cdot \frac{dr}{d\lambda}$, dunque le posizioni *stazionarie* dell'energia potenziale sul dato vincolo (ovvero le posizioni $r(\lambda)$ su cui $\frac{dU}{d\lambda} = 0$) sono quelle in cui la forza è ortogonale al vincolo (infatti, come noto, $\frac{dr}{d\lambda}$ è un vettore tangente alla curva in $r(\lambda)$). Si tornerà su questi discorsi parlando del metodo di Lagrange per la ricerca degli equilibri di un sistema meccanico a vincoli lisci e fissi.

Proposizione 5.2.9. (Teorema del valor medio per le funzioni differenziabili) *Se A è un aperto convesso⁽⁶⁷⁾ di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile, allora*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \left(\sup_{x \in [x_1, x_2]} \|df_x\|_{\text{op}} \right) \|x_1 - x_2\| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in A.$$

Dimostrazione. Omessa (si noti però che per le curve, ovvero per $n = 1$, si ritrova il Teorema 3.3.2). \square

Corollario 5.2.10. *Siano A un aperto convesso di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile.*

- (i) (Differenziabilità e costanza) *f è costante su A se e solo se $df \equiv 0$ su A .*
- (ii) (Differenziabilità e lipschitzianità) *Se A è convesso, allora f è lipschitziana su A se e solo se df è limitato in A , ovvero esiste $M > 0$ tale che $\|df_x\|_{\text{op}} \leq M$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. (i) Se f è costante su A allora ovviamente $df \equiv 0$ su A . Viceversa, fissato un qualsiasi $x_0 \in A$ e posto $A' = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\}$, mostriamo che $A' = A$. A tal fine, ci basta mostrare che A' è non vuoto e chiusoaperto in A : infatti, se fosse $A' \subsetneq A$ allora $A \setminus A'$ sarebbe pure esso non vuoto e chiusoaperto in A , e l'uguaglianza $A = A' \sqcup (A \setminus A')$ contraddirebbe il fatto che A è convesso. Ora, si ha $A' \neq \emptyset$ perché $x_0 \in A'$; inoltre A' è chiuso in A , in quanto $A' = f^{-1}(\{f(x_0)\}) \cap A$, f è continua e $\{f(x_0)\}$ è un chiuso di \mathbb{R}^m . Mostriamo infine che A' è anche aperto. In effetti, se $x_1 \in A'$, poiché A è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B = B_n(x_1, \varepsilon) \subset A$; preso un qualsiasi $x \in B$, tutto il segmento $[x_1, x]$ è contenuto in B (convesso), dunque per il Teorema del valor medio si ottiene $\|f(x) - f(x_1)\| \leq (\sup_{\xi \in [x_1, x]} \|df_\xi\|_{\text{op}}) \|x - x_1\|$, ma il secondo membro è 0 per ipotesi, da cui $f(x) = f(x_1)$, e perciò $B \subset A'$. Dunque A' è intorno di ogni suo punto, ovvero è aperto. (ii) Omessa. \square

5.3 Derivabilità ulteriore

Per parlare di derivabilità ulteriore ci limitiamo al caso di funzioni scalari (cioè con $m = 1$), tenendo presente che, nel caso generale, basterà vedere componente per componente.

Le derivate parziali delle derivate parziali, se esistono, si diranno *derivate seconde* di f : il simbolo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ denota la derivata parziale di $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ rispetto a x_i , cioè $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ (se $i \neq j$ si parlerà anche di *derivate miste*, mentre se $i = j$ si scriverà $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$). La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *di classe \mathcal{C}^2 in x_0* se tutte le derivate seconde di f esistono e sono continue in x_0 . Se f è di classe \mathcal{C}^2 in tutto A allora l'ordine di derivazione non conta, come afferma il seguente fondamentale

Teorema 5.3.1. (Schwarz) *Se f è di classe \mathcal{C}^2 in A si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ per ogni i, j .*

Dimostrazione. Possiamo ovviamente limitarci al caso $n = 2$; fissiamo dunque $(x_0, y_0) \in A$ e mostriamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Poiché A è aperto, esisterà un intorno U di $(0, 0)$ in \mathbb{R}^2 tale che $(x_0, y_0) + U = \{(x_0 + h, y_0 + k) : (h, k) \in U\} \subset A$: definiamo allora $\Phi : U \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tramite $\Phi(h, k) = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk}$. Per un qualsiasi $(h, k) \in U$, la funzione ausiliaria $\varphi_h(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ è definita e derivabile in $[y_0, y_0 + k]$, ed usando il teorema del valor medio di Lagrange si può scrivere $\Phi(h, k) = \frac{\varphi_h(y_0 + k) - \varphi_h(y_0)}{hk} = \frac{1}{h} \varphi_h'(y_0 + \eta k) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \eta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \eta k) \right)$ per un opportuno $0 < \eta < 1$. Ma anche $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \eta k)$ (funzione di x) è definita e derivabile in $[x_0, x_0 + k]$, e dunque riapplicando il teorema di Lagrange si ottiene che $\Phi(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \xi h, y_0 + \eta k)$, per opportuni $0 < \xi, \eta < 1$; usando la continuità di $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si ottiene allora $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \Phi(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$. Procedendo in modo del tutto simile si dimostra che $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \Phi(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, da cui la tesi. \square

Corollario - Definizione 5.3.2. *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe \mathcal{C}^2 , la matrice hessiana*

⁽⁶⁷⁾ $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, presi comunque $x_1, x_2 \in A$, tutto il segmento $[x_1, x_2]$ è contenuto in A .

Derivate seconde
Derivate miste
Funzione di classe \mathcal{C}^2

Matrice hessiana

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

è simmetrica per ogni $x \in A$.

Una funzione differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *differenziabile due volte in x_0* se $df : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$ è differenziabile in x_0 (intendendo $(\mathbb{R}^n)'$ dotato della norma operatoriale $\|\cdot\|_{\text{op}}$), ovvero se esiste una funzione lineare $B_{x_0} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)')$ tale che

Funzione differenziabile due volte

$$\|df_{x_0+h} - df_{x_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}} = o_0(\|h\|), \quad \text{ovvero} \quad \lim_{h \rightarrow 0_n} \frac{\|df_{x_0+h} - df_{x_0} - B_{x_0}(h)\|_{\text{op}}}{\|h\|} = 0.$$

La funzione lineare $B_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$, univocamente determinata, viene detta *differenziale secondo di f in x_0* , e la denoteremo con $d^2f_{x_0}$. Ora, una funzione lineare di \mathbb{R}^n in $(\mathbb{R}^n)'$ può essere interpretata anche come funzione bilineare su \mathbb{R}^n , e dunque (come spiegato nella Proposizione 5.1.2(ii)) ad essa è associata una ed una sola matrice in $M_n(\mathbb{R})$:

Differenziale secondo

Proposizione 5.3.3. *Se f è differenziabile due volte in x_0 allora esistono tutte le sue derivate seconde in x_0 , e la matrice di $M_n(\mathbb{R})$ associata a $d^2f_{x_0}$ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n è la matrice hessiana $H_f(x_0)$. Inoltre, f è di classe \mathcal{C}^2 in x_0 se e solo è differenziabile due volte con continuità in x_0 .*

Dimostrazione. Per definizione, posto $h = te_i$ si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|df_{x_0+te_i} - df_{x_0} - t d^2f_{x_0}(e_i)\|_{\text{op}}}{|t|} = 0$: poiché $\|e_j\| = 1$, ricordando cos'è $\|\cdot\|_{\text{op}}$ e usando la continuità della norma si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|df_{x_0+te_i}(e_j) - df_{x_0}(e_j) - t d^2f_{x_0}(e_i)(e_j)|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0+te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)}{t} - d^2f_{x_0}(e_i)(e_j) \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0+te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)}{t} - d^2f_{x_0}(e_i)(e_j) \right| = 0$: così $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ esiste e vale $d^2f_{x_0}(e_i)(e_j)$. Pertanto, se $M \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice associata a $d^2f_{x_0}$ rispetto alla base canonica, dovendo essere $d^2f_{x_0}(v)(v') = {}^t v M v'$ per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^n$ si ha $M_{i,j} = {}^t e_i M e_j = d^2f_{x_0}(e_i)(e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, ovvero $M = H_f(x_0)$. L'ultima affermazione è il Teorema del Differenziale Totale (5.2.6) per df . \square

Se f è perlomeno di classe \mathcal{C}^2 si può parlare, finché possibile, di *derivate ulteriori* di f . Una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ si dirà *multiindice*, e l'intero $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ si dirà *lunghezza* di α : si porrà allora

Derivate ulteriori

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

ove si intende che f è derivata α_1 volte rispetto x_1 , α_2 volte rispetto x_2 , ..., α_n volte rispetto x_n (per il Teorema di Schwarz, l'ordine di derivazione non conta). La funzione f si dice *di classe \mathcal{C}^k in x_0* se tutte le derivate di f fino all'ordine k -esimo esistono e sono continue in x_0 .

Teorema 5.3.4. (Formula di Taylor) *Se A è convesso e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe \mathcal{C}^k , per ogni $x_0 \in A$ si ha il seguente sviluppo (ove $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ e $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$):* Formula di Taylor

$$(5.2) \quad f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x_0) h^\alpha + o_0(\|h\|^k).$$

Dimostrazione. Sia h tale che $x_0 + h$ stia in A (dunque tutto il segmento $[x_0, x_0 + h]$ è contenuto in A , che è aperto convesso), e definiamo $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\phi(t) = f(x_0 + th)$: si tratta della restrizione di f a $[x_0, x_0 + h]$, funzione della sola variabile t . Applicando più volte il Corollario 5.2.8 si ottiene che $\phi(t)$ è di classe \mathcal{C}^k , e che vale $\phi^{(j)}(t) = j! \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha}(x_0 + th) h^\alpha$ per ogni $j = 0, 1, \dots, k$ (quest'ultima formula si può provare per induzione).⁽⁶⁸⁾ Dalla formula di Taylor con resto di Lagrange per funzioni di una variabile sappiamo che esiste $\eta \in]0, 1[$ tale che $\phi(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\phi^{(k)}(\eta)}{k!}$, ovvero $f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x_0) h^\alpha + \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0 + \eta h) h^\beta$, dunque per avere (5.2) basta mostrare che l'ultima somma è $\sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0) h^\beta + o_0(\|h\|^k)$. In effetti, per ogni multiindice β con $|\beta| = k$, per la continuità di $\frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}$ si ha $\frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0 + \eta h) = \frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0) + \sigma_\beta(h)$ con σ_β infinitesima per $h \rightarrow 0$, per cui $\sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0 + \eta h) h^\beta = \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\beta}(x_0) h^\beta + \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \sigma_\beta(h) h^\beta$, e quest'ultima somma è $o_0(\|h\|^k)$ (infatti $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|^k} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \sigma_\beta(h) h^\beta = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \sigma_\beta(h) \prod_{j=1}^n (\frac{h_j}{\|h\|})^{\beta_j} = 0$). □

La formula (5.2) per $k = 0$ dice semplicemente che $f(x_0 + h) = f(x_0) + \sigma(h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$, ovvero che f è continua in x_0 ; per $k = 1$ dice nuovamente che le funzioni di classe \mathcal{C}^1 sono differenziabili:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) h_n + o_0(\|h\|) \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o_0(\|h\|), \end{aligned}$$

mentre quello per $k = 2$ dà un'approssimazione delle funzioni di classe \mathcal{C}^2 (utile tra breve):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o_0(\|h\|^2) \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} {}^t h H_f(x_0) h + o_0(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Dati due aperti $A, B \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow B$ si dirà *diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k* se è biiettiva, di classe \mathcal{C}^k e con inversa di classe \mathcal{C}^k .⁽⁶⁹⁾ Dicendo solo *diffeomorfismo* si sottointende “di classe \mathcal{C}^1 ”. Diffeomorfismo

⁽⁶⁸⁾ Per $j = 0$ tale formula è ovvia, per $j = 1$ è niente altro che la derivazione totale rispetto ad un parametro. Supponiamo ora che sia vera per $j - 1$, ovvero che $\phi^{(j-1)}(t) = (j - 1)! \sum_{|\beta|=j-1} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x^\beta}(x_0 + th) h^\beta$: usando ancora la formula di derivazione totale rispetto ad un parametro si ha $\phi^{(j)}(t) = (\phi^{(j-1)}(t))' = (j - 1)! \sum_{|\beta|=j-1, \ell=1, \dots, n} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\beta \partial x_\ell}(x_0 + th) h^\beta h_\ell$. Ora, se $\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_{\ell-1}, \beta_\ell + 1, \beta_{\ell+1}, \dots, \beta_n)$ si ha $\frac{1}{\beta!} = \frac{\beta_\ell + 1}{\alpha!} = \frac{\alpha_\ell}{\alpha!}$, e $h^\beta h_\ell = h^\alpha$ (si noti che questo multiindice α di lunghezza j è ottenuto allo stesso modo anche da altre coppie (β', ℓ') , tante quante sono le componenti non nulle di α): l'ultima uguaglianza si può dunque riscrivere $\phi^{(j)}(t) = (j - 1)! \sum_{|\alpha|=j, \ell=1, \dots, n} \frac{\alpha_\ell}{\alpha!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha}(x_0 + th) h^\alpha = (j - 1)! \sum_{|\alpha|=j} \frac{(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell)}{\alpha!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha}(x_0 + th) h^\alpha$, che, essendo $\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell = |\alpha| = j$, è quanto si voleva.

⁽⁶⁹⁾ In questo senso, “omeomorfismo” potrebbe essere visto come “diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^0 ”.

Proposizione 5.3.5. (Differenziale della funzione inversa) *Se $f : A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo, $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0) \in B$, allora*

$$d(f^{-1})_{y_0} = df_{x_0}^{-1}, \quad \text{ovvero} \quad J_{(f^{-1})}(y_0) = J_f(x_0)^{-1}.$$

Dimostrazione. Differenziando $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ in x_0 si ottiene $d(f^{-1})_{y_0} \circ df_{x_0} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, da cui la tesi. \square

Esempi. (1) Il cambio di coordinate polari $(x, y) = f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ in \mathbb{R}^2 è un diffeomorfismo tra $A = \mathbb{R}_{>0} \times]0, 2\pi[$ e $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. **(2)** Il cambio di coordinate cilindriche $(x, y, z) = f(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ in \mathbb{R}^3 è un diffeomorfismo tra $A = \mathbb{R}_{>0} \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$. **(3)** Il cambio di coordinate sferiche $(x, y, z) = f(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$ in \mathbb{R}^3 è un diffeomorfismo tra $A = \mathbb{R}_{>0} \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ e $B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$. **(4)** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y) = (x^3 y, 2x^2 y)$ è ovviamente di classe C^∞ , ma non è biettiva (ad esempio tutti i punti sugli assi vanno in $(0, 0)$). Cercando di invertirla, da $a = x^3 y$ e $b = 2x^2 y$ si ricava $x = \frac{2a}{b}$ e $y = \frac{b^3}{8a^2}$: dunque, se $B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab \neq 0\}$ (i punti fuori dagli assi) si ha $A = f^{-1}(B) = B$, ed f induce un diffeomorfismo tra B e se stesso.

5.4 Estremi locali

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, si dirà che $x_0 \in S$ è un *punto di massimo locale* o *relativo* (eventualmente *stretto*) per f (in S) se x_0 è tale in un suo intorno, ovvero se esiste $\varepsilon > 0$ tale che x_0 è punto di massimo assoluto (eventualmente stretto) per $f|_{S \cap B(x_0, \varepsilon)}$. Una definizione simile si ha per un *punto di minimo locale*. I punti di massimo o minimo locale per f si diranno *estremanti locali* di f (in S).

Punti di massimo e minimo locale

Ci occupiamo ora di determinare gli estremanti locali per funzioni scalari differenziabili $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ove A è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Proposizione 5.4.1. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, gli estremanti locali di f in A si trovano tra i punti stazionari (o punti critici) di f , ovvero gli $x_0 \in A$ tali che $df_{x_0} = 0$ (o, equivalentemente, tali che $\nabla f(x_0) = 0$).*

Punti stazionari

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$ un estremante locale di f : vogliamo mostrare che allora $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$ da cui segue la tesi. Fissato j , poiché A è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che il segmento $\{x_0 + te_j : |t| < \varepsilon\}$ è contenuto in A . Consideriamo $\varphi(t) = f(x_0 + te_j)$, restrizione di f a tale segmento: è chiaro che $t = 0$ (in cui $\varphi(0) = f(x_0)$) sarà un estremante locale per φ , e dunque $\varphi'(0) = 0$: ma vale $\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + te_j) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te_j)$, da cui $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$. \square

Per determinare gli estremanti locali di funzioni differenziabili su aperti, si tratta dunque di *trovare i punti stazionari di f* , e poi *stabilire la natura di ciascuno di essi*.

Ora, se $x_0 \in A$ è stazionario ed $f \in C^2$ in A , da (5.3) e dalla Proposizione 5.4.1 si ricava

$$(5.4) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} {}^t h H_f(x_0) h + o_0(\|h\|^2),$$

il che mostra che la matrice Hessiana $H_f(x_0)$ è rilevante nel determinare il segno del primo membro quando h è vicino a 0_n (dunque $x_0 + h$ è vicino a x_0), ovvero la natura di x_0 .

Teorema 5.4.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^2 in A e $x_0 \in A$ un punto stazionario di f in A .*

- (a) *Se x_0 è un punto di minimo locale di f , allora $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva.*
- (b) *Se x_0 è un punto di massimo locale di f , allora $H_f(x_0)$ è semidefinita negativa.*

Viceversa:

- (i) *Se $H_f(x_0)$ è definita positiva, allora x_0 è un punto di minimo locale stretto di f .*
- (ii) *Se $H_f(x_0)$ è definita negativa, allora x_0 è un punto di massimo locale stretto di f .*
- (iii) *Se $H_f(x_0)$ è indefinita, allora x_0 non è un estremante locale di f (in tal caso si dirà anche che il punto stazionario x_0 è un punto di sella⁽⁷⁰⁾ per f).*
- (iv) *Se $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva (risp. semidefinita negativa) non si può determinare a priori la natura di x_0 , ovvero serve uno studio specifico del segno di $f(x) - f(x_0)$ all'intorno di x_0 . Tuttavia, se $H_f(x_0)$ ha qualche autovalore > 0 (risp. < 0), allora di certo x_0 non è un punto di massimo (risp. di minimo) locale per f .*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$, la sfera (compatta) dei versori di \mathbb{R}^n .

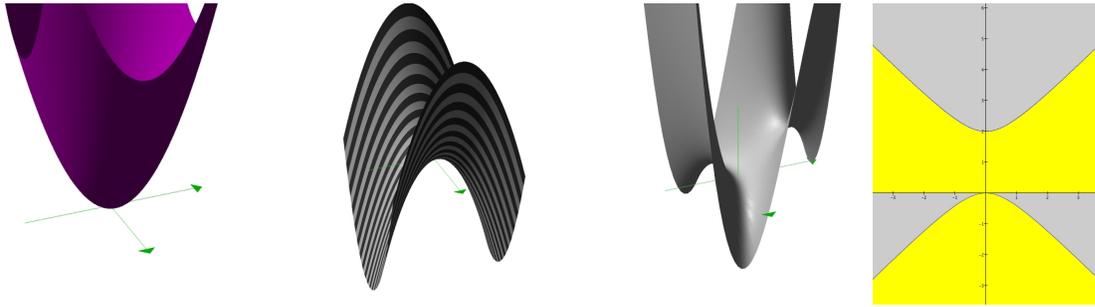
(a) Preso un $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e posto $h = tu$ in (5.4), esistono $\varepsilon > 0$ ed una funzione $\sigma(t)$ con $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = 0$ tali che $f(x_0 + tu) - f(x_0) = t^2 ({}^t u H_f(x_0) u) + \sigma(t)t^2 \geq 0$ per ogni t con $0 < |t| < \varepsilon$: dividendo il secondo membro per $t^2 > 0$ e passando al limite per $t \rightarrow 0$, si ottiene ${}^t u H_f(x_0) u \geq 0$. In generale, se $v \neq 0_n$ si ha $v = \|v\|u$ con $u = \frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$, dunque si ha ${}^t v H_f(x_0) v = \|v\|^2 ({}^t u H_f(x_0) u) \geq 0$. (b) Dimostrazione analoga. (i) Consideriamo la funzione $F : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $F(u) = {}^t u H_f(x_0) u$: poiché F è continua e \mathbb{S}^{n-1} è compatto, per il teorema di Weierstrass F avrà minimo assoluto α , che sarà > 0 perché $H_f(x_0)$ è definita positiva. Da (5.4) si ha $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} {}^t h H_f(x_0) h + \sigma(h)\|h\|^2$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$; se allora $\varepsilon > 0$ è tale che $|\sigma(h)| < \frac{\alpha}{2}$ per ogni $h \in B_n(0, \varepsilon)$, si ricava $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \|h\|^2 \alpha - \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 = \|h\|^2 \frac{\alpha}{2} > 0$ per ogni $h \in B_n(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$, dunque x_0 è un minimo locale stretto. (ii) Dimostrazione analoga. (iii) Stavolta F avrà un minimo assoluto $\alpha_1 < 0$ ed un massimo assoluto $\alpha_2 > 0$: se essi sono assunti rispettivamente in $u_1, u_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, ragionando come fatto in precedenza esisterà $\varepsilon > 0$ tale che $f(x_0 + tu_1) - f(x_0) < 0$ e $f(x_0 + tu_2) - f(x_0) > 0$ per ogni $t \in]0, \varepsilon[$, dunque x_0 è un punto di sella per f . (iv) Basta pensare alle funzioni $x^4 + y^4, -x^4 - y^4, x^4 - y^4, x^4$ e $-x^4$: nel punto stazionario $x_0 = (0, 0)$ il loro hessiano è nullo (dunque semidefinito), ma la natura di x_0 è diversa per ognuna di esse. Se però ad esempio si ha un autovalore $\lambda > 0$, di certo l'hessiano non può essere semidefinito negativo, dunque per (a) il punto x_0 non può essere di massimo locale. \square

Si noti che, nel caso di funzioni di una sola variabile, la matrice hessiana non è altro che la derivata seconda, e il Teorema 5.4.2 si riduce a un fatto ben conosciuto: se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe \mathcal{C}^2 e $x_0 \in A$ è tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \gtrless 0$, allora x_0 è punto di minimo/massimo locale stretto (mentre se $f''(x_0) = 0$ si possono presentare varie eventualità).

Esempi. Si vedano le figure che seguono. **(1)** Le funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x^2 - y^2$ hanno $(0, 0)$ come unico punto stazionario, e le matrici $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sono rispettivamente definita positiva e indefinita. Dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo per f , e una sella per g (d'altra parte ciò è evidente dall'osservazione dei grafici $z = x^2 \pm y^2$ di f e g , che sono rispettivamente un *paraboloide ellittico* e un *paraboloide iperbolico* (vedi Figura (a-b)). **(2)** Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data

⁽⁷⁰⁾La ragione di questo nome è che f cresce in una direzione e decresce in un'altra: si veda ad esempio il punto $x_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, il cui grafico suggerisce, per l'appunto, l'idea di una sella.

da $f(x, y) = (x^2 - y^2 + 2y)y$. I punti stazionari sono dati dal sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, che ha soluzioni $(0, 0)$ e $(0, \frac{4}{3})$. La matrice $H_f(0, \frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ è indefinita, dunque $(0, \frac{4}{3})$ è un punto di sella; invece $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ è semidefinita positiva, dunque $(0, 0)$ non può essere un punto di massimo locale per f . Per determinarne la natura serve però uno studio locale del segno di f , che in questo caso è facile e dice che anche $(0, 0)$ è un punto di sella (vedi Figura (c)). **(3)** Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = x^4 + y^4 - x^2y^2$. L'unico punto stazionario è $(0, 0)$, e $H_g(0, 0)$ è la matrice nulla (che non dà alcuna informazione). Tuttavia, si ha $g(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2 > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, mentre $g(0, 0) = 0$: dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto per g .



(a) Grafico di $x^2 + y^2$. (b) Grafico di $x^2 + y^2$. (c) Grafico di $(x^2 - y^2 + 2y)y$, e studio locale del segno in $(0, 0)$.

5.5 Funzioni implicite, invertibilità locale

Data un'equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ nella variabile $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si tratta di sapere sotto che condizioni l'equazione possa essere *esplicitata* (almeno localmente) *rispetto ad una delle variabili*, ad esempio l'ultima x_n , ottenendo questa in funzione delle rimanenti x_1, \dots, x_{n-1} . In altri termini: detto

$$\mathcal{Z}_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

l'insieme degli "zeri" di f in \mathbb{R}^n , ci si chiede vicino a quali dei suoi punti l'insieme \mathcal{Z}_f rappresenta il grafico di una funzione in cui x_n è espresso tramite x_1, \dots, x_{n-1} .

Iniziamo dal caso $n = 2$, ovvero quello in cui si desidera esplicitare l'equazione $f(x, y) = 0$ rispetto ad una delle due variabili x o y .

Esempio. L'insieme \mathcal{Z}_f degli zeri in \mathbb{R}^2 dell'equazione $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ è l'iperbole equilatera con vertici $(\pm 1, 0)$ e asintoti $y = x$ e $y = -x$. Preso un punto $x_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{Z}_f$, si può esplicitare la y in funzione della x vicino a x_0 se e solo se esso è diverso dai punti $(\pm 1, 0)$, ottenendo le funzioni $y = \sqrt{x^2 - 1}$ oppure $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ a seconda che sia $y_0 > 0$ oppure $y_0 < 0$; e si può sempre esplicitare la x in funzione della y vicino a x_0 , ottenendo $x = \sqrt{y^2 + 1}$ oppure $x = -\sqrt{y^2 + 1}$ a seconda che sia $x_0 > 0$ oppure $x_0 < 0$.

Teorema 5.5.1. (Dini, caso base) *Siano A un aperto di \mathbb{R}^2 , e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che sia di classe \mathcal{C}^1 rispetto a y . Sia poi $(x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ (ovvero, sia $(x_0, y_0) \in \mathcal{Z}_f$), e si assuma che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esistono intorno $U \subset \mathbb{R}$ di x_0 e $V \subset \mathbb{R}$ di y_0 , ed un'unica funzione continua $\varphi : U \rightarrow V$, tali che per*

$(x, y) \in U \times V$ si abbia

$$f(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad y = \varphi(x)$$

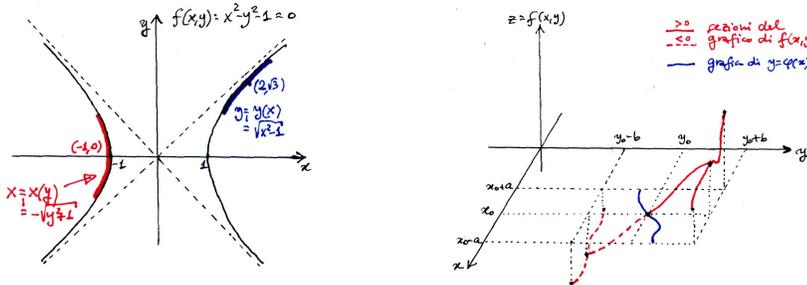
(in particolare si ha $\varphi(x_0) = y_0$). Inoltre, se f è di classe \mathcal{C}^k (con $k \leq \infty$) allora anche φ è di classe \mathcal{C}^k .

Si dice che la funzione φ è *definita implicitamente* da f all'intorno di x_0 (l'enunciato è stato dato per y ma, naturalmente, al suo posto poteva essere scelta x).

Funzione implicita

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che valga $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua, la permanenza del segno implica che esistono un intervallo $U = [x_0 - a, x_0 + a] \subset \mathbb{R}$ e un intervallo $V = [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}$ tali che il rettangolo $U \times V$ sia contenuto in A e che $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in U \times V$; in particolare, se per $x \in U$ denotiamo con $f_x : V \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione “sezione in x ” data da $f_x(y) = f(x, y)$, tutte le sezioni f_x sono funzioni strettamente crescenti di y . Poiché $f_{x_0}(y_0) = f(x_0, y_0) = 0$, ne ricaviamo che $f_{x_0}(y_0 - b) = f(x_0, y_0 - b) < 0$ e $f_{x_0}(y_0 + b) = f(x_0, y_0 + b) > 0$: essendo f continua, sempre per la permanenza del segno possiamo supporre (eventualmente, a meno di restringere un po' U) che valga $f(x, y_0 - b) < 0$ e $f(x, y_0 + b) > 0$ per ogni $x \in U$. Dunque, per ogni $x \in U$ la sezione f_x è strettamente crescente, parte da un valore $f_x(y_0 - b) < 0$ e arriva ad un valore $f_x(y_0 + b) > 0$. Costruiamo allora la richiesta $\varphi : U \rightarrow V$ in questo modo: preso $x \in U$, per il Teorema degli Zeri applicato alla sezione f_x esiste (ed è unico per la stretta monotonia) un $y_x \in V$ tale che $f_x(y_x) = 0$, e si porrà $\varphi(x) = y_x$. Dalla costruzione è chiaro che in $U \times V$ si ha $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = \varphi(x)$ (dunque in particolare $\varphi(x_0) = y_0$), così come l'unicità di φ . Quanto alla continuità, basta dimostrarla in x_0 (perché tutti gli altri punti di U sono nella medesima condizione, e il ragionamento si ripeterebbe inalterato): preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere a, b come sopra dimodoché $b < \varepsilon$, ma allora $\varphi([x_0 - a, x_0 + a]) \subset [y_0 - b, y_0 + b] \subset [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Supponiamo ora che f sia di classe \mathcal{C}^1 , e consideriamo un qualsiasi $x \in U$ con $x \neq x_0$: per quanto detto prima si avrà $(x, \varphi(x)) \in U \times V$, e anche l'unione dei due segmenti da $(x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0))$ a (x, y_0) e da (x, y_0) a $(x, \varphi(x))$ sarà tutta contenuta dentro $U \times V$. Applicando ad ognuno dei due segmenti il teorema del valor medio di Lagrange in una variabile, si ha che esistono $x_0 \leq \xi_x \leq x$ e $y_0 = \varphi(x_0) \leq \eta_x \leq \varphi(x)$ tali che $f(x, \varphi(x)) - f(x_0, y_0) = (f(x, \varphi(x)) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta_x)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y_0)(x - x_0)$: poiché il primo membro è identicamente nullo, se ne ricava $\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_x)}$, da cui, passando al limite, si ha $\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$. Dunque φ è derivabile in x_0 ;

lo stesso procedimento mostra che $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ per ogni $x \in U$, dunque $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi'(x) = \varphi'(x_0)$, ovvero φ è anche di classe \mathcal{C}^1 . Per la regolarità ulteriore si procede in modo analogo. \square



(a) Funzioni implicite definite da $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$. (b) L'idea della dimostrazione del Teorema del Dini nel caso base.

Trovare la forma esplicita di φ è impossibile nella gran parte dei casi, tuttavia più $f(x, y)$ è regolare e più si possono ottenere informazioni locali su $\varphi(x)$, calcolandone lo *sviluppo*

di Taylor all'intorno di $x = x_0$: a tal fine, ripercorriamo la parte finale della dimostrazione del Teorema 5.5.1. Si ricordi innanzitutto che l'equazione

$$(5.5) \quad f(x, \varphi(x)) = 0$$

vale *identicamente* in un intorno di $x = x_0$. Ora, si è detto che se f è di classe \mathcal{C}^1 allora lo è anche φ : derivando (5.5) rispetto ad x , ricordando la regola della catena (Proposizione 5.2.7(ii)), si ottiene

$$(5.6) \quad \frac{df}{dx}(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0$$

da cui, calcolando in $x = x_0$ e ricordando che $\varphi(x_0) = y_0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$:

$$(5.7) \quad \varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Se inoltre f è di classe \mathcal{C}^2 , lo è anche φ : derivando ancora (5.6) rispetto a x si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \varphi' \right) \varphi' + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'' = 0$$

(ove si intende che tutte le derivate di f sono calcolate in $(x, \varphi(x))$ e tutte quelle di φ in x) da cui, calcolando in $x = x_0$ e ricordando che $\varphi(x_0) = y_0$, che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ e che $\varphi'(x_0)$ è data da (5.7), si ricava il valore di $\varphi''(x_0)$ espresso tramite i valori delle derivate prime e seconde di f in (x_0, y_0) . Procedendo in questo modo finché la regolarità di f lo consente, si ottengono derivate di $\varphi(x)$ in x_0 di ordine via via crescente, e dunque lo sviluppo di Taylor desiderato.

Esempi. (1) L'esempio dell'iperbole dato in precedenza risulta spiegato dal teorema: infatti, considerato un punto $x_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{Z}_f$, la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ è esplicitabile rispetto a y all'intorno di (x_0, y_0) se e solo se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0 \neq 0$, ovvero eccetto che nei punti $(\pm 1, 0)$; ed è esplicitabile rispetto a x all'intorno di (x_0, y_0) se e solo se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$, ma questa condizione è sempre soddisfatta nei punti di \mathcal{Z}_f . In questo caso è facile determinare esplicitamente le funzioni $y = y(x)$ o $x = x(y)$. **(2)** Consideriamo l'equazione $f(x, y) = 2xe^y + y + 1 = 0$ e mostriamo che essa definisce, in un intorno del punto $x_0 = 0$ sull'asse x , una sola funzione implicita $y = y(x)$ di classe \mathcal{C}^∞ e tale da assumere il valore -1 per $x = 0$: in effetti si ha $f(0, -1) = 0$; inoltre $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^y + 1$ non si annulla nel punto $(0, -1)$, e f è di classe \mathcal{C}^∞ . Derivando l'identità $f(x, y(x)) = 0$ rispetto a x si ottiene $2e^y + 2xy'e^y + y' = 0$ che, calcolata in $(0, -1)$, dà $y'(0) = -\frac{2}{e}$; derivando ulteriormente, abbiamo $4y'e^y + 2xy''e^y + 2xy'^2e^y + y'' = 0$ da cui in $(0, -1)$ si ha $\frac{4}{e}y'(0) + y''(0) = 0$ e perciò $y''(0) = \frac{8}{e^2}$. Pertanto, pur non essendo in grado di calcolare la forma esplicita di $y(x)$ si ottiene lo sviluppo $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + o_0(x^2) = -1 - \frac{2}{e}x + \frac{4}{e^2}x^2 + o_0(x^2)$.

Tornando al caso di n qualunque, l'enunciato diventa il seguente (scriveremo $x = (x'; x_n)$, con $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$).

Teorema 5.5.2. (Dini) *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che sia di classe \mathcal{C}^1 rispetto alla variabile x_n . Sia poi $x_0 = (x'_0; x_{0n}) \in A$ tale che $f(x_0) = 0$, e si assuma che $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Allora esistono intorni $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di x'_0 e $V \subset \mathbb{R}$ di x_{0n} , ed un'unica funzione continua $\varphi : U \rightarrow V$, tali che per $x = (x'; x_n) \in U \times V$ si abbia*

$$f(x'; x_n) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x_n = \varphi(x')$$

(in particolare si ha $\varphi(x'_0) = x_{0n}$). Inoltre, se f è di classe \mathcal{C}^k (con $k \leq \infty$) allora anche φ è di classe \mathcal{C}^k .

Dimostrazione. Adattamento di quella del caso base (esercizio). □

Ora la funzione implicita φ dipende dalle $n - 1$ variabili x_1, \dots, x_{n-1} .

Se f è di classe \mathcal{C}^1 , dall'equazione

$$(5.8) \quad f(x'; \varphi(x')) = 0 ,$$

che vale *identicamente* in un intorno di $x' = x'_0$, derivando parzialmente rispetto ad una qualsiasi variabile x_j (per un $1 \leq j \leq n - 1$) si ottiene

$$(5.9) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', \varphi(x')) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', \varphi(x')) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') = 0$$

da cui, calcolando in $x' = x'_0$ e ricordando che $\varphi(x'_0) = x_{0n}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$:

$$(5.10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x'_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)} .$$

Se inoltre f è di classe \mathcal{C}^2 , derivando ancora parzialmente (5.9) rispetto ad una qualsiasi variabile x_k (per un $1 \leq k \leq n - 1$) si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_n} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 ,$$

ove tutte le derivate di f sono calcolate in $(x', \varphi(x'))$ e tutte quelle di φ in x' . Calcolando in $x' = x'_0$ e ricordando che $\varphi(x'_0) = x_{0n}$, che $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ e che $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x'_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x'_0)$ sono date da (5.10), si ricava $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x'_0)$ espressa tramite i valori delle derivate prime e seconde di f in x_0 . Continuando finché la regolarità di f lo consente, anche ora si ottengono derivate di $\varphi(x')$ in x'_0 di ordine via via crescente, da cui lo sviluppo di Taylor di $\varphi(x')$ in x'_0 .

Esempio. L'equazione $g(x, y, z) = z^3 - (x+2y)z - 2 = 0$ definisce, in un intorno del punto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ una sola funzione implicita $z = z(x, y)$ di classe \mathcal{C}^∞ e tale che $z(-1, 0) = 1$: infatti $g(-1, 0, 1) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial z}(-1, 0, 1) = 3z^2 - (x+2y)|_{(-1,0,1)} = 4 \neq 0$. Derivando l'identità $g(x, y, z(x, y)) = 0$ rispetto a x si ottiene $3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z - (x+2y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, da cui (calcolando in $(x_0, y_0) = (-1, 0)$) si ottiene $\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 0) = \frac{1}{4}$; derivando invece rispetto a y si ottiene $3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2z - (x+2y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, da cui $\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 0) = \frac{1}{2}$. Per il calcolo delle derivate seconde di $z(x, y)$ bisogna derivare ulteriormente queste identità rispetto a x o a y , ottenendo dalla prima $6z(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} - (x+2y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ (rispetto a x) e $6z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - (x+2y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ (rispetto a y), e dalla seconda $6z(\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - (x+2y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; calcolando in $(-1, 0)$ queste tre equazioni si ha $6 \frac{1}{16} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 0) - \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 0) = 0$, $6 \frac{1}{8} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, 0) - \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, 0) = 0$ e $6 \frac{1}{4} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1, 0) - 4 \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1, 0) = 0$, da cui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 0) = \frac{1}{32}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, 0) = \frac{1}{16}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1, 0) = \frac{1}{8}$. Lo sviluppo di Taylor di $z(x, y)$ in $(-1, 0)$ al secondo ordine è dunque $z(x, y) = z(-1, 0) + \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 0)(x - (-1)) + \frac{\partial z}{\partial y}(-1, 0)(y - 0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 0)(x - (-1))^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, 0)(x - (-1))(y - 0) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1, 0)(y - 0)^2 \right] = 1 + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{32}(x+1)^2 + \frac{1}{8}(x+1)y + \frac{1}{8}y^2 \right)$.

Più generalmente, dato un sistema di m equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

nella variabile $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ove $m \leq n$, ci si può chiedere sotto che condizioni queste equazioni possano essere *esplicitate*, ovvero “risolte” (almeno localmente) rispetto a m delle variabili, ad esempio le ultime x_{n-m+1}, \dots, x_n , ottenendo queste in funzione delle rimanenti x_1, \dots, x_{n-m} . Nel seguito scriveremo dunque $x = (x'; x'')$, con $x' = (x_1, \dots, x_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $x'' = (x_{n-m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 5.5.3. (Dini per sistemi) *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed $F = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua che sia di classe C^1 rispetto alle variabili x'' . Sia poi $x_0 = (x'_0; x''_0) \in A$ tale che $F(x_0) = 0$ (cioè $f_1(x_0) = \dots = f_m(x_0) = 0$), e si assuma che $\det J_{F, x''}(x_0) \neq 0$, ove $J_{F, x''}(x_0) \in M_m(\mathbb{R})$ denota la matrice Jacobiana di F rispetto alle m variabili x'' . Allora esistono intorno $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$ di x'_0 e $V \subset \mathbb{R}^m$ di x''_0 , ed un'unica funzione continua $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : U \rightarrow V$, tali che per $x = (x'; x'') \in U \times V$ si abbia*

$$F(x'; x'') = 0 : \begin{cases} f_1(x'; x'') = 0 \\ \vdots \\ f_m(x'; x'') = 0 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad x'' = \Phi(x') : \begin{cases} x_{n-m+1} = \varphi_1(x') \\ \vdots \\ x_n = \varphi_m(x') \end{cases}$$

(in particolare si ha $\Phi(x'_0) = x''_0$, ovvero $\varphi_i(x'_0) = x_{0, n-m+i}$ per ogni $i = 1, \dots, m$). Inoltre, se F è di classe C^k (con $k \leq \infty$) allora anche Φ è di classe C^k .

Dimostrazione. Omessa. □

Anche in questo caso, partendo dal sistema d'identità $F(x'; \Phi(x')) \equiv 0$ valido in un intorno di $x' = x'_0$, in ipotesi di regolarità di F si possono ottenere informazioni locali su Φ . Ad esempio, se F è di classe C^1 la matrice jacobiana di F è $J_F(x) = (J_{F, x'}(x), J_{F, x''}(x)) \in M_{m, n}(\mathbb{R})$, e dunque, differenziando con la regola della catena, si ottiene⁽⁷¹⁾

$$(5.11) \quad J_{F, x'}(x'; \Phi(x')) + J_{F, x''}(x'; \Phi(x')) J_{\Phi}(x') = 0$$

da cui, calcolando in $x' = x'_0$ e ricordando che $\Phi(x'_0) = x''_0$ e $\det J_{F, x''}(x_0) \neq 0$ (dunque $J_{F, x''}(x_0)$ è una matrice invertibile):

$$(5.12) \quad J_{\Phi}(x'_0) = -(J_{F, x''}(x_0))^{-1} J_{F, x'}(x_0) .$$

⁽⁷¹⁾ Siano $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n-m$. Derivando rispetto al parametro x_j la i -esima equazione del sistema di identità $F(x'; \Phi(x')) = 0$, ovvero $f_i(x_1, \dots, x_{n-m}; \Phi_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots, \Phi_m(x_1, \dots, x_{n-m})) \equiv 0$, si ottiene $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x'; \Phi(x')) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_{n-m+k}}(x'; \Phi(x')) \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}(x') \equiv 0$: ma, ricordando che per $1 \leq j \leq n-m$ e $1 \leq k \leq m$ si ha $x'_j = x_j$ e $x''_k = x_{n-m+k} = \Phi_k(x_1, \dots, x_{n-m})$, questa non è altro che la componente (i, j) -esima dell'identità matriciale (5.11). Dunque, nel calcolo matriciale, un'equazione vettoriale si può derivare con le stesse regole formali di un'equazione scalare, scrivendo gli jacobiani al posto delle derivate.

Esempio. Si consideri il sistema in (x, y, z, u) dato dalle tre equazioni $h_1(x, y, z, u) = x + y + z + u - 6 = 0$, $h_2(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 14 = 0$ e $h_3(x, y, z, u) = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 - 36 = 0$: proviamo che esso definisce, in un intorno del punto $x_0 = 3$, tre sole funzioni $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$ di classe \mathcal{C}^∞ soddisfacenti il sistema ed assumenti in $x = 3$ rispettivamente i valori 2, 1, 0. In effetti, posto $h = (h_1, h_2, h_3) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si ha $h(3, 2, 1, 0) = 0$ e $\det J_{h,(y,z,u)}(3; 2, 1, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2z & 2u \\ 3y^2 & 3z^2 & 3u^2 \end{pmatrix}_{(3;2,1,0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$. Si ricava poi $\begin{pmatrix} y'(3) \\ z'(3) \\ u'(3) \end{pmatrix} = -J_{h,(y,z,u)}(3; 2, 1, 0)^{-1} J_{h,x}(3; 2, 1, 0) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 4 \\ -12 & 9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; alternativamente, derivando rispetto a x le tre equazioni si trova $1 + y' + z' + u' = 0$, $2x + 2yy' + 2zz' + 2uu' = 0$ e $3x^2 + 3y^2y' + 3z^2z' + 3u^2u' = 0$, e calcolando in $x = 3$ si trova il sistema $y'(3) + z'(3) + u'(3) = -1$, $6 + 4y'(3) + 2z'(3) = 0$ e $27 + 12y'(3) + 3z'(3) = 0$, da cui nuovamente $y'(3) = -3$, $z'(3) = 3$ e $u'(3) = -1$.

Una delle applicazioni più classiche del Teorema del Dini è nello studio dell'*invertibilità locale* di una funzione di \mathbb{R}^n in sè.

Dato un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dirà *diffeomorfismo locale di classe \mathcal{C}^k* in $x_0 \in A$ se f è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k vicino a x_0 , ovvero se esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 tale che $f(U)$ sia aperto e $f|_U$ sia un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k tra U e $f(U)$.⁽⁷²⁾ Dicendo solo *diffeomorfismo locale* si intende “di classe \mathcal{C}^1 ”.

Diffeomorfismo locale

Teorema 5.5.4. (Teorema della Funzione Inversa) *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile in $x_0 \in A$, allora f è diffeomorfismo locale in x_0 se e solo se $\det J_f(x_0) \neq 0$,⁽⁷³⁾ cioè se e solo se $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di \mathbb{R} -spazi vettoriali.*

Dimostrazione. Se f è diffeomorfismo locale in x_0 esistono un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 ed un intorno aperto V di $y_0 = f(x_0)$ con $V = f(U)$ tali che $f|_U : U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo: posta $g = (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ si ha allora $g \circ (f|_U) = \text{id}_U$ e $(f|_U) \circ g = \text{id}_V$; differenziando tali uguaglianze in x_0 si ottiene $J_g(y_0)J_f(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ e $J_f(x_0)J_g(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, da cui $J_g(y_0) = (J_f(x_0))^{-1}$: ma ciò implica che $\det J_f(x_0) \neq 0$. Viceversa, il teorema equivale a chiedersi se si possa invertire il sistema $y = f(x)$ (ovvero $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ per $i = 1, \dots, n$) almeno vicino a y_0 , ovvero se, posta $g_i(x, y) = y_i - f_i(x_1, \dots, x_n)$, si possa esplicitare il sistema $g_1(x, y) = \dots = g_n(x, y) = 0$ rispetto alle variabili x_1, \dots, x_n all'intorno di (x_0, y_0) : ma, grazie al Teorema 5.5.3, la condizione $\det J_f(x_0) \neq 0$ è proprio quella che serve a tale scopo. \square

Esercizio. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy + 1 > 0\}$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\log(xy + 1), 2x^2 - y^2)$. Mostrare che f non è un diffeomorfismo, e determinare in quali punti f è diffeomorfismo locale; scelto uno di questi, calcolare lo sviluppo di Taylor al primo ordine dell'inversa locale di f ; infine, calcolare esplicitamente l'inversa locale di f .

Risoluzione. Da $f(1, 1) = f(-1, -1)$ si vede che f non è iniettiva, dunque non è un diffeomorfismo. Vale $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{xy+1} & \frac{x}{xy+1} \\ 4x & -2y \end{pmatrix}$, che ha determinante $-2\frac{y^2+2x^2}{xy+1}$: dunque f è diffeomorfismo locale in tutti i punti di A eccetto $(0, 0)$. Prendiamo ad esempio $(x_0, y_0) = (-1, -2) \in A$: si ha $f(-1, -2) = (u_0, v_0) = (\log 3, -2)$, e $J_{f^{-1}}(\log 3, -2) = J_f(-1, -2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, dunque cui lo sviluppo di f^{-1} attorno $(u_0, v_0) = (\log 3, -2)$ è $f^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \log 3 \\ v + 2 \end{pmatrix} + o_0(\|(u - \log 3, v + 2)\|)$. Infine, dal sistema

⁽⁷²⁾ Si ricordi che “diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k ” significa “biiettiva, di classe \mathcal{C}^k e con inversa di classe \mathcal{C}^k ”.
⁽⁷³⁾ Ciò generalizza un fatto già noto quando $n = 1$: se $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e $x_0 \in A$, allora f è iniettiva all'intorno di x_0 (e dunque diffeomorfismo locale in x_0) se e solo se $f'(x_0) \neq 0$.

$$\begin{cases} u = \log(xy + 1) \\ v = 2x^2 - y^2 \end{cases} \text{ si ricava } xy = e^u - 1, \text{ da cui } y = \frac{e^u - 1}{x}; \text{ dalla seconda si ricava allora } x^2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 8(e^u - 1)^2}}{2},$$

da cui (all'intorno di $(-1, -2)$) si ha $x = -\frac{\sqrt{v^2 + 8(e^u - 1)^2 + v}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{v^2 + 8(e^u - 1)^2 - v}}{2}$.

5.6 Immersioni e sommersioni

L'interesse del Teorema 5.5.4 è quello di riuscire ad ottenere informazioni sull'invertibilità locale di f vicino ad un punto x_0 –cosa di verifica spesso ardua– a partire dalla “funzione tangente” df_{x_0} in quel punto, e dunque a partire da una condizione algebrica sulla matrice jacobiana $J_f(x_0)$, di verifica assai più agevole.⁽⁷⁴⁾ Cerchiamo allora di generalizzare questa ricerca di informazioni “dal tangente al locale” introducendo due ulteriori nozioni.

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile in $x_0 \in A$. Se $n \leq m$, si dirà che f è *immersiva* in x_0 se il differenziale $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è iniettivo, mentre se $n \geq m$, si dirà che f è *sommersiva* in x_0 se df_{x_0} è suriettivo. Se f è immersiva (risp. sommersiva) in ogni punto di A , si dirà che f è un'*immersione* (risp. una *sommersione*). Poiché alla funzione lineare df_{x_0} è associata (rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m) la matrice jacobiana $J_f(x_0) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ricordando l'algebra lineare si ha:

Funzioni immersive e sommersive

Immersioni e sommersioni

Proposizione 5.6.1. *Se $n \leq m$, la funzione f è immersiva in x_0 se e solo se $J_f(x_0)$ ha rango massimo n . Se invece $n \geq m$, la funzione f è sommersiva in x_0 se e solo se $J_f(x_0)$ ha rango massimo m .*

Esempi. (0) Se $n \leq m$, il prototipo di immersione è l'*inclusione naturale* $i_{n,m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ data da $i_{n,m}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$; mentre, se $n \geq m$, il prototipo di sommersione è la *proiezione naturale* $\pi_{n,m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ data da $\pi_{n,m}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$: infatti, trattandosi di funzioni lineari, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(i_{n,m})_{x_0} = i_{n,m}$ (iniettivo) e $d(\pi_{n,m})_{x_0} = \pi_{n,m}$ (suriettivo). **(1)** Se $n = 1$ (dunque $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto), una curva $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è immersiva in $t_0 \in A$ se e solo se $\gamma'(t_0) \neq 0$. **(2)** Se $m = 1$, una funzione scalare $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è sommersiva in $x_0 \in A$ se e solo se $\nabla f(x_0) \neq 0$.

Il criterio di invertibilità locale (Teorema 5.5.4) può allora essere enunciato anche dicendo: *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $x_0 \in A$, una funzione differenziabile $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è diffeomorfismo locale in x_0 se e solo se g è immersiva e sommersiva in x_0 .* Cercando di estendere tale risultato al caso in cui $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ (con A aperto di \mathbb{R}^n) è solo immersiva –o solo sommersiva–, ci si aspetterebbe che l'immersività (risp. la sommersività) di f in x_0 debba corrispondere ad una sorta di “iniettività locale” (risp. “suriettività locale”) di f vicino a x_0 : tuttavia, definire ciò è un'operazione delicata, perché in generale l'immagine $B = f(A) \subset \mathbb{R}^m$ è lungi dall'essere un aperto di \mathbb{R}^m , e dunque una frase del tipo “ $f|_A$ è un diffeomorfismo tra A e B ” è al momento (anche localmente) priva di senso. Bisogna dunque innanzitutto definire le nozioni di “funzione di classe C^k ” e “ C^k -diffeomorfismo” per funzioni tra sottoinsiemi qualsiasi (non necessariamente aperti) dello spazio euclideo.

Siano $D \subset \mathbb{R}^p$, $E \subset \mathbb{R}^q$ due sottoinsiemi qualsiasi, e $h : D \rightarrow E$ una funzione.

– (Nozione di *funzione di classe C^k in $t_0 \in D$*) Se D è un aperto di \mathbb{R}^p , la nozione ha già

Funzione di classe C^k tra insiemi qualsiasi

⁽⁷⁴⁾Comunque tale criterio non dà informazioni circa l'invertibilità globale di f .

senso (pensando h a valori in \mathbb{R}^q). Nel caso generale, si richiede che h sia “indotta da una funzione di classe \mathcal{C}^k nello spazio ambiente”, ovvero che esistano un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^p$ di t_0 ed una funzione $\tilde{h} : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ di classe \mathcal{C}^k in t_0 tale che $\tilde{h}|_{D \cap U} = h|_{D \cap U}$.

- (Nozione di \mathcal{C}^k -diffeomorfismo) Si richiede che h sia un omeomorfismo (il che ha senso in generale, si veda a pag. 55) di classe \mathcal{C}^k con inversa $h^{-1} : E \rightarrow D$ pure di classe \mathcal{C}^k .

\mathcal{C}^k -diffeomorfismo tra insiemi qualsiasi

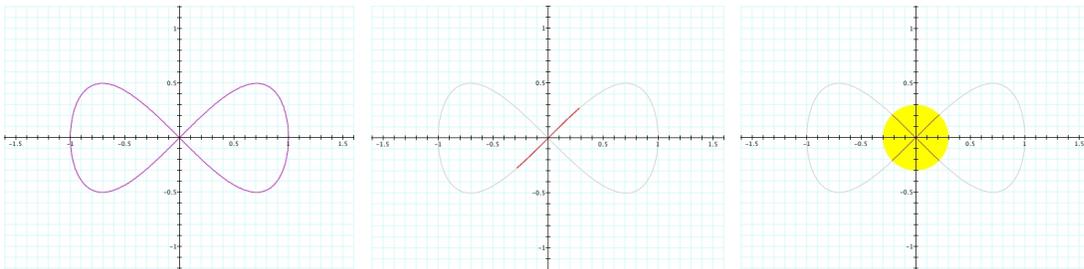
La cercata generalizzazione del Teorema 5.5.4 è la seguente.

Teorema 5.6.2. *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in $x_0 \in A$.*

- (i) (Teorema delle immersioni) *Se $n \leq m$, allora f è immersiva in x_0 se e solo se “vicino a x_0 , la funzione f identifica A con la sua immagine $f(A)$ ”, ovvero esiste un intorno aperto $U \subset A$ di x_0 tale che $f|_U$ è diffeomorfismo tra l'aperto U di \mathbb{R}^n ed il sottoinsieme $f(U) \subset \mathbb{R}^m$.⁽⁷⁵⁾*
- (ii) (Teorema delle sommersioni) *Se $n \geq m$, allora f è sommersiva in x_0 se e solo se “vicino a x_0 , la funzione f si comporta come la proiezione naturale $\pi_{n,m}$ ”, ovvero se esistono intorni aperti $U \subset A$ di x_0 e $V \subset \mathbb{R}^m$ di $f(x_0)$, un aperto $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ ed un diffeomorfismo $\beta : U \xrightarrow{\sim} V \times W$ tali che, denotando con $\pi_V : V \times W \rightarrow V$ la proiezione $\pi_V(x', x'') = x'$, si abbia $f|_U = \pi_V \circ \beta$. In particolare vale $f(U) = V$, e per ogni $y \in V$ l'insieme⁽⁷⁶⁾ $f^{-1}(y) = \{x \in U : f(x) = y\}$ è diffeomorfo all'aperto W di \mathbb{R}^{n-m} .*

Dimostrazione. Omessa. □

È importante rimarcare che le informazioni date dai risultati precedenti sono di carattere *locale*, e dunque non escludono fenomeni particolari nel comportamento *globale* della funzione: a tale proposito affrontiamo nell'esempio seguente l'analisi della *curva otto*, già accennata a pag. 42 e che sarà ripresa in futuro parlando di varietà affini.



(a) Il sostegno della curva otto. (b) Il segmento $]-\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{11}[\subset \mathbb{R}$, intorno di $t_0 = 0$, è diffeomorfo alla sua immagine $\gamma(]-\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{11}[) \subset \mathbb{R}^2$, che è il tratto di curva otto evidenziato in rosso: il Teorema delle Immersioni è rispettato. (c) La “ics” porpora che l’intorno giallo di $(0, 0)$ in \mathbb{R}^2 individua sulla curva otto non può essere diffeomorfo ad un intervallo di \mathbb{R} .

⁽⁷⁵⁾Equivalentemente, se e solo se “vicino a x_0 , la funzione f si comporta come l’inclusione naturale $i_{n,m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ”, ovvero se esistono intorni aperti $U \subset A$ di x_0 e $V \subset \mathbb{R}^m$ di $f(x_0)$, un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ di 0 ed un diffeomorfismo $\alpha : U \times W \xrightarrow{\sim} V$ tali che, denotando con $i_U : U \rightarrow U \times W$ l’inclusione $i_U(x) = (x, 0)$, si abbia $f|_U = \alpha \circ i_U$.

⁽⁷⁶⁾detto *insieme di livello*, o *fibra*, di f in U .

Esempio. (1) La curva otto $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ (il cui sostegno $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ è rappresentato in fig. (a)) è un'immersione: per le curve, a tal fine basta verificare che il vettore derivato non sia mai nullo (perché $d\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è dato da $d\gamma_t(\alpha) = \alpha f'(t)$), e in questo caso se $\gamma'(t) = (\cos t, \cos 2t)$ fosse nullo si avrebbe $\cos t = \cos 2t = 0$, impossibile. Perciò, in base al Teorema delle Immersioni, deve esistere un intorno $] - \varepsilon, \varepsilon[$ di $t_0 = 0$ che sia diffeomorfo alla sua immagine $\gamma(] - \varepsilon, \varepsilon[)$: ciò è vero, in realtà basta che sia $\varepsilon < \pi$ (fig. (b)). Tuttavia la curva otto, nella sua globalità, è tutt'altro che iniettiva: in particolare il suo punto $(0,0)$, oltre che da $t_0 = 0$, è raggiunto anche da tutti i valori del parametro t multipli interi di π ; inoltre, anche se (come appena visto) un suo tratto è diffeomorfo ad un intervallo di \mathbb{R} , non è troppo difficile mostrare che il sostegno Γ della curva otto non può essere diffeomorfo ad un intervallo di \mathbb{R} , proprio a causa della sua conformazione ad "ics" all'intorno del punto $(0,0)$ (fig. (c)).⁽⁷⁷⁾

Sempre in vista delle varietà affini, è importante mettere in evidenza il seguente fatto.

Proposizione 5.6.3. *Siano D un aperto di \mathbb{R}^p e $h : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ (con $p \leq q$) una funzione di classe C^k che induce un C^k -diffeomorfismo tra D e $E = h(D)$. Allora h è un'immersione.*

Dimostrazione. Siano $t_0 \in D$ e $u_0 = h(t_0) \in E$. Per ipotesi esistono un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^q$ di u_0 ed una funzione $\psi : V \rightarrow D$ di classe C^k tale che $\psi|_{V \cap E} = h^{-1}|_{V \cap E}$. Poiché $\psi \circ h = id_D : D \rightarrow D$, e D è un aperto di \mathbb{R}^p , differenziando in t_0 si ottiene $d\psi_{u_0} \circ dh_{t_0} = id_{\mathbb{R}^p}$, e ciò implica (che $d\psi_{u_0}$ è suriettiva e che dh_{t_0} è iniettiva). \square

5.7 Complementi sulle funzioni integrali e sul problema di Cauchy

Con la terminologia delle funzioni a più variabili possiamo ora dare un'estensione della nozione di funzione integrale rispetto a quella data in precedenza.⁽⁷⁸⁾

Siano I e J intervalli di \mathbb{R} , $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $x \in I$ si ha la funzione $f_x : J \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_x(t) = f(x, t)$, e per ogni $t \in J$ la funzione $f_t : I \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_t(x) = f(x, t)$. Se f_x è assolutamente integrabile (eventualmente in s.g.) su J per ogni $x \in I$, si può definire la *funzione integrale*

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_J f(x, t) dt.$$

Teorema 5.7.1. (Continuità e derivabilità di funzioni integrali) *Sia $c \in I$.*

- (i) *Si assuma che per ogni $t \in J$ la funzione f_t sia continua in c , e che esistano un intorno U di c in I e una funzione positiva $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (eventualmente in*

⁽⁷⁷⁾Sia infatti per assurdo $h : I \rightarrow \Gamma$ un diffeomorfismo tra un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e il sostegno Γ della curva otto, e sia $\tilde{t} \in I$ tale che $h(\tilde{t}) = (0,0)$: per definizione deve esistere un intervallo aperto $U \subset I$ contenente \tilde{t} , un intorno $V \subset \mathbb{R}^2$ di $(0,0)$ (che, a meno di prendere U più piccolo, sarà sufficientemente piccolo da individuare una "ics" su Γ , vedi fig. (c)) e una funzione differenziabile $k : V \rightarrow U$ tale che $h(U) = \Gamma \cap V$ e $k|_{\Gamma \cap V} = (h|_U)^{-1}$: dunque l'intervallo U e la "ics" $\Gamma \cap V$ sarebbero diffeomorfi tramite $h|_U : U \rightarrow \Gamma \cap V$, e togliendo il punto \tilde{t} a U da un lato e il punto $(0,0) = h(\tilde{t})$ a $\Gamma \cap V$ dall'altro tale diffeomorfismo dovrebbe restare valido. Ma un diffeomorfismo deve preservare tutte le proprietà topologiche, come ad esempio il numero di componenti connesse, e mentre $U \setminus \{\tilde{t}\}$ (segmento meno un punto) ne ha al più due, $(\Gamma \cap V) \setminus \{(0,0)\}$ (la "ics" senza il punto di incrocio) ne ha quattro: assurdo.

⁽⁷⁸⁾I teoremi che seguono sono solitamente formulati nell'ambito dell'integrale di Lebesgue; per motivi didattici li introduciamo qui nell'ambito particolare delle funzioni assolutamente integrabili secondo Riemann, che sono integrabili alla Lebesgue.

s.g.) tale che $|f(x, t)| \leq \gamma(t)$ per ogni $(x, t) \in U \times J$.

Allora $F(x)$ è continua in c , ovvero “il limite passa sotto il segno di integrale”:

$$F(c) = \lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} \int_J f(x, t) dt.$$

- (ii) Si assuma che per ogni $t \in J$ la funzione f_t sia derivabile (ovvero che esista $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$), e che esistano un intorno U di c in I e una funzione positiva $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (eventualmente in s.g.) tale che $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \gamma(t)$ per ogni $(x, t) \in U \times J$.

Allora $F(x)$ è derivabile in c e “la derivata passa sotto il segno di integrale”:

$$F'(c) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(c, t) dt.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Dal Teorema 5.7.1 discende subito il

Corollario 5.7.2. Si assuma che $f(x, t)$ sia continua, e che J sia compatto. Allora $F(x)$ è continua, ovvero $\lim_{x \rightarrow c} \int_J f(x, t) dt = \int_J f(c, t) dt$ per ogni $c \in I$. Inoltre, se $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ esiste continua allora $F(x)$ è derivabile, e vale $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Il seguente risultato estende la Proposizione 2.3.1.

Proposizione 5.7.3. Siano I e J intervalli di \mathbb{R} , $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ esiste continua. Siano poi $\varphi : I \rightarrow J$ e $\psi : I \rightarrow J$ di classe \mathcal{C}^1 . Allora $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ è derivabile, e

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x)) \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x).$$

Dimostrazione. Omessa. □

Parliamo ora brevemente dell’esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Cauchy di classe \mathcal{C}^1 .

Teorema 5.7.4. (Cauchy-Lipschitz) Siano A un aperto di \mathbb{R}^2 , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Dato $(x_0, y_0) \in A$, si consideri il problema di Cauchy del primo ordine in forma normale

$$(5.13) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

- (i) (Esistenza e unicità locale) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto contenente x_0 e tale che il segmento $\{(x, y_0) : x \in I\}$ sia contenuto in A . Allora esiste un intervallo aperto $I' \subseteq I$ contenente x_0 ed una soluzione $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ di (5.13) il cui grafico è contenuto in A . Inoltre una tale soluzione è localmente unica⁽⁷⁹⁾.

⁽⁷⁹⁾nel senso due soluzioni di (5.13) devono necessariamente essere uguali su un intorno di x_0 .

- (ii) (Esistenza e unicità globale) *Si supponga che A contenga una striscia $I \times \mathbb{R}$, ove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto di \mathbb{R} contenente x_0 . Se per ogni intervallo compatto $[a, b] \subset I$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ è limitata in $[a, b] \times \mathbb{R}$,⁽⁸⁰⁾ allora esiste un'unica soluzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ di (5.13).*

Dimostrazione. Omessa. □

Commentiamo alcuni aspetti del risultato appena enunciato.

- L'ipotesi richiesta per l'esistenza ed unicità locale (cioè che f sia di classe \mathcal{C}^1 in A) è assai comune nelle applicazioni. Tuttavia, se f è solo continua in A , possono accadere fenomeni di non unicità locale quando f non è lipschitziana rispetto ad y , ovvero quando non si riesce a “controllare la pendenza rispetto ad y ” all'intorno di (x_0, y_0) , come mostra il classico esempio in cui $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$, e $y_0 = 0$: qui $f(x, y)$ è solo continua in $(x_0, 0)$, e la sua pendenza rispetto ad y diverge. In questo caso spuntano parecchie soluzioni per (5.13): oltre all'ovvia $y \equiv 0$, anche $y(x) = (x - x_0)^2 \operatorname{sign}(x - x_0)$ lo è (come si verifica direttamente), e anche, presi due qualsiasi $a, b > 0$, tutte le funzioni $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo $y(x) = -(x - (x_0 - a))^2$ (se $x \leq x_0 - a$), $y(x) \equiv 0$ (se $x_0 - a < x < x_0 + b$) e $y(x) = (x - (x_0 + b))^2$ (se $x \geq x_0 + b$), che sono nulle nell'intorno $[x_0 - a, x_0 + b]$ di x_0 .
- L'ipotesi richiesta per l'esistenza ed unicità globale (cioè che f sia di classe \mathcal{C}^1 in A , che A contenga una striscia $I \times \mathbb{R}$ e che $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia limitata in ogni sottostriscia a base compatta in x) è piuttosto impegnativa.

Esempi. (1) Se $y' = g(x)$ con $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 in D intervallo di \mathbb{R} (problema base di integrazione) le ipotesi sono banalmente soddisfatte: infatti $f(x, y) = g(x)$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Coerentemente, come visto, la soluzione $y(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$ di (5.13) (ove G è una primitiva di g) è definita su tutto $I = D$. **(2)** Anche per $y' = y$ l'ipotesi è soddisfatta: infatti $f(x, y) = y$, e dunque $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 1$ è ovunque limitata. Coerentemente, la soluzione $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$ di (5.13) è definita su tutto $I = \mathbb{R}$. **(3)** Invece se $y' = y^2$ l'ipotesi non è più soddisfatta: qui vale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y^2$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial y} = y$, che non è mai limitata sulle strisce del tipo $I \times \mathbb{R}$. Dunque il teorema di esistenza ed unicità globale non si può applicare, e non è pertanto una sorpresa che la soluzione massimale di (5.13), ovvero $y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$, non sia definita su tutto $I = \mathbb{R}$. **(3)** Però per le equazioni *lineari* del primo ordine in forma normale (ovvero quelle del tipo $y' = \alpha(x)y + \beta(x)$ con $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue su un intervallo aperto I di \mathbb{R} contenente x_0) le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale sono sempre soddisfatte: infatti qui si ha $f(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x)$ definita in $A = I \times \mathbb{R}$, e dunque $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha(x)$: se $[a, b]$ è un qualsiasi intervallo compatto contenuto in I , per ogni $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ si ha pertanto $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = |\alpha(x)| \leq L_{a,b}$ con $L_{a,b} = \max\{|\alpha(x)| : x \in [a, b]\}$ (che esiste finito: si ricordi il Teorema di Weierstrass). Dunque la soluzione massimale di (5.13) è definita su tutto I .

- Il caso di un'equazione differenziale scalare del primo ordine in forma normale è “fintamente” molto particolare. In effetti, posto dalla sua forma generale per *sistemi* di equazioni differenziali, si può facilmente dedurre una nozione chiara di problema di Cauchy anche per tutte le equazioni differenziali scalari di ordine n (con $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi) poste in forma normale, e stabilire risultati di esistenza ed unicità. Non entriamo nel dettaglio ma menzioniamo solo che, analogamente a quanto fatto poco fa, si può dimostrare che le sue ipotesi di esistenza ed unicità globale sono soddisfatte dalle equazioni *lineari* in forma normale.

⁽⁸⁰⁾ovvero se esiste una costante $L_{a,b} > 0$ tale che $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L_{a,b}$ per ogni $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

6 Forme differenziali lineari e campi vettoriali

Se un corpo si muove nello spazio tridimensionale da un punto P a un punto Q in presenza di un campo di forze, è d'interesse fisico calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la traiettoria percorsa dal corpo per andare da P a Q ; se il campo ha particolari proprietà spaziali (si parla di *campo conservativo*: un esempio è dato dai campi a simmetria radiale) tale lavoro dipende *solo* dai punti P e Q , e *per nulla* dalla traiettoria seguita per andare dall'uno all'altro. In questo capitolo si vuole inquadrare questa nota situazione fisica in un preciso contesto matematico.

6.1 Cammini e omotopia

Iniziamo con l'introdurre alcune nozioni di carattere topologico. Anche se la loro presentazione avverrà in \mathbb{R}^n dotato della consueta topologia definita dalla norma euclidea, la gran parte di esse avrà senso nell'ambito di un qualunque spazio topologico (dunque ad esempio in uno spazio metrico, in particolare in uno spazio normato): i dettagli sono lasciati alla cura dello studente.

Nel seguito si userà spesso la notazione $I = [0, 1]$.

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Un *cammino* (o *arco*) in A è una curva parametrica con estremi finiti Cammino

$$\gamma : [a, b] \rightarrow A$$

continua e di classe \mathcal{C}^1 a tratti, cioè tale che esista una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che $\gamma|_{]t_{j-1}, t_j[}$ sia di classe \mathcal{C}^1 per ogni $j = 1, \dots, n$. I punti $x_0 = \gamma(a)$ e $x_1 = \gamma(b)$ si diranno *estremi* del cammino; se $x_1 = x_0$ parleremo di *circuito* basato a x_0 . Se γ è una funzione costante (ovvero $\gamma(t) = x_0$ per ogni t) diremo che γ è il *cammino costante* c_{x_0} . Circuito

In questo contesto diremo che un *cambiamento di parametro* (o *riparametrizzazione*) è una funzione continua e di classe \mathcal{C}^1 a tratti $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tale che $p(\{c, d\}) = \{a, b\}$ (ovvero, che manda c, d in a, b , eventualmente invertendo l'ordine): allora $\gamma \circ p : [c, d] \rightarrow A$ è anch'esso un cammino in A che ha gli stessi estremi (eventualmente invertiti nell'ordine) e lo stesso sostegno di γ , cioè che cambia è la legge oraria con cui il sostegno viene percorso. ⁽⁸¹⁾ Cambio di parametro

⁽⁸¹⁾Si noti che ora non si richiede più, come si faceva con i cambi di parametro usati per l'integrale curvilineo, che p sia biettiva di classe \mathcal{C}^1 a tratti con la derivata $p'(\tau)$ che non si annulli mai (dunque p strettamente monotona): in effetti, per l'invarianza dell'integrale che andremo a definire tra poco (quello delle forme differenziali lineari —o quello di linea di un campo vettoriale— su un cammino: vedi Proposizione 6.2.3(a)), ciò non è più importante.

Esempi. (1) Il cammino più semplice tra due punti x_0 e x_1 in \mathbb{R}^n è $\gamma_{[x_0, x_1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato da $\gamma_{[x_0, x_1]}(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) = (1 - t)x_0 + tx_1$: il sostegno è il segmento $[x_0, x_1]$, percorso in modo lineare. **(2)** Il *cammino opposto* di $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow A$ dato da $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$: è quello che ne percorre il sostegno con la stessa legge oraria, ma a ritroso. **(3)** Dati $r > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, il cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da $\gamma(t) = (r \cos 2\pi nt, r \sin 2\pi nt)$ (o anche $\gamma(t) = r e^{2\pi i n t}$, identificando $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) è un circuito basato a $(r, 0)$ che percorre la circonferenza centrata in 0 e di raggio r in modo uniforme n volte in senso antiorario/orario (se $n \geq 0$), mentre per $n = 0$ è il circuito costante in $(r, 0)$.

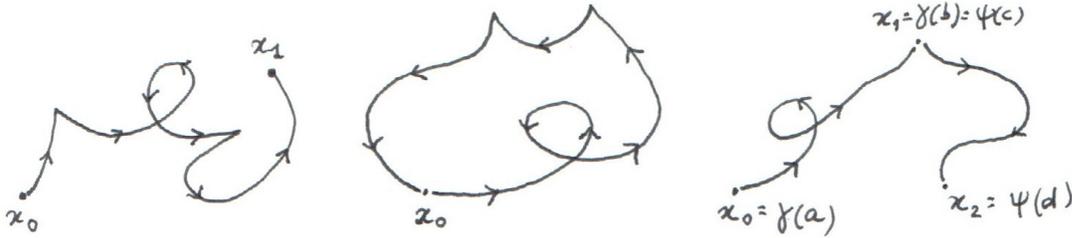


Figura 2: **(1)** Un cammino da x_0 a x_1 . **(2)** Un circuito basato a x_0 . **(3)** Giunzione di due cammini.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ e $\psi : [c, d] \rightarrow A$ sono due cammini tali che $\gamma(b) = \psi(c)$ (ovvero: l'estremo finale di γ coincide con quello iniziale di ψ), si può considerare la *giunzione* (detta anche *giustapposizione*, talvolta *unione* o *saldatura*) $\gamma \cdot \psi$ data da

Giunzione

$$\gamma \cdot \psi : [a, b + d - c] \rightarrow A, \quad (\gamma \cdot \psi)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{per } t \in [b, b + d - c] \end{cases} .$$

Nel caso in cui si vogliono considerare per comodità solo cammini con dominio $I = [0, 1]$, dati due cammini $\gamma, \psi : I \rightarrow A$ tali che $\gamma(1) = \psi(0)$ la giunzione viene definita in modo naturale come segue (usando un cambio di parametro che raddoppia la velocità di percorrenza):

$$\gamma \cdot \psi : I \rightarrow A, \quad (\gamma \cdot \psi)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi(2t - 1) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Per mostrare che anche la giunzione $\gamma \cdot \psi$ è un cammino (ovvero che è continua) serve il seguente utile lemma di topologia generale:

Lemma 6.1.1. (Lemma d'incollamento) *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, e sia $X = \bigcup_{j=1}^r F_j$ un ricoprimento finito fatto di chiusi in X . Allora $f : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se lo sono le restrizioni $f|_{F_j}$ ($j = 1, \dots, r$).*

Dimostrazione. Esercizio (ricordare che f è continua se e solo $f^{-1}(C)$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$, dunque...). Per mostrare che la giunzione $\gamma \cdot \psi$ è un cammino basta applicare il lemma scegliendo $X = [a, b + d - c] \subset \mathbb{R}$, $Y = A$, $F_1 = [a, b]$, $F_2 = [b, b + d - c]$ e $f = \gamma \cdot \psi$. \square

L'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dirà *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in A$ esiste un cammino in A di estremi x_0 e x_1 ; ricordiamo che invece A si dice *connesso* se “non può essere espresso come unione disgiunta di due aperti”, ovvero se non esistono due sottoinsiemi U e V di A non vuoti, aperti in A (ovvero, ottenibili intersecando A con un aperto di \mathbb{R}^n) e disgiunti tra loro tali che $A = U \cup V$.

Insieme
connesso
per archi
connesso

Proposizione 6.1.2. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (a) A è connesso;
- (b) ogni funzione continua $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ è necessariamente costante⁽⁸²⁾;
- (c) l'unico sottoinsieme non vuoto di A sia aperto che chiuso in A è lo stesso A .

Dimostrazione. Prima di iniziare, si ricordi che una funzione è continua se e solo se l'antiimmagine di ogni aperto del codominio è un aperto del dominio: questa caratterizzazione verrà usata più volte qui nel seguito. (a) \Rightarrow (b): se $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ è continua ma non costante, allora $U = f^{-1}(0)$ e $V = f^{-1}(1)$ mostrano che A non è connesso. (b) \Rightarrow (c): se $A' \subsetneq A$ è non vuoto e sia aperto che chiuso in A , la funzione $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ definita come 0 su A' e come 1 su $A \setminus A'$ è continua ma non costante. (c) \Rightarrow (a): se A non è connesso esistono due sottoinsiemi U e V di A non vuoti, aperti in A e disgiunti tali che $A = U \cup V$: poiché $V = A \setminus U$, il sottoinsieme U è non vuoto e sia aperto che chiuso in A , ma non è A . \square

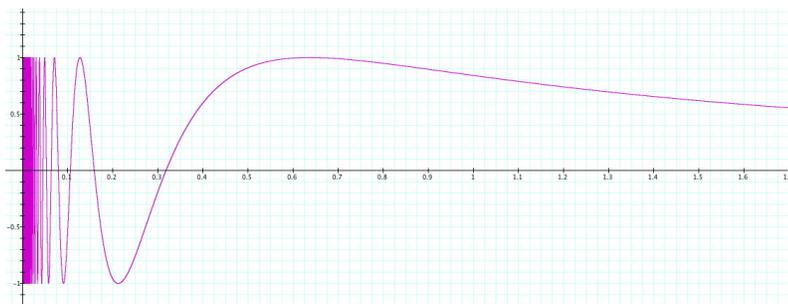


Figura 3: Il seno del topologo.

Proposizione 6.1.3. *Uno spazio connesso per archi è connesso, mentre il viceversa non è sempre vero (ma per gli aperti è vero).*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia connesso per archi, e siano $x_0, x_1 \in A$: esisterà dunque un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$. Data una funzione continua $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ si avrà che $f \circ \gamma$ è continua, ed essendo $[a, b]$ connesso si ha che anche l'immagine $(f \circ \gamma)([a, b]) \subset \{0, 1\}$ è connessa, dunque è $\{0\}$ oppure $\{1\}$, da cui in particolare $f(x_0) = f(x_1)$: visto che x_0, x_1 sono punti qualsiasi di A , si ha che f è costante, ovvero A è connesso per la Proposizione 6.1.2(b). Per mostrare che il viceversa non è sempre vero, si consideri ad esempio $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(\frac{1}{x})\}$ e si ponga $A := \overline{B} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup B$ (comunemente chiamato *seno del topologo*): allora A è connesso (basta applicare la Proposizione 6.1.2(b)) ma non connesso per archi. Infatti, per assurdo sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ un cammino che congiunge un punto di B con uno di $A \setminus B = \{0\} \times [-1, 1]$: allora $\{t \in [a, b] : x(\gamma(t)) = 0\}$ è un chiuso non vuoto di $[a, b]$, e dunque avrà minimo $\delta > a$. Sempre per continuità, esisterà un $\delta' \in]a, \delta[$ tale che $|\gamma(t) - \gamma(\delta)| < \frac{1}{2}$ per ogni $t \in]\delta', \delta[$, ma ciò è assurdo: infatti, in ogni intorno sinistro di δ in $[a, b]$ vi sono punti in cui $y \circ \gamma$ vale 1 ed

⁽⁸²⁾L'insieme $\{0, 1\}$ (costituito dai due soli oggetti 0 e 1) si intende munito della topologia discreta, per la quale anche i sottoinsiemi $\{0\}$ e $\{1\}$ sono aperti.

altri in cui esso vale -1 .⁽⁸³⁾ Supponiamo ora però che A sia connesso e aperto; fissato un qualsiasi $x_0 \in A$, sia $A' = \{x \in A : \text{esiste un cammino in } A \text{ da } x_0 \text{ a } x\}$. Dobbiamo mostrare che $A' = A$. Sia $y \in A'$, e sia $B_y \subset A$ una palla aperta centrata in y : è chiaro che ogni punto di B_y può essere raggiunto con un cammino da x_0 (basta saldare un cammino da x_0 a y col cammino radiale da y al punto), dunque $B_y \subset A'$: questo mostra che A' è aperto. D'altra parte, se $z \in A$ è di accumulazione per A' , presa una palla aperta $B_z \subset A$ centrata in z esiste qualche $z' \in B_z \cap A'$, dunque c'è un cammino da x_0 a z' che, saldato con quello radiale da z' a z dà un cammino da x_0 a z . Perciò $z \in A'$, e ciò mostra che A' è anche chiuso. Ma allora $A' = A$ per la Proposizione 6.1.2(c). \square

Dati due cammini $\gamma, \psi : [a, b] \rightarrow A$, un'omotopia in A tra essi è una deformazione dall'uno all'altro che si svolge tutta dentro A : più precisamente si tratta di una funzione continua

Omotopia

$$h : [a, b] \times I \rightarrow A$$

tale che, definita per $\lambda \in I$ la funzione (detta “ λ -esimo stadio intermedio” dell'omotopia)

$$h_\lambda : [a, b] \rightarrow A, \quad h_\lambda(t) := h(t, \lambda)$$

si ha $h_0 = \gamma$, $h_1 = \psi$, e h_λ è un cammino in A . Due cammini si diranno omotopi in A se esiste un'omotopia tra essi in A . È il caso di fare un paio di precisazioni in merito alla definizione appena data.

- (1) Anche se i due cammini γ e ψ hanno gli stessi estremi $x_0 = \gamma(a) = \psi(a)$ e $x_1 = \gamma(b) = \psi(b)$, in principio in base alla definizione non è detto che tali estremi debbano rimanere fissati anche negli stadi intermedi. Questo però viene solitamente richiesto in modo tacito: se si vuole sottolinearlo si può parlare di omotopia a estremi fissi, ovvero con $x_0 = h_\lambda(a)$ e $x_1 = h_\lambda(b)$ per ogni $\lambda \in I$.
- (2) Nel caso in cui l'omotopia sia tra due circuiti (in generale non necessariamente basati allo stesso punto), è comunemente richiesto — e noi lo faremo — che anche tutti gli stadi intermedi siano dei circuiti.

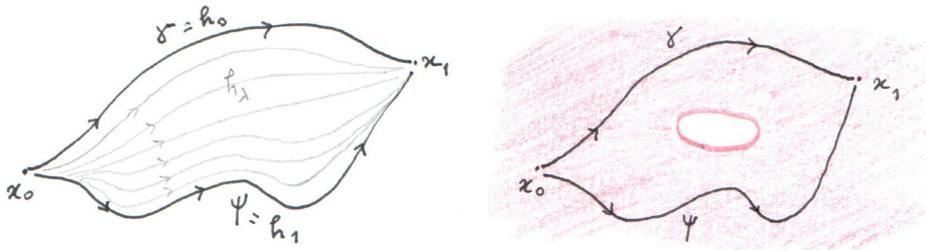


Figura 4: (1) γ e ψ sono omotopi a estremi fissi in \mathbb{R}^2 ... (2) ... ma non nell'aperto bucato A (rosso).

Esempi. (1) Due cammini $\gamma, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (cioè, visti dentro tutto \mathbb{R}^n) sono sempre omotopi tramite l'omotopia affine $h(t, \lambda) = (1 - \lambda)\gamma(t) + \lambda\psi(t)$ (si passa dal punto $\gamma(t)$ al punto $\psi(t)$ percorrendo il

Omotopia affine

⁽⁸³⁾Si noti che tale ragionamento non si applica (fortunatamente) a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = x \sin(\frac{1}{x})\} \cup \{(0, 0)\}$, che infatti è connesso per archi (è immagine continua di $[a, b]$).

segmento che li congiunge). **(2)** Invece, posto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, i due cammini $\gamma, \psi : [-\pi, \pi] \rightarrow A$ dati da $\gamma(t) = (t, \cos t)$ e $\psi(t) = (t, -\cos t)$ non sono omotopi tra loro in A con estremi fissi: un'eventuale omotopia a estremi fissi dovrebbe infatti passare, in uno dei suoi stadi intermedi, per l'origine $(0,0)$, ma così facendo uscirebbe da A . Invece sono omotopi tra loro se visti dentro tutto il piano \mathbb{R}^2 , ad esempio tramite l'omotopia affine. **(3)** Come fatto notare in precedenza, non è automatico che gli stadi intermedi di una qualsiasi omotopia tra circuiti siano anch'essi dei circuiti: ad esempio, dato $r > 0$, l'omotopia $h : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $h(t, \lambda) = \left(r \frac{1+\cos(2\pi((1-2\lambda)t+\lambda))}{2 \cos \lambda \pi}, r \frac{\sin(2\pi((1-2\lambda)t+\lambda))}{2 \cos \lambda \pi} \right)$, prolungata per continuità per $\lambda = \frac{1}{2}$ come $h(t, \frac{1}{2}) = (0, (1-2t)r)$, parte dalla circonferenza $h_0(t) = (r \frac{1+\cos 2\pi t}{2}, r \frac{\sin 2\pi t}{2})$ (circuito) e arriva alla circonferenza $h_1(t) = (-r \frac{1+\cos 2\pi t}{2}, r \frac{\sin 2\pi t}{2})$ (circuitto), ma gli stadi intermedi non sono circuiti (vedi Figura 6(1)).

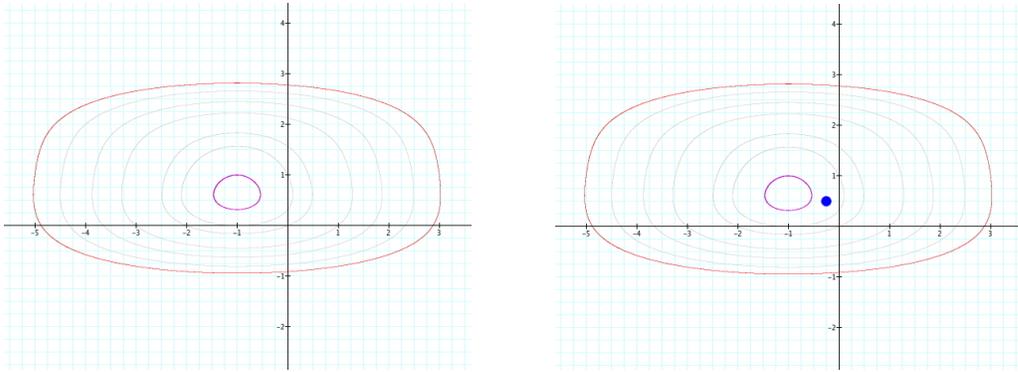


Figura 5: I circuiti rosso e porpora sono omotopi nel piano (i circuiti grigi evidenziano alcuni passaggi intermedi di una possibile omotopia tra essi), ma non sono omotopi nel piano bucato (il buco è quello blu).

Proposizione 6.1.4. *L'omotopia è un'equivalenza nell'insieme dei cammini in A .*

Dimostrazione. Esercizio (per la transitività serve il Lemma dell'Incollamento 6.1.1). □

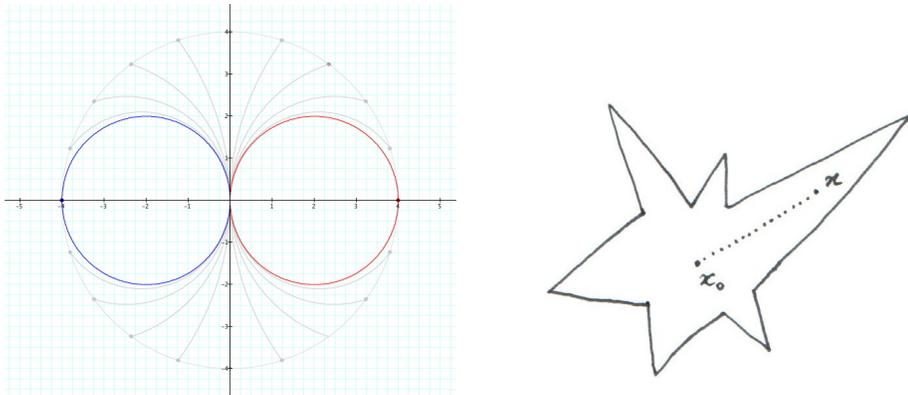


Figura 6: **(1)** Omotopia tra circuiti con stadi intermedi che non sono circuiti . **(2)** Insieme stellato.

L'insieme A si dirà *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se ogni circuito in A è nullomotopo (ovvero, omotopo a un circuito costante) in A : in altre parole, se ogni circuito in A può essere contratto ad un punto in modo continuo e senza mai uscire da A .

Insieme
semplicemente
connesso

Esempi. (1) Lo spazio \mathbb{R}^n (o un qualsiasi suo sottoinsieme convesso) è semplicemente connesso: basta usare l'omotopia affine. **(2)** Più in generale, è semplicemente connesso ogni sottoinsieme A di \mathbb{R}^n che sia *stellato* rispetto a un suo punto $x_0 \in A$ (significa che per ogni $x \in A$ tutto il segmento $[x_0, x] = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in I\}$ è contenuto in A : il significato geometrico del nome è piuttosto evidente, vedi Figura 6(2)): infatti ogni circuito in A può essere contratto nel circuito costante c_{x_0} , sempre usando l'omotopia affine. **(3)** Come appena detto, un insieme stellato è semplicemente connesso; invece il viceversa è evidentemente falso (si pensi ad esempio a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$, o a \mathbb{R}^3 meno un punto, o a una superficie sferica in \mathbb{R}^3 , vedi anche dopo). **(4)** Il piano bucato $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso: ad esempio il circuito $\gamma : I \rightarrow A$ dato da $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ (il sostegno è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1) non è nullomotopo, e la stessa cosa avviene per tutti i circuiti che "girano attorno" all'origine (nel senso che ogni curva uscente dall'origine e tendente a ∞_2 deve per forza intersecarne il sostegno). **(5)** Se a \mathbb{R}^3 si toglie un punto (o un insieme discreto di punti) si ottiene ancora un insieme semplicemente connesso, mentre se si toglie una retta si perde la semplice connessione. Più in generale, si dimostra che togliendo a una varietà n -dimensionale semplicemente connessa (ad esempio, un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^n) una sottovarietà di codimensione ≥ 3 non si perde la semplice connessione. **(6)** La superficie sferica unitaria S^2 in \mathbb{R}^3 è semplicemente connessa, e tale rimane anche togliendole un solo punto (ciò non deve sorprendere: infatti una superficie sferica meno un punto è diffeomorfa al piano \mathbb{R}^2 , ad esempio tramite la proiezione stereografica da quel punto).

Insieme stellato

6.2 Forme differenziali lineari e campi vettoriali

Iniziamo con un breve richiamo di algebra lineare. Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} , il *duale* (algebrico) di V è l'insieme delle "forme lineari" (o "covettori") su V , ovvero

$$V^* = \{\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ è lineare, ovvero } \varphi(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 \varphi(v_1) + k_2 \varphi(v_2)\}.$$

Anche V^* è dotato di una naturale struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} (dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in V^*$ si pone $(\alpha\varphi + \beta\psi)(v) := \alpha\varphi(v) + \beta\psi(v)$).

Esempi. (1) L'insieme $V = \mathbb{R}^n$ delle n -uple di numeri reali ha una naturale struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale, di dimensione n . Come noto, una volta fissata una base di V , le forme lineari $V \rightarrow \mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con la matrici $1 \times n$ (i "vettori-riga"): ad esempio, fissata in V la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$, data una forma lineare $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ e posto $\varphi_j := \varphi(e_j)$, a φ è associato il vettore-riga $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, nel senso che, data una n -upla $v \in V$ (vista come "vettore-colonna" delle sue componenti), il valore $\varphi(v)$ si trova moltiplicando il vettore-riga $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ per il vettore-colonna v . **(2)** Dato un qualsiasi insieme X , l'insieme $V = X^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di X in \mathbb{R} ha una naturale struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale definendo, date due funzioni $\varphi, \psi \in V$ e due scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la funzione $\lambda\varphi + \mu\psi \in V$ come $(\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)$ per ogni $x \in X$. Fissato $x_0 \in X$, la *valutazione* $v_{x_0} : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$ è un esempio di forma lineare su V . **(3)** Dato un intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, l'insieme $V = \mathcal{C}([a, b])$ delle funzioni continue di

$[a, b]$ in \mathbb{R} è un sottospazio vettoriale di $[a, b]^{\mathbb{R}}$ (infatti combinazioni lineari di funzioni continue sono ancora funzioni continue). Un esempio di forma lineare su V è quella che associa a una funzione continua (dunque integrabile) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il suo integrale di Riemann $\int_a^b f(x) dx$.

Supponiamo ora che V sia uno *spazio euclideo*, ovvero un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita munito di un prodotto scalare, ovvero una forma bilineare simmetrica $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definita positiva (possiamo pensare ad esempio a $V = \mathbb{R}^n$ col consueto prodotto scalare euclideo $v \cdot w = \sum_{j=1}^n v_j w_j$). In uno spazio euclideo V c'è un'identificazione canonica tra lo spazio V e il suo duale V^* , come mostra la seguente

Proposizione 6.2.1. *La funzione $(\cdot)^* : V \rightarrow V^*$ definita associando a un vettore $v_0 \in V$ la forma lineare $v_0^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v_0^*(v) = v \cdot v_0$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare, per ogni forma lineare $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ esiste uno e un solo vettore associato $v_\varphi \in V$ tale che $\varphi(v) = v \cdot v_\varphi$ per ogni $v \in V$.*

Dimostrazione. Dato un vettore $v_0 \in V$, la funzione $v_0^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v_0^*(v) = v \cdot v_0$ è effettivamente una forma lineare su V , ovvero un covettore di V^* , e la funzione $(\cdot)^* : V \rightarrow V^*$ così ottenuta è lineare: tutto ciò discende subito dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare. Inoltre $(\cdot)^*$ è iniettiva, perché se v_0^* è la funzione nulla allora necessariamente v_0 è il vettore nullo (infatti $\|v_0\|^2 = v_0 \cdot v_0 = 0$). Resta da mostrare che $(\cdot)^*$ è suriettiva, cioè che data una forma lineare $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ esiste un (a questo punto unico) vettore associato $v_\varphi \in V$ tale che $\varphi(v) = v \cdot v_\varphi$ per ogni $v \in V$. Ora, se $\varphi = 0$ tale vettore è quello nullo. Se invece $\varphi \neq 0$ allora il nucleo $V'_\varphi = \ker \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$ è un iperpiano (cioè un sottospazio vettoriale di codimensione 1) di V . Considerato un versore n normale a V'_φ (ovvero un vettore $n \in V$ tale che $\|n\|^2 = n \cdot n = 1$ e che $n \cdot v' = 0$ per ogni $v' \in V'_\varphi$), sappiamo che ogni vettore $v \in V$ si decompone in modo unico nella somma delle componenti perpendicolare e parallela a V'_φ , ovvero per ogni $v \in V$ esiste un unico $v' \in V'_\varphi$ tale che $v = (v \cdot n)n + v'$. Posto allora $\alpha = \varphi(n)$, ricaviamo che $\varphi(v) = \varphi((v \cdot n)n + v') = \varphi((v \cdot n)n) + \varphi(v') = (v \cdot n)\varphi(n) + 0 = \alpha(v \cdot n) = v \cdot (\alpha n)$. Basterà dunque porre $v_\varphi = \alpha n$. \square

Considerata una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V (ovvero una base tale che $v_i \cdot v_j = \delta_{i,j}$), la corrispondente base $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* è detta "base duale": ad esempio, se in $V = \mathbb{R}^n$ si scelgono la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ e il consueto prodotto scalare euclideo, la base duale $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ è data da $e_j^* = \pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la proiezione che manda un vettore di \mathbb{R}^n nella sua j -esima componente rispetto alla base canonica.

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sufficientemente regolare (ad esempio di classe \mathcal{C}^1 , ovvero con le derivate direzionali continue) e un punto $x_0 \in A$, sappiamo che il differenziale di f in x_0 è la funzione lineare

$$df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \pi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \pi_n,$$

ove le funzioni $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono le proiezioni $\pi_i(v) = v_i$, ovvero $\pi_i = e_i^*$ (elemento della base duale della base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare euclideo). Il differenziale df_{x_0} è dunque un covettore di $(\mathbb{R}^n)^*$, e il vettore-colonna che gli corrisponde

nell'isomorfismo canonico tra \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$ è il gradiente $\nabla f(x_0)$, le cui coordinate sono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$: si ha in effetti

$$df_{x_0}(v) = \nabla f(x_0) \cdot v \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n.$$

Facendo variare il punto di A si arriva alla definizione del differenziale df , che può essere scritto come

$$df : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

ove $dx_j := d\pi_j$ (e dunque, essendo π_j lineare, si ha $dx_j(x) = d\pi_j(x) = \pi_j$ per ogni $x \in A$). Pertanto df è un esempio di *campo di covettori* su A , ovvero una funzione che associa ad ogni $x \in A$ un covettore di $(\mathbb{R}^n)^*$ (in questo caso, il differenziale df_x di f in x). Più in generale, un qualsiasi campo di covettori

$$\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad \omega = \omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n,$$

ove le $\omega_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe \mathcal{C}^k , viene chiamato una *forma differenziale lineare di classe \mathcal{C}^k* nell'aperto A ; l'insieme $\Omega^1(A)$ delle forme differenziali lineari in A ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale (in $\Omega^1(A)$ si può fare la somma, e moltiplicare per scalari reali). I differenziali df sono particolari forme differenziali lineari, che chiameremo *esatte*: diremo che una $\omega \in \Omega^1(A)$ di classe \mathcal{C}^k (con $k \geq 0$) è *esatta* (in A) se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^{k+1} tale che $\omega = df$, ovvero $\omega_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Una tale funzione f si dirà *primitiva* di ω ; e se A è connesso le altre primitive differiscono da f per una costante additiva (in ogni caso, nel seguito generalmente assumeremo che A sia connesso per archi).

Forma differenziale lineare

Forma esatta

Primitiva

Se $n = 1$, ogni forma differenziale lineare è esatta (data $\omega = a(x) dx$ basta considerare una qualsiasi primitiva $f(x)$ di $a(x)$); se invece $n > 1$ ciò è falso.

Esempio. La forma $\omega = y dx$ in $A = \mathbb{R}^2$ non può essere il differenziale di nessuna funzione $f(x, y)$, perché se fosse $\omega = df$ dovrebbe essere $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$: ma la seconda condizione dice che f non dipende esplicitamente da y e dunque è del tipo $f(x, y) = \phi(x)$, e per la prima dovrebbe essere $\phi'(x) = y$, il che è contraddittorio.

Data allora una forma differenziale lineare, come riconoscere se essa è esatta o no? Possiamo provare a cercarne a mano un'eventuale primitiva, come abbiamo fatto nell'esempio precedente e come faremo in quello che segue; tuttavia apprenderemo presto dei metodi per verificare a priori se una data forma è esatta prima di avventurarsi nella ricerca di una primitiva che può rivelarsi infruttuosa, magari dopo aver fatto dei conti pesanti per nulla.

Esempio. Date le forme differenziali $\omega = (y-2x) dx + (x+1) dy$ e $\psi = 2 dx - x dy$ di classe \mathcal{C}^∞ su $A = \mathbb{R}^2$, la prima è esatta mentre la seconda no. Cercando infatti una $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$, da $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x$ si ottiene $f(x, y) = xy - x^2 + \phi(y)$ per una certa $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^∞ , e da $\frac{\partial f}{\partial y} = x + \phi'(y) = x + 1$ si ricava $\phi'(y) = 1$, da cui $\phi(y) = y + k$ e dunque $f(x, y) = (x + 1)y - x^2 + k$; cercando invece una $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\psi = dg$, da $\frac{\partial g}{\partial x} = 2$ si ottiene $g(x, y) = 2x + \phi(y)$ per una certa $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ma allora $\frac{\partial g}{\partial y} = \phi'(y) = x$, espressione priva di senso.

Osserviamo comunque fin d'ora che le seguenti forme differenziali lineari sono esatte:

- (*Forme differenziali a variabili separate*) Supponiamo che $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x_j) dx_j$, ovvero che il j -esimo coefficiente ω_j sia funzione della sola variabile x_j : una tale forma è esatta, con primitiva $f(x) = \sum_{j=1}^n \int \omega_j(x_j) dx_j$ (un caso particolare è quello di una forma costante $\sum_{j=1}^n k_j dx_j$, che ha primitiva $\sum_{j=1}^n k_j x_j$).

Esempio. Se $\omega = (2x+1) dx + y \sin y dy + \frac{1}{z} dz$ allora $f(x, y, z) = x^2 + x + \sin y - y \cos y + \log |z| + k$, per una qualsiasi costante $k \in \mathbb{R}$.

- (*Forme differenziali radiali a simmetria sferica*) Indichiamo con $r = (\sum (x_j - \tilde{x}_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ la funzione di distanza da un prefissato punto \tilde{x} : vale allora $dr = \frac{1}{r} \sum (x_j - \tilde{x}_j) dx_j$. Una forma del tipo $\omega = \alpha(r) dr = \frac{\alpha(r)}{r} \sum (x_j - \tilde{x}_j) dx_j$ è esatta, con primitiva $f(x) = A(r) := \int \alpha(r) dr$.

Esempio. Se $\omega = (x^2 + y^2)(x dx + y dy) = r^3 dr$ (ove $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ è la distanza da $(0, 0)$) allora $f(x, y) = \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2$.

La teoria delle forme differenziali lineari (campi “covettoriali”) è canonicamente corrispondente a quella dei *campi vettoriali*, ovvero funzioni

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)),$$

tramite la seguente associazione, che manda la base canonica in \mathbb{R}^n nella sua base duale:

$$\text{campo } F = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \quad \longleftrightarrow \quad \text{forma } \omega_F = F_1(x) dx_1 + \dots + F_n(x) dx_n.$$

Nelle scienze applicate, particolarmente in Fisica, tradizionalmente si preferisce operare con i campi vettoriali, perché offrono una visualizzazione immediata e suggestiva delle grandezze vettoriali (forze, velocità, ...) che rappresentano. Tuttavia l’uso delle forme ha

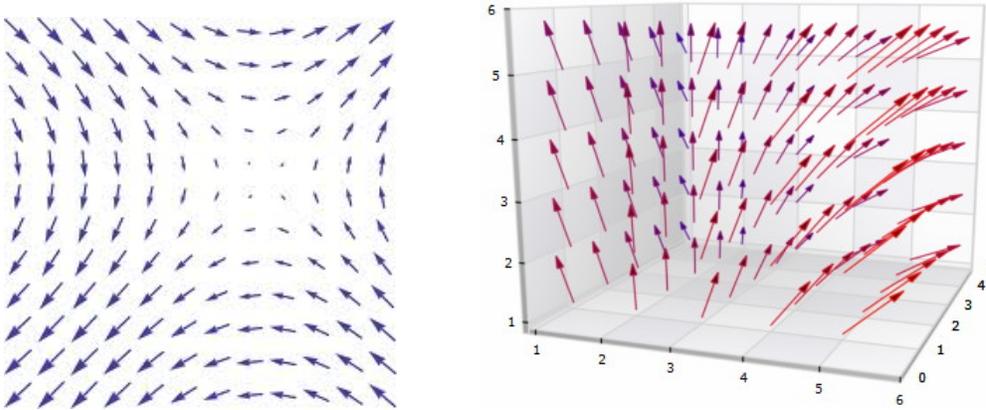


Figura 7: Campi vettoriali in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

il vantaggio di offrire un quadro unitario dal punto di vista teorico (esse permettono di

raggiungere risultati generali di enunciato pulito in dimensione qualunque, come vedremo col teorema di Stokes, che forniscono un inquadramento comune a vari risultati particolari) ed efficiente dal punto di vista pratico (ad esempio, per la sua compatibilità con i cambi di coordinate). Nel seguito noi useremo sistematicamente il linguaggio delle forme, anche se spesso cercheremo di dare gli enunciati anche nel punto di vista dei campi. Ad esempio, la nozione per i campi che corrisponde a quella di forma esatta è quella di *campo conservativo*, ovvero un campo $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ per il quale esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $F = \nabla f$; la funzione f , definita a meno di una costante additiva se A è connesso, è detta anch'essa *primitiva* di F ; ma, specie nel caso dei campi di forze, è di maggior interesse la funzione opposta $E = -f$, detta *energia potenziale* di F ⁽⁸⁴⁾ per la quale si ha dunque $F = -\nabla E$. La ricerca di una primitiva per un campo conservativo $F = (F_1, \dots, F_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ equivale alla ricerca di una primitiva per la corrispondente forma differenziale lineare esatta $\omega_F = F_1(x) dx_1 + \dots + F_n(x) dx_n$.

Campo conservativo

Energia potenziale

Useremo dunque il seguente dizionario nello spazio euclideo \mathbb{R}^n per passare da un punto di vista vettoriale (campi) a un punto di vista covettoriale (forme differenziali):

Spazio vettoriale \mathbb{R}^n	\longleftrightarrow	Spazio vettoriale duale $(\mathbb{R}^n)^*$
Vettore (vettore-colonna)	\longleftrightarrow	Covettore (vettore-riga)
Campo vettoriale	\longleftrightarrow	Forma differenziale lineare
Gradiente di una funzione	\longleftrightarrow	Differenziale di una funzione
(Energia) potenziale	\longleftrightarrow	Primitiva
Integrale di linea di un campo	\longleftrightarrow	Integrale di una forma
Campi conservativi	\longleftrightarrow	Forme esatte
Campi irrotazionali	\longleftrightarrow	Forme chiuse

Esempi. (1) Per quanto detto in precedenza sulle forme differenziali, i campi a variabili separate (ovvero quelli del tipo $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$), che corrispondono alle forme $F_1(x_1) dx_1 + \dots + F_n(x_n) dx_n$ e i campi radiali a simmetria sferica (ovvero del tipo $\alpha(r) \frac{x-\tilde{x}}{r}$, ove \tilde{x} è un prefissato punto e $r = (\sum (x_j - \tilde{x}_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ è la funzione di distanza da \tilde{x} , che corrispondono alle forme del tipo $\alpha(r) dr = \frac{\alpha(r)}{r} \sum (x_j - \tilde{x}_j) dx_j$) sono conservativi, con primitive date rispettivamente da $\sum_j \int F_j(x_j) dx_j$ e $\int \alpha(r) dr$. **(2)** Dato nello spazio fisico tridimensionale un campo di forze $F = (F_x, F_y, F_z)$, la corrispondente forma differenziale $dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ è detta *lavoro elementare* compiuto dal campo. Dire che il campo F è conservativo, ovvero che il lavoro elementare è una forma esatta, significa, come detto, individuare l'esistenza di un'energia potenziale (l'opposto di una primitiva) $E(x, y, z)$ tale che $F = -\nabla E$: in tal caso, come vedremo tra breve, il lavoro compiuto dal campo durante un qualsiasi spostamento da un punto (x_0, y_0, z_0) a un altro punto (x_1, y_1, z_1) è sempre pari alla perdita di energia potenziale dalla partenza all'arrivo, ovvero

⁽⁸⁴⁾ A volte si usa il termine *potenziale* di F , specie nel caso in cui si consideri una versione "specificata" (cioè indipendente dalle caratteristiche del corpo che ne risente, come accade nel campo elettrostatico con la carica di prova) del campo di forze.

$U(x_0, y_0, z_0) - U(x_1, y_1, z_1)$. Esempi di campi di forze conservativi sono, come noto, il campo di gravità terrestre $(0, 0, -mg)$ (costante, con energia potenziale mgz) e i vari campi centrali a simmetria radiale: ad esempio, il campo gravitazionale generato da un pianeta di massa M posto in \tilde{x} e il campo di forza elastica generato da una molla di costante k con polo in \tilde{x} e lunghezza a riposo ℓ sono rispettivamente quelli con $\alpha_{\text{gr}}(r) = -\frac{GM}{r^2}$ (campo specifico per unità di massa) e $\alpha_{\text{el}}(r) = k(\ell - r)$ (il primo campo di forze è attrattivo, mentre il secondo è attrattivo per $r > \ell$ e repulsivo per $r < \ell$), con energie potenziali date da $-\frac{GM}{r}$ e $k(\frac{1}{2}r^2 - \ell r)$.

Torniamo ora al linguaggio delle forme, e al problema di *come riconoscere a priori se una data forma differenziale lineare è esatta*. Iniziamo con la seguente condizione necessaria.

Proposizione - Definizione 6.2.2. Se $\omega \in \Omega^1(A)$ è di classe \mathcal{C}^1 ed è esatta in A , allora le derivate parziali incrociate dei suoi coefficienti sono uguali (una forma ω che soddisfa questa proprietà si dirà *chiusa* in A):

Forma chiusa

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Dire che $\omega = df$ per una certa $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^2 significa che $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, pertanto l'affermazione discende dal teorema di Schwarz. \square

Dunque la chiusura, che è una condizione di facile verifica (e che, alla pari dell'esattezza, si può dimostrare non dipendere dal particolare sistema di coordinate che si sta usando) discende necessariamente dall'esattezza: ma in che misura, o sotto quali condizioni, essa diventa anche sufficiente? È questo il problema di cui ci occupiamo ora.

Data una forma differenziale lineare continua $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$ nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, definiamo l'*integrale* di ω lungo γ come il numero reale⁽⁸⁵⁾

Integrale di una forma lungo un cammino

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \omega_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) \right) dt.$$

Quello appena definito è il primo esempio di *integrazione di una forma differenziale su una varietà orientata con bordo*, di cui parleremo più in generale in seguito.

Esempi. (1) Nel piano cartesiano consideriamo la forma $\omega = (2x + y^2) dx + (1 - 3x) dy$, l'arco di parabola $\{x = y^2 - y, |y| \leq 1\}$ (parametrizzato da $\gamma_1(y) = (y^2 - y, y)$ con $y \in [-1, 1]$) e il tratto iniziale di spirale archimedeo $\rho(\theta) = \theta$ nel primo quadrante (parametrizzato da $\gamma_2(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Si ha allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-1}^1 ((2(y^2 - y) + y^2)(2y - 1) + (1 - 3(y^2 - y))(1)) dy = \int_{-1}^1 (6y^3 - 10y^2 + 5y + 1) dy = \dots$ e $\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2\theta \cos \theta + \theta^2 \cos^2 \theta)(\cos \theta - \theta \sin \theta) + (1 - 3\theta \cos \theta)(\sin \theta + \theta \cos \theta)) d\theta$. **(2)** Nello spazio cartesiano consideriamo la forma $\omega = 2xz dx - y dz$, e il tratto di elica cilindrica $\gamma(z) = (r \cos 2\pi z, r \sin 2\pi z, z)$ con $z \in [a, b]$: posto $u = 2\pi z$ si ha allora $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b ((2rz \cos 2\pi z)(-2r\pi \sin 2\pi z) - (r \sin 2\pi z)(1)) dz = -\frac{r}{2\pi} \int_{2\pi a}^{2\pi b} ((ru \sin 2u + \sin u) du) = \dots$

⁽⁸⁵⁾l'integrale ha senso, poiché l'integranda ha al più un numero finito di discontinuità di prima specie.

Proposizione 6.2.3. *L'integrale sopra definito gode delle seguenti proprietà.*

(a) (Cambi di parametro) *Se p è una riparametrizzazione allora*

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\gamma \circ p} \omega ,$$

ove il segno dipende dal fatto che p conservi o inverta l'orientazione degli intervalli.

(b) (Integrale e giunzione) *Vale*

$$\int_{\gamma \cdot \psi} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\psi} \omega .$$

(c) (Integrale di una forma esatta) *Vale*

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .$$

In particolare l'integrale di una forma esatta dipende esclusivamente dagli estremi del cammino.

Dimostrazione. (a) Se la riparametrizzazione è $p : [c, d] \rightarrow [a, b]$, posto $t = p(\tau)$ si ha $\int_{p(c)}^{p(d)} \omega_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_c^d \omega_j(\gamma(p(\tau))) \gamma'_j(p(\tau)) p'(\tau) d\tau = \int_c^d \omega_j((\gamma \circ p)(\tau)) (\gamma \circ p)'_j(\tau) d\tau$; sommando su j si ha che il secondo membro coincide con $\int_{\gamma \circ p} \omega$, mentre il primo coincide con $\pm \int_{\gamma} \omega$ a seconda che p conservi o inverta l'orientazione degli intervalli. (b) Sia $\psi : [c, d] \rightarrow A$: allora, posto $\tau = t - b + c$ vale $\int_{\gamma \cdot \psi} \omega = \sum_{j=1}^n (\int_a^b \omega_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt + \int_b^{b+d-c} \omega_j(\psi(t-b+c)) \psi'_j(t-b+c) dt) = \sum_{j=1}^n (\int_a^b \omega_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt + \int_c^d \omega_j(\psi(\tau)) \psi'_j(\tau) d\tau) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\psi} \omega$. (c) Vale $\int_{\gamma} df = \int_a^b (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. \square

Dopo quanto visto nella Proposizione 6.2.3(c), possiamo andare più a fondo sul legame tra esattezza e integrazione su cammini. Ricordiamo che le forme sono pensate definite su domini aperti connessi (dunque, per la Proposizione 6.1.3, anche connessi per archi).

Proposizione 6.2.4. *Per una forma differenziale lineare continua $\omega \in \Omega^1(A)$ le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- (i) ω è esatta in A .
- (ii) *L'integrale di ω su un cammino in A dipende solo dagli estremi del cammino.*⁽⁸⁶⁾
- (iii) *L'integrale di ω su ogni circuito in A è nullo.*

In tali ipotesi, fissato a piacere un punto $x_0 \in A$, una primitiva di ω in A è

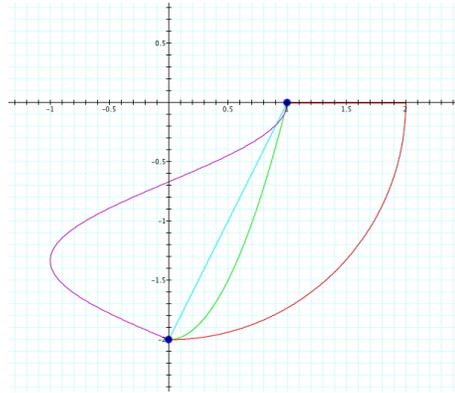
$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0, x}} \omega ,$$

ove $\gamma_{x_0, x}$ è un qualsivoglia cammino da x_0 a x in A .

⁽⁸⁶⁾E, se $\omega = df$, tale integrale è calcolabile come detto nella Proposizione 6.2.3(c).

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii): vedi Proposizione 6.2.3(c). (ii) \Rightarrow (iii): se γ è un circuito in A basato a x_0 , allora γ ha gli stessi estremi del cammino costante c_{x_0} e dunque $\int_{\gamma} \omega = \int_{c_{x_0}} \omega = 0$. (iii) \Rightarrow (ii): se γ e ψ sono due cammini in A con gli stessi estremi, la giunzione $\gamma \cdot \psi^{-1}$ (dove ψ^{-1} denota il cammino inverso di ψ) è un circuito: dunque $0 = \int_{\gamma \cdot \psi^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\psi^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\psi} \omega$ e perciò $\int_{\gamma} \omega = \int_{\psi} \omega$. Ci resta da mostrare che (ii) \Rightarrow (i), e anche l'ultima affermazione sulla primitiva. A tal fine, fissato un punto a piacere $x_0 \in A$ e definita $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tramite $f(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega$ ove $\gamma_{x_0,x}$ è un qualsivoglia cammino da x_0 a x in A (per ipotesi si tratta di una buona definizione) mostriamo che $df = \omega$: ovvero che, scritta in coordinate $\omega = \sum \omega_j dx_j$, si ha $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \omega_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Fissato un tale j , consideriamo un piccolo segmento in A (che è aperto) che incrementi solo la j -esima coordinata di x , ovvero da $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ a $x_{h,j} := (x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n)$ per un certo $h \neq 0$ (tale segmento è parametrizzato da $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$ dato da $\alpha(t) = (x_1, \dots, x_j + th, \dots, x_n)$): si ha dunque $f(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega$ e $f(x_{h,j}) = \int_{\gamma_{x_0,x} \cdot \alpha} \omega = \int_{\gamma_{x_0,x}} \omega + \int_{\alpha} \omega$, da cui $f(x_{h,j}) - f(x) = \int_{\alpha} \omega$. Si ricava pertanto $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{h,j}) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \omega_j(x_1, \dots, x_j + th, \dots, x_n) h dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \omega_j(x_1, \dots, x_j + th, \dots, x_n) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_j(x_1, \dots, x_j + \xi h, \dots, x_n)$ per un certo $\xi \in [0, 1]$ (grazie al teorema del valor medio, ricordando che ω_j è continua), e sempre per la continuità di ω_j quest'ultimo limite è $\omega_j(x)$, come si voleva. \square

Esercizio. Si considerino nel piano cartesiano le seguenti quattro curve da $(0, -2)$ a $(1, 0)$ (vedi Figura): (1) il segmento γ_1 ; (2) l'arco di parabola γ_2 di tipo $y = ux^2 + v$; (3) il cammino ottenuto congiungendo l'arco di circonferenza da $(0, -2)$ a $(2, 0)$ e il segmento orizzontale da $(2, 0)$ a $(1, 0)$; (4) l'arco di coseno del tipo $x = \cos(ay)$, per un opportuno $a > 0$, che interseca l'asse delle ordinate in un solo altro punto oltre $(0, -2)$. Dopo aver opportunamente parametrizzato le quattro curve, calcolare l'integrale su di esse delle forme differenziali lineari $\omega = y dx + (x + 2y) dy$ e $\theta = (x + y) dx + 3 dy$, commentando i risultati alla luce dei fatti dimostrati in precedenza.



Risoluzione. (1) Il segmento γ_1 è dato da $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma_1(t) = (1-t)(0, -2) + t(1, 0) = (t, 2(t-1))$. Si ha allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 (2(t-1) \cdot 1 + (t+4(t-1)) \cdot 2) dt = \int_0^1 (12t - 10) dt = -4$ e $\int_{\gamma_1} \theta = \int_0^1 ((t+2(t-1)) \cdot 1 + 3 \cdot 2) dt = \int_0^1 (3t + 4) dt = \frac{11}{2}$. (2) L'arco cercato è della parabola $y = 2x^2 - 2$ per $x \in [0, 1]$, dunque abbiamo $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma_2(t) = (t, 2(t^2 - 1))$. Si ha allora $\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 (2(t^2 - 1) \cdot 1 + (t + 4(t^2 - 1)) \cdot 4t) dt = \int_0^1 (16t^3 + 6t^2 - 16t - 2) dt = -4$ e $\int_{\gamma_2} \theta = \int_0^1 ((t+2(t^2-1)) \cdot 1 + 3 \cdot 4t) dt = \int_0^1 (2t^2 + 13t - 2) dt = \frac{31}{6}$. (3) L'arco di circonferenza da $(0, -2)$ a $(2, 0)$ è dato da $(2 \cos t, 2 \sin t)$ per $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, mentre il segmento orizzontale a ritroso da $(2, 0)$ a $(1, 0)$ è dato da $(1-t)(2, 0) + t(1, 0) = (2-t, 0)$ per $t \in [0, 1]$: dunque la parametrizzazione, ottenuta congiungendo i due cammini, è $\gamma_3 : [-\frac{\pi}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ descritta a tratti come appena detto. Si ha allora $\int_{\gamma_3} \omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 ((2 \sin t)(-2 \sin t) + (2 \cos t + 4 \sin t)(2 \cos t)) dt + \int_0^1 ((0)(-1) + (2-t)(0)) dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos 2t + \sin 2t) dt = -4$ e $\int_{\gamma_3} \theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 ((2 \cos t + 2 \sin t)(-2 \sin t) + (3)(2 \cos t)) dt + \int_0^1 ((2-t)(-1) + (3)(0)) dt =$

$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (3 \cos t - \sin 2t + \cos 2t - 1) dt + \int_0^1 (t-2) dt = \frac{13}{2} - \pi$. (4) Il passaggio per $(0, -2)$ impone che $a = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, \dots$, e la condizione richiesta dà $k = 1$, ovvero $a = \frac{3\pi}{4}$: dunque si ha $\gamma_4 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma_4(t) = (\cos(\frac{3\pi}{4}t), t)$. Si ha allora $\int_{\gamma_4} \omega = \int_{-2}^0 ((t)(-a \sin at) + (\cos at + 2t)(1)) dt = \int_{-2}^0 (2t - at \sin at + \cos at) dt = (t^2 + at \cos at)_{-2}^0 = -4$ e $\int_{\gamma_4} \theta = \int_{-2}^0 ((\cos at + t)(-a \sin at) + (3)(1)) dt = \int_{-2}^0 ((\cos at + t)(-a \sin at) + 3) dt = \frac{11}{2} + \frac{4}{3\pi}$. • Si nota che $\int_{\gamma_j} \omega = -4$ per ogni $j = 1, 2, 3, 4$. In effetti ω è una forma esatta: a tal fine notiamo che ω è chiusa (infatti $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 1$), e tra breve vedremo che nelle condizioni dell'esercizio la chiusura è anche sufficiente per l'esattezza. Le sue primitive sono $f(x, y) = y(x+y) + k$ per qualche $k \in \mathbb{R}$ (e, come previsto dalla Proposizione 6.2.3(c), si ha $f(1, 0) - f(0, -2) = (0) - (4) = -4$): che siano proprio queste lo possiamo vedere in due modi. (a) Dal sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \omega_1 = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \omega_2 = x + 2y$ si ricava $f(x, y) = y(x+y) + k$ per qualche $k \in \mathbb{R}$: infatti da $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ si ricava $f(x, y) = xy + \varphi(y)$ per qualche $\varphi(y)$ di classe C^1 , poi da $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$ si ricava $\varphi'(y) = 2y$, dunque $\varphi(y) = y^2 + k$. (b) Alternativamente, scelto $x_0 = (0, 0)$ come punto base e usando come $\gamma_{x_0, x}$ il segmento da $(0, 0)$ a (x, y) (ovvero (tx, ty) per $t \in [0, 1]$), si ha che $f(x, y) = \int_0^1 ((ty)(x) + (tx + 2ty)y) dt = (xy + y^2) \int_0^1 2t dt = y(x+y)$. • Invece i valori $\int_{\gamma_j} \theta$ sono diversi tra loro: questo non è una sorpresa, perché θ non è esatta (infatti non è nemmeno chiusa, essendo $\frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0$).

La Proposizione 6.2.4, pur rilevante, non dà ancora però un criterio di facile uso per verificare l'esattezza su un dato aperto A di una data forma differenziale lineare. Ci dà tuttavia modo di esibire un importante esempio di forma chiusa ma non esatta.

Esempio. La forma $\omega_{\text{arg}} = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ (detta *forma argomento*), definita sul piano bucatato $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, è chiusa (infatti $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$) ma non esatta in A : infatti, considerato in A per $n \in \mathbb{Z}^\times$ il circuito $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} = (\cos 2\pi n t, \sin 2\pi n t)$ con $t \in I$ che percorre n volte la circonferenza unitaria, si ha $\int_{\gamma_n} \omega = \int_0^1 (-\frac{\sin 2\pi n t}{1} (-2\pi n \sin 2\pi n t) + \frac{\cos 2\pi n t}{1} (2\pi n \cos 2\pi n t)) dt = 2\pi n \neq 0$.

Indaghiamo allora sotto quali condizioni la chiusura, condizione necessaria per l'esattezza, sia anche sufficiente. Ora, la chiusura è una condizione di tipo locale (l'annullarsi di un sistema di derivate), mentre l'esattezza è di tipo globale (l'esistenza di una primitiva su tutto il dominio): la possibilità di passare da proprietà locali a proprietà globali è spesso governata dal quadro geometrico in cui si opera, dunque non risulta sorprendente che tali condizioni siano essenzialmente di natura geometrica sul dominio A , come vediamo ora. Il primo passo è il seguente: a tal fine, ricordiamo —vedi pag. 89— che $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* rispetto a un suo punto x_0 se, per ogni $x \in E$, tutto il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in E (ad esempio i sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n sono stellati rispetto ad ogni loro punto, mentre \mathbb{R}^n meno un insieme discreto —ad esempio, con uno o più buchi— non è stellato).

Proposizione 6.2.5. (Lemma di Poincaré) *Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.*

Dimostrazione. A meno di facili adattamenti (esercizio), la dimostrazione può essere condotta nel caso di un aperto A del piano \mathbb{R}^2 stellato rispetto all'origine. Sia dunque $\omega = \alpha dx + \beta dy$ una forma chiusa (cioè $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$), e definiamo $f(x, y)$ integrando ω lungo il segmento da $(0, 0)$ a (x, y) (per ipotesi tutto dentro A): ovvero $f(x, y) = \int_0^1 (x \alpha(tx, ty) dx + y \beta(tx, ty)) dt$. È ora utile ricordare il seguente risultato, che si occupa di continuità e derivabilità sotto il segno di integrale:

Proposizione 6.2.6. *Siano I e J intervalli di \mathbb{R} , $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; si assuma che $f(x, t)$ sia continua, e che J sia compatto. Allora $F(x) = \int_J f(x, t) dt$ è continua, ovvero $\lim_{x \rightarrow c} \int_J f(x, t) dt = \int_J f(c, t) dt$ per ogni $c \in I$. Inoltre, se $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ esiste continua allora $F(x)$ è derivabile, e vale $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.*

Usando la Proposizione 6.2.6 si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(x \alpha(tx, ty) dx + y \beta(tx, ty)) dt = \int_0^1 (\alpha(tx, ty) + x t \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tx, ty) + y t \frac{\partial \beta}{\partial x}(tx, ty)) dt = \int_0^1 (\alpha(tx, ty) + x t \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tx, ty) + y t \frac{\partial \beta}{\partial y}(tx, ty)) dt = \int_0^1 (\alpha(tx, ty) + t \frac{d}{dt} \alpha(tx, ty)) dt = \int_0^1 \alpha(tx, ty) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} \alpha(tx, ty) dt =$ (integrando per parti) $\int_0^1 \alpha(tx, ty) dt + (t \alpha(tx, ty))|_0^1 - \int_0^1 \alpha(tx, ty) dt = \alpha(x, y)$. In modo simile si mostra che $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)$, dunque f è una primitiva di ω . \square

In realtà l'ipotesi geometrica può essere considerevolmente indebolita. Iniziamo notando una proprietà di invarianza per omotopia dell'integrale di forme chiuse.

Proposizione 6.2.7. *L'integrale di una forma chiusa è invariante per omotopie di cammini a estremi fissati, o per omotopie di circuiti (non necessariamente con punto base fissato).*

Dimostrazione. Anche in questo caso, a meno di facili adattamenti possiamo limitarci al caso di un aperto A del piano \mathbb{R}^2 . Siano dunque $\omega = \alpha dx + \beta dy$ una forma chiusa (cioè $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$), e $\gamma, \psi : [a, b] \rightarrow A$ due cammini in A che possono essere: (1) o con gli stessi estremi, e omotopi ad estremi fissati; (2) o circuiti omotopi tra loro non necessariamente con punto base fissato. Sia allora $h = (h_1, h_2) : [a, b] \times I \rightarrow A$ un'omotopia tra $\gamma = h_0$ e $\psi = h_1$ con le caratteristiche richieste in ciascuno dei due casi (ovvero: per (1), con $h_\lambda(a)$ e $h_\lambda(b)$ indipendenti da λ ; e per (2), con $h_\lambda(a) = h_\lambda(b)$ per ogni λ): detto $\mathcal{I}_\lambda = \int_{h_\lambda} \omega = \int_a^b (\alpha(h_1, h_2) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \beta(h_1, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t}) dt$ (ove per brevità non scriviamo che le componenti di h e le loro derivate sono tutte calcolate in (t, λ)), dobbiamo mostrare che $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\lambda \equiv 0$, cioè che \mathcal{I}_λ non dipende da λ . Useremo i seguenti due fatti tecnici, che non dimostriamo: (a) anche se un cammino è di classe \mathcal{C}^1 solo a tratti, ne esiste un altro di classe \mathcal{C}^1 a lui omotopo in A e con lo stesso integrale, dunque non è restrittivo supporre fin da subito che γ e ψ siano di classe \mathcal{C}^1 ; (b) tra le varie omotopie $h(t, \lambda)$ che deformano tra loro due cammini di classe \mathcal{C}^1 ne esiste qualcuna che ha le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 h_j}{\partial t \partial \lambda}$ continue. Sempre per la Proposizione 6.2.6 si ha allora $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\lambda = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\alpha(h) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \beta(h) \frac{\partial h_2}{\partial t}) dt = \int_a^b \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(h) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(h) \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}(h) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \beta}{\partial y}(h) \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial h_2}{\partial t} \right\} dt + \int_a^b (\alpha(h) \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial \lambda} + \beta(h) \frac{\partial^2 h_2}{\partial t \partial \lambda}) dt$. Svolgendo per parti l'ultimo integrale si ottiene $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\lambda = \int_a^b \{ \dots \} dt + (\alpha(h) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda})|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(h) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(h) \frac{\partial h_2}{\partial t} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} dt + (\beta(h) \frac{\partial h_2}{\partial \lambda})|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}(h) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial y}(h) \frac{\partial h_2}{\partial t} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} dt$. Ora, la parte finita $(\alpha(h) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda})|_a^b$ è nulla in entrambi i casi (nel caso (1) le funzioni $h_1(a, \lambda)$ e $h_1(b, \lambda)$ sono costanti in λ ; nel caso (2), visto che gli stadi intermedi sono circuiti si ha $\alpha(h(a, \lambda)) = \alpha(h(b, \lambda))$ e $h_1(a, \lambda) = h_1(b, \lambda)$ come funzioni di λ); similmente è nulla anche la parte finita $(\beta(h) \frac{\partial h_2}{\partial \lambda})|_a^b$. Perciò, radunando tutto sotto un unico integrale e eliminando i termini che si elidono si ottiene $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\lambda = \int_a^b \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \lambda} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial \beta}{\partial x} \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} \frac{\partial h_2}{\partial t} \right) \right\} dt$, ma l'integrando è identicamente nullo perché per ipotesi $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$. Perciò $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{I}_\lambda = 0$. \square

Una conseguenza immediata è la seguente (ricordiamo —vedi pag. 89— che un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dirà *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se ogni circuito in E è nullomotopo —cioè, omotopo a un circuito costante— in E , ovvero se ogni circuito in E può essere contratto ad un punto in modo continuo e senza mai uscire da E):

Corollario 6.2.8. *Una forma chiusa su un aperto semplicemente connesso è esatta.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.2.4 dobbiamo mostrare che se γ è un circuito in A allora $\int_\gamma \omega = 0$; ma se il dominio è semplicemente connesso sappiamo che ogni circuito in A è nullomotopo, dunque il risultato segue dalla Proposizione 6.2.7. \square

Se il dominio non è semplicemente connesso, per verificare se una data forma chiusa è anche esatta può essere utile il seguente criterio (applicabile ad esempio nel piano privato di una famiglia finita di punti, o allo spazio tridimensionale privato di una retta), che dice che basta controllare che, per ogni singolarità del dominio, la forma abbia integrale nullo su un circuito semplice che gira attorno alla singolarità:

Proposizione 6.2.9. *Sia A non semplicemente connesso, e si consideri una famiglia massimale di circuiti semplici in A non nullomotopi e non omotopi tra loro.⁽⁸⁷⁾ Se una forma chiusa ha integrale nullo lungo ogni circuito di questa famiglia, allora essa è esatta.*

Dimostrazione. Idea: un qualsiasi circuito in A sarà o nullomotopo, oppure omotopo a uno dei circuiti della famiglia prescelta, oppure omotopo a giunzioni di elementi della famiglia: dunque per la Proposizione 6.2.7 l'integrale della forma lungo esso sarà nullo. A questo punto basta ricordare la Proposizione 6.2.4. \square

Esempi. (1) Le forme $\omega = (y - 2x) dx + (x + 1) dy$ e $\psi = 2 dx - x dy$ sono definite su tutto il piano \mathbb{R}^2 : poiché ω è chiusa e ψ no, e poiché il piano è semplicemente connesso, si ha che ω è esatta e ψ no (come già visto a mano a pag. 91). **(2)** Abbiamo visto che la forma argomento $\omega_{\text{arg}} = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ è chiusa ma non esatta nel piano bucato $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ che, non a caso, non è semplicemente connesso. Tuttavia, rimuovendo da A ad esempio il semiasse negativo $\{(x, 0) : x \leq 0\}$ si ottiene un insieme semplicemente connesso, su cui ω_{arg} deve ammettere primitiva: e tale primitiva è proprio l'argomento principale che abbiamo incontrato a pagina 18 (ad esempio $\arctg \frac{y}{x}$ sul semipiano $x > 0$, o $2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, il piano privato del semiasse negativo delle x). Si dimostra anche che ω_{arg} è “essenzialmente l'unica” forma C^∞ chiusa ma non esatta su A , nel senso che tutte le altre sono suoi multipli scalari più un eventuale addendo esatto, ovvero del tipo $k\omega_{\text{arg}} + d\phi$ ove $k \in \mathbb{R}$ e $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^∞ . **(3)** La forma $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ è chiusa, come si verifica facilmente (infatti $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x^2+y^2}) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$); tuttavia il suo dominio è il piano bucato $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, che non è semplicemente connesso. Per verificare se ω è esatta basterà allora scegliere una curva semplice che gira attorno all'origine e vedere se l'integrale lungo essa è nullo: e la scelta più ovvia è la circonferenza unitaria $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ con $t \in I$. Si ha allora $\int_\gamma \omega = \int_0^1 (\frac{\cos 2\pi t}{1} (-2\pi \sin 2\pi t) + \frac{\sin 2\pi t}{1} (2\pi \cos 2\pi t)) dt = 0$. Dunque ω è esatta (e —come si sarebbe potuto vedere anche ad occhio evitando dunque la verifica dell'esattezza— una sua primitiva su tutto A è la funzione $f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$).

Quanto detto può essere agevolmente adattato nel linguaggio dei campi vettoriali. Notiamo in particolare quanto segue.

- La nozione per i campi che corrisponde a quella di forma chiusa è quella di *campo irrotazionale*, in cui le derivate parziali incrociate delle componenti sono uguali. Campo irrotazionale
 Nel caso $n = 2$, l'irrotazionalità di un campo $F = (F_x, F_y)$ equivale a $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.
 Nel caso $n = 3$, l'irrotazionalità di un campo $F = (F_x, F_y, F_z)$ equivale alla condizione

⁽⁸⁷⁾ Si ricordi che una curva parametrica si dice “semplice” se è iniettiva. Con “massimale” si intende poi che una tale famiglia non può essere ulteriormente allargata con l'aggiunta di altri elementi preservando il fatto che due qualsiasi elementi rimangano non nullomotopi e non omotopi tra loro: in sostanza, “per ogni singolarità del dominio si sceglie un circuito semplice che le giri attorno una volta” (spesso la scelta sarà quella più comoda, tipicamente una circonferenza).

dell'annullarsi del rotore $\nabla \times F$ (denotato a volte anche con $\text{rot } F$)⁽⁸⁸⁾, che è il campo definito dal determinante formale

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} e_x & \partial_x & F_x \\ e_y & \partial_y & F_y \\ e_z & \partial_z & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Risolvere i seguenti problemi su irrotazionalità e conservatività dei campi vettoriali.

- (1) Il campo $F(x, y) = (\frac{3x-y-1}{x^2+(y+1)^2}, \frac{x+3y+3}{x^2+(y+1)^2})$ è conservativo nel suo dominio?
 (2) Dire se esiste una funzione $\varphi(x)$ tale che il campo

$$F(x, y, z) = \left(yz \varphi(x) + \frac{1}{x-2z} - 3x, z \varphi(x), y \varphi(x) - \frac{2}{x-2z} \right)$$

sia irrotazionale. In tal caso, F è conservativo?

Risoluzione. (1) F è irrotazionale, perché $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{3x-y-1}{x^2+(y+1)^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x+3y+3}{x^2+(y+1)^2}) = \frac{-x^2-6xy+y^2+2y+1}{(x^2+(y+1)^2)^2}$; tuttavia il dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$ non è semplicemente connesso, dunque non si può concludere che F sia conservativo. Proviamo allora a integrarlo lungo un circuito semplice che gira attorno al punto $(0, -1)$: la scelta più ovvia è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, -1 + \sin 2\pi t)$ con $t \in I$, e risulta $\int_{\gamma} F \cdot dx = \int_0^1 (\frac{3 \cos 2\pi t - \sin 2\pi t}{1} (-2\pi \sin 2\pi t) + \frac{\cos 2\pi t - 3 \sin 2\pi t}{1} (2\pi \cos 2\pi t)) dt = 2\pi \int_0^1 (1 - 3 \sin 4\pi t) dt = 2\pi \neq 0$. Dunque il campo non è conservativo.⁽⁸⁹⁾ (2) Il rotore $\nabla \times F = (0, y(\varphi(x) - \varphi'(x)), z(\varphi(x) - \varphi'(x)))$ si annulla se e solo se $\varphi'(x) = \varphi(x)$, ovvero $\varphi(x) = k e^x$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Poiché il dominio di F è dato dall'unione disgiunta dei due semispazi $x \geq 2z$, che sono semplicemente connessi, su ciascuno di essi F sarà conservativo: troviamo una primitiva $f(x, y, z)$ ad esempio su $x > 2z$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = kz e^x$ si ricava $f(x, y, z) = kyz e^x + u(x, z)$ per un'opportuna funzione u ; da $\frac{\partial f}{\partial z} = ky e^x + \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) = ky e^x - \frac{2}{x-2z}$ si ha poi $\frac{\partial u}{\partial z}(x, z) = \log(x-2z) + v(x)$ per un'opportuna funzione v ; infine, da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(kyz e^x + \log(x-2z) + v(x)) = kyz e^x + \frac{1}{x-2z} + v'(x) = kyz e^x + \frac{1}{x-2z} - 3x$ si ricava $v'(x) = -3x$, da cui $v(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Le primitive di ω su $x > 2z$ sono dunque $f(x, y, z) = kyz e^x + \log(x-2z) - \frac{3}{2}x^2 + c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

- La nozione per i campi che corrisponde a quella di integrale di una forma lungo un cammino è quella di *integrale di linea*: dato un campo $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ e un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, esso è dato da

Integrale di linea

$$\int_{\gamma} F \cdot dx := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) \right) dt.$$

In particolare la Proposizione 6.2.3(c) (ovvero $\int_{\gamma} \nabla f \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$), detta anche *Teorema Fondamentale del Calcolo in più variabili*, quando applicata ad

⁽⁸⁸⁾in inglese *curl* (ricciolo).

⁽⁸⁹⁾Con un po' di occhio si poteva notarlo anche subito, perché $F(x, y) = (-\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}, \frac{x}{x^2+(y+1)^2}) - 3(\frac{x}{x^2+(y+1)^2}, \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2})$: il primo campo è la solita forma argomento ω_{arg} traslata in $(0, -1)$, e il secondo è il gradiente di $\frac{1}{2} \log(x^2 + (y+1)^2)$.

un campo di forze conservativo con energia potenziale E (ovvero il campo è $-\nabla E$), mostra che il lavoro di tale campo compiuto durante uno spostamento da un punto P a un punto Q non dipende dal percorso seguito ma solo dai punti P e Q , e vale $E(P) - E(Q)$.

Esempio. In un campo coulombiano generato nel vuoto da una carica Q posta nell'origine, il lavoro compiuto dal campo durante lo spostamento di una carica di prova q da un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ è pari a $E(P_0) - E(P_1) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$ (ove $r_j = \|(x_j, y_j, z_j)\| = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}}$ è la distanza dall'origine di P_j per $j = 0, 1$; e ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto), qualunque sia la traiettoria seguita dalla carica di prova per andare da P_0 a P_1 .

6.3 Funzioni olomorfe II: formula di Cauchy, residui e calcolo integrale

In questo capitolo abbiamo finora considerato funzioni e forme differenziali lineari su aperti di \mathbb{R}^n a valori *reali*; nulla però ci avrebbe impedito di considerare, senza particolari difficoltà aggiuntive, funzioni e forme differenziali lineari su aperti di \mathbb{R}^n a valori *complessi*. Dato un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ di classe \mathcal{C}^1 e un punto $x_0 \in A$, il differenziale di f in x_0 sarà la funzione

$$df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \pi_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \pi_n,$$

ove le proiezioni π_i sono ora considerate direttamente a valori in \mathbb{C} , e sono dunque funzioni \mathbb{R} -lineari di \mathbb{R}^n in \mathbb{C} . L'insieme $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ di tali funzioni⁽⁹⁰⁾ ha una naturale struttura di \mathbb{C} -spazio vettoriale, euclideamente identificato a \mathbb{C}^n :

Proposizione 6.3.1. *La funzione $(\cdot)^* : \mathbb{C}^n \rightarrow L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definita associando a $w_0 \in \mathbb{C}^n$ la funzione $w_0^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ data da $w_0^*(v) = v \cdot w_0$ è un isomorfismo di \mathbb{C} -spazi vettoriali.*

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione segue le linee di quella della Proposizione 6.2.1. Quanto alla suriettività, ovvero che per ogni funzione \mathbb{R} -lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ esiste un (unico) vettore $w \in \mathbb{C}^n$ tale che $\varphi(v) = v \cdot w$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, notiamo che $\operatorname{Re} \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono \mathbb{R} -lineari (ovvero covettori di $(\mathbb{R}^n)^*$), dunque per la Proposizione 6.2.1 esistono e sono unici $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $(\operatorname{Re} \varphi)(v) = v \cdot w_1$ e $(\operatorname{Im} \varphi)(v) = v \cdot w_2$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$: posto $w = w_1 + iw_2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha $\varphi(v) = (\operatorname{Re} \varphi)(v) + i(\operatorname{Im} \varphi)(v) = v \cdot w_1 + i(v \cdot w_2) = v \cdot (w_1 + iw_2) = v \cdot w$. \square

Come nel caso reale, le proiezioni π_1, \dots, π_n (intese a valori in \mathbb{C}) sono una base di $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ come \mathbb{C} -spazio vettoriale, e il vettore-colonna di \mathbb{C}^n che corrisponde al differenziale df_{x_0} è il gradiente $\nabla f(x_0)$. Facendo variare il punto di A si ottiene il differenziale df :

$$df : A \rightarrow L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

⁽⁹⁰⁾In precedenza, per le funzioni reali avevamo considerato lo spazio $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ delle funzioni \mathbb{R} -lineari di \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , ovvero il duale $(\mathbb{R}^n)^*$.

ove $dx_j := d\pi_j$. Più in generale, una forma differenziale lineare di classe \mathcal{C}^k a valori complessi sarà data da

$$\omega : A \rightarrow L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad \omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n,$$

ove le $a_j : A \rightarrow \mathbb{C}$ sono funzioni di classe \mathcal{C}^k ; le nozioni di forma *esatta* e *chiusa* sono le stesse del caso reale, con risultati analoghi (tra essi, il fatto che una forma chiusa su un semplicemente connesso è esatta).

Concentriamoci d'ora in poi sul caso $n = 2$, nel quale $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ si identifica naturalmente con $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (le funzioni $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ che sono \mathbb{R} -lineari), pensando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ come il numero complesso $z = x + iy$. Come \mathbb{C} -spazio vettoriale tale spazio è generato, oltre che —come visto— dalle proiezioni $\pi_1(z) = x$ e $\pi_2(z) = y$, anche dalle funzioni $\text{id}(z) = z$ (identità) e $c(z) = \bar{z}$ (coniugazione). Considerando i differenziali (reali) di queste ultime funzioni, ovvero $dz = dx + i dy$ e $d\bar{z} = dx - i dy$, e introducendo gli operatori di derivazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) && \text{(derivata olomorfa)} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) && \text{(derivata antiolomorfa, o operatore di Cauchy-Riemann),} \end{aligned}$$

il differenziale di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ (ove A è un aperto del piano complesso) è esprimibile in due modi equivalenti come

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Proposizione 6.3.2. *Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ di classe \mathcal{C}^1 è olomorfa in A se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in A ,⁽⁹¹⁾ e in tal caso la derivata complessa vale $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ di classe \mathcal{C}^1 sia olomorfa in A se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in A è scritto nella Proposizione 1.2.2. La dimostrazione della stessa proposizione mostra che $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$; ne segue anche che $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (f' - i(i f')) = f'$. \square

Più in generale, anche una forma differenziale lineare si può esprimere in due modi come

$$\omega = a dx + b dy = \alpha dz + \beta d\bar{z},$$

ove $(a, b) = (\alpha + \beta, i(\alpha - \beta))$ o equivalentemente $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}(a - ib), \frac{1}{2}(a + ib))$; ed è immediato verificare che la condizione di chiusura $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ si riformula come

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

L'integrale di ω lungo un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è a sua volta esprimibile nei due modi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (a(\gamma(t))\gamma'_1(t) + b(\gamma(t))\gamma'_2(t)) dt = \int_a^b (\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) + \beta(\gamma(t))\bar{\gamma}'(t)) dt.$$

⁽⁹¹⁾Questo giustifica il nome di *operatore di Cauchy-Riemann* dato a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Se ω è chiusa sappiamo (Proposizione 6.2.7) che tale integrale è invariante per omotopie di cammini a estremi fissati, o di circuiti; se inoltre A è semplicemente connesso allora ω è esatta. Ne ricaviamo che:

Proposizione 6.3.3. *Si assuma che $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ sia olomorfa.*

- (a) *La forma $f(z) dz$ ha integrale invariante per omotopie di cammini a estremi fissati o di circuiti.*
- (b) *f ammette primitive (ovvero, funzioni olomorfe $F(z)$ tali che $F' = f$) su ogni aperto semplicemente connesso U contenuto in A , definite a meno di una costante additiva complessa. Ad esempio, fissato $z_0 \in U$, una primitiva è data da $\int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta$, ove $z \in U$ e $\gamma_{z_0, z}$ è un qualsiasi cammino da z_0 a z .*
- (c) *Se F è primitiva di f su un aperto $U \subset A$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ è un cammino, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. In particolare, se γ è un circuito allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.*

Dimostrazione. Il fatto che $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa equivale a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ in A , ovvero $\omega = f dz$ è chiusa, perciò con integrale invariante per omotopie di cammini a estremi fissati o di circuiti, ed esatta su ogni aperto semplicemente connesso U contenuto in A . Detta $F(z)$ una primitiva di ω su tale aperto (calcolabile, in base alla Proposizione 6.2.4, come descritto nell'enunciato), la condizione $dF = \omega$ significa $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = f dz = f dx + i f dy$ su tutto U , il che ci dice che $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f + i(if) = 0$ in U (dunque F è olomorfa) e la derivata complessa risulta $F'(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$. \square

Esempio. Le funzioni $f(z) = \frac{1}{z}$ e $g(z) = \frac{1}{z^2}$ sono olomorfe in tutto $A = \mathbb{C}^\times$, dunque per la Proposizione 6.3.3 esse ammettono primitiva perlomeno su ogni aperto semplicemente connesso contenuto in A . In effetti, come noto, f ammette primitiva su \mathbb{C} privato di una qualsiasi semiretta uscente da 0 (è una delle determinazioni di $\log z$), mentre g la ammette addirittura su tutto A (è la funzione $-\frac{1}{z}$).

Notiamo anche il seguente utile risultato di derivazione sotto il segno d'integrale:

Proposizione 6.3.4. *Si supponga che la funzione $f(z, \zeta)$ sia di classe \mathcal{C}^1 in (z, ζ) , e sia olomorfa in z . Dato un cammino γ nello spazio delle ζ , si definisca $F(z) = \int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta$. Allora $F(z)$ è olomorfa, e vale $F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta$.*

Dimostrazione. Posto $z = x + iy$, per i teoremi di derivabilità reale sotto il segno d'integrale si ha $\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(z, \zeta) d\zeta$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial y}(z, \zeta) d\zeta$, da cui $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \zeta) d\zeta = 0$, dunque F è olomorfa; in tal caso si ha poi $F'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta$. \square

Definiamo ora l'*indice* di un circuito rispetto a un punto non appartenente ad esso. Dato un circuito $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ si denoti con $\gamma^* = \gamma([a, b])$ il suo sostegno; l'indice di γ rispetto a un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ è

Indice

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \quad \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt \right).$$

Proposizione 6.3.5. *L'indice è un numero intero, costante su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$; esso è nullo sulla componente connessa illimitata.*

Dimostrazione. Posto $\psi(t) := \exp(\int_a^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)-z_0} d\tau)$ si ha $\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\psi(t)$, ma ciò implica che $(\frac{\psi(t)}{\gamma(t)-z_0})' = \frac{\psi'(t)(\gamma(t)-z_0) - \psi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z_0)^2} \equiv 0$, ovvero che $\frac{\psi(t)}{\gamma(t)-z_0}$ è costante per $t \in [a, b]$. In particolare vale $\frac{\psi(a)}{\gamma(a)-z_0} = \frac{\psi(b)}{\gamma(b)-z_0}$, che essendo $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\psi(a) = 1$ implica $\psi(b) = 1$: ma questo dice che $\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} dt = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero che l'indice è un numero intero. Il fatto che l'indice sia costante su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ discende allora dal fatto che $\text{Ind}_\gamma(z)$ è una funzione continua di z . In particolare, sia $R > 0$ tale che $\gamma^* \subset B(0, R)$: preso $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| > R$ (certamente z_0 starà nella componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$) la funzione $\frac{1}{z-z_0}$ è olomorfa su tutta la palla aperta $B(0, R)$, e la conclusione segue dalla Proposizione 6.3.3(c). \square

Il significato geometrico dell'indice è il numero di giri, contati col segno, che il circuito compie attorno al punto: ciò può essere visualizzato facilmente calcolando il caso in cui $z = 0$ e il circuito sia $\gamma(t) = r e^{2\pi i k t}$ (ove $k \in \mathbb{Z}$ e $t \in [0, 1]$: è la circonferenza di raggio $r > 0$ che compie k giri attorno a 0), il cui indice risulta $\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i k r e^{2\pi i k t}}{r e^{2\pi i k t} - 0} dt = k$.

Teorema 6.3.6. (Formula integrale di Cauchy) *Siano A un aperto di \mathbb{C} , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione olomorfa, γ un circuito in A . Allora per ogni $z \in A \setminus \gamma^*$ vale*

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dimostrazione. Fissato $z \in A$, la funzione $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ definita come $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ per $\zeta \neq z$ e come $g(z) = f'(z)$ è olomorfa in A (ciò discende direttamente dalla definizione di derivabilità di f), dunque $\int_\gamma g(\zeta) d\zeta = 0$. Notato ciò, si ha $f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - g(\zeta)) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, come si voleva. \square

In particolare, sia $U \subset A$ un aperto con bordo regolare parametrizzato positivamente (ovvero in senso antiorario) come curva semplice da γ . Allora, poiché per ogni $z \in U$ si ha $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$, dal Teorema 6.3.6 discende che

$$(6.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta :$$

ciò mostra come i valori di f in U possano essere calcolati con un integrale “a distanza” di f sul bordo di U . In realtà, grazie alla Proposizione 6.3.4 questa formula mostra anche che $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} (\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta$, e si può continuare a derivare in senso complesso ottenendo una formula “a distanza” anche per le derivate complesse successive:

$$(6.2) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Ma la conseguenza più importante della formula integrale di Cauchy è senz'altro la seguente.

Corollario 6.3.7. *Una funzione olomorfa è anche analitica. Più precisamente: se $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, $\overline{B(z_0, r)}$ è una palla chiusa contenuta in A e*

γ parametrizza il bordo della palla come curva semplice⁽⁹²⁾, per ogni $z \in B(z_0, r)$ vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Dimostrazione. Se $z \in B(z_0, r)$ e $\zeta \in \partial B(z_0, r)$ si ha $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$, dunque usando il Teorema 6.3.6 si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) d\zeta.$$

In realtà la serie di funzioni all'ultimo membro converge totalmente, in quanto, posto $K = \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial B(z_0, r)\}$, vale $|f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}| \leq \frac{K}{r^{n+1}} |z - z_0|^n = \frac{K}{r} \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n$, e la serie avente come termine generale $\frac{K}{r} \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n$ converge perché $\left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1$: questo ci permette di integrare termine a termine (scambiando la somma con l'integrale, come permette la Proposizione A.1.8(b) applicata alla successione delle ridotte della serie in base alla Proposizione A.1.11), ottenendo quanto enunciato. \square

Pertanto, a una funzione olomorfa si può applicare quanto detto nella Proposizione 1.3.5: in particolare essa è di classe reale \mathcal{C}^∞ . Elenchiamo altre conseguenze rilevanti:

Corollario 6.3.8.

- (1) (Fibre di una funzione olomorfa) *Una funzione olomorfa non costante su un aperto connesso ha fibre discrete. In particolare, due funzioni olomorfe su un connesso che coincidono su un insieme non discreto di punti sono necessariamente uguali.*
- (2) (Principio del massimo) *Sia U un aperto, e f una funzione olomorfa all'intorno di \bar{U} . Allora il massimo di $|f|$ su \bar{U} è raggiunto sul bordo ∂U .*
- (3) (Disuguaglianze di Cauchy) *Sia f olomorfa all'intorno di una palla chiusa $\overline{B(z_0, r)}$, e sia $M = \max\{|f(z)| : z \in \overline{B(z_0, r)}\}$.⁽⁹³⁾ Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

- (4) (Teorema di Liouville) *Se f è una funzione intera tale che $|f(z)| \leq c(1 + |z|^m)$ per certi $c > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, allora f è un polinomio di grado al più m .
In particolare, una funzione intera limitata è necessariamente costante.*
- (5) (Teorema Fondamentale dell'Algebra) *Ogni polinomio complesso di grado strettamente positivo ammette almeno uno zero in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. (1) Siano $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $\alpha \in f(\mathbb{C})$ e $z_0 \in A$ tale che $f(z_0) = \alpha$. Se $r > 0$ è tale che $B(z_0, r) \subset A$, in $B(z_0, r)$ per analiticità vale $f(z) - \alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Se tutti gli a_n sono nulli, allora f è la costante α . Altrimenti, detto m il minimo intero tale che $a_m \neq 0$, raccogliendo $(z - z_0)^m$ si ha $f(z) - \alpha = (z - z_0)^m g(z)$ ove $g(z_0) = a_m \neq 0$: ma allora per continuità esiste tutto un intorno di z_0 in cui $g(z) \neq 0$, dunque in tale intorno si ha $f(z) \neq \alpha$ per ogni $z \neq z_0$. In altre parole, z_0 è un punto isolato della fibra $f^{-1}(\alpha)$. (2) Supponiamo che il massimo M di $|f|$ sia raggiunto in un punto interno $z_0 = U$, e sia $r > 0$ tale che $\overline{B(z_0, r)} \subset U$: poiché $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} f(\zeta) d\zeta$ ricaviamo che

⁽⁹²⁾ Ad esempio $\gamma(t) = z_0 + r e^{2\pi i t}$ per $t \in [0, 1]$.

⁽⁹³⁾ In realtà, grazie al Principio del massimo (2), M è raggiunto sulla circonferenza $|z - z_0| = r$.

$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)| d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-z_0|=r} M d\zeta = \frac{1}{2\pi} M 2\pi = M$, il che implica che $|f| = M$ su tutta la circonferenza $|\zeta - z_0| = r$ e, vista la genericità di r , anche che $|f| = M$ su tutto un intorno di z_0 . Ma allora per (1) f è costante in tutta la componente connessa di z_0 . (3) Da (6.2) si ricava $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} d\zeta \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_{\gamma} d\zeta = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!}{r^n} M$. (4) Una funzione intera si esprime come $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$; se $|f(z)| \leq c(1+|z|^m)$, per $n > m$ da (4) si ha $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{c n! (1+r^m)}{r^n}$ per ogni $r > 0$, e poiché il secondo membro tende a zero quanto $r \rightarrow +\infty$ si conclude che $f^{(n)}(0) = 0$. Ma allora $f(z) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, ovvero $f(z)$ è un polinomio di grado al più m . (5) Sia $P(z)$ un polinomio di grado strettamente positivo che non ammetta alcuno zero: allora $f(z) = 1/P(z)$ è una funzione intera. Inoltre, poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$ (infatti $|P(z)| \sim_{\infty} |z|^d$ ove $d > 1$ è il grado di P), f è necessariamente limitata, dunque costante in base a (4). Ma allora anche il polinomio P è costante, il che è assurdo perché ha grado strettamente positivo. \square

Dal Corollario 6.3.8(1) discende che gli zeri di una funzione olomorfa non costante sono isolati; se $f(z_0) = 0$ si dice che z_0 è uno *zero per f di ordine*⁽⁹⁴⁾ m (ove $m \in \mathbb{N}$) se nello sviluppo in serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ si ha $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$ (visto chi sono i coefficienti a_n , ciò equivale a $f(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$).

Zero

Occupiamoci ora di una situazione più generale, in cui una funzione f sia olomorfa in un intorno *bucato* di un certo punto z_0 , cioè in $A \setminus \{z_0\}$ ove A è un aperto di \mathbb{C} contenente z_0 . Questa è la situazione in cui z_0 potrebbe essere un *punto singolare isolato*, o *singularità isolata*, per f : l'esempio più semplice è quello di $f(z) = \frac{1}{z}$, olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_0 = 0\}$. Ha ancora senso chiedersi se, all'intorno (bucato) di z_0 , $f(z)$ sia la somma di una qualche serie di potenze centrata in z_0 ? Per $\frac{1}{z}$ la risposta è sì, ammesso che si considerino anche potenze di z ad esponente negativo: infatti vale $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ con $a_{-1} = 1$ e $a_n = 0$ per ogni $n \neq -1$. Questa è in realtà anche la situazione generale:

Teorema 6.3.9. (Serie di Laurent) *Se $f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, $\overline{B(z_0, r)}$ è una palla chiusa contenuta in A e γ_r parametrizza il bordo della palla come curva semplice, per ogni $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ vale*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dimostrazione. Fissiamo $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, e sia $0 < s < |z|$. La funzione $g(\zeta)$ definita come $g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ (per $\zeta \neq z$) e come $g(z) = f'(z)$ è olomorfa su tutto un intorno aperto della corona circolare chiusa $s \leq |\zeta| \leq r$, e pertanto, denotando con γ_r e γ_s le consuete parametrizzazioni delle circonferenze di raggio r e s , per la Proposizione 6.3.3(a) vale $\int_{\gamma_r} g(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_s} g(\zeta) d\zeta$, ovvero $\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$. Dividendo per $2\pi i$ e separando si ricava $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \text{Ind}_{\gamma_r}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \text{Ind}_{\gamma_s}(z)$: ora, poiché z sta nella corona circolare si ha $\text{Ind}_{\gamma_r}(z) = 1$ e $\text{Ind}_{\gamma_s}(z) = 0$, dunque $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$. Nel primo addendo si ha $|\zeta| = r$ e dunque $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$, perciò $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$; invece nel secondo si ha $|\zeta| = s$ e dunque $|\frac{z-z_0}{z-z_0}| < 1$, perciò $\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0) - (\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = (\text{posto } n = -k - 1) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$. D'ora in poi le considerazioni sono le stesse della dimostrazione del Corollario 6.3.7, e si conclude. \square

⁽⁹⁴⁾oppure *molteplicità*.

Dunque, una funzione $f(z)$ olomorfa all'intorno bucato di una singolarità isolata z_0 si esprime come somma $f(z) = f_{z_0}^{\text{reg}}(z) + f_{z_0}^{\text{sing}}(z)$ di due serie di potenze

$$(6.3) \quad f_{z_0}^{\text{reg}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad f_{z_0}^{\text{sing}}(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m},$$

dette rispettivamente *parte regolare* e *parte singolare* di f in z_0 : la prima è a tutti gli effetti una funzione olomorfa nel punto z_0 , che viene invece classificato in base alla struttura della seconda. La singolarità z_0 si dirà:

Parte regolare
Parte singolare

- *singolarità eliminabile* se $f_{z_0}^{\text{sing}}(z) \equiv 0$, ovvero se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$;
- *polo di ordine m* (ove $m \in \mathbb{N}$)⁽⁹⁵⁾ se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$;
- *singolarità essenziale* negli altri casi, ovvero se $a_n \neq 0$ per infiniti $n < 0$.

Singolarità
eliminabile

Polo

Singolarità
essenziale

Esempi. Il punto $z_0 = 0$ è singolarità eliminabile per $f(z) = \frac{1-e^{z^2}}{z}$ (infatti $f(z) = \frac{1}{z}(1 - (1 + z^2 + \frac{1}{4}z^4 + \dots)) = -z - \frac{1}{4}z^3 + \dots$, con $f_0^{\text{reg}}(z) = f(z)$ e $f_0^{\text{sing}}(z) = 0$); è polo di ordine 3 per $g(z) = \frac{3z^5-1}{z^3}$ (infatti $g(z) = 3z^2 - \frac{1}{z^3}$, con $g_0^{\text{reg}}(z) = 3z^2$ e $g_0^{\text{sing}}(z) = -\frac{1}{z^3}$); ed è singolarità essenziale per $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$ (infatti $h(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \dots$, con $h_0^{\text{reg}}(z) = 1$ e $h_0^{\text{sing}}(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \dots$).

Occupiamoci ora di come identificare di che tipo è una singolarità isolata. Partiamo con alcuni classici lemmi che ci saranno utili anche più tardi.

Lemma 6.3.10. *Dati $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, si abbia il settore $A = \{z \in \mathbb{C}^\times : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$ e una funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Sia poi γ_r l'arco della circonferenza di raggio $r > 0$ e centro 0 contenuto in A .*

- (a) (L. del cerchio grande) *Se $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} z f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$, allora $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\lambda$.*
- (b) (L. del cerchio piccolo) *Se $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} z f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$, vale $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\lambda$.*
- (c) (Lemma di Jordan) *Se $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} f(z) = 0$ e $u > 0$, allora $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iuz} dz = 0$.*

Dimostrazione. (a) Posto $M_r = \max_{|z|=r} |z f(z) - \lambda|$ si ha per ipotesi $\lim_{r \rightarrow +\infty} M_r = 0$. D'altra parte vale $\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_r} (f(z) - \frac{\lambda}{z}) dz + \int_{\gamma_r} \frac{\lambda}{z} dz = \int_{\gamma_r} (f(z) - \frac{\lambda}{z}) dz + i(\theta_2 - \theta_1)\lambda$, da cui $|\int_{\gamma_r} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\lambda| = |\int_{\gamma_r} (f(z) - \frac{\lambda}{z}) dz| = |\int_{\gamma_r} (\frac{z f(z) - \lambda}{z}) dz| \leq r(\theta_2 - \theta_1) \max_{|z|=r} \frac{|z f(z) - \lambda|}{|z|} = r(\theta_2 - \theta_1) \frac{M_r}{r} = M_r(\theta_2 - \theta_1)$, e passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ si ottiene quanto voluto. (b) Stessa dimostrazione, stavolta con $r \rightarrow 0^+$. (c) Iniziamo notando che, posto $\theta = \arg z$, si ha $|e^{iuz}| = e^{\text{Re}(iuz)} = e^{-u \text{Im} z} = e^{-u|z| \sin \theta}$: posto $M_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$, si ha allora $|\int_{\gamma_r} f(z) e^{iuz} dz| \leq r M_r \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-ur \sin \theta} d\theta \leq r M_r \int_0^\pi e^{-ur \sin \theta} d\theta = 2r M_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ur \sin \theta} d\theta$. Ora, su $[0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\sin \theta$ è convessa e dunque $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$, dunque si può continuare a maggiorare ottenendo $|\int_{\gamma_r} f(z) e^{iuz} dz| \leq 2r M_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ur \frac{2}{\pi}\theta} d\theta = 2r M_r \frac{-\pi}{2ur} (e^{-\frac{2ur}{\pi}\theta}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = M_r \frac{\pi}{u} (1 - e^{-ru}) \leq M_r \frac{\pi}{u}$. Poiché per ipotesi $\lim_{r \rightarrow +\infty} M_r = 0$, si ottiene quanto voluto. \square

Veniamo dunque alla

Proposizione 6.3.11. (Classificazione delle singolarità isolate) *La singolarità isolata z_0 :*

⁽⁹⁵⁾Per $m = 1$ si parla anche di *polo semplice*.

- (a) è una singolarità eliminabile se e solo se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ esiste in \mathbb{C} ;
- (b) è un polo se e solo se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty_2$, e in tal caso esiste un unico $m \in \mathbb{N}$ (che sarà l'ordine del polo) tale che $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ esiste in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (c) è una singolarità essenziale se e solo se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ non esiste in $\mathbb{C} \cup \{\infty_2\}$.

In particolare, se $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ e z_0 è uno zero di ordini m per $g(z)$ e n per $h(z)$, allora se $m \geq n$ il punto z_0 è singolarità eliminabile mentre se $m < n$ è un polo di ordine $n - m$.

Dimostrazione. (a) Se z_0 è una singolarità eliminabile, allora ovviamente $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ esiste in \mathbb{C} . Viceversa, se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ esiste in \mathbb{C} allora f è limitata all'intorno di z_0 : ne segue che per ogni $n \geq 1$ vale $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$, dunque (applicando il Lemma del cerchio piccolo 6.3.10(b) alla funzione $g(z) = (z - z_0)^{n-1} f(z)$, con centro in z_0 anziché in 0) vale $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$. Ma sappiamo che per ogni $r > 0$ vale $a_{-n} = 2\pi i \int_{\gamma_r} g(z) dz$, e ne deduciamo che $a_{-n} = 0$ per ogni $n \geq 1$, ovvero che z_0 è una singolarità eliminabile per f . (b) Se z_0 è un polo diciamo di ordine m allora $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da cui (essendo $|f(z)| \sim_{z_0}^* |z - z_0|^{-m}$) si ricava $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty_2$. Viceversa, se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty_2$ allora f è lontana da 0 all'intorno di z_0 , dunque $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è definita all'intorno bucato di z_0 , ed essendo $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ si ha (per (a)) che z_0 è una singolarità eliminabile per g , più precisamente uno zero. Detta m la molteplicità di z_0 come zero di g , si può scrivere $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ con h olomorfa all'intorno di z_0 e con $h(z_0) \neq 0$: dunque anche $k(z) = \frac{1}{h(z)}$ sarà olomorfa all'intorno di z_0 e con $k(z_0) \neq 0$, e si avrà uno sviluppo $k(z) = \sum c_n (z - z_0)^n$ con $c_0 = h(z_0) \neq 0$, da cui si ricava $f(z) = \frac{k(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0} + c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots$. Ciò mostra che z_0 è un polo di ordine m per f . Il punto (c) discende da (a) e (b). L'ultima affermazione circa il caso $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ discende facilmente da (a) e (b) scrivendo $g(z) = c_m(z - z_0)^m + \dots$ e $h(z) = d_m(z - z_0)^n + \dots$. \square

Esempi. (1) La funzione $\frac{z}{\sin z}$ è definita per $z \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; tuttavia il punto 0 è una singolarità eliminabile, mentre i punti $k\pi$ con $k \neq 0$ sono poli semplici. **(2)** Per $\frac{e^{\pi z} - 1}{z^3(z-i)(z+2i)}$ il punto $z = 0$ è un polo di ordine $3 - 1 = 2$, $z = i$ è polo semplice, e $z = -2i$ è singolarità eliminabile. **(3)** Per $\sin \frac{1}{z}$ il punto $z = 0$ è una singolarità essenziale: in effetti la serie di Laurent $\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1/z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-3} + \dots$ ha infiniti termini non nulli a esponente negativo.

Osserviamo anche che, se $f : A \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e z_0 è una singolarità eliminabile, la funzione estesa $\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $\tilde{f}(z) = f(z)$ per $z \neq z_0$ e $\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ è olomorfa in tutto A : ciò discende subito dalla Proposizione 1.3.5, perché $\tilde{f}(z)$ è analitica in A (all'intorno di z_0 è la somma di una serie di potenze a esponenti positivi).

Nello sviluppo in serie di Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ attorno a una singolarità z_0 , il coefficiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta) d\zeta$$

è detto *residuo* di f in z_0 , e si denota solitamente con $\text{Res}(f, z_0)$.⁽⁹⁶⁾ Per il calcolo di tale numero, importante in varie applicazioni, mettiamo in evidenza le seguenti tecniche. Residuo

⁽⁹⁶⁾ Il nome *residuo* è dovuto al fatto che è l'unico coefficiente a sopravvivere integrando $f(z) dz$ su γ_r . Infatti, sempre per convergenza uniforme della serie si ha $\int_{\gamma_r} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma_r} (z - z_0)^n dz$, e per $n \neq -1$ la funzione $(z - z_0)^n$ ha primitiva $\frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ su tutto $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, così che $\int_{\gamma_r} (z - z_0)^n dz = 2\pi i \left(\frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \right)_{z_0 + re^{2\pi i}}^{z_0 + re^{2\pi i}} = 0$. Ne segue che $\int_{\gamma_r} f(z) dz = a_{-1} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz = a_{-1} (2\pi i)$, come già scritto.

Proposizione 6.3.12. (Calcolo del residuo)

- (a) Se f è olomorfa in z_0 o se z_0 è una singolarità eliminabile, allora $\text{Res}(f, z_0) = 0$.
 (b) Se z_0 è polo semplice allora $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$; in particolare, se $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con g, h olomorfe in $z_0, g(z_0) \neq 0$ e z_0 zero semplice di h , allora $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.
 (c) Se z_0 è polo d'ordine m , scritta $f(z) = \frac{\ell(z)}{(z - z_0)^m}$ con $\ell(z_0) \neq 0$ è $\text{Res}(f, z_0) = \frac{\ell^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

Dimostrazione. (a) Ovvio per definizione (tutti i coefficienti di indice negativo della serie di Laurent sono nulli). (b) Se z_0 è polo semplice per f allora $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) \cdots$, dunque $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$ è il residuo cercato. In particolare, se $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con g, h olomorfe in $z_0, g(z_0) \neq 0$ e z_0 zero semplice di h , si ha $h(z) = h'(z_0)(z - z_0) + \cdots$ con $h'(z_0) \neq 0$ e perciò $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h'(z_0)(z - z_0) + \cdots} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. (c) Se $f(z) = \frac{\ell(z)}{(z - z_0)^m}$ con $\ell(z_0) \neq 0$, scritta $\ell(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ell^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ si ottiene subito la serie di Laurent $\ell(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ell^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} = \frac{\ell(z_0)}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{\ell^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} (z - z_0) + \frac{\ell^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{\ell^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \cdots$, dal che si vede direttamente che il residuo cercato è $\frac{\ell^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$. \square

Esercizio. Determinare le singolarità e calcolare i residui in esse delle seguenti funzioni:

- (1) $\frac{1 + z^8}{z^6(z + 2)}$ (2) $\frac{2z - 5}{z^3(z^2 - 5z - 6)}$ (3) $\frac{1}{\sin \pi z}$ (4) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}z} + i}{z^2(z^2 + 1)}$ (5) $\frac{\cos z}{z(z^2 + 2i)}$ (6) $\frac{\sin z}{z^3 e^z}$ (7) $\sin z \sin \frac{1}{z}$
 (8) $\frac{1 - \cos z}{z^3(z - 2\pi)}$ (9) $\frac{e^z - 1}{z \sin z}$ (10) $\frac{1}{\sin(z^2 - \pi^2)}$ (11) $\frac{z + 3}{(z + i)(iz - 3)^3}$ (12) $\frac{\sin z}{(e^z - 1)^4}$ (13) $\frac{z^2 - \pi}{\sin(z^2)}$.

Risoluzione. (1) Poli in 0 (ordine 6) e in -2 (semplice). Il residuo in -2 è $\frac{1+z^8}{z^6} \Big|_{z=-2} = \frac{257}{64}$. Per il residuo in 0 conviene invece esibire la serie di Laurent: si ha $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\frac{z}{2})^n$, dunque $\frac{1+z^8}{z^6(z+2)} = z^{-6}(1+z^8) \frac{1}{2} (1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} - \frac{z^5}{32} + \cdots)$, e il termine con $\frac{1}{z}$ risulta da $z^{-6} \frac{1}{2} (-\frac{z^5}{32}) = -\frac{1}{32} \frac{1}{z}$, dunque il residuo è $-\frac{1}{64}$. (2) Poli in 0 (ordine 3) e in -1 e 6 (semplici). I residui in -1 e 6 sono rispettivamente $\frac{2z-5}{z^3(z-6)} \Big|_{z=-1} = -1$ e $\frac{2z-5}{z^3(z+1)} \Big|_{z=6} = \frac{1}{216}$; il residuo in 0 è $(\frac{1}{2} \frac{2z-5}{z^2-5z-6})'' \Big|_{z=0} = \frac{430}{216}$. (3) Si ha $\sin w = 0$ se e solo se $w = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (zeri semplici), dunque la funzione $\frac{1}{\sin \pi z}$ ha poli semplici negli interi $z = k \in \mathbb{Z}$; in tali punti il residuo è $\frac{1}{\pi \cos \pi z} \Big|_{z=k} = \frac{(-1)^k}{\pi}$. (4) Il denominatore di $f(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}z} + i}{z^2(z^2 + 1)}$ si annulla per $z = 0$ (zero doppio) e per $z = \mp i$ (zeri semplici). D'altra parte il numeratore si annulla quando $e^{\frac{\pi}{2}z} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$, dunque per $\frac{\pi}{2}z = -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$, ovvero per $z = (-1 + 4k)i$ con $k \in \mathbb{Z}$: dunque tra i suoi zeri, tutti semplici, c'è anche $-i$. Ne deduciamo che 0 è un polo di ordine 2 per f , i un polo semplice, e $-i$ una singolarità eliminabile. Il residuo in $-i$ è perciò 0, e in i è $\frac{e^{\frac{\pi}{2}z} + i}{z^2(z+i)} \Big|_{z=i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i} + i}{(-1)(2i)} = \frac{2i}{-2i} = -1$. (5) La funzione $\frac{\cos z}{z(z^2 + 2i)}$ è dispari, e ha poli semplici in 0 e $\pm(1 - i)$ (il numeratore non si annulla in tali punti); il residuo in 0 è $\frac{\cos z}{z^2 + 2i} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$, quello in $\pm(1 - i)$ è $\frac{\cos z}{z(z \pm (1 - i))} \Big|_{z=\pm(1 - i)} = \frac{i \cos(1 - i)}{4}$. (6) L'unico polo è 0, di ordine $3 - 1 = 2$; il residuo è $(\frac{\sin z}{z e^z})' \Big|_{z=0} = \lim_0 \frac{z \cos z - (1+z) \sin z}{z^2 e^z} = \lim_0 \frac{z(1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots) - (1+z)(z - \frac{1}{6}z^3 + \cdots)}{z^2 e^z} = \lim_0 \frac{-z^2 + \cdots}{z^2 e^z} = -1$. (7) $\sin z \sin \frac{1}{z}$ ha come unica singolarità 0: e si tratta di una singolarità essenziale. Per il residuo non ci sarebbe altra via che cercare il coefficiente di $\frac{1}{z}$ nel prodotto di sviluppi $(z - \frac{1}{6}z^3 + \cdots)(\frac{1}{z} - \frac{1}{6} \frac{1}{z^3} + \cdots)$, impresa ardua... in realtà basta notare che la funzione è pari, e questo ci dice che il residuo è nullo. (8) Il denominatore di $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z - 2\pi)}$ si annulla per $z = 0$ (zero triplo) e in 2π (semplice); in tali punti si annulla però anche il denominatore, con molteplicità 2. Ne ricaviamo che 0 è un polo semplice per $f(z)$, e 2π una singolarità eliminabile (in realtà diventa uno zero semplice). Il residuo di f in 2π è dunque ovviamente nullo; quello in 0 è invece $\lim_0 \frac{1 - \cos z}{z^2(z - 2\pi)} = -\frac{1}{4\pi}$. (9) I poli sono 0 (semplice, perché

$2 - 1 = 1$) e $k\pi$ con $k \neq 0$ (pure semplici); il residuo in 0 è $\lim_0 \frac{e^z - 1}{\sin z} = 1$, quello in $k\pi$ con $k \neq 0$ è $\lim_{k\pi} (z - k\pi) \frac{e^z - 1}{z \sin z} = \frac{e^{k\pi} - 1}{k\pi} \lim_{k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin z} = \frac{e^{k\pi} - 1}{(-1)^k k\pi}$. **(10)** I poli di $\frac{1}{\sin(z^2 - \pi^2)}$ sono per $z^2 - \pi^2 = k\pi$, ovvero $\pm\sqrt{\pi(\pi + k)}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (ove la radice denota quella con parte reale, o con parte immaginaria, positiva); la derivata di $\sin(z^2 - \pi^2)$ è $2z \cos(z^2 - \pi^2)$, che non si annulla in questi punti, dunque si tratta di poli semplici; e il residuo in $\pm\sqrt{\pi(\pi + k)}$ è per l'appunto $\frac{1}{2z \cos(z^2 - \pi^2)} \Big|_{z=\pm\sqrt{\pi(\pi+k)}} = \pm \frac{(-1)^k}{2\sqrt{\pi(\pi+k)}}$. **(11)**

La funzione $\frac{z+3}{(z+i)(z-3)^3}$ ha poli $-i$ (semplice) con residuo $\frac{-i+3}{(i(-i)-3)^3} = -\frac{3-i}{8}$; e $z = -3i$ (ordine 3) con residuo $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{i^3} \frac{z+3}{z+i} \right)'_{z=-3i} = \frac{1}{2} i \left(\frac{-3+i}{(z+i)^2} \right)'_{z=-3i} = \frac{1}{2} i (-3+i)(-2(z+i)^{-3})_{z=-3i} = \frac{3-i}{8}$. **(12)** Il denominatore di $f(z) = \frac{\sin z}{(e^z - 1)^4}$ ha zeri di molteplicità 4 in $z = 2k\pi i$; tra questi il denominatore si annulla solo in 0 con molteplicità 1, dunque $f(z)$ ha in 0 un polo di ordine 3, e in $2k\pi i$ (con $k \neq 0$) dei poli di ordine 4. In un caso come questo, in cui gli ordini sono abbastanza alti e le funzioni complicate, conviene forse trovare il residuo manualmente: ad esempio, in 0 si avrà $f(z) = \frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + \dots$, da cui $\sin z = (\frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + \dots)(e^z - 1)^4$, da cui (essendo $(e^z - 1)^4 = (z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots)^4 = (z^2 + z^3 + \frac{7}{12}z^4 + \dots)^2 = (z^4 + 2z^5 + \frac{13}{6}z^6 + \dots)$) si ha $z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \dots = (\frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + \dots)(z^4 + 2z^5 + \frac{13}{6}z^6 + \dots) = az + (2a+b)z^2 + (\frac{13}{6}a + 2b+c)z^3 + \dots$, il che implica $a = 1$, $2a + b = 0$ (dunque $b = -2$) e $\frac{13}{6}a + 2b + c = -\frac{1}{6}$ (dunque $c = \frac{5}{3}$, il residuo cercato). **(13)** Il denominatore di $f(z) = \frac{z^2 - \pi}{\sin(z^2)}$ si annulla quando $z^2 = k\pi$, ovvero $z = \mp\sqrt{k\pi}$ (ove la radice denota quella con parte reale, o con parte immaginaria, positiva); la derivata $2z \cos(z^2)$ non si annulla su quelle con $k \neq 0$ (che sono dunque zeri semplici) mentre in 0 si annulla ma non si annulla la derivata seconda $2 \cos(z^2) - 4z^2 \sin(z^2)$ (dunque 0 è zero doppio). D'altra parte, il numeratore si annulla in $\mp\sqrt{\pi}$ (zeri semplici), dunque $\mp\sqrt{\pi}$ sono singolarità eliminabili, $\mp\sqrt{k\pi}$ (con $k \neq 0, 1$) sono poli semplici e 0 è polo doppio. Il residuo in $\mp\sqrt{\pi}$ è nullo; quello nei $\mp\sqrt{k\pi}$ con $k \neq 0, 1$ è dato da $\frac{z^2 - \pi}{2z \cos(z^2)} \Big|_{z=\mp\sqrt{k\pi}} = \frac{(-1)^k (k-1)\pi}{\mp 2\sqrt{k\pi}}$; quanto a 0, se $f(z) = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \dots$ si ha $-\pi + z^2 = (\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \dots)(z^2 - \frac{1}{6}z^6 + \dots) = a + bz + \dots$, da cui $a = -\pi$ e $b = 0$. Il residuo in 0 è perciò nullo... sorprendente? Niente affatto, visto che $f(z)$ è pari (se lo avessimo notato subito, potevamo risparmiarci il calcolo).

La maggior parte delle applicazioni pratiche dei residui (tra esse quelle nel calcolo integrale reale, che vedremo subito dopo) discende dal seguente risultato.

Teorema 6.3.13. (Teorema dei residui) *Siano A un aperto di \mathbb{C} , $Z \subset A$ un sottoinsieme discreto, f una funzione olomorfa in $A \setminus Z$ e γ un circuito in $A \setminus Z$ nullomotopo in A . Allora i punti $w \in Z$ tali che $\text{Ind}_\gamma(w) \neq 0$ sono in numero finito, e vale*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in Z} \text{Res}(f, w) \text{Ind}_\gamma(w).$$

Dimostrazione. Iniziamo dal caso in cui Z sia finito, diciamo $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$. La funzione $f(z) - \sum_{j=1}^m f_{z_j}^{\text{sing}}(z)$ (dove $f_{z_j}^{\text{sing}}(z)$ denota la parte singolare di f in z_j , vedi (6.3)) ha al più singolarità eliminabili in A : dunque, essendo γ per ipotesi nullomotopo in A , vale $\int_\gamma (f(z) - \sum_{j=1}^m f_{z_j}^{\text{sing}}(z)) dz = 0$, ovvero $\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_\gamma f_{z_j}^{\text{sing}}(z) dz$. D'altra parte per un certo j vale $f_{z_j}^{\text{sing}}(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_j} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_j)^k}$ ove $a_{-1} = \text{Res}(f, z_j)$, con convergenza uniforme al di fuori di un qualsiasi intorno di z_j e dunque su tutto un intorno aperto di γ (che, essendo compatto, ha distanza > 0 da tutti i punti di Z): ne segue che $\int_\gamma f_{z_j}^{\text{sing}}(z) dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{1}{z - z_j} dz + \sum_{k=2}^{+\infty} \int_\gamma \frac{a_{-k}}{(z - z_j)^k} dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j) \text{Ind}_\gamma(z_j)$ (poiché per $k \geq 2$ la forma $\frac{1}{(z - z_j)^k}$ è esatta, con primitiva $\frac{1}{(k-1)(z - z_j)^{k-1}}$ e dunque ha integrale nullo su γ), ma questo è ciò che si voleva. • Nel caso generale, in cui Z è supposto essere solo discreto, in realtà solo un numero finito di punti di Z ha indice non nullo rispetto a γ (dunque il teorema continua a valere). In effetti sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una parametrizzazione per il circuito, e sia $h : [a, b] \times I \rightarrow A$ un'omotopia tra γ e un circuito costante: poiché h è continua e $[a, b] \times I$ è compatto si ha che $K = h([a, b] \times I)$ è compatto in A , dunque ammette

un intorno aperto B a chiusura compatta $\overline{B} \subset A$. Dentro B può cadere solo un numero finito di elementi di Z (altrimenti, essendo \overline{B} compatto, l'insieme di tali punti dovrebbe avere un punto di accumulazione in \overline{B} , impossibile perché Z è discreto), e certamente tutti gli altri punti di Z hanno indice nullo rispetto a γ (perché appartengono alla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, vedi Proposizione 6.3.5). Ma allora basta applicare i ragionamenti del caso finito a B . \square

In particolare, se $U \subset A$ è un aperto con bordo regolare in $A \setminus F$ parametrizzato positivamente come curva semplice da γ , i punti $w \in Z \cap U$ sono in numero finito e per essi vale $\text{Ind}_\gamma(w) = 1$, mentre se $w \in Z \setminus U$ vale $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$: il Teorema dei residui dà allora

$$(6.4) \quad \int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in Z \cap U} \text{Res}(f, w),$$

ovvero il calcolo dell'integrale al primo membro è ricondotto alla somma (finita) dei residui di f nei vari punti $w \in Z \cap U$, possibili singolarità isolate di f .

Prima di proseguire con le applicazioni del Teorema dei residui nel calcolo degli integrali definiti, è necessario ricordare la nozione di *valore principale* di un integrale. Data una funzione $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile, si definisce

Valore principale

$$\text{vp} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right) :$$

se tale integrale esiste finito, si dirà che f è *integrabile in valore principale in c* (è chiaro che tale proprietà non dipende da a e b). Per l'infinito, data una funzione $g : \mathbb{R} \setminus]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile si definisce

$$\text{vp} \int_{\mathbb{R} \setminus]a, b[} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{-r}^a f(x) dx + \int_b^r f(x) dx \right),$$

e se tale integrale esiste finito si dirà che f è *integrabile in valore principale in ∞* .⁽⁹⁷⁾

Se f ha varie singolarità (e tra esse eventualmente anche ∞), il valore principale va inteso come somma dei valori principali in ciascuna di esse: ad esempio, se $f : \mathbb{R} \setminus \{c_1, c_2\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ove $c_1 < c_2$) è localmente integrabile si intende

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \varepsilon, \eta \rightarrow 0^+}} \left(\int_{-r}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_1+\varepsilon}^{c_2-\eta} f(x) dx + \int_{c_2+\eta}^r f(x) dx \right).$$

Riguardo all'utilità della nozione, è chiaro che se f è integrabile in senso generalizzato essa lo è anche in valore principale, mentre il viceversa non è sempre vero:⁽⁹⁸⁾ tuttavia, se

⁽⁹⁷⁾ È chiaro che tali proprietà non dipendono da a e b . Tra l'altro, per la definizione nel caso di ∞ potrebbe anche non essere necessario rimuovere alcun intervallo $]a, b[$: ovvero, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente integrabile si definisce $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx$.

⁽⁹⁸⁾ Infatti per gli integrali generalizzati devono esistere distintamente i due limiti a destra e a sinistra, mentre per il valore principale i due limiti sono legati tra loro e dunque basta l'esistenza di un solo "limite sincronizzato" sui due lati. Ad esempio, data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile, l'integrabilità generalizzata a ∞ è l'esistenza finita di $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^0 f(x) dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N f(x) dx$, mentre l'integrabilità in valore principale a ∞ è l'esistenza finita di $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx$: così, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una *qualsiasi* funzione dispari allora $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \text{vp} \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, mentre l'esistenza degli integrali generalizzati è ardua (si pensi a $f(x) = x^3$ per ∞ , o a $\frac{1}{x^3}$ per 0 , o a $\frac{1}{x}$ per entrambi).

già si sa che una funzione è integrabile in senso generalizzato allora il calcolo del valore principale (solitamente più semplice, visto che si tratta di un solo limite) dà direttamente il valore dello stesso integrale generalizzato. È ciò che useremo qui nel seguito.

Passiamo dunque alle principali applicazioni del Teorema dei residui nel calcolo degli integrali definiti.

- Calcolo di integrali reali del tipo $\int_0^{2\pi} P(\cos t, \sin t) dt$, dove $P(x, y)$ è una funzione razionale senza poli sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Tale integrale corrisponde all'integrale complesso $\int_\gamma f_P(z) dz$, ove $\gamma(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ e $f_P(z) = \frac{1}{iz} P(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))$:⁽⁹⁹⁾ da (6.4) si ha dunque

$$\int_0^{2\pi} P(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{|z|<1} \text{Res}(f_P, z).$$

Esempi. (1) Calcoliamo $\int_0^\pi \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$ (ove $a > 1$), che per simmetria è uguale a $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$. Qui vale $P(x, y) = \frac{1}{a+x}$, dunque $f_P(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{1+a\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = -\frac{2i}{z^2-2az+1}$. La funzione f_P ha poli semplici in $-a \pm \sqrt{a^2-1}$, dei quali solo $z_0 = \sqrt{a^2-1} - a$ sta nel disco unitario: in esso vale $\text{Res}(f_P, z_0) = -\frac{2i}{z_0+a+\sqrt{a^2-1}} \Big|_{z=z_0} = -\frac{i}{\sqrt{a^2-1}}$, pertanto l'integrale cercato vale $\frac{1}{2} 2\pi i (-\frac{i}{\sqrt{a^2-1}}) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **(2)**

Calcoliamo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2\theta} d\theta$, che per simmetria è uguale a $\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta} d\theta$. Qui vale $P(x, y) = \frac{1}{1+y^2}$, dunque $f_P(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{1+(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^2} = \frac{4iz}{z^4-6z^2+1}$. I poli di f_P si ottengono per $z^4 - 6z^2 + 1 = 0$, dunque si tratta dei quattro poli semplici $\pm(\sqrt{2}+1)$ e $\pm(\sqrt{2}-1)$; in realtà, di questi, solo gli ultimi due stanno nel disco unitario. Il calcolo dà $\text{Res}(f_P, \sqrt{2}-1) = \frac{4iz}{(z^2-(\sqrt{2}+1)^2)(z+(\sqrt{2}-1))} \Big|_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}i = \text{Res}(f_P, -(\sqrt{2}-1))$, dunque l'integrale cercato vale $\frac{1}{4} 2\pi i (-\frac{1}{2\sqrt{2}}i - \frac{1}{2\sqrt{2}}i) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

- Calcolo di integrali generalizzati del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ oppure $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx$, ove f è una funzione priva di singolarità reali, oppure con un numero finito di discontinuità reali in cui ci sia comunque integrabilità generalizzata, ad esempio discontinuità eliminabili (si noti che $\text{Re}(f(x) e^{iux}) = f(x) \cos(ux)$ e $\text{Im}(f(x) e^{iux}) = f(x) \sin(ux)$, dunque anche integrali con seno e coseno possono rientrare in questo quadro). Il primo passo è vedere se $f(x)$ sia indotta sui reali da una funzione $f(z)$ di variabile complessa con un numero finito di singolarità nel semipiano superiore chiuso $\{z : \text{Im } z \geq 0\}$ ⁽¹⁰⁰⁾; si cerca poi di applicare la seguente

Proposizione 6.3.14. *Sia A un aperto di \mathbb{C} contenente il semipiano superiore chiuso $\{z : \text{Im } z \geq 0\}$, e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in A tranne al più in un insieme finito di punti $\{a_1, \dots, a_m\}$ con $\text{Im } a_j > 0$ e — eventualmente — di poli reali semplici $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$. Allora:*

- (a) Se $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \geq 0}} z f(z) = 0$ vale

⁽⁹⁹⁾Ragioniamo a ritroso: calcolando $\int_\gamma f_P(z) dz$ con $\gamma(t) = e^{it}$ si trova per l'appunto $\int_0^{2\pi} P(\cos t, \sin t) dt$.

⁽¹⁰⁰⁾Questo tipicamente è possibile quando f è una funzione razionale.

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, a_j) + \pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, b_k).$$

(b) Se $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \geq 0}} f(z) = 0$, per ogni $u > 0$ vale

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iux} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f(z) e^{iuz}, a_j) + \pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z) e^{iuz}, b_k).$$

Dimostrazione. Sia $r > 0$ abbastanza grande di modo che la palla aperta $B(0, r)$ contenga tutte le singolarità a_j e b_k , e integriamo $g(z) dz$ (ove $g(z)$ può denotare $f(z)$ oppure $f(z) e^{iuz}$) lungo il circuito $\gamma_{r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ che parte dal numero reale $-r$, percorre l'asse reale verso destra fino a raggiungere il numero reale r ma evitando le singolarità b_k lungo un piccolo semicerchio superiore γ_{ε_k} di raggio $\varepsilon_k > 0$, e poi torna da r a $-r$ lungo l'arco di circonferenza superiore γ_r : tenuto conto del verso di percorrenza delle semicirconferenze (orario/negativo per le γ_{ε_k} e antiorario/positivo per γ_r) e supponendo $b_1 < \dots < b_n$ si ha allora

$$(*) \quad \int_{\gamma_{r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}} g(z) dz = \int_{-r}^{b_1 - \varepsilon_1} g(x) dx + \sum_{k=2}^n \int_{b_{k-1} + \varepsilon_{k-1}}^{b_k - \varepsilon_k} g(x) dx + \int_{b_n + \varepsilon_n}^r g(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{\varepsilon_k}} g(z) dz + \int_{\gamma_r} g(z) dz,$$

ma per il Teorema dei residui 6.3.13 si ha anche

$$(**) \quad \int_{\gamma_{r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}} g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(g, a_j).$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$, nel secondo membro di (*) la somma $\int_{-r}^{b_1 - \varepsilon_1} g(x) dx + \sum_{k=2}^n \int_{b_{k-1} + \varepsilon_{k-1}}^{b_k - \varepsilon_k} g(x) dx + \int_{b_n + \varepsilon_n}^r g(x) dx$ tende a $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$, mentre per le ipotesi in (a) o in (b) e per il Lemma 6.3.10 gli integrali $\int_{\gamma_{\varepsilon_k}} g(z) dz$ e $\int_{\gamma_r} g(z) dz$ tendono rispettivamente a $\pi i \text{Res}(g, b_k)$ e a 0; invece il secondo membro di (**), non dipendendo da r o dagli ε_k , rimane inalterato. L'equazione tra i limiti dei due secondi membri dà quanto enunciato in (a) o in (b). \square

Esempi. (1) Calcoliamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx$ ($a > 0$). La funzione $f(z) = \frac{1}{a^2+z^2}$ soddisfa $\lim_{\infty} z f(z) = 0$ e ha poli semplici in $\mp ai$, dei quali solo ai ha $\text{Im} > 0$: vale dunque $\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \text{Res}(f, ai) = \pi i \frac{1}{2ai} = \frac{\pi}{2a}$. (Tale valore si calcola facilmente anche con la primitiva $\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$.)

(2) Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4} dx$. La funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+4}$, priva di singolarità reali, ha poli semplici con $\text{Im} > 0$ in $z_0^{\mp} = \mp 1 + i$ e soddisfa $\lim_{\infty} z f(z) = 0$: l'integrale cercato vale dunque $2\pi i (\text{Res}(f, z_0^+) + \text{Res}(f, z_0^-)) = 2\pi i \left(\frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_0^+} + \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_0^-} \right) = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{16} + \frac{1-i}{16} \right) = \frac{\pi}{4}$.

(3) Calcoliamo $\int_0^{+\infty} \frac{2-\cos x}{x^4+1} dx$, che per simmetria vale $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2-\cos x}{x^4+1} dx$ e dunque è la parte reale di $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+1} dx$. Posto $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ si ha $\lim_{\infty} z f(z) = 0$; la funzione, priva di singolarità reali, ha poli semplici con $\text{Im} > 0$ in $z_0^{\mp} = \frac{\mp 1+i}{\sqrt{2}}$, e vale $\text{Res}(f(z), z_0^{\mp}) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_0^{\mp}} = \frac{\pm 1-i}{4\sqrt{2}}$ e

$\text{Res}(f(z) e^{iz}, z_0^{\mp}) = \frac{e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=z_0^{\mp}} = \frac{\pm 1-i}{4\sqrt{2}} e^{\frac{-1\mp i}{\sqrt{2}}}$. Se ne ricava che l'integrale cercato è (la parte reale di)

$2\pi i \left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} 2\pi i e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} i} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} i} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(2 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} (\cos \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \frac{1}{\sqrt{2}}) \right)$.

(4) Calcoliamo l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ (con $a > 0$), che sappiamo convergere. Il valore principale $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx$ ha parte reale $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x} dx$ nulla (la funzione $\frac{\cos(ax)}{x}$ è dispari), dunque ha solo

la parte immaginaria $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$, che esiste (già sappiamo che l'integrale di Dirichlet converge) e per parità è il doppio dello stesso integrale di Dirichlet. La funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ ha un solo polo semplice in $z = 0$, e vale $\lim_{\infty} f(z) = 0$: si ha dunque $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{x} dx = \pi i \text{Res}(f(z) e^{iaz}, 0) = \pi i$, e perciò l'integrale di Dirichlet vale $\frac{1}{2} \text{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$. **(5)** Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x^2(x+2)} dx$, che già sappiamo convergere (l'integranda è $\sim_{\infty} x^{-3}$, e i punti $x = 0$ e $x = -2$ sono discontinuità eliminabili con limiti risp. $\frac{\pi^2}{4}$ e 0): si tratterà di calcolare la parte reale di $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\pi x}}{x^2(x+2)} dx$. La funzione $f(z) = \frac{1 - e^{i\pi z}}{z^2(z+2)}$ ha un polo semplice in 0 , con residuo $\left. \frac{1 - e^{i\pi z}}{z(z+2)} \right|_{z=0} = -\frac{\pi}{2}i$, e una singolarità eliminabile in $z = -2$, dunque con residuo nullo: ne ricaviamo che $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\pi x}}{x^2(x+2)} dx = \pi i(-\frac{\pi}{2}i + 0) = \frac{\pi^2}{2}$ che, essendo già un numero reale, è anche il valore dell'integrale cercato.

- Altri integrali generalizzati possono essere ottenuti tramite integrazione su particolari circuiti, che spesso sfruttano la periodicità dell'esponenziale complesso: tra essi figurano quelli del tipo $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx$, ove $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e $R(x)$ è una funzione razionale priva di poli sul semiasse reale positivo $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esempio. Gli integrali generalizzati $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(x+b)^m} dx$, con $0 < \alpha < 1$, $b > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ esistono finiti, ma le primitive sono spesso di calcolo difficile o impossibile.⁽¹⁰¹⁾ Ponendo $x = e^t$, l'integrale da calcolare diventa $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{(e^t+b)^m} dt$. La funzione $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{(e^z+b)^m}$ ha poli di ordine m nei logaritmi di $-b$, ovvero $z = \log b + i(\pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$: preso $r > \log b$, l'idea è di integrarla sul rettangolo di vertici $-r, r, r+2\pi i$ e $-r+2\pi i$ (percorso nell'ordine dato, ovvero in senso antiorario), cercando di sfruttare la periodicità di \exp negli integrali sui lati orizzontali: se $x \in \mathbb{R}$ si ha infatti $f(x+2\pi i) = \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{(e^{x+2\pi i}+b)^m} = \frac{e^{\alpha x} e^{2\alpha\pi i}}{(e^x+b)^m} = e^{2\alpha\pi i} f(x)$. Denotando con σ_r^{\mp} i lati verticali del rettangolo percorsi dal basso verso l'alto, tale integrale diventa dunque $\int_{-\sigma_r^-}^{\sigma_r^+} f(z) dz + \int_{\sigma_r^+}^{\sigma_r^-} f(z) dz - \int_{-\sigma_r^-}^{\sigma_r^+} f(x+2\pi i) dx - \int_{\sigma_r^-}^{\sigma_r^+} f(x) dx = (1 - e^{2\alpha\pi i}) \int_{-\sigma_r^-}^{\sigma_r^+} f(x) dx + \eta(r)$ (ove $\eta(r)$ denota la somma $\int_{\sigma_r^+}^{\sigma_r^-} f(z) dz - \int_{\sigma_r^-}^{\sigma_r^+} f(z) dz$); d'altra parte, poiché il rettangolo contiene al suo interno la sola singolarità $\log b + i\pi$, il Teorema dei residui ci dice che (il valore principale del) l'integrale è anche uguale a $2\pi i \text{Res}(f, \log b + i\pi)$. Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, osservato che $\eta(r)$ tende a zero⁽¹⁰²⁾ si ottiene che l'integrale cercato vale $\frac{2\pi i}{1 - e^{2\alpha\pi i}} \text{Res}(f, \log b + i\pi) = -\frac{\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha\pi)} \text{Res}(f, \log b + i\pi)$, e tutto viene ridotto al calcolo di un residuo. Vediamo un paio di casi concreti. • Se $m = 1$ tale residuo è $\left. \frac{e^{\alpha z}}{(e^z+b)^r} \right|_{z=\log b+i\pi} = e^{(\alpha-1)(\log b+i\pi)}$, così che l'integrale vale $\frac{\pi}{b^{1-\alpha} \sin(\alpha\pi)}$. • Se $m = 2$ calcoliamo il residuo in modo diretto. Innanzitutto col cambio $z = w + (\log b + i\pi)$ si ottiene $\text{Res}(f(z), \log b + i\pi) = b^{\alpha-2} e^{\alpha\pi i} \text{Res}(\frac{e^{\alpha w}}{(e^w-1)^2}, 0)$; si ha poi $\frac{e^{\alpha w}}{(e^w-1)^2} = \frac{c}{z^2} + \frac{d}{z} + \dots$, da cui $1 + \alpha w + \dots = (\frac{c}{w^2} + \frac{d}{w} + \dots)(w + \frac{1}{2}w^2 + \dots)^2 = (\frac{c}{w^2} + \frac{d}{w} + \dots)(w^2 + w^3 + \dots) = c + (c+d)w + \dots$, da cui si ricava $c = 1$ e $c+d = \alpha$, ovvero $d = \text{Res}(\frac{e^{\alpha w}}{(e^w-1)^2}, 0) = \alpha - 1$. Il nostro integrale vale così $-\frac{\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha\pi)} b^{\alpha-2} e^{\alpha\pi i} (\alpha - 1) = \frac{(1-\alpha)\pi}{b^{2-\alpha} \sin(\alpha\pi)}$.

⁽¹⁰¹⁾Se α è razionale, diciamo $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ coprimi e $m < n$, si può porre $x = u^n$ ottenendo un integrale binomio di funzione razionale $n \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(u^n+b)^m} du$, che però in generale è comunque di difficile soluzione tramite integrali elementari (va usato il metodo di Hermite etc...).

⁽¹⁰²⁾Vale $|\int_{\sigma_r^+} f(z) dz| = |\int_0^{2\pi} f(r+ti) dt| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha(r+ti)}|}{|e^{r+ti}+b|^m} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha r}}{|e^r+ti+b|^m} dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha r}}{(|e^r+ti|-b)^m} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha r}}{(e^r-b)^m} dt = 2\pi \frac{e^{\alpha r}}{(e^r-b)^m} \sim_{+\infty}^* e^{-(m-\alpha)r}$, che tende a 0 (perché $-(m-\alpha) < 0$); similmente si ha $|\int_{\sigma_r^-} f(z) dz| = |\int_0^{2\pi} f(-r+ti) dt| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha(-r+ti)}|}{|e^{-r+ti}+b|^m} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{|e^{-r+ti}+b|^m} dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{(b-|e^{-r+ti}|)^m} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{(b-e^{-r})^m} dt = 2\pi \frac{e^{-\alpha r}}{(b-e^{-r})^m} \sim_{+\infty}^* e^{-\alpha r}$, che tende a 0 (perché $-\alpha < 0$).

Domande e risposte

01. D. *Mi chiedo se è consistente il ragionamento che segue. Semplicemente connesso non implica stellato (es.: \mathbb{R}^3 senza un punto), ma stellato implica semplicemente connesso che implica connesso per archi. Stellato implica connesso per archi ma non viceversa (piano bucato). Ho dimenticato qualche cosa, a parte che connesso non implica connesso per archi?*

R. Tutto vero!

02. D. *Lei ha detto che le forme radiali a simmetria sferica sono quelle del tipo $a(r) dr$, ove $r(x)$ è la funzione distanza dal punto-polo (se \tilde{x} è tale punto-polo, si ha $r(x) = (\sum (x_j - \tilde{x}_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ e dunque $a(r) dr = \frac{a(r)}{r} \sum_j (x_j - \tilde{x}_j) dx_j$). Ma in generale quali altri addendi devo aspettarmi, in un sistema di coordinate che comprenda r , per una forma differenziale lineare qualunque? Voglio dire: pensando ad esempio a $\tilde{x} = 0$ in \mathbb{R}^2 e alle coordinate polari (r, θ) , una forma qualsiasi sarà esprimibile come $a(r, \theta) dr + b(r, \theta) d\theta$? E pensando a $\tilde{x} = 0$ in \mathbb{R}^3 e alle coordinate sferiche (r, θ, φ) , una forma qualsiasi sarà esprimibile come $a(r, \theta, \varphi) dr + b(r, \theta, \varphi) d\theta + c(r, \theta, \varphi) d\varphi$?*

R. È proprio così. Questo è uno dei punti in cui le forme differenziali mostrano la loro grande efficienza e naturalità rispetto ai campi vettoriali. Infatti cambiare in \mathbb{R}^n le coordinate da quelle cartesiane (x_1, \dots, x_n) a un altro sistema di coordinate (x'_1, \dots, x'_n) equivale a considerare un diffeomorfismo $\Phi : A' \rightarrow A$ tra aperti di \mathbb{R}^n (si intende $\Phi(x') = x$), e, come vedremo, data una forma $\omega = \omega_1(x) dx_1 + \dots + \omega_n(x) dx_n$, passare alla sua descrizione come $\omega'_1(x') dx'_1 + \dots + \omega'_n(x') dx'_n$ equivale a farne il “pull-back” (immagine inversa) $\Phi^*\omega$, in concreto sostituendo a (x_1, \dots, x_n) le espressioni $(\Phi_1(x'), \dots, \Phi_n(x'))$. Ad esempio, supponiamo di avere nel piano cartesiano la forma

$$\omega = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy,$$

e applichiamo il cambio di coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (in questo caso si ha $(x_1, x_2) = (x, y)$, $(x'_1, x'_2) = (r, \theta)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ e $A' =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$). Si ha allora

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= \alpha(r \cos \theta, r \sin \theta) d(r \cos \theta) + \beta(r \cos \theta, r \sin \theta) d(r \sin \theta) \\ &= \alpha(r \cos \theta, r \sin \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + \beta(r \cos \theta, r \sin \theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= a(r, \theta) dr + b(r, \theta) d\theta \end{aligned}$$

ove, dopo aver radunato i termini con dr e quelli con $d\theta$, si è posto

$$\begin{cases} a(r, \theta) = \alpha(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \beta(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ b(r, \theta) = -\alpha(r \cos \theta, r \sin \theta) r \sin \theta + \beta(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta. \end{cases}$$

L'idea è che la forma ω è sempre la stessa, solo che prima l'ho scritta in funzione delle coordinate (x, y) come $\alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$, e dopo delle coordinate (r, θ) come $a(r, \theta) dr + b(r, \theta) d\theta$.

A questo punto, visto che ci siamo, cerchiamo di capire le condizioni su $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ affinché ω sia proprio una forma radiale a simmetria sferica, cioè del tipo $a(r) dr$ (quando espressa in funzione di r e θ). Bisognerà dunque che $b(r, \theta) \equiv 0$, e che $a(r, \theta)$ in realtà non dipenda da θ ma solo da r , ovvero che sia $a(r, \theta) = a(r)$. Otteniamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = a(r) \\ -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta = 0 \end{cases}, \quad \text{la cui soluzione} \quad \begin{cases} \alpha(x, y) = a(r) \cos \theta \\ \beta(x, y) = a(r) \sin \theta \end{cases}$$

(ottenuta ad esempio con Cramer) ci ridà la già nota forma esatta $\omega = a(r) dr = \frac{a(r)}{r} (r \cos \theta dx + r \sin \theta dy) = \frac{a(r)}{r} (x dx + y dy)$ (con primitiva $A(r) = \int a(r) dr$).

03. D. In un esercizio svolto in aula c'era da studiare un campo vettoriale $G(x, y, z)$ definito in \mathbb{R}^3 privato dell'asse z . Si era calcolata la circuitazione di G lungo un certo circuito che girava attorno all'asse z (si trattava di una circonferenza orizzontale centrata in un punto dell'asse), e veniva zero. Non era abbastanza per dire che G è conservativo?

R. No: lo sarebbe stato nel caso in cui G fosse stato irrotazionale. Solo in tal caso, infatti, è assicurata l'invarianza della circuitazione di G su circuiti omotopi, e la verifica che lei cita sarebbe allora stata sufficiente per passare dall'irrotazionalità alla conservatività in quel dominio, che non è semplicemente connesso. Per un G qualunque, invece, tale conto non dice nulla più del semplice fatto che su *quel* circuito la circuitazione è nulla.

04. D. In un esercizio svolto in aula c'era una forma differenziale lineare ω nel piano cartesiano, definita solo per $x + y > 0$. Una volta verificato che ω era chiusa, essendo il dominio semplicemente connesso lei aveva giustamente concluso che essa era esatta. Si trattava allora di trovarne una primitiva. Dopo aver fatto il conto col solito metodo delle derivate parziali, lei aveva proposto, come metodo alternativo, di integrare ω lungo la spezzata che va dal punto fissato $(1, 0)$ al punto variabile (x, y) seguendo prima il tratto orizzontale da $(1, 0)$ a $(x, 0)$, e poi quello verticale da $(x, 0)$ a (x, y) . Ma questo metodo non sembra funzionare per tutti i punti del dominio: infatti, se a partire da $(1, 0)$ volessi ad esempio raggiungere $(x, y) = (-2, 3)$, seguendo quella spezzata io uscirei dal dominio! Come conviene procedere allora?

R. Osservazione corretta: quella spezzata non era una buona scelta, o quantomeno non era una scelta che andava bene per tutti gli (x, y) . In realtà, poiché il dominio è convesso, una scelta sensata era quella di integrare lungo il segmento a partire da qualsiasi punto prefissato nel dominio. Un'altra scelta possibile, forse ancora più furba, era di muoversi prima parallelamente e poi perpendicolarmente alla retta $x + y = 0$: ovvero, prefissato ad esempio il punto $(1, 1)$, integrare prima da $(1, 1)$ a $(1 + \frac{x-y}{2}, 1 - \frac{x-y}{2})$ (punto proiezione di (x, y) sulla retta $x + y = 2$), e poi da $(1 + \frac{x-y}{2}, 1 - \frac{x-y}{2})$ a (x, y) .

(Nell'esercizio in oggetto si trattava di $\omega = \frac{x}{\sqrt{x+y}} dx - \frac{2y+x}{\sqrt{x+y}}$; il conto con le derivate parziali dava $f(x, y) = \frac{2}{3}(x - 2y)\sqrt{x+y} + k$.)

05. D. Supponiamo sia data una forma differenziale lineare ω su un dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un suo punto x_0 . Per ogni $x \in A$ si ha dunque diritto di integrare ω lungo il segmento $[x_0, x]$, e in questo modo si ottiene una funzione, diciamo $f(x)$. Che relazione ha f con ω ? È qualcosa di simile a una sua primitiva (in fondo, su ω non ho messo alcuna ipotesi, men che meno che sia esatta...)?

R. Se ω è esatta (il che, visto che il dominio è stellato e dunque semplicemente connesso, è come dire che ω sia chiusa) sappiamo che f è una primitiva di ω . Nel caso generale, invece, a priori non ci sarà alcuna relazione significativa tra f e ω ; si può tuttavia dimostrare che se ω è continua allora f è differenziabile e vale $df_{x_0} = \omega(x_0)$ (ovvero ω è il differenziale di f perlomeno in x_0). Giusto per fare un conto, si consideri la forma $\omega = (3y - x) dx + x^2 dy$ in $A = \mathbb{R}^2$ (si noti che ω non è chiusa e dunque, essendo A semplicemente connesso, nemmeno esatta), e scegliamo $(x_0, y_0) = (0, 0)$: in tal caso si ha $f(x, y) = \int_0^1 ((3ty - tx)x + (t^2 x^2)y) dt = \int_0^1 (x(3y - x)t + (x^2 y)t^2) dt = x(3y - x) + \frac{1}{3}x^2 y$, da cui $\nabla f = (3y - 2x + \frac{2}{3}xy, 3x + \frac{1}{3}x^2)$: si nota allora che vale $df_{(x,y)} = \omega$ in tutti e soli i punti dell'asse y (tra i quali appare anche $(0, 0)$) e in $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$.

06. D. Sappiamo che una forma per essere esatta deve essere chiusa. Se però io ho una forma ω su di un aperto non semplicemente connesso (ad esempio il piano bucato) e con il metodo delle derivate trovo una funzione f definita anch'essa su tutto il dominio di ω , senza verifiche ulteriori, questo implica di per sé l'esattezza della forma? E cioè f è la primitiva cercata?

R. Certamente. Se le va dritta (cioè se lei riesce davvero a trovare una funzione f definita su tutto il dominio di ω il cui differenziale sia ω), in questo modo lei ha trovato subito una primitiva su tutto il dominio (sia o non sia semplicemente connesso), risparmiandosi il lavoro preliminare di controllare se la forma sia perlomeno chiusa. Il punto è che, partendo così alla cieca, lei rischia seriamente di fare tanti conti per nulla, perché una forma data a caso è ben raro che sia esatta.

07. D. Il problema riguarda la mia necessità di inquadrare meglio il concetto di forma differenziale lineare, organizzandolo in un contesto che mi permetta di capire meglio lui ed altri concetti come integrale, campo vettoriale, ecc.

1. Prima di tutto vorrei chiederle qual'è la necessità di scrivere una forma differenziale (e una forma in generale) usando i simboli dx_i al posto di π_i , visto che come lei ha scritto: $dx_i := d\pi_i = \pi_i$. Voglio dire, se col simbolo dx_i si vuole solo intendere la i -esima componente di un vettore, nel senso che:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

perché usare questo simbolo invece di π_i ? C'è un preciso significato, un motivo storico, o semplicemente non ho proprio capito cosa sia una forma differenziale?

2. Nelle sue dispense, lei scrive così: L'associazione che permette di passare da forme differenziali a campi vettoriali e viceversa è:

$$\begin{aligned} \text{campo} &\longrightarrow F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \\ \text{forma} &\longrightarrow \omega_F = F_1(x) dx_1 + \dots + F_n(x) dx_n \end{aligned}$$

Dunque, quello che mi viene da pensare è che presa una forma in \mathbb{R}^3 (esempio):

$$\omega = f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz = (3xy) dx + (5x + 1) dy + (6z) dz$$

ad essa corrisponderà il campo $F(x, y, z) = (3xy, 5x + 1, 6z)$. Ora guardo in un punto, ad esempio $(1, 2, 3)$ e la mia forma differenziale non è altro che l'applicazione lineare $\phi(x, y, z) = \omega(1, 2, 3) = 6 dx + 6 dy + 18 dz$... giusto?

Quindi, se ora applico tale funzione al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ rispetto ad una determinata base, ottengo un numero, precisamente: $\phi(x, y, z) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 18 \cdot 6 = 120$.

Ora generalizzando, posso dire che una n -forma differenziale prende un campo vettoriale e restituisce una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; ad esempio nel caso di prima, applicando la f.d.l. al campo F ottengo :

$$f(x, y, z) = (3xy) \cdot (3xy) + (5x + 1) \cdot (5x + 1) + (6z) \cdot (6z) = 9x^2y^2 + (5x + 1)^2 + 36z^2$$

Il succo della questione è che una forma differenziale mi sembra ben più di "un campo vettoriale scritto in una forma matematica più agevole, che ritorna una teoria pulita" (motivazione dei compagni di corso a cui ho chiesto delucidazioni), tanto più che i campi vettoriali sono gli argomenti delle forme differenziali... mi sembrano insomma due oggetti a due "gerarchie" differenti, le forme ben al di sopra dei campi. Dove sbaglio? Inoltre, quale interpretazione geometrica dare alle forme differenziali?

3. Per finire, vorrei parlare degli integrali. Chiaramente, una comprensione delle forme differenziali credo mi permetterebbe di capire meglio gli integrali, poiché la scrittura $\int f(x) dx$ non mi sembra altro che $\int \omega$ dove ω è la forma differenziale lineare $f(x) dx$. Dunque, cosa significa integrare una forma differenziale? Come si ricollega all'idea intuitiva di sommare rettangolini infinitesimi? Inoltre, per quanto riguarda l'integrale di linea, non capisco la definizione nelle sue dispense. Precisamente, c'è scritto:

$$\omega = \sum \omega_i dx_i \quad \rightsquigarrow \quad \int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = \int_a^b \left(\sum \omega_i(\gamma(t)) (\gamma'_i(t)) \right) dt$$

ma viste le considerazioni fatte in precedenza, non dovrebbe essere che

$$\omega(\gamma(t)) = \sum \omega_i(\gamma(t)) \cdot \pi_i(\gamma(t)) = \sum \omega_i(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)_i ?$$

In fondo, $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ non è un vettore?

R. Cerco di rispondere punto per punto.

1. La notazione π_j (oppure e_j^* , è lo stesso) rappresenta un covettore, mentre dx_j rappresenta una forma differenziale lineare. Sono cose diverse, a livelli differenti. Per capirci, immagino lei abbia ben chiara l'idea di campo vettoriale: lo confonderebbe con un singolo vettore? No, perché sa bene che un campo vettoriale su un aperto U di \mathbb{R}^n è una funzione F che assegna ad ogni punto x di U un vettore $F(x)$, ovvero un elemento di \mathbb{R}^n . Allo stesso modo non si può confondere un covettore (una funzione lineare di \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , ovvero un elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$) con una forma differenziale lineare (che è una funzione che assegna ad ogni punto x di U un covettore, ovvero un elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$). È la stessa situazione che si presenta tra vettori e campi vettoriali, vissuta stavolta al di là dello specchio, cioè nel duale $(\mathbb{R}^n)^*$ anziché in \mathbb{R}^n . Nel caso in oggetto, dx_j è la forma differenziale lineare che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}^n$ il covettore π_j : dunque dx_j è una forma costante, ma sempre di forma differenziale si tratta, non di un singolo covettore.

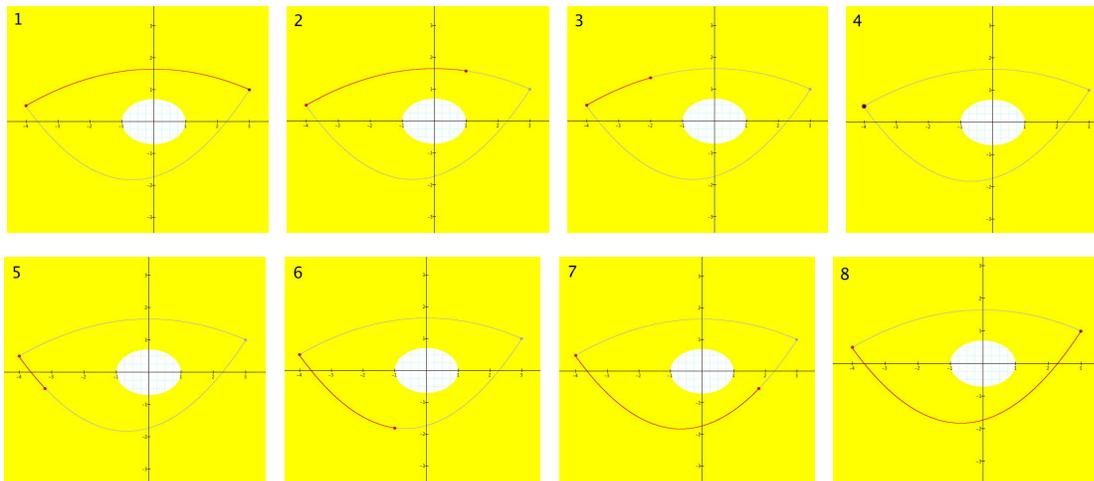
2. Le sue deduzioni di conto sono corrette, tranne che per una notazione: quando dice “e la mia forma differenziale non è altro che l'applicazione lineare $\phi(x, y, z) = \omega(1, 2, 3) = 6 dx + 6 dy + 18 dz$ ” in realtà dovrebbe scrivere “e la mia forma differenziale non è altro che l'applicazione lineare $\phi(x, y, z) = \omega(1, 2, 3) = 6\pi_1 + 6\pi_2 + 18\pi_3$ ”. Il perché l'ho spiegato anche qui sopra: ϕ è un covettore, non una forma (cioè di un campo di covettori); anche se, a dire il vero, quando presto inizieremo a parlare di k -forme (dunque non solo di 1-forme, come stiamo facendo ora) per semplicità useremo la notazione “ $\phi(x, y, z) = 6 dx + 6 dy + 18 dz$ ” anche per i covettori. Dunque lei è stato inconsapevolmente profetico. Comunque sia, come ho già avuto modo di dire anche in aula, l'importante è che si sappia quello che si sta facendo e scrivendo, poi sulle notazioni ci si può mettere d'accordo (purché siano ragionevolmente appropriate, in particolare non fuorvianti). Riguardo alla presunta “differenza di livello” tra campi e forme: la risposta è no, campi e forme hanno esattamente lo stesso livello nei loro rispettivi ambiti, sono aspetti duali di una stessa nozione (un campo di vettori da un lato, un campo di covettori dall'altro). Forse lei si fa condizionare dall'idea che, secondo lei, una funzione sarebbe più importante del suo dominio: ma questa convinzione è piuttosto impropria, perché in effetti una funzione non ha grande vita autonoma senza il suo dominio. Pare un po' una domanda “esistenziale” del tipo: È più importante il tino, creato per lavorare l'uva, o l'uva che ci butto dentro? Vero è che senza il tino (la funzione) il vino è difficile farlo, ma io propenderei comunque per l'uva (il dominio)! Circa l'interpretazione geometrica delle forme differenziali: è chiaramente meno immediata di quella dei campi vettoriali. È anche per questo che, a dispetto della maggior efficienza ed espressività matematica delle forme (vantaggi circa i quali cercherò di fornirvi ulteriori spiegazioni oltre a quanto già detto a lezione e anche in

queste pagine in riferimento ai cambi di variabile), la preferenza per i campi è ancora ben radicata in Fisica e generalmente nelle scienze.

3. Ovviamente “non si inventerà un nuovo integrale” per le forme: si tratterà di quello per le funzioni (ovvero di quello di Lebesgue) con l’aggiunta di una nuova sensibilità per l’orientazione dello spazio su cui si integra. Questo lo vedremo ben presto, ma in realtà l’abbiamo già visto in una variabile: infatti ricorderà che l’integrale $\int_a^b f(x) dx$ (a tutti gli effetti un integrale di forma differenziale) era stato definito come $\int_{[a,b]} f$ se $a \leq b$, e come $-\int_{[b,a]} f$ se $a > b$ (dunque usando un integrale di funzione, alla Riemann). Un altro esempio è per l’appunto quello dell’integrale di una forma differenziale lineare lungo un cammino, di cui stiamo parlando qui: per definirlo abbiamo usato il già noto concetto di integrale in una variabile, mica ci siamo inventati una nuova teoria dell’integrazione! Infine: quella di integrale di una forma su un cammino è una definizione, e va presa come tale. Tenga presente poi che è la sola definizione che funziona, nel senso che è solo così (e non nel modo che lei suggerisce, peraltro in modo piuttosto confuso e immotivato) che la definizione non dipende dalla particolare parametrizzazione del cammino, come ragionevolmente deve essere.

08. D. Nella Figura 4(1) delle sue dispense l’omotopia è intesa (soprattutto in Figura 4(2)) “a estremi fissi”, vero? Se non ho capito male, infatti, un’omotopia tra essi esiste ed è $h(\lambda, t) : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ definita come $h(\lambda, t) = \psi(t|\lambda)$ per $-1 \leq \lambda \leq 0$ e $h(\lambda, t) = \gamma(t\lambda)$ per $0 \leq \lambda \leq 1$.

R. Certo, intendo “omotopia a estremi fissi”: è quella che di solito si richiede quando si parla di omotopia tra cammini con gli stessi estremi. Se invece ci si accontentasse di un’omotopia a estremi non fissi (ma di solito, ripeto, non lo si fa), i due cammini della Figura 2.3(2) sarebbero omotopi tra loro in A : ad esempio tramite l’omotopia da lei giustamente suggerita, che nella sua prima parte con $\lambda \in [-1, 0]$ fa contrarre il cammino superiore γ nel suo punto di partenza e poi nella sua seconda parte con $\lambda \in [0, 1]$ inizia a percorrere tratti crescenti del cammino inferiore ψ fino a completarlo quando $\lambda = 1$ (la figura qui sotto mostra in successione alcuni stadi dell’omotopia).



A Appendici

A.1 Completezza, convergenza uniforme

Sia (X, d) uno spazio metrico (ad esempio uno spazio normato, cioè uno spazio vettoriale su \mathbb{R} o \mathbb{C} munito di una norma $\| \cdot \|$, nel qual caso si intende che $d(x, y) = \|x - y\|$). Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X si dirà essere *di Cauchy* se

Successione
di Cauchy

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ per cui se $n, m \geq n_\varepsilon$ allora $d(x_n, x_m) < \varepsilon$;

e si dirà che *converge* a un certo $\tilde{x} \in X$ (o *ha limite* \tilde{x}) (necessariamente unico) se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ per cui se $n \geq n_\varepsilon$ allora $d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon$.

Proposizione A.1.1. *Valgono le seguenti affermazioni.*

- (a) *Ogni successione di Cauchy è limitata.*
- (b) *Una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente è anch'essa convergente (allo stesso limite).*
- (c) *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. (a) (Ricordiamo che, in uno spazio metrico (X, d) il *diametro* di un sottoinsieme A è definito come $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$; e che A è detto *limitato* se $\text{diam } A < +\infty$.) Data una successione di Cauchy x_n , sia n_1 il minimo naturale tale che $d(x_n, x_m) \leq 1$ per ogni $n, m \geq n_1$; se $n_1 = 1$ la dimostrazione è terminata, altrimenti posto $r = \max_{j=1, \dots, n_1} d(x_j, x_{n_1})$ si avrà $r > 1$, e allora per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_m, x_{n_1}) \leq 2r$. (b) Sia x_n una successione di Cauchy, e sia x_{n_k} una sua sottosuccessione convergente a un punto $\tilde{x} \in X$. Dato $\varepsilon > 0$ siano $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n, m \geq n'_\varepsilon$, e $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n_k \geq n''_\varepsilon$: posto $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ e preso un k tale che $n_k \geq n_\varepsilon$, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, \tilde{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. (c) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{x} \in X$, dato $\varepsilon > 0$ sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, \tilde{x}) < \frac{1}{2}\varepsilon$: allora per $n, m \geq n_\varepsilon$ vale $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \tilde{x}) + d(x_m, \tilde{x}) < \varepsilon$. \square

La nozione di successione di Cauchy formalizza il fatto che “gli elementi della successione diventano vicini tra loro quanto si vuole“. Come visto, ogni successione convergente è di Cauchy; il contrario non è sempre vero, ma se accade (ovvero se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X) lo spazio metrico (X, d) si dirà *completo*.

Spazio completo

Proposizione A.1.2. *Sia (X, d) completo, e sia $D \subset X$. Allora (D, d) è completo se e solo se D è chiuso in X .*

Dimostrazione. Esercizio (notare che una successione di Cauchy in D lo è ovviamente anche in X , e ricordare che i punti di chiusura di D sono tutti e soli i limiti di successioni in D). \square

Esempi. I numeri reali \mathbb{R} con la distanza euclidea sono completi. In effetti una successione di Cauchy è limitata (Proposizione A.1.1(a)); sappiamo poi, per l'assioma di completezza, che in \mathbb{R} ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente; infine, una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente è anch'essa convergente allo stesso limite (Proposizione A.1.1(b)). Invece i razionali \mathbb{Q} non sono completi: ad esempio le successioni di numeri razionali $x'_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $x''_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$ sono di Cauchy ma il loro limite non è un numero razionale (entrambe convergono in \mathbb{R} al numero di Nepero e , che sappiamo essere irrazionale). Nemmeno l'intervallo $A =]0, 1]$ è completo: infatti $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy ma non converge in A .

Uno spazio normato completo è detto *spazio di Banach*. Ad esempio \mathbb{R}^n con la norma euclidea $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$, oppure \mathbb{C}^n con la norma hermitiana $\|x\| = (x \cdot \bar{x})^{\frac{1}{2}}$, sono spazi di Banach. In realtà gli spazi di Banach più interessanti sono quelli di dimensione infinita, come gli spazi di funzioni che presentiamo qui di seguito.

Spazio di Banach

Dato un insieme X , sullo spazio vettoriale delle *funzioni limitate*

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{esiste } M \geq 0 \text{ tale che } |f(x)| \leq M \text{ per ogni } x \in X\}$$

si definisce la *sup-norma* (o *norma della convergenza uniforme*) come

Sup-norma

$$(A.1) \quad \|\cdot\|_\infty : B(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Proposizione A.1.3. *La funzione $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $B(X, \mathbb{R})$, con la quale esso diventa uno spazio di Banach. Inoltre, se $X = K$ è uno spazio topologico compatto, lo spazio delle funzioni continue $C^0(K, \mathbb{R})$ è un sottospazio di Banach di $B(K, \mathbb{R})$.*

Più in generale, quanto detto vale anche per funzioni a valori in \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , sostituendo il modulo con la norma euclidea o hermitiana.

Dimostrazione. Il fatto che $\|\cdot\|_\infty$ sia una norma su $B(X, \mathbb{R})$ si verifica facilmente (esercizio). Dire poi che una successione $f_n \in B(X, \mathbb{R})$ è di Cauchy per la sup-norma implica che $f_n(x)$ è di Cauchy in \mathbb{R} per ogni $x \in X$: dunque, poiché \mathbb{R} è completo, per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ convergerà a un certo valore $\alpha_x \in \mathbb{R}$. Definiremo allora $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \alpha_x$: si tratta in effetti di una funzione limitata, perché se $n_0 \in \mathbb{N}$ è tale che $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq 1$ (ovvero $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in X$) e $M > 0$ è tale che $|f_{n_0}(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$ allora $|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq M + 1$. Se poi $X = K$ è uno spazio topologico compatto, per Weierstrass sappiamo che ogni funzione continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ammette estremi assoluti, in particolare è limitata: dunque $C^0(K, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $B(K, \mathbb{R})$, che è anche chiuso rispetto alla sup-norma (infatti, come vedremo tra breve con la Proposizione A.1.7, il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua): ma allora è anch'esso completo grazie alla Proposizione A.1.2. Infine, per le funzioni a valori in \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n i ragionamenti restano gli stessi sostituendo il modulo di \mathbb{R} con la norma euclidea di \mathbb{R}^n o la norma hermitiana di \mathbb{C}^n . \square

Se (X, d) è uno spazio metrico, una funzione $T : X \rightarrow X$ si dirà essere una *contrazione* se esiste un numero $0 < \alpha < 1$ tale che $d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$; una *contrazione* è una funzione continua⁽¹⁰³⁾. Vale allora il seguente celebre risultato:

Contrazione

⁽¹⁰³⁾In realtà, addirittura uniformemente continua: dato $\varepsilon > 0$ e posto $\delta = \varepsilon/\alpha$, si ha che se $d(x_1, x_2) < \delta$ allora $d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \varepsilon$.

Teorema A.1.4. (Lemma delle Contrazioni di Banach-Caccioppoli) *Se (X, d) è uno spazio metrico completo e $T : X \rightarrow X$ è una contrazione, allora T ha un unico punto unito: ovvero esiste un unico $x_T \in X$ tale che $T(x_T) = x_T$.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che un eventuale punto fisso di T è unico: infatti se ce ne fossero due, diciamo x_T^1 e x_T^2 , allora $d(x_T^1, x_T^2) = d(T(x_T^1), T(x_T^2)) \leq \alpha d(x_T^1, x_T^2)$, ovvero $(1 - \alpha)d(x_T^1, x_T^2) = 0$ da cui, essendo $\alpha < 1$, si ricava che $d(x_T^1, x_T^2) = 0$: ma questo equivale a $x_T^1 = x_T^2$. Passiamo ora all'esistenza del punto fisso. Prendiamo un qualsiasi elemento x_0 di X , e definiamo induttivamente $x_n = T(x_{n-1})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ovvero, x_n si ottiene applicando n volte T a x_0). Dimostriamo ora che la successione x_n è di Cauchy. In effetti si ha $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$, da cui, presi $n > m$, si ha $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \leq (\sum_{j=m}^{n-1} \alpha^j) d(x_1, x_0) = (\alpha^m \sum_0^{n-m-1} \alpha^j) d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$: considerato allora un qualsiasi $\varepsilon > 0$ e preso $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ abbastanza grande affinché $\frac{\alpha^{n_\varepsilon}}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon$, per ogni $n \geq m \geq n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^{n_\varepsilon}}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon$, come si voleva. Essendo (X, d) completo, la successione x_n convergerà a un certo x_T : ma allora, poiché T è continua, si ha che $T(x_T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x_T$, ovvero x_T è il punto fisso cercato. \square

In realtà si può raggiungere un enunciato più generale:

Corollario A.1.5. *Se (X, d) è uno spazio metrico completo e $T : X \rightarrow X$ è funzione continua per cui esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $T^r = T \circ T \circ \dots \circ T$ (r volte) sia una contrazione, allora T ha un unico punto unito, che è lo stesso di T^r .*

Dimostrazione. Un eventuale punto unito per T deve essere unico: infatti i punti uniti per T lo sono anche per T^r , e per il Lemma delle Contrazioni T^r ne ha uno e uno solo. Detto poi \tilde{x} il punto fisso di T^r , si ha $T^r(T(\tilde{x})) = T(T^r(\tilde{x})) = T(\tilde{x})$, pertanto anche $T(\tilde{x})$ è punto fisso di T^r : ma allora $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$. \square

Esempi. (1) Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, l'omotetia $T_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ data da $T_\lambda(x) = \lambda x$ è una contrazione (infatti $\|T_\lambda(x_1) - T_\lambda(x_2)\| = |\lambda| \|x_1 - x_2\|$); il punto fisso è ovviamente 0. **(2)** La funzione $\cos : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ è una contrazione (infatti per un certo $\xi \in]-1, 1[$ vale $|\cos(x_1) - \cos(x_2)| = |\sin \xi| |x_1 - x_2| \leq (\sin 1) |x_1 - x_2|$); il punto fisso di \cos su $[-1, 1]$ si trova come limite della successione ottenuta applicando più volte \cos a un qualunque elemento di $[-1, 1]$, ad esempio $\cos(\cos(\cos(\dots(\cos 0) \dots)))$.

Dato un insieme X , ci chiediamo in che modi una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ possa convergere a una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Parleremo di

- *convergenza puntuale* se per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ converge a $f(x)$, cioè se per ogni $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > n_{\varepsilon, x}$;
- *convergenza uniforme* se essa avviene in modo uniforme per i vari punti di X , cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$ e ogni $x \in X$.

Convergenza puntuale

Convergenza uniforme

Notiamo che, usando la sup-norma (A.1), la convergenza uniforme può essere espressa dicendo che le funzioni $f_n - f$ sono limitate e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.⁽¹⁰⁴⁾

Proposizione A.1.6. *La convergenza uniforme implica la puntuale; il viceversa è falso.*

⁽¹⁰⁴⁾Questo giustifica il nome di “norma della convergenza uniforme” usualmente dato alla sup-norma.

Dimostrazione. Che la convergenza uniforme implichi quella puntuale è ovvio. D'altra parte la successione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge puntualmente alla funzione nulla, ma non uniformemente. \square

Sarebbe auspicabile che eventuali proprietà (continuità, derivabilità, integrabilità, ...) delle funzioni f_n potessero essere mantenute anche nel loro limite f . In questa ottica la convergenza puntuale è un tipo di convergenza piuttosto blando, che non assicura tale mantenimento: la convergenza uniforme è quella giusta a tale scopo, nel senso che ora precisiamo.

Proposizione A.1.7. (Continuità) *Sia X spazio topologico. Se $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, anche f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$; fissato $\varepsilon > 0$ sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$ e ogni $x \in X$. Poiché f_{n_ε} è continua, esiste un intorno U di x_0 in X tale che $|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x \in U$. Per tali x vale allora $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| + |f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. \square

Proposizione A.1.8. *Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni.*

- (a) (Derivabilità) *Si supponga che le f_n siano di classe \mathcal{C}^1 ; che esista almeno un $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione $f_n(x_0)$ sia convergente; e che la successione delle derivate f'_n converga uniformemente a una funzione continua g . Allora le f_n convergono uniformemente a una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 , e vale $f' = g$.*
- (b) (Integrabilità) *Si supponga che le f_n siano continue e convergano uniformemente a una funzione (continua) f . Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.*

Dimostrazione. (a) Detto $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$, per $x \in [a, b]$ poniamo $f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt$: si tratta di una funzione \mathcal{C}^1 tale che $f' = g$. Resta solo da mostrare che le f_n convergono uniformemente a f : in effetti per $x \in [a, b]$ vale $|f_n(x) - f(x)| = |(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt) - (\ell + \int_{x_0}^x g(t) dt)| \leq |f_n(x_0) - \ell| + |\int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt| \leq |f_n(x_0) - \ell| + |\int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt| \leq |f_n(x_0) - \ell| + |x - x_0| \|f'_n - g\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \ell| + (b - a) \|f'_n - g\|_\infty$, che tende a 0 quando $n \rightarrow +\infty$. (b) Vale $|\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty$, che tende a 0 quando $n \rightarrow +\infty$. \square

Diamo ora alcuni esempi, che illustrano anche la portata dei precedenti risultati.

Esempi. (1) Il limite di una successione di funzioni continue che converge solo puntualmente e non uniformemente potrebbe essere una funzione discontinua. Ad esempio, la successione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$ (Figura 8(a)) converge puntualmente a $f(x) = \text{sign } x$ ma non uniformemente (infatti $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+n|x|} = 1$), e f è discontinua; lo stesso accade per $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g_n(x) = x^n$, il cui limite puntuale è $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(1) = 1$ e $g(x) = 0$ per $x \neq 1$. Ciò non è però sempre il caso: come detto, la successione $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $h_n(x) = \frac{x}{n}$ converge puntualmente a $h(x) \equiv 0$, ma non uniformemente (infatti $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = +\infty$), tuttavia stavolta h è continua. **(2)** La successione h_n appena vista è fatta di funzioni continue e converge puntualmente a una funzione continua, ma non uniformemente. Visto che in questo caso il difetto di uniformità è dovuto alla illimitatezza del dominio (in effetti se ci restringessimo a un intervallo compatto la convergenza delle h_n alla funzione nulla diventerebbe uniforme), si potrebbe allora pensare che una successione di funzioni continue su un compatto che converge puntualmente a una funzione continua vi converga in realtà anche uniformemente. Questo però è falso in generale. Ad esempio, la successione di

funzioni continue $i_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $i_n(x) = 2nx$ (per $0 < x \leq \frac{1}{2n}$), $i_n(x) = 2(1-nx)$ (per $\frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n}$) e $i_n(x) = 0$ (per $\frac{1}{n} < x \leq 1$; in un disegno, il grafico di i_n si ottiene unendo con una spezzata i punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 1)$, $(\frac{1}{n}, 0)$ e $(1, 0)$) converge puntualmente alla funzione nulla, ma non uniformemente (infatti $\sup_{x \in [0,1]} |i_n(x) - 0| = 1$). Stesso discorso per le funzioni derivabili $\tilde{i}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\tilde{i}_n(x) = nx e^{-nx}$ (converge puntualmente alla funzione nulla, ma $\sup_{x \in [0,1]} |\tilde{i}_n(x) - 0| = \max_{x \in [0,1]} \tilde{i}_n(x) = \tilde{i}_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$).

(3) La successione $j_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $j_n(x) = \sqrt{x^2 + (1/n)^2}$ (Figura 8(b)) converge puntualmente a $h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$; si ha inoltre $|j_n(x) - h(x)| = \frac{(1/n)^2}{\sqrt{x^2 + (1/n)^2} + |x|} < \frac{(1/n)^2}{\sqrt{(1/n)^2}} = \frac{1}{n}$, dunque la convergenza è anche uniforme (in effetti h è continua, come prescrive la Proposizione A.1.7). D'altra parte le derivate $j'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (1/n)^2}}$ tendono puntualmente a $\text{sign } x$, che non è continua in $x = 0$, dunque all'intorno di 0 non si può applicare la Proposizione A.1.8(a): non sorprende dunque che $h(x)$ non sia derivabile in $x = 0$.

(4) La successione $k_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $k_n(x) = 4^{n-1}x$ (per $0 < x \leq \frac{1}{2n}$), $k_n(x) = 2^{n-1} - 4^{n-1}x$ (per $\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2^{n-1}}$) e nulla altrove (Figura 8(c): il grafico di j_n si ottiene unendo con una spezzata i punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 4^{n-1})$, $(\frac{1}{2^{n-1}}, 0)$ e $(1, 0)$) converge alla funzione nulla puntualmente, ma non uniformemente (si noti che $k_n(\frac{1}{2n}) = 4^{n-1}$ tende a $+\infty$). D'altra parte, la successione $\ell_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\ell_n(x) = \frac{n-|x|}{n^2}$ (per $x < |n|$) e nulla altrove (Figura 8(d)) converge alla funzione nulla uniformemente (si noti che $\|\ell_n\|_\infty = \ell_n(0) = \frac{1}{n}$ tende a 0). Si tratta di due successioni di funzioni continue, ma a nessuna di esse si può applicare la Proposizione A.1.8(b) (le k_n hanno convergenza solo puntuale, mentre le ℓ_n non sono definite in un intervallo compatto): non è allora una sorpresa notare che la conclusione non vale (l'integrale delle k_n e delle ℓ_n vale 1 per ogni n , mentre l'integrale del loro limite è nullo).

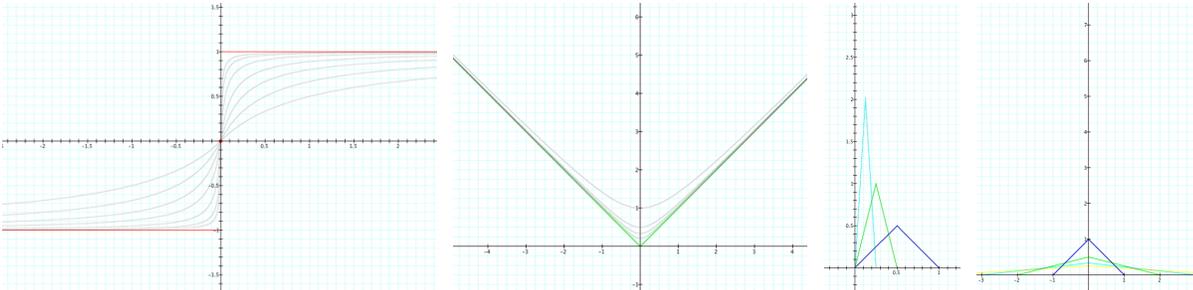


Figura 8: **(a)** Convergenza puntuale e non uniforme. **(b)** Convergenza uniforme, ma non delle derivate. **(c-d)** Per queste successioni il passaggio al limite negli integrali non vale.

Quanto detto si applica naturalmente anche alle *serie di funzioni*: si dirà che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente o uniformemente a $s(x)$ se la successione delle ridotte $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ converge puntualmente o uniformemente a $s(x)$. Nel caso in cui tutte le funzioni f_n siano limitate (ovvero $f_n \in B(X, \mathbb{R})$), c'è un'ulteriore importante nozione di convergenza: si dirà che $\sum f_n(x)$ converge *totalmente* (o *normalmente*) se la serie numerica positiva $\sum \|f_n\|_\infty$ è convergente. Ad esempio:

Convergenza totale

Proposizione A.1.9. *Sia $\sum f_n(x)$ una serie di funzioni. Se esiste una successione di numeri reali positivi $\alpha_n > 0$ tale che la serie $\sum \alpha_n$ sia convergente e $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in X$, allora $\sum f_n(x)$ è totalmente convergente.*

Dimostrazione. Dire che $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ per ogni $x \in X$ equivale a dire che $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$, dunque se $\sum \alpha_n$ è convergente tale è anche $\sum \|f_n\|_\infty$ per il criterio del confronto. \square

Come è intuibile, la convergenza totale è molto forte e implica addirittura la convergenza uniforme a una somma limitata:

Proposizione A.1.10. (Test di Weierstrass per la convergenza uniforme) *Una serie di funzioni totalmente convergente converge uniformemente a una funzione somma limitata.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ la serie $\sum f_n(x)$ è convergente in \mathbb{R} (addirittura assolutamente convergente, in quanto $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$): indichiamone con $s(x)$ la somma. La funzione $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ così ottenuta è limitata, perché per ogni $x \in X$ vale $|s(x)| = |\sum f_n(x)| \leq \sum |f_n(x)| \leq \sum \|f_n\|_\infty$; inoltre la convergenza di $\sum f_n(x)$ a $s(x)$ è uniforme, perché per ogni $x \in X$ vale $|s_n(x) - s(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ e perciò $\|s_n - s\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. Ma questo prova che $\|s_n - s\|_\infty$ tende a 0, in quanto il secondo membro (resto di una serie convergente) è infinitesimo. \square

Un caso particolarmente importante è quello delle serie di potenze:

Proposizione A.1.11. *Una serie di potenze converge totalmente (dunque anche uniformemente) su ogni disco chiuso di raggio strettamente minore del raggio di convergenza.*

Dimostrazione. Sia $\sum a_n z^n$ la serie di potenze, e sia $r > 0$ il raggio di convergenza. Se $|z| \leq r' < r$ vale $|a_n z^n| \leq |a_n| r'^n$, e $\sum |a_n| r'^n$ converge: basta allora applicare la Proposizione A.1.9 con $\alpha_n = |a_n| r'^n$. \square