Prove d'esame scritto

Prima prova parziale (19/05/2005)

1. (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali, e calcolarli per $\alpha = 1$:

$$\text{(i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\sin^{1-2\alpha}(x)\ \cos^{\frac{\alpha}{2}}(x)}\, dx\ , \qquad \text{(ii)} \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-3}\ \operatorname{arctg}^\alpha(x)}{(x-1)^{\alpha-1}}\, dx\ .$$

(b) Posta $f_\alpha(x) = (2x^2+3\sqrt{x})^{1-\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$, discutere per $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta degli integrali generalizzati $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$. Dire in particolare quando converge $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$.

2. (a) Data l'equazione differenziale $x^3y' + y + 1 = 0$ studiarne crescenza e convessità delle soluzioni. Trovarne l'integrale generale sia come equazione lineare che a variabili separabili, e la soluzione per cui $y(1) = 0$. Discutere infine la parità delle soluzioni, e dire se vi sono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Data l'equazione differenziale $(e^x+1)(y''-y-4\sin x)+3 = 0$, si dica qual'è la struttura del suo integrale generale e qual'è il dominio massimale delle soluzioni. Determinarne poi l'integrale generale.

3. (a) Disegnare e parametrizzare in modo opportuno la curva piana A di equazione cartesiana $2x\sqrt{x} + 3y + 3 = 0$ con $0 \le x \le 1$, e la curva piana B di equazione polare $\rho\theta - 2 = 0$ con $1 \le \theta \le 2\pi$. Determinarne il vettore tangente e l'elemento d'arco. Calcolarne infine la lunghezza ed il baricentro geometrico (basta indicare correttamente l'integrale che dà luogo a queste grandezze).

(b) Una curva di $\mathbb{R}^3$ è espressa in coordinate sferiche (ρ, θ, φ) dalle equazioni $\rho\sin\varphi = 1$ e $\theta = \varphi$, con $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Disegnarne il sostegno, parametrizzarla sia tramite la coordinata sferica φ che tramite la coordinata cartesiana z, esibendo il cambio di parametro $z = \alpha(\varphi)$. Dire infine per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale d'arco (generalizzato), su tale curva, della funzione $x^a y^{1-2a} z^{2a}$.

Soluzioni.

(1) Denotiamo sempre con $f_\alpha(x)$ la funzione integranda.
(a) (i) Per $x \to 0^+$ si ha $\sin x \sim_0 x$ e $1-\cos x \sim_0^* x^2$, dunque $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{2\alpha-1}(x^2)^\alpha = x^{4\alpha-1}$, dunque deve essere $4\alpha - 1 > -1$ cioè $\alpha > 0$. Invece per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ si ha $\cos x \sim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi}{2} - x$, dunque $f_\alpha(x) \sim_{\frac{\pi}{2}^-}^* (\frac{\pi}{2} - x)^{-\frac{\alpha}{2}}$; si deve avere perciò $-\frac{\alpha}{2} > -1$, cioè $\alpha < 2$. L'integrale converge dunque per $0 < \alpha < 2$. Quando $\alpha = 1$, posto $t = \cos x$ si ottiene $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\sqrt{\cos x}}\, dx = -\int_1^0 \frac{1-t}{\sqrt{t}}\, dt = [2\sqrt{t} - \frac{2}{3}t\sqrt{t}]_0^1 = \frac{4}{3}$. (ii) Per $x \to 1^+$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{1^+}^* (x-1)^{1-\alpha}$, dunque deve essere $1 - \alpha > -1$ ovvero $\alpha < 2$. Per $x \to +\infty$ si ha invece $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* \frac{x^{\alpha-3}}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{x^2}$, dunque la funzione è sempre integrabile. L'integrale converge dunque per $\alpha < 2$. Per $\alpha = 1$ si ottiene $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx = [(-\frac{1}{x})\operatorname{arctg} x]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}(-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2+1}\, dx = 0 - (-\frac{\pi}{4}) + \int_1^{+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})\, dx = \frac{\pi}{4} + [\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2.$

(b) La funzione $f_\alpha(x)$ ha segno costante (positivo) per $x \to +\infty$, dunque integrabilità semplice e assoluta coincidono: essendo $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{2(1-\alpha)}$, la condizione per l'esistenza di $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ è che $2(1-\alpha) < -1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$. Invece per $x \to 0^+$ il segno di $f_\alpha(x)$ oscilla (a parte il caso $\alpha = 0$, che però si risolve subito: infatti la funzione diventa $f_0(x) = 2x^2 + 3\sqrt{x}$, ovviamente integrabile) e conviene porre $x = \frac{1}{t}$, da cui $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \big(\frac{2}{t^2} + \frac{3}{\sqrt{t}}\big)^{1-\alpha} \frac{1}{t^2}\cos(\alpha t)\,dt$, integrale generalizzato in $+\infty$. Essendo $\frac{2}{t^2} + \frac{3}{\sqrt{t}} \sim^*_{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}$, ne ricaviamo che $(\frac{2}{t^2} + \frac{3}{\sqrt{t}})^{1-\alpha}\frac{1}{t^2} \sim^*_{+\infty} (t^{-\frac{1}{2}})^{1-\alpha} t^{-2} = t^{\frac{\alpha-5}{2}}$: pertanto si ha integrabilità assoluta quando $\frac{\alpha-5}{2} < -1$ (ovvero $\alpha < 3$, che comprende il caso particolare $\alpha = 0$ già esaminato), mentre invece quando $-1 \le \frac{\alpha-5}{2} < 0$ (ovvero $3 \le \alpha < 5$) il criterio di Abel-Dirichlet dà l'integrabilità semplice, che però (ragionando come per l'integrale di Dirichlet) non è assoluta. Infine, per $\alpha \ge 5$ non si ha convergenza (in generale, come visto, ciò vale per $\int_1^{+\infty} u^\gamma \cos u\,du$ con $\gamma \ge 0$). Insomma, per quanto detto, $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge assolutamente per $\frac{3}{2} < \alpha < 3$, e solo semplicemente per $3 \le \alpha < 5$.

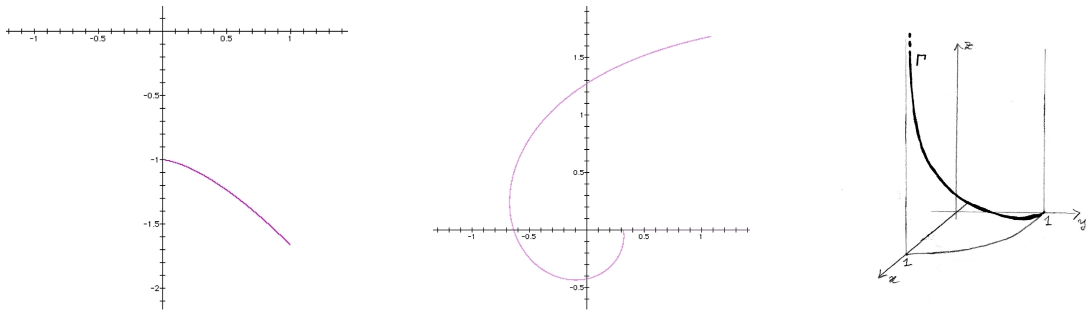
(2) (a) Per $x \neq 0$ si trova $y' = -\frac{y+1}{x^3}$, dunque le soluzioni sono strettamente crescenti per ($x > 0$ e $y < -1$) oppure per ($x < 0$ e $y > -1$). Derivando l'equazione rispetto x si ottiene $3x^2y' + x^3y'' + y' = 0$ da cui $y'' = \frac{3x^2+1}{x^6}(y+1)$, dunque le soluzioni sono strettamente convesse per $y > -1$. Come equazione lineare si ha $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x^3}$ e $q(x) = -\frac{1}{x^3}$: essendo $P(x) = -\frac{1}{2x^2}$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = -e^{-\frac{1}{2x^2}}$, l'integrale generale è $y(x) = e^{\frac{1}{2x^2}}(-e^{-\frac{1}{2x^2}} + k) = ke^{\frac{1}{2x^2}} - 1$. Come variabili separabili si ha $\frac{y'}{y+1} = -\frac{1}{x^3}$ da cui $\log|y+1| = \frac{1}{2x^2} + k$ con k arbitrario, da cui $|y+1| = ke^{\frac{1}{2x^2}}$ con $k > 0$, da cui $y + 1 = ke^{\frac{1}{2x^2}}$ con k arbitrario, ovvero nuovamente $y(x) = ke^{\frac{1}{2x^2}} - 1$. Imponendo $y(1) = 0$ si ottiene $0 = k\sqrt{e} - 1$, da cui $k = 1/\sqrt{e}$, dunque $y(x) = e^{\frac{1-x^2}{2x^2}} - 1$. L'equazione va risolta separatamente per $x < 0$ o $x > 0$, dunque la questione della parità va intesa in un senso "debole": quello che possiamo provare a vedere è: se $\varphi(x)$ è una soluzione per $x > 0$, allora $\psi(x) := \varphi(-x)$ è una soluzione per $x < 0$? Ciò è vero, in quanto $x^3\psi'(x) + \psi(x) + 1 = x^3(-\varphi'(-x)) + \varphi(-x) + 1 = (-x)^3\varphi'(-x) + \varphi(-x) + 1 = 0$. Infine, se nell'integrale generale si ha $k \neq 0$ allora $\lim_{x\to 0^\mp} y(x) = +\infty$: dunque l'unica soluzione su $\mathbb{R}$ è la costante $y \equiv -1$.

(b) L'equazione è lineare, e si pone facilmente nella forma a coefficienti costanti $y'' - y = 4\sin x - \frac{3}{e^x+1}$. Si noti che $b(x) = 4\sin x - \frac{3}{e^x+1}$ è definita su tutto $I = \mathbb{R}$, dunque l'integrale generale sarà un sottospazio affine (di dimensione 2) nello spazio vettoriale $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ delle funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ su *tutto* $\mathbb{R}$. L'equazione caratteristica ha radici ± 1, dunque un sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea è dato da $\varphi_1(x) = e^{-x}$ e $\varphi_2(x) = e^x$. Per una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione completa sfruttiamo il principio di sovrapposizione. Per $b_1(x) = 4\sin x = 4\mathrm{Im}(e^{ix})$, una soluzione particolare sarà $\tilde{y}_1(x) = \mathrm{Im}(\lambda e^{ix})$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{C}$: imponendo che $(\lambda e^{ix})'' - (\lambda e^{ix}) = 4e^{ix}$ si ottiene $\lambda = -2$, dunque $\tilde{y}_1(x) = -2\sin x$. Per $b_2(x) = -\frac{3}{e^x+1}$ bisogna invece usare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. In questo caso il wronskiano ha determinante 2, dunque sarà $\tilde{y}_2(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x)$ con $\gamma_1(x) = -\int \frac{e^x}{2}\frac{-3}{e^x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{3}{2}\log(e^x+1)$ e $\gamma_2(x) = \int \frac{e^{-x}}{2}\frac{-3}{e^x+1}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2(t+1)} = -\frac{3}{2}\int\big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\big)\,dt = -\frac{3}{2}(\log(e^x+1) - x - e^{-x})$. L'integrale generale è dunque $y(x) = (a + \frac{3}{2}\log(e^x+1))e^{-x} + (b - \frac{3}{2}(\log(e^x+1) - x - e^{-x}))e^x - 2\sin x$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

(3) (a) A è il tratto di grafico della funzione $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 1$ con $0 \le x \le 1$, ed è parametrizzato da $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(x) = (x, -\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 1)$. Il vettore tangente è dunque $\gamma'(x) = (1, -\sqrt{x})$, e l'elemento d'arco è $d\sigma = ||\gamma'(x)||\,dx = \sqrt{1+x}\,dx$. La lunghezza risulta $L_A = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ (che si calcola facilmente e vale $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$), ed il baricentro è $G_A = (\frac{1}{L_A}\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx, \frac{1}{L_A}\int_0^1(-\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 1)\sqrt{1+x}\,dx)$.
B è il tratto di *spirale iperbolica* $\rho = \frac{2}{\theta}$ con $1 \le \theta \le 2\pi$, ed è parametrizzato da $\gamma : [1, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(\theta) = (\frac{2\cos\theta}{\theta}, \frac{2\sin\theta}{\theta})$. Il vettore tangente è $\gamma'(\theta) = (\frac{2(-\theta\sin\theta - \cos\theta)}{\theta^2}, \frac{2(\theta\cos\theta - \sin\theta)}{\theta^2})$, e l'elemento d'arco è $d\sigma = ||\gamma'(\theta)||\,d\theta = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta = \frac{2\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\,d\theta$. La lunghezza è $L_B = \int_1^{2\pi} \frac{2\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\,d\theta$, e il baricentro $G_B = (\frac{1}{L_B}\int_1^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{\theta}\frac{2\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\,d\theta, \frac{1}{L_B}\int_1^{2\pi}\frac{2\sin\theta}{\theta}\frac{2\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}\,d\theta)$.

(b) Essendo $(x, y, z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, da $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$ e $\theta = \varphi$ si ricava subito $\gamma_1 :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$ con $\gamma_1(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \operatorname{cotg}\varphi)$. Dunque il sostegno Γ della curva giace sulla porzione della superficie cilindrica circolare di asse l'asse z e raggio di base 1 che sta nell'ottante dei punti con coordinate ≥ 0; esso proviene (per $\varphi \to 0^-$) da $(1, 0, +\infty)$ e arriva (per $\varphi \to \frac{\pi}{2}^-$) nel punto $(0, 1, 0)$, girando sulla porzione di superficie cilindrica. Si ha $z = \alpha(\varphi) = \operatorname{cotg}\varphi$, da cui il cambio di variabili $\alpha :]0, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$. Essendo $\cos\varphi = \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi}}$ e

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi}}$, si ottiene poi $\gamma_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma_2(z) = (\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, z)$. Infine, l'elemento d'arco con γ_1 è $d\sigma = ||\gamma_1'(\varphi)||\, d\varphi = \sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + (-\frac{1}{\sin^2\varphi})^2}\, d\varphi = \frac{\sqrt{1+\sin^4\varphi}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi$, e dunque $\int_{\gamma_1} x^a y^{1-2a} z^{2a}\, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^a (\sin\varphi)^{1-2a} (\operatorname{cotg}\varphi)^{2a} \frac{\sqrt{1+\sin^4\varphi}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{3a} (\sin\varphi)^{-1-4a} \sqrt{1+\sin^4\varphi}\, d\varphi$: questo integrale generalizzato converge in 0^+ se e solo se $-1-4a > -1$ (ovvero $a < 0$), e in $\frac{\pi}{2}^-$ se e solo se $3a > -1$ (ovvero $a > -\frac{1}{3}$), dunque esso converge se e solo se $-\frac{1}{3} < a < 0$. Essendo l'integrale all'arco invariante per cambi di parametro, allo stesso risultato si deve arrivare, naturalmente, anche usando γ_2: infatti l'elemento d'arco risulta $d\sigma = \frac{\sqrt{z^4+2z^2+2}}{z^2+1}\, dz$, e dunque $\int_{\gamma_2} x^a y^{1-2a} z^{2a}\, d\sigma = \int_0^{+\infty} \frac{z^a}{(z^2+1)^{\frac{a}{2}}} \frac{1}{(z^2+1)^{\frac{a}{2}}} z^{2a} \frac{\sqrt{z^4+2z^2+2}}{z^2+1}\, dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^{3a}\sqrt{z^4+2z^2+2}}{(z^2+1)^{\frac{3-a}{2}}}\, dz$; questo integrale generalizzato converge in 0^+ se e solo se $3a > -1$ (ovvero $a > -\frac{1}{3}$), e in $+\infty$ se e solo se $3a + \frac{4}{2} - 2\frac{3-a}{2} < -1$ (ovvero $a < 0$), dunque ancora una volta esso converge se e solo se $-\frac{1}{3} < a < 0$.



(a) e **(b)** Le curve A e B dell'esercizio 3(a). **(c)** La curva Γ dell'esercizio 3(b).

Prova scritta - Seconda prova parziale (23/06/2005)

1. [S] Dire per quali $\alpha > 0$ convergono gli integrali generalizzati (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\log(3x^{2\alpha}+1)}{x^{\alpha+1}}\,dx$ e (ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{3\alpha-1}(x)}{(1+\cos x)^{\alpha}}\,dx$, e calcolarli per $\alpha = 1$.

2. [S] Trovare l'integrale generale delle equazioni differenziali (i) $4y'' - y = x + 3e^x$ e (ii) $x^2yy' + 2 = 0$. Detta poi $\tilde{y}_1(x)$ la soluzione di (i) con $\tilde{y}_1(0) = 1$ e $\tilde{y}_1'(0) = 0$, e $\tilde{y}_2(x)$ quella di (ii) con $\tilde{y}_2(1) = 2$, dire quante sono le soluzioni $t > 0$ di $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_2(t)$.

3. Sia $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+1}+y-1}{y-x}$.

(a) [S, P] Determinare il dominio, gli zeri e il segno di f. Dire dove f è continua, e dove differenziabile, determinando il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Calcolare i limiti di f nei punti di accumulazione del dominio e in ∞_2.

(b) [P] Dire (dimostrandolo) se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2(x+y),\ 2|y-x| \ge 1\}$ è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso per archi. Stesse domande per il tratto ℓ di spirale archimedea $\rho = 3(\theta + 1)$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. Parametrizzando ℓ tramite θ nel modo naturale, calcolare la derivata totale $\frac{df}{d\theta}(0)$.

4. Sia $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x^2 + 2yz - e^{x+2y-z}, 3xy - z^2 - yz)$.

(a) [S, P] Determinare eventuali estremi locali di $g_2(x,y,z)$ in $\mathbb{R}^3$.
Da $(g_1, g_2)(x,y,z) = (0, -1)$ si vuole esplicitare x e y in funzione di z all'intorno della soluzione $A(1,0,1)$. Dimostrare che ciò è possibile, e calcolare $d(x,y)_1$.

(b) [P] Sia h la restrizione di g al piano $z = x + 2y$. Dire in quali punti h è diffeomorfismo locale; calcolare poi lo sviluppo di Taylor al primo ordine dell'inversa locale di h nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 3)$.

5. (a) [S, P] Quali insiemi di livello di $g(x,y) = 2x^3y - 6x + y^2$ sono curve regolari? Sia M la curva di livello passante per $A(0,2)$: parametrizzare M all'intorno di A, e calcolare in più modi l'equazione della retta affine tangente a M in A.

(b) [P] Determinare, per quanto possibile, eventuali estremi locali di $f_1(x,y) = x$ e $f_2(x,y) = y$ su M, spiegando qual'è il significato geometrico di tale ricerca.
Qual'è la conica che meglio approssima M all'intorno di A?

Soluzioni.

(1) Indichiamo con $f_\alpha(x)$ la funzione integranda; si ricordi che $\alpha > 0$.

(i) Si ha $\log(3x^{2\alpha}+1) \sim_{0^+} 3x^{2\alpha}$, dunque $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} \frac{x^{2\alpha}}{x^{\alpha+1}} = x^{\alpha-1}$: la condizione è dunque $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$. D'altra parte è immediato notare che $\log(3x^{2\alpha}+1) \sim_{+\infty} \log(3x^{2\alpha}) = \log 3 + 2\alpha \log x \sim^*_{+\infty} \log x$, dunque

$f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha+1}}$: la condizione stavolta è $\alpha + 1 > 1$, ovvero di nuovo $\alpha > 0$. Dunque l'integrale converge per $\alpha > 0$. Quando $\alpha = 1$ si ottiene $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(3x^2+1)}{x^2}\, dx$: integrando per parti si ha $I = (-\frac{\log(3x^2+1)}{x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{6x}{3x^2+1}(-\frac{1}{x})\, dx = 0 - 0 + 6\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{3})]_0^{+\infty} = 2\sqrt{3}(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi\sqrt{3}$.

(ii) Si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{3\alpha-1}$, dunque deve essere $3\alpha - 1 > -1$, cioè $\alpha > 0$. D'altra parte, posto $t = \pi - x$ si ha $\frac{\sin^{3\alpha-1}(x)}{(1+\cos x)^\alpha} = \frac{\sin^{3\alpha-1}(t)}{(1-\cos t)^\alpha}$, ed il problema diventa di integrazione in $t = 0$: essendo $\sin^{3\alpha-1}(t) \sim_0 t^{3\alpha-1}$ e $(1 - \cos t)^\alpha \sim_0^* t^{2\alpha}$, si ottiene $\frac{\sin^{3\alpha-1}(t)}{(1-\cos t)^\alpha} \sim_0^* \frac{t^{3\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = t^{\alpha-1}$: dunque deve essere anche $\alpha - 1 > -1$, ovvero di nuovo $\alpha > 0$. Dunque anche questo integrale converge per $\alpha > 0$. Quando $\alpha = 1$ si ottiene facilmente $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{1+\cos x}\, dx = \int_0^\pi (1 - \cos x)\, dx = (x - \sin x]_0^\pi = \pi$.

(2) Una base di soluzioni dell'equazione omogenea $4y'' - y = 0$ è data da $e^{\frac{x}{2}}$ e $e^{-\frac{x}{2}}$; poi, col principio di sovrapposizione, si trova facilmente la soluzione particolare $-x + e^x$. Dunque lo spazio delle soluzioni di (i) è $\{Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{2}} - x + e^x : A, B \in \mathbb{C}\}$. Imponendo le condizioni iniziali assegnate si ottiene $A = B = 0$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = e^x - x$. L'equazione $x^2yy' + 2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili: da $yy' = -\frac{2}{x^2}$ si ottiene $\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{x} + k$, dunque l'integrale generale di (ii) è $y = \pm\sqrt{\frac{4+kx}{x}}$ (con $k \in \mathbb{R}$), definito dove $\frac{kx+4}{x} \geq 0$. Imponendo la condizione iniziale si ha $2 = \pm\sqrt{4 + k}$, da cui $k = 0$ ed il segno "+": perciò si ha $\tilde{y}_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, definita per $x > 0$. Lo studio dell'andamento di $\tilde{y}_1(x) = e^x - x$ e $\tilde{y}_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ è elementare, e mostra chiaramente l'esistenza di un solo $t_0 > 0$ (con $t_0 \sim 1,1$) in cui $\tilde{y}_1(t_0) = \tilde{y}_2(t_0)$.

(3) (a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+1}+y-1}{y-x}$ è definita per $x \geq -1$ e $y \neq x$. Nel dominio, essa si annulla quando $\sqrt{x+1} = 1 - y$: se $1 - y < 0$ (ovvero per $y > 1$) ciò è sempre vero, mentre per $1 - y \geq 0$ (ovvero per $y \leq 1$) ciò equivale a $x + 1 = (1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2$, ovvero $x = y^2 - 2y$. Dunque f si annulla su tutti e soli i punti del dominio che stanno sulla parte di parabola $x = y^2 - 2y$ con $y \leq 1$. Quanto al segno, il numeratore è > 0 per $\sqrt{x+1} + y - 1 \geq 0$ ovvero, procedendo come prima, se $y > 1$ oppure se ($y \leq 1$ e $x > y^2 - 2y$) (è la parte di dominio che sta sopra il ramo inferiore della parabola), mentre il denominatore è > 0 sopra la bisettrice $y = x$: il segno di $f(x, y)$ ne segue per moltiplicazione dei due segni, dunque è > 0 quando (x, y) sta sopra sia al ramo di parabola che alla bisettrice, oppure quando (x, y) sta sotto entrambi. f è continua in tutti i punti del dominio, e differenziabile ovunque tranne che nei punti della retta $x = -1$ (a causa di $\sqrt{x+1}$); essendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(y-x)+(\sqrt{x+1}+y-1)}{(y-x)^2} = \frac{x+y+2+2\sqrt{x+1}(y-1)}{2\sqrt{x+1}(y-x)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-x)-(\sqrt{x+1}+y-1)}{(y-x)^2} = \frac{1-x-\sqrt{x+1}}{(y-x)^2}$ il piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (0, -1)$ ha equazione cartesiana $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 1 - \frac{3}{2}x$, ovvero $3x + 2z - 2 = 0$, un piano parallelo all'asse y. I limiti di f vanno calcolati nei punti della retta $y = x$ e in ∞_2. Iniziamo da ∞_2: sull'asse x si ha $f(x, 0) = -\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$ che tende a 0, mentre sull'asse y si ha $f(0, y) = \frac{y}{y} \equiv 1$: dunque il limite di f in ∞_2 non esiste. Quanto ai punti di $y = x$, se in tali punti il numeratore non si annulla il limite di f è ovviamente ∞; invece in $(0, 0)$ (unico punto di intersezione tra $y = x$ e il ramo inferiore della parabola $x = y^2 - 2y$, in cui sono contenuti gli zeri di f) il limite non esiste, perché tendendo lungo l'arco di parabola il limite è 0 ma in ogni intorno di $(0, 0)$ vi sono altri punti di $y = x$ in cui f diverge (si osservi anche che il limite lungo l'asse x vale $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}) = -\frac{1}{2}$ e lungo l'asse y vale ovviamente 1).

(b) A è l'insieme dei punti del disco chiuso di centro $(1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$ (il cui bordo passa dunque per l'origine) che distano almeno $\frac{1}{2}$ dalla bisettrice $y = x$: esso è non vuoto (contiene $(0, 2)$), non è aperto (non è intorno del suo punto di bordo $(0, 2)$), è chiuso (definito tramite disequazioni di funzioni continue), e limitato (perché contenuto nel disco, dunque $|x - 1| \leq \sqrt{2}$ e $|y - 1| \leq \sqrt{2}$, ovvero $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2}$) dunque compatto, e non è connesso per archi (per il Teorema degli Zeri, un arco continuo che congiunge $(0, 2)$ e $(2, 0)$ deve transitare per $y = x$, dunque non può essere contenuto in A). ℓ è un segmento di spirale archimedea (di ampiezza triplicata, e ruotata di 1^{rad} in senso orario) privo degli estremi: esso non è ne' aperto (non è intorno in $\mathbb{R}^2$ dei suoi punti) ne' chiuso (non contiene i suoi estremi), dunque non compatto; tuttavia esso è limitato (perché $\rho \leq \sup_{|\theta|<\frac{\pi}{4}} |3(\theta+1)| = 3(\frac{\pi}{4}+1)$) e connesso per archi (è esso stesso un arco continuo). Parametrizzando ℓ tramite $\gamma :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}^2$ dato da $\gamma(\theta) = (3(\theta+1)\cos\theta, 3(\theta+1)\sin\theta)$ si ha $\gamma'(\theta) = 3(\cos\theta - (\theta+1)\sin\theta, \sin\theta + (\theta+1)\cos\theta)$, da cui $\gamma(0) = (3, 0)$ e $\gamma'(0) = (3, 3)$, dunque da $\frac{df}{d\theta}(\theta) = \nabla f(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)$ si ricava $\frac{df}{d\theta}(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3, 0) = -\frac{5}{4}$.

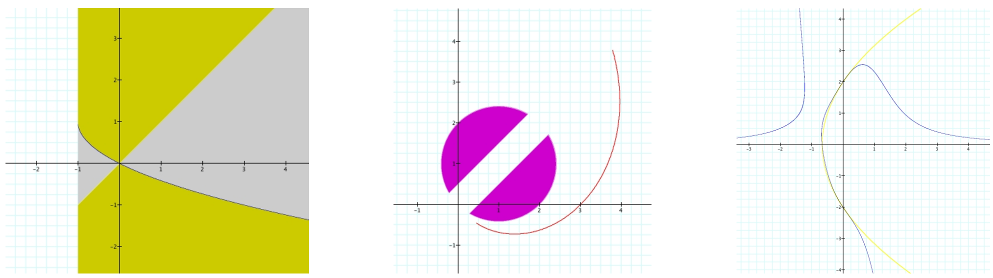
(4) (a) Da $g(x,y,z) = (x^2 + 2yz - e^{x+2y-z}, 3xy - z^2 - yz)$ si ricava $dg_2 = (3y, 3x - z, -2z - y)$, dunque il solo punto stazionario di g_2 (per cui $3y = 3x - z = -2z - y = 0$) è $O(0,0,0)$; poiché la matrice hessiana $\mathsf{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ è indefinita, si tratta di un punto di sella (si noti che la restrizione di g_2 al piano orizzontale $z = 0$ è $g_2(x,y,0) = 3xy$, il cui grafico è un paraboloide iperbolico).
Si ha poi $dg_A = \begin{pmatrix} 2x - e^{x+2y-z} & 2z - 2e^{x+2y-z} & 2y + e^{x+2y-z} \\ 3y & 3x - z & -2z - y \end{pmatrix}_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$: dal fatto che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ si deduce che si può esplicitare x e y in funzione di z all'intorno della soluzione $A(1,0,1)$, ovvero trovare una funzione $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ definita in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ contenente $z_0 = 1$ tale che $(x,y)(1) = (1,0)$ e $g(x(z), y(z), z) \equiv (0,-1)$ per ogni $z \in I$. Il differenziale $d(x,y)_1$ è associato a $\mathsf{J}_{(x,y)}(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allo stesso risultato si arriva derivando le equazioni $g(x(z), y(z), z) = (0,-1)$ rispetto a z, ottenendo $2xx' + 2y'z + 2y - (x' + 2y' - 1)e^{x+2y-z} = 3x'y + 3xy' - 2z - y'z - y = 0$: calcolando per $z = 1$ e ricordando che $x(1) = 1$ e $y(1) = 0$ si ha $2x'(1) + 2y'(1) - (x'(1) + 2y'(1) - 1) = 3y'(1) - 2 - y'(1) = 0$, da cui si riottiene $x'(1) = -1$ e $y'(1) = 1$.

(b) Il piano Π di equazione cartesiana $z = x + 2y$ è globalmente parametrizzato in modo ovvio da $\mathbb{R}^2$ come grafico di $z(x,y)$, dunque la restrizione $h : \Pi \to \mathbb{R}^2$ può essere intesa semplicemente come $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $h(x,y) = z(x,y,z(x,y)) = h(x,y,x+2y) = (x^2 + 2y(x+2y) - 1, 3xy - (x+2y)^2 - y(x+2y)) = (x^2 + 2xy + 4y^2 - 1, -x^2 - 2xy - 6y^2)$. Essendo $\mathsf{J}_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x + 8y \\ -2x - 2y & -2x - 12y \end{pmatrix}$, la funzione h è diffeomorfismo locale nei punti in cui $\det \mathsf{J}_h(x,y) = 2(x+y)(-2)(x+6y) + 2(x+y)(2)(x+4y) = -8y(x+y) \neq 0$, dunque fuori dall'asse x e dalla bisettrice $y = -x$. Nel punto $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, dunque, h è diffeomorfismo locale: in esso si ha $\mathsf{J}_h(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -2 & -22 \end{pmatrix}$ e perciò, essendo $h(x_0,y_0) = (u_0,v_0) = (12,-21)$, si ricava $\mathsf{J}_{h^{-1}}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ -2 & -22 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$, da cui lo sviluppo $h^{-1}(u_0,v_0) + \mathsf{J}_{h^{-1}}(u_0,v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - 12 \\ v + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{11}{8}(u-12) + \frac{7}{8}(v+21) \\ 2 - \frac{1}{8}(u-12) - \frac{1}{8}(v+21) \end{pmatrix}$.
Vedendo $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \Pi$, tale sviluppo diventa $\begin{pmatrix} -1 + \frac{11}{8}(u-12) + \frac{7}{8}(v+21) \\ 2 - \frac{1}{8}(u-12) - \frac{1}{8}(v+21) \\ 3 + \frac{9}{8}(u-12) + \frac{5}{8}(v+21) \end{pmatrix}$.

(5) (a) Il differenziale di $g(x,y) = 2x^3y - 6x + y^2$ è $dg = (6x^2y - 6, 2x^3 + 2y)$, e si annulla quando $6x^2y - 6 = 2x^3 + 2y = 0$, ovvero solo nel punto $(-1,1)$, che appartiene all'insieme di livello $g(x,y) = g(-1,1) = 5$. Dunque tutti gli insiemi di livello $g(x,y) = \alpha$ con $\alpha \neq 5$ sono curve regolari. Tra essi c'è anche M (ovvero $g(x,y) = 4$), cui appartiene $A(0,2)$. La retta affine tangente a M in A ha equazione cartesiana $dg_A(x - 0, y - 2) = (-6, 4) \cdot (x, y - 2) = 0$, ovvero $3x - 2y + 4 = 0$; alternativamente, esplicitando ad esempio $y = y(x)$ con $y(0) = 2$, una vettore tangente a M in A è $(1, y'(2))$, e si ricava $y'(2) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(A)}{\frac{\partial g}{\partial y}(A)} = \frac{3}{2}$: dunque la retta affine tangente a M in A è esprimibile parametricamente anche come $\{(0,2) + \lambda(1, \frac{3}{2}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2\lambda, 2 + 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (si tratta ovviamente dello stesso luogo).

(b) Il significato geometrico della ricerca di estremi locali delle funzioni coordinate $f_1(x,y) = x$ e $f_2(x,y) = y$ sulla curva M è, evidentemente, quello di individuare i punti della curva che sono localmente estremali in senso orizzontale o verticale. Sia il metodo di Lagrange che il buonsenso conducono per $f_1(x,y) = x$ al sistema $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x^3 + 2y = 0 \\ g(x,y) = 2x^3y - 6x + y^2 = 4 \end{cases}$, e per $f_2(x,y) = y$ al sistema $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 6x^2y - 6 = 0 \\ g(x,y) = 2x^3y - 6x + y^2 = 4 \end{cases}$; calcolando e semplificando, si arriva rispettivamente a $(*)\ \begin{cases} y = -x^3 \\ x^6 + 6x + 4 = 0 \end{cases}$ e $(**)\ \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ 4x^5 + 4x^4 - 1 = 0 \end{cases}$. Come ci hanno insegnato Galois e Abel, non si può certo ambire a risolvere tali sistemi con formule algebriche... tuttavia, con un po' di furbizia si possono ottenere alcune notevoli informazioni con sforzo minimo. Ad esempio, osserviamo (*): se $\varphi(x) = x^6 + 6x + 4$ si ha $\varphi'(x) = 6x^5 + 6 = 6(x^5 + 1)$, dunque $\varphi(x)$ decresce strettamente prima e cresce strettamente dopo $x = -1$, in cui ha un minimo; inoltre $\varphi(-2) > 0$, $\varphi(-1) < 0$ e $\varphi(0) > 0$, dunque l'equazione $\varphi(x) = 0$ (che determina le ascisse dei punti di M localmente estremali in senso orizzontale) ha esattamente una soluzione tra -2 e -1 e una tra -1 e 0. Usiamo la stessa tattica con (**): se $\psi(x) = 4x^5 + 4x^4 - 1$ si ha $\psi'(x) = 4x^3(5x + 4)$, dunque $\psi(x)$ cresce strettamente fino a $x = -\frac{4}{5}$ e da $x = 0$ in poi, e decresce strettamente per $-\frac{4}{5} < x < 0$; essendo $\psi(-\frac{4}{5}) < 0$, $\psi(0) < 0$ e $\psi(1) > 0$, l'equazione $\psi(x) = 0$ (che determina le ascisse dei punti di M localmente estremali in senso verticale) ha esattamente una soluzione tra 0 e 1.
Infine, data una funzione $\Phi(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^n$, sappiamo che la funzione polinomiale di grado n che meglio approssima Φ all'intorno di un suo punto $A(x_0,y_0)$ — nel senso che la differenza tra Φ e tale funzione è $o_A(||(x - x_0, y -$

$y_0)||^n)$ — è il suo sviluppo di Taylor fino all'ordine n, ovvero $\Phi(x_0, y_0) + \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=0,\dots,k}} \frac{1}{(k-j)!j!} \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^{k-j}(y - y_0)^j$. Come conseguenza, la curva polinomiale di grado n che meglio approssima una curva di livello $\Phi(x, y) = \alpha$ all'intorno di un suo punto (x_0, y_0) (si parla anche di *curva polinomiale osculatrice* a M in A, dal latino *osculare* che significa "baciare") è la curva del medesimo livello α dello sviluppo di Taylor di Φ fino all'ordine n: essendo $\Phi(x_0, y_0) = \alpha$, tale curva polinomiale è dunque $\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=0,\dots,k}} \frac{1}{(k-j)!j!} \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^{k-j}(y - y_0)^j = 0$. Per $n = 1$ riotteniamo l'equazione della retta tangente $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0$, e per $n = 2$ la conica osculatrice $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2\big) = 0$. Nel caso nostro, sviluppando in $A(0, 2)$ la funzione $g(x, y) = 2x^3 y - 6x + y^2$ si trova $4 + (-6, 4) \cdot (x, y - 2) + \frac{1}{2} 2(y - 2)^2 = -6x + y^2$, ovvero scompare l'addendo $2x^3 y$ (che non a caso, si noti, è infinitesimo di ordine > 2 in A), dunque la conica cercata è la parabola $-6x + y^2 = g(0, 2) = 4$, ovvero $x = \frac{1}{6}(y^2 - 4)$.



(a) Dominio (grigio), zeri (blu) e segno positivo (giallo) di f nell'esercizio 3. **(b)** Gli insiemi A e ℓ nell'esercizio 3. **(c)** La curva M (blu) e la sua parabola osculatrice in A (gialla) dell'esercizio 5.

Prova scritta (05/07/2005)

1. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^{2\alpha})}{x^{\alpha+1}(x^2+1)^{1-\alpha}}\, dx$ e (ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2-\alpha}(x)}{(1+\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}\, dx$? Calcolare per $\alpha = 1$ (a tal fine può essere utile sapere che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$).

2. Trovare, al variare di $\lambda \geq 0$, la soluzione $y_\lambda(x)$ dell'equazione $\lambda y'' + (\lambda+1)y' + y = e^x$ tale che $y_\lambda(0) = 1$ e $y'_\lambda(0) = 0$. In che senso $y_0(x)$ si può trovare da $y_\lambda(x)$ per $\lambda \neq 0$?

3. Sia data la funzione $f(x,y) = \frac{x-y^2+3}{x-1}$.

(i) Determinarne dominio, zeri, segno, continuità, differenziabilità, limiti notevoli.

(ii) In quali punti del dominio il piano tangente al grafico di f passa per $(0,0,0)$?

(iii) Disegnare $A = \{(x,y) : f(x,y) \geq 1,\ y \geq 3\}$ e $B = \{(x,y) : f(x,y) = 2,\ x \geq 2\}$. Questi insiemi sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi per archi?

(iv) Un punto materiale si muove sulla precedente curva B secondo una legge oraria $(x(t), y(t))$. Scrivere l'espressione della derivata totale $\frac{df}{dt}$ lungo tale moto.

4. Sia $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (6xyz - 3x^2 - y^2 - z^2, x - y^2 z + \sin xz)$.

(i) Determinare eventuali estremi locali di g_1 in $\mathbb{R}^3$, e gli estremi assoluti di g_1 su $C = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2+y^2 = 9,\ |x| + y \leq 0\}$ (perché esistono?).

(ii) Dall'equazione $g_2(x,y,z) = \pi$ si vorrebbe esplicitare z in funzione di x e y all'intorno della soluzione $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 0, 0)$. Dimostrare che ciò è possibile, e calcolare lo sviluppo al primo ordine di $z(x,y)$.

(iii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathrm{M}_\alpha = \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = -4,\ x = \alpha\}$ è una curva regolare? Si parametrizzi $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1$ all'intorno del suo punto $P(1,-1,0)$, e si calcoli in due modi la retta affine tangente a M in P.

(iv) Dimostrare che $S = \{(x,y,z) : 2xz = \pi, x > 0\}$ è una superficie regolare. Sia $h : S \to \mathbb{R}^2$ la restrizione di g a S: dimostrare che h è un diffeomorfismo locale in $A(2,-1,\frac{\pi}{4}) \in S$, e descrivere la funzione lineare $dh_A : \mathsf{T}_A S \to \mathbb{R}^2$.

Soluzioni.

1. (i) Sia $f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^{2\alpha})}{x^{\alpha+1}(x^2+1)^{1-\alpha}}$: conviene ragionare a seconda del segno di α. Se $\alpha > 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* \frac{x^{2\alpha}}{x^{\alpha+1}} = x^{\alpha-1}$ (dunque $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$), e $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* \frac{1}{x^{\alpha+1}x^{2(1-\alpha)}} = x^{\alpha-3}$ (dunque $\alpha - 3 < -1$, ovvero $\alpha < 2$). Se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$, che essendo $\sim_0 \frac{1}{x}$ non è integrabile in 0^+. Infine, se $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* \frac{1}{x^{\alpha+1}} = x^{-\alpha-1}$ (dunque $-\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha < 0$), e $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* \frac{x^{2\alpha}}{x^{\alpha+1}x^{2(1-\alpha)}} = x^{3\alpha-3}$ (dunque $3\alpha - 3 < -1$, ovvero $\alpha < \frac{2}{3}$). Pertanto l'integrale converge per ogni $\alpha < 2$ purché $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 1$ si ha $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\, dx = ((-\frac{1}{x}) \operatorname{arctg} x^2]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-\frac{1}{x}) \frac{2x}{1+x^4}\, dx = 0 - 0 + 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(ii) Sia $f_\alpha(x) = \frac{\sin^{2-\alpha} x}{(1+\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}$. Essendo $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{2-\alpha}$ deve essere $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$. Invece per $x \to \pi^-$ si ha $\sin x \sim_\pi \pi - x$ e $1+\cos x \sim_\pi^* (\pi-x)^2$, dunque $f_\alpha(x) \sim_\pi^* (\pi-x)^{2-\alpha-2\frac{\alpha}{2}} = (\pi-x)^{2-2\alpha}$, da cui $2-2\alpha > -1$ ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$. Pertanto l'integrale converge per ogni $\alpha < \frac{3}{2}$. Se $\alpha = 1$ si ha $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx = (-2\sqrt{1+\cos x}]_0^\pi = 2\sqrt{2}$.

2. Se $\lambda = 0$ l'equazione diventa $y'+y = e^x$, lineare del primo ordine: l'integrale generale è $y(x) = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+k) = \frac{1}{2}e^x + ke^{-x}$, e dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $y_0(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$: si noti che anche la condizione $y_0'(0) = 0$ è soddisfatta (si tratta di un caso fortuito: infatti per $\lambda = 0$ il problema è sovradeterminato). Se invece $\lambda > 0$, l'equazione $\lambda y'' + (\lambda+1)y' + y = e^x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda t^2 + (\lambda+1)t + 1 = 0$ ha radici reali -1 e $-\frac{1}{\lambda}$: se $\lambda \neq 1$ esse sono distinte (dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea è $ae^{-x} + be^{-\frac{1}{\lambda}x}$ per $a, b \in \mathbb{C}$), mentre se $\lambda = 1$ esse sono coincidenti (dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea è $(a+bx)e^{-x}$ per $a, b \in \mathbb{C}$). Vediamo infine una soluzione particolare dell'equazione completa. Notiamo che 1 non è mai radice dell'equazione caratteristica (infatti stiamo supponendo che sia $\lambda \geq 0$), dunque c'è una soluzione della forma ue^x per qualche $u \in \mathbb{C}$: si ottiene allora $u(\lambda + (\lambda+1) + 1)e^x = e^x$, da cui $u = \frac{1}{2(\lambda+1)}$. Ricapitolando, se $\lambda > 0$ e $\lambda \neq 1$ l'integrale generale è $y(x) = ae^{-x} + be^{-\frac{1}{\lambda}x} + \frac{1}{2(\lambda+1)}e^x$, e imponendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si ha $a = -\frac{1}{2(\lambda-1)}$ e $b = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$, da cui $y_\lambda(x) = -\frac{1}{2(\lambda-1)}e^{-x} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}e^{-\frac{1}{\lambda}x} + \frac{1}{2(\lambda+1)}e^x$; invece per $\lambda = 1$ l'integrale generale è $y(x) = (a+bx)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$, e imponendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si ha $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$, da cui $y_1(x) = \frac{1}{4}((3+2x)e^{-x} + e^x)$. Si noti che, per x fissato, si ha $\lim_{\lambda\to 0^+} y_\lambda(x) = \cosh x = y_0(x)$ e $\lim_{\lambda\to 1} y_\lambda(x) = \frac{1}{4}((3+2x)e^{-x} + e^x) = y_1(x)$, dunque le soluzioni per $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ sono limite puntuale delle soluzioni $y_\lambda(x)$ per $\lambda > 0$ con $\lambda \neq 1$.

3. (i) La funzione è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ al di fuori della retta verticale $x = 1$; si annulla sui punti del dominio che stanno anche sulla parabola $x = y^2 - 3$; è positiva dentro la parabola per $x > 1$, e fuori per $x < 1$; nei punti di $x = 1$ diversi da $(1, \pm 2)$ essa diverge a ∞, mentre in $(1, \pm 2)$ il limite non esiste (tendendo ad essi lungo la parabola il limite è 0, ma in ogni loro intorno vi sono altri punti di $x = 1$ in cui f diverge); infine, a ∞_2 il limite non esiste (tendendovi lungo la parabola il limite è 0, ma lungo una curva asintotica a $x = 1$ è ∞).

(ii) Vale $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-4}{(x-1)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{x-1}$, dunque il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) ha equazione $z = \frac{x_0 - y_0^2 + 3}{x_0 - 1} + \frac{y_0^2 - 4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{x_0-1}(y - y_0)$. Imponendo il passaggio per $(0,0,0)$ si ottiene $0 = \frac{x_0 - y_0^2 + 3}{x_0 - 1} + \frac{y_0^2-4}{(x_0-1)^2}(-x_0) - \frac{2y_0}{x_0-1}(-y_0)$, da cui $x_0^2 - y_0^2 + 6x_0 - 3 = 0$: si tratta di tutti e soli i punti dell'iperbole $x^2 - y^2 + 6x - 3 = 0$ (che, si noti, si può scrivere come $\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$), eccetto ovviamente i due punti con $x = 1$, ovvero di nuovo $(1, \pm 2)$.

(iii) La disequazione $f(x,y) \geq 1$ dà $\frac{y^2-4}{x-1} \leq 0$, che intersecata con $y \geq 3$ mostra che A è il quarto di piano compreso tra le semirette ortogonali $\{(x,y) : y = 3,\ x < 1\}$ (compresa) e $\{(x,y) : x = 1,\ y > 3\}$ (esclusa). Dunque A non è né aperto né chiuso né limitato (dunque non compatto), ed è connesso per archi. L'equazione $f(x,y) = 2$ dà i punti della parabola $x = 5 - y^2$ (eccetto ancora una volta $(1, \pm 2)$): dunque la condizione $x \geq 2$ dice che B è l'arco chiuso di parabola compreso tra $(2, \pm\sqrt{3})$. Si tratta di un insieme compatto e connesso.

(iv) La derivata totale di f lungo un moto $(x(t), y(t))$ è data da $\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$. Nel nostro caso, il vincolo dello stare sull'arco di parabola B impone che $x(t) = 5 - y(t)^2$ (da cui in particolare $x' = -2yy'$) e che $|y(t)| \leq \sqrt{3}$, da cui $2 \leq x(t) \leq 5$: si ha perciò $\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(5-y^2, y)\,(-2yy') + \frac{\partial f}{\partial y}(5-y^2, y)\, y' = \frac{y^2-4}{(5-y^2-1)^2}(-2yy') - \frac{2y}{5-y^2-1}y'$, dunque $\frac{df}{dt}(t)$ è identicamente 0... sorprendente? Niente affatto: B è (un pezzo di) curva di livello di f, dunque è ovvio che, muovendosi lungo essa, la funzione non segni variazioni.

4. (i) Il differenziale di g_1 è $dg_1 = (6yz - 6x, 6xz - 2y, 6xy - 2z)$, che si annulla per $6yz - 6x = 6xz - 2y = 6xy - 2z = 0$. Si ha dunque $z = 3xy$, che messa nelle altre due porge $x(3y^2 - 1) = 0$ e $y(9x^2 - 1) = 0$. Se $x = 0$ si ricava $y = 0$, dunque il punto $O(0,0,0)$; se $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ si ricava (indipendentemente nel segno) $x = \pm\frac{1}{3}$, da cui i quattro punti $P_1(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $P_2(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $P_3(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $P_4(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$. La matrice hessiana di g_1 è $\mathsf{H}_{g_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6 & 6z & 6y \\ 6z & -2 & 6x \\ 6y & 6x & -2 \end{pmatrix}$: essendo $\mathsf{H}_{g_1}(O) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definita negativa, $(0,0,0)$ è un punto di massimo locale per g_1; invece $\mathsf{H}_{g_1}(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}$ è indefinita perché tutti i minori principali di ordine 1 —cioè gli elementi della diagonale— sono negativi mentre il determinante vale $96 > 0$, dunque P_1 è un punto di sella (la stessa cosa accade per P_2, P_3, P_4).

La curva C è il tratto, estremi compresi, della circonferenza di centro l'origine e raggio 3 nel piano orizzontale (x, y) che sta sotto entrambe le bisettrici $y = \pm x$: si tratta dunque di un insieme compatto di $\mathbb{R}^3$ sul quale g_1, continua, ammetterà estremi assoluti. Per il calcolo conviene considerare C una varietà con bordo, studiando separatamente gli estremi $(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ dal resto C_0 di C, che è una varietà di dimensione 1. In effetti, si ha $g_1(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0) = -\frac{27}{2} - \frac{9}{2} = -18$; parametrizzando poi C_0 con le coordinate polari (ovvero $(x, y, z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ con $-\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{4}$) si ottiene $G(\theta) = g_1(3\cos\theta, 3\sin\theta, 0) = -27\cos^2\theta - 9\sin^2\theta = -9(2\cos^2\theta + 1)$, con $G'(\theta) = 18\sin 2\theta = 0$ per $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $G'(\theta) > 0$ per $-\frac{3\pi}{4} \le \theta < -\frac{\pi}{2}$, dunque $\theta = -\frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo relativo per G (ovvero $(0, -3, 0)$ lo è per g_1 in C_0). Essendo $g_1(0, -3, 0) = G(-\frac{\pi}{2}) = -9$, il massimo assoluto di g_1 su C è dunque -9 (assunto in $(0, -3, 0)$) ed il minimo assoluto è -18 (assunto negli estremi di C).

(ii) Il differenziale di $g_2(x, y, z) = x - y^2z + \sin xz$ è $dg_2 = (1 + z\cos xz, -2yz, -y^2 + x\cos xz)$, dunque $dg_{2_{(\pi,0,0)}} = (1, 0, \pi)$: poiché $\frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi, 0, 0) = \pi \ne 0$ è effettivamente possibile esplicitare z in funzione di x e y all'intorno della soluzione $(\pi, 0, 0)$, ottenendo una funzione $z(x, y)$ definita all'intorno di $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ e tale che $z(\pi, 0) = z_0 = 0$. Si ha allora $\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = -\frac{\frac{\partial g_2}{\partial x}(\pi,0,0)}{\frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi,0,0)} = -\frac{1}{\pi}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0) = -\frac{\frac{\partial g_2}{\partial y}(\pi,0,0)}{\frac{\partial g_2}{\partial z}(\pi,0,0)} = 0$, da cui lo sviluppo cercato $z(x, y) \sim 0 + (-\frac{1}{\pi})(x - \pi) + (0)(y - 0) = 1 - \frac{x}{\pi}$.

(iii) I punti di $\mathbb{R}^3$ in cui $\ell(x, y, z) = (6xyz - 3x^2 - y^2 - z^2, x)$ non è sommersiva sono quelli in cui $d\ell = \begin{pmatrix} 6yz - 6x & 6xz - 2y & 6xy - 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango ≤ 1, ovvero tali che $6xz - 2y = 6xy - 2z = 0$. Si ha dunque $z = 3xy$, che messa nella prima dà $2y(9x^2 - 1) = 0$: se $y = 0$ si ottiene $z = 0$ (dunque tutti i punti del tipo $(u, 0, 0)$), mentre se $x = \pm\frac{1}{3}$ si ha $z = \pm y$ (dunque tutti i punti del tipo $(\pm\frac{1}{3}, v, \pm v)$). Vediamo ora per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ qualcuno di questi punti sta in M_α: da un lato si ha $g_1(u, 0, 0) = -3u^2$, dunque deve essere $-3u^2 = -4$ da cui $u = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, e questi punti stanno in M_α rispettivamente per $\alpha = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$; dall'altro invece $g_1(\pm\frac{1}{3}, v, \pm v) = 2v^2 - \frac{1}{3} - v^2 - v^2 = -\frac{1}{3}$ e dunque l'equazione $g_1(\pm\frac{1}{3}, v, \pm v) = -4$ è priva di soluzioni. In sostanza, M_α è una curva regolare per $\alpha \ne \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$, mentre $\mathrm{M}_{\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}}$ lo è a patto di escludere il punto singolare $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0)$.
In questo caso, tuttavia, si può ragionare anche in modo più diretto: infatti la curva M_α è contenuta nel piano $x = \alpha$, e la sua equazione in y e z dentro tale piano è $g_1(\alpha, y, z) = -4$. Si tratta dunque della conica di equazione $y^2 + z^2 - 6\alpha yz + 3\alpha^2 - 4 = 0$, che è un'ellisse o un'iperbole a seconda che il discriminante $\Delta = 36\alpha^2 - 4$ sia negativo o positivo, ovvero a seconda che $|\alpha| < \frac{1}{3}$ oppure $|\alpha| > \frac{1}{3}$, mentre invece per $|\alpha| = \frac{1}{3}$ essa consiste in due rette parallele; inoltre per $|\alpha| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ l'iperbole degenera in due rette incidenti nell'origine del piano $x = \alpha$, e questi sono gli unici casi (come già visto in precedenza) in cui vi sono punti singolari. In particolare $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1$ è l'iperbole $y^2 + z^2 - 6yz - 1 = 0$ nel piano $x = 1$; all'intorno del suo punto $P(1, -1, 0)$ si può ad esempio esplicitare y in funzione di z, ottenendo una parametrizzazione locale $\gamma(z) = (1, y(z), z)$, da cui il vettore tangente $(0, y'(z), 1)$. Derivando l'identità $y(z)^2 + z^2 - 6y(z)z - 1 = 0$ rispetto a z si ottiene $2yy' + 2z - 6y'z - 6y = 0$, da cui calcolando in $z = 0$ (con $y(0) = -1$) si ha $y'(0) = 3$: dunque una forma parametrica della retta affine tangente cercata è $\{(1, -1, 0) + \lambda(0, 3, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(1, 3\lambda - 1, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Alternativamente, da $d\ell_{(1,-1,0)}(x - 1, y + 1, z - 0) = (0, 0)$ si ottiene $-6(x - 1) + 2(y + 1) - 6z = x - 1 = 0$, ovvero $x = 1$ e $y - 3z + 1 = 0$, che è un'espressione cartesiana del medesimo luogo.

(iv) La funzione $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $k(x, y, z) = 2xz$ non è sommersiva nei punti dell'asse y: nessuno di questi però sta su $S = \{(x, y, z) : 2xz = \pi, x > 0\}$, che perciò è regolare. Dato $A(2, -1, \frac{\pi}{4}) \in S$ si ha in particolare $\mathsf{T}_A S = \ker dk_A = \{(x, y, z) : \frac{\pi}{2}x + 4z = 0\}$, ovvero il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, -\frac{\pi}{8})$ e $\underline{v}_2 = (0, 1, 0)$. È chiaro che S è parametrizzato globalmente dal semipiano $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ tramite $\gamma : V \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(x, y) = (x, y, \frac{\pi}{2x})$: si noti che, essendo $A = \gamma(2, -1)$, il differenziale $d\gamma_{(2,-1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ha $\mathsf{T}_A S$ come immagine, e anzi, da $\mathsf{J}_\gamma(2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\pi}{2x^2} & 0 \end{pmatrix}_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\pi}{8} & 0 \end{pmatrix}$, si ha proprio $d\gamma_{(2,-1)}(\underline{e}_1) = \underline{v}_1$ e $d\gamma_{(2,-1)}(\underline{e}_2) = \underline{v}_2$. Usando la parametrizzazione globale γ possiamo dunque lavorare con $(V, (2, -1), \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ anziché con $(S, A, \underline{v}_1, \underline{v}_2)$, e al posto di h considerare $\tilde{h} = h \circ \gamma : V \to \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{h}(x, y) = g(x, y, \frac{\pi}{2x}) = (3\pi y - 3x^2 - y^2 - \frac{\pi^2}{4x^2}, x - \frac{\pi y^2}{2x} + 1)$. Poiché $d\tilde{h}_{(2,-1)}$ ha matrice jacobiana $\mathsf{J}_{\tilde{h}}(2, -1) = \begin{pmatrix} -6x + \frac{\pi^2}{2x^3} & 3\pi - 2y \\ 1 + \frac{\pi y^2}{2x^2} & -\frac{\pi y}{x} \end{pmatrix}_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} - 12 & 3\pi + 2 \\ \frac{\pi}{8} + 1 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$, che è nonsingolare, effettivamente $\tilde{h}$ è un diffeomorfismo locale in $(2, -1) \in V$. Perciò h è un diffeomorfismo locale in $A(2, -1, \frac{\pi}{4}) \in S$, e la funzione lineare $dh_A : \mathsf{T}_A S \to \mathbb{R}^2$ (isomorfismo di spazi vettoriali tanto quanto lo è $d\tilde{h}_{(2,-1)}$) è descritta da $dh_A(\underline{v}_1) = d\tilde{h}_{(2,-1)}(\underline{e}_1) = (\frac{\pi^2}{16} - 12, \frac{\pi}{8} + 1)$ e $dh_A(\underline{v}_2) = d\tilde{h}_{(2,-1)}(\underline{e}_2) =$

$(3\pi + 2, \frac{\pi}{2})$.
Alternativamente, dopo aver spiegato tutto ciò (soprattutto a fini educativi), possiamo notare che la funzione lineare $dh_A : \mathsf{T}_A S \to \mathbb{R}^2$ non è altro che la restrizione di $dg_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\mathsf{T}_A S$: infatti

$$dg_A = \begin{pmatrix} 6yz - 6x & 6xz - 2y & 6xy - 2z \\ 1 + z\cos xz & -2yz & -y^2 + x\cos xz \end{pmatrix}_{(2,-1,\frac{\pi}{4})} = \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{2} - 12 & 3\pi + 2 & -\frac{\pi}{2} - 12 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

e basta notare che $dg_A(\underline{v}_1) = (\frac{\pi^2}{16} - 12, \frac{\pi}{8} + 1) = dh_A(\underline{v}_1)$ e $dg_A(\underline{v}_2) = (3\pi + 2, \frac{\pi}{2}) = dh_A(\underline{v}_2)$. Inoltre, il fatto che $dh_A = dg_A|_{\mathsf{T}_A S}$ è un isomorfismo tra $\mathsf{T}_A S$ e $\mathbb{R}^2$ (come è evidente, guardando le immagini dei vettori di base $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$) implica, in base ad una naturale estensione alle varietà del Teorema della Funzione Inversa, che h è un diffeomorfismo locale in A tra S e $\mathbb{R}^2$.

Prova scritta (18/07/2005)

1. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali generalizzati (i) $\int_0^1 \frac{x^\alpha \log^{3\alpha-1}(x)}{(1-x)^{1-\alpha}}\,dx$ e (ii) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-2\alpha x})\,dx$? Calcolare il loro valore per $\alpha = 1$.

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $(e^x - \lambda)y' + e^x y = 1$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; determinare, in particolare, le soluzioni dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$. Trovare infine la soluzione tale che $y(0) = -2$.

3. Sia data la funzione $f(x,y) = (x - y^2)\log(|x| + |y|)$.

(i) Determinarne dominio, zeri, segno, continuità, differenziabilità, limiti notevoli.
(ii) Calcolare la retta affine ortogonale al grafico di f nel punto $(1,-2)$ del dominio.
(iii) Disegnare gli insiemi $A = \{(x,y) : f(x,y) > 0,\ |x| + y < 2\}$ e $B = \{(x,y) : f(x,x) = 0,\ x \neq 0,\ y \leq 2\}$ e dire, spiegando il motivo, se sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi per archi.
(iv) Un punto materiale si muove in $\mathbb{R}^3$ sul paraboloide $x^2+2y^2+z-1 = 0$ secondo una certa legge oraria per la quale la somma tra x e y rimane uguale ad un'assegnata costante k; calcolare la sua velocità ed accelerazione vettoriali. Data $g(x,y,z,t) = t^2 f(x,0) - 2z$ (ove f è la funzione dell'esercizio), calcolare la derivata totale $\frac{dg}{dt}(t)$ lungo il moto.

4. Sia $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (z^2 - e^{x+y} + xz + y, x^3 + yz, y - 3z)$.

(i) Dal sistema dato da $g_1(x,y,z) = 2$ e $g_2(x,y,z) = 1$ esplicitare x e y in funzione di z all'intorno di $(-1,1,2)$, trovare $(x'(2), y'(2))$ e calcolare $\lim_{z\to 2} \frac{x(z)^2 - 2y(z)^2 + 1}{4 - z^2}$.
(ii) La funzione g_1 ha estremi locali in $\mathbb{R}^3$? Disegnare poi $K = \{(x,y,z) : x + y = 0,\ |x| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$, dire perché g_1 ammette estremi assoluti su K, e calcolarli.
(iii) Mostrare che $\mathrm{M} = \{(x,y,z) : g_2(x,y,z) = -1,\ g_3(x,y,z) = -4\}$ è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$; parametrizzare M all'intorno di $A(0,-1,1)$ e calcolare lo spazio tangente $\mathsf{T}_A\mathrm{M}$ in due modi.
(iv) Determinare i punti di M che, al loro intorno in M, hanno distanza massima o minima dall'asse delle x; ragionare sull'esistenza di punti di M a distanza massima o minima dall'asse x rispetto a tutti gli altri.

Soluzioni.

1. (i) Sia $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha \log^{3\alpha-1}(x)}{(1-x)^{1-\alpha}}$. Essendo $f_\alpha(x) \sim_0 x^\alpha \log^{3\alpha-1}(x)$, in 0^+ la funzione è integrabile se $\alpha > -1$, e non lo è se $\alpha < -1$; quando invece $\alpha = -1$ si ha $f_{-1}(x) \sim_0 \frac{1}{x}\log^{-4}(x)$, che è integrabile in 0^+ (infatti ha primitiva $\frac{\log^{-3}(x)}{-3}$, da cui si può fare il calcolo diretto). Dunque l'integrale converge in 0^+ se e solo se $\alpha \geq -1$. Quanto a

1^- si ha $f_\alpha(x) \sim_1 \frac{(1-x)^{3\alpha-1}}{(1-x)^{1-\alpha}} = (1-x)^{4\alpha-2}$, dunque deve essere $4\alpha - 2 > -1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{4}$. Pertanto l'integrale converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$. Se $\alpha = 1$ si ha $\int x \log^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2\frac{1}{x}\log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int x\log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - (\frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx) = \frac{x^2}{4}(2\log^2 x - 2\log x + 1)$, da cui $\int_0^1 x\log^2 x\, dx = (\frac{x^2}{4}(2\log^2 x - 2\log x + 1)]_0^1 = \frac{1}{4}$.
(ii) Sia $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-2\alpha x})$. Se $\alpha = 0$ la funzione f_0 è identicamente nulla, dunque ovviamente integrabile; supponiamo d'ora in poi $\alpha \neq 0$. Essendo $e^t - 1 \sim_0 t$, si ha $|f_\alpha(x)| \sim_0^* x^\alpha x = x^{\alpha+1}$, da cui la condizione $\alpha + 1 > -1$, ovvero $\alpha > -2$. Invece, come noto, a $+\infty$ comanda l'esponenziale: se $\alpha < 0$ è evidente che $f_\alpha(x)$ diverge a $+\infty$ (dunque a maggior ragione non è integrabile), mentre se $\alpha > 0$ essa è resa integrabile dalla presenza del fattore $e^{-\alpha x}$. Pertanto l'integrale converge per $\alpha > 0$. Per $\alpha = 1$ si ha $\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1 - e^{-2x})\, dx = \int_0^{+\infty} x(e^{-x} - e^{-3x})\, dx = (-(x+1)e^{-x} + \frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}]_0^{+\infty} = (0+0) - (-1 + \frac{1}{9}) = \frac{8}{9}$.

2. Per portare in forma normale l'equazione lineare $(e^x - \lambda)y' + e^x y = 1$ bisogna dividere per $e^x - \lambda$: se $\lambda \leq 0$ ciò non richiede condizioni, altrimenti bisogna escludere il punto $x = \log\lambda$. Si arriva a $y' + \frac{e^x}{e^x - \lambda}y = \frac{1}{e^x - \lambda}$, che ha soluzioni $y(x) = \frac{1}{|e^x - \lambda|}(x\,\mathrm{sign}(e^x - \lambda) + k) = \frac{x+k}{e^x - \lambda}$ con $k \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \leq 0$ si tratta di tutte soluzioni definite su $\mathbb{R}$. Se invece $\lambda > 0$, l'unica soluzione prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ (ovvero anche in $x = \log\lambda$) è quella con $k = -\log\lambda$, ovvero $\varphi(x) = \frac{x - \log\lambda}{e^x - \lambda}$: infatti, si ha $\lim_{x\to\log\lambda} \varphi(x) = \frac{1}{e^{\log\lambda}} = \frac{1}{\lambda} =: \varphi(\log\lambda)$, e $\lim_{x\to\log\lambda} \frac{\varphi(x) - \varphi(\log\lambda)}{x - \log\lambda} = \lim_{x\to\log\lambda} \frac{\frac{x-\log\lambda}{e^x-\lambda} - \frac{1}{\lambda}}{x - \log\lambda} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{\lambda(e^t-1)} - \frac{1}{\lambda}}{t} = \frac{1}{\lambda}\lim_{t\to 0}\frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} = -\frac{1}{2\lambda} =: \varphi'(\log\lambda)$. Infine, se $\lambda \neq 1$ si ha $\log\lambda \neq 0$, dunque in $y(x) = \frac{x+k}{e^x-\lambda}$ si può imporre senza problemi che $y(0) = -2$, ottenendo $\frac{k}{1-\lambda} = -2$, da cui $k = 2(\lambda - 1)$, ovvero la soluzione $y(x) = \frac{x + 2(\lambda-1)}{e^x - \lambda}$; se invece $\lambda = 1$, si è visto che l'unica soluzione definita anche in $x = \log 1 = 0$ è $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ con $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$, dunque la soluzione cercata non esiste.

3. (i) $f(x,y) = (x - y^2)\log(|x| + |y|)$ è definita e continua ovunque tranne che in $(0,0)$; è certamente $\mathcal{C}^\infty$ fuori dagli assi, e poiché una delle due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = \log(|x| + |y|) + (x - y^2)\frac{\mathrm{sign}\, x}{|x|+|y|}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\log(|x| + |y|) + (x - y^2)\frac{\mathrm{sign}\, y}{|x|+|y|}$ è discontinua in un qualsiasi punto degli assi diverso da $(0,0)$, sugli assi f è solo continua. Nel dominio f è nulla sulla parabola $x = y^2$ e sul rombo $|x| + |y| = 1$, ed è positiva all'interno di rombo e parabola tranne che nei punti interni ad entrambi. Per il calcolo del limite in $(0,0)$, osserviamo che $x - y^2$ è infinitesima di tipo polinomiale e $\log(|x| + |y|)$ infinita di tipo logaritmico, dunque è probabile che il limite sia 0 (ciò è vero su tutte le rette per $(0,0)$, come si verifica facilmente): infatti in coordinate polari si ha $f(x,y) = \rho(\cos\theta - \rho\sin^2\theta)\big(\log\rho + \log(|\cos\theta| + |\sin\theta|)\big)$, dunque (essendo $1 \leq |\cos\theta| + |\sin\theta| \leq \sqrt{2}$ per ogni θ), per $\rho < 1$ si ha $|f(x,y)| \leq 2\rho(|\log\rho| + \log\sqrt{2})$, che per $\rho \to 0$ tende a 0. Dunque volendo si può prolungare f per continuità a $(0,0)$ col valore $f(0,0) = 0$: la funzione così ottenuta non è però differenziabile in $(0,0)$, ad esempio perché $\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = -\infty$ e perciò $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste. Infine, il limite di f in ∞_2 non esiste perché lungo l'asse x essa tende a $\pm\infty$, mentre è nulla lungo la parabola $x = y^2$.

(ii) Il vettore ortogonale al grafico di f in $(x_0, y_0) = (1, -2)$ è il gradiente di $g(x,y,z) = z - f(x,y)$, cioè $\underline{v} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2), -\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2), 1) = (-(\log 3 - 1), -(4\log 3 + 1), 1)$, dunque la retta è $\{(x,y,z) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + \lambda\underline{v} : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \lambda(\log 3 - 1), -2 - \lambda(4\log 3 + 1), -3\log 3 + \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Gli insiemi $A = \{(x,y) : f(x,y) > 0,\ |x| + y < 2\}$ e $B = \{(x,y) : f(x,x) = 0,\ x \neq 0,\ y \leq 2\}$ sono mostrati in figura. A è aperto perché definito da disuguaglianze late di funzioni continue nel dominio di f, che è aperto; è limitato e sconnesso (ha due componenti). La condizione $f(x,x) = (x - x^2)\log(2|x|) = 0$ con $x \neq 0$ dà $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, dunque B è l'unione di tre semirette verticali distinte: è chiuso, illimitato, sconnesso (ha quattro componenti).

(iv) Il paraboloide ellittico $z = -x^2 - 2y^2 + 1$ (avente come asse l'asse z, di sezione ellittica, concavità rivolta verso il basso) è globalmente parametrizzato come grafico di funzione di (x,y), pertanto la legge oraria $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dovrà soddisfare $x(t) + y(t) = k$ e $z = -x(t)^2 - 2y(t)^2 + 1$, dunque sarà del tipo $\underline{x}(t) = (x(t), k - x(t), -3x(t)^2 + 4kx(t) - 2k^2 + 1)$. La velocità sarà allora il vettore $\underline{x}'(t) = (x', -x', -6xx' + 4kx')$, e l'accelerazione il vettore $\underline{x}''(t) = (x'', -x'', -6(x')^2 - 6xx'' + 4kx'')$. Essendo infine $g(x,y,z) = t^2 f(x,0) - 2z = t^2 x\log|x| - 2z$, si ha $\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{x}(t))\,x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{x}(t))\,y'(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(\underline{x}(t))\,z'(t) + \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}(t)) = t^2(\log|x| + 1)x' + 0y' + (-2)z' + (2tx\log|x|) = t^2(\log|x| + 1)x' - 2(-6xx' + 4kx') + 2tx\log|x| = \big(t^2(\log|x| + 1) + 4(3x - 2k)\big)x' + 2tx\log|x|$.

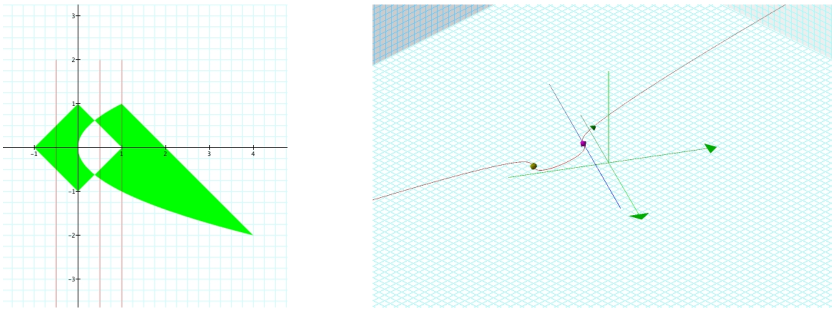
4. (i) Da $d(g_1,g_2)_{(-1,1,2)} = \begin{pmatrix} z-e^{x+y} & 1-e^{x+y} & x+2z \\ 3x^2 & z & y \end{pmatrix}_{(-1,1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si nota che si può esplicitare, perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$: si avranno due funzioni $x(z)$ e $y(z)$ definite all'intorno di $z_0 = 2$ con $x(2) = -1$ e $y(2) = 1$, e inoltre $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Si ha poi $\lim_{z\to 2} \frac{x(z)^2-2y(z)^2+1}{4-z^2} = \lim_{z\to 2} \frac{2x(z)x'(z)-4y(z)y'(z)}{-2z} = \frac{2(-1)(3)-4(1)(-4)}{-2(2)} = -\frac{5}{2}$.

(ii) Il gradiente $\nabla g_1 = (z-e^{x+y}, 1-e^{x+y}, x+2z)$ si annulla quando $z - e^{x+y} = 1 - e^{x+y} = x+2z = 0$: si ha dunque $x+y=0$, $z = e^{x+y} = 1$ e $x = -2z$, da cui l'unico punto $P(-2,2,1)$; tuttavia $\mathsf{H}_{g_1}(-2,2,1) = \begin{pmatrix} -e^{x+y} & -e^{x+y} & 1 \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(-2,2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è indefinito (si noti l'ultimo minore principale di ordine 2), e dunque $P(-2,2,1)$ è una sella. L'insieme $K = \{(x,y,z) : x+y=0,\ |x| \le 1,\ |z| \le 1\}$ è il rettangolo chiuso sul piano verticale $x+y=0$ di vertici $(1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,1)$ e $(-1,1,-1)$, dunque è compatto: la funzione continua g_1 vi ammetterà estremi assoluti in base al Teorema di Weierstrass. Per il calcolo conviene dividere K nel suo "interno" K_0 (varietà di dimensione 2), i quattro lati privi dei vertici (varietà di dimensione 1) e i quattro vertici (varietà di dimensione 0). K_0 è parametrizzato da x e z tramite $\gamma(x,z) = (x,-x,z)$ con $|x| < 1$ e $|z| < 1$, dunque possiamo considerare $\varphi(x,z) = g_1(\gamma(x,z)) = g_1(x,-x,z) = z^2 - 1 + xz - x$, e da $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z - 1 = 0$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z + x = 0$ otteniamo l'unico punto stazionario $(-2,1)$ —che era atteso, perché corrisponde al punto P trovato in precedenza—, in cui g_1 vale 0 (senza aspettare il confronto con gli altri punti sul bordo di K possiamo però già dire che tale punto non è un estremante, perché $\mathsf{H}_\varphi(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è indefinito). I lati verticali $K'_\pm = \{x+y=0,\ x=\pm 1,\ |z|<1\}$ sono parametrizzati da $-1 < z < 1$ tramite $\gamma_\pm(z) = (\pm 1, \mp 1, z)$: su K'_+ si ha $\psi_+(z) = g_1(\gamma_+(z)) = g_1(1,-1,z) = z^2 + z - 2$, che ha un punto di minimo per $z = -\frac{1}{2}$ (che corrisponde a $(1,-1,-\frac{1}{2})$) in cui g_1 vale $-\frac{9}{4}$; su K'_- si ha invece $\psi_-(z) = g_1(\gamma_-(z)) = g_1(-1,1,z) = z^2 - z$, che ha un punto di minimo per $z = \frac{1}{2}$ (che corrisponde a $(-1,1,\frac{1}{2})$) in cui g_1 vale $-\frac{1}{4}$. I lati orizzontali $K''_\pm = \{x+y=0,\ |x|<1,\ z=\pm 1\}$ sono parametrizzati da $-1 < x < 1$ tramite $\gamma_\pm(x) = (x,-x,\pm 1)$: su K''_+ si ha $\psi_+(x) = g_1(\gamma_+(x)) = g_1(x,-x,1) \equiv 0$ (infatti g_1 è identicamente nulla su tutta la retta contenente K''_1), mentre su K'_- si ha invece $\psi_-(x) = g_1(\gamma_-(x)) = g_1(x,-x,-1) = -2x$, senza estremi locali. Infine, nei quattro vertici la funzione g_1 vale rispettivamente $g_1(1,-1,1) = g_1(-1,1,1) = 0$, $g_1(1,-1,-1) = -2$ e $g_1(-1,1,-1) = 2$. Pertanto in K la funzione g_1 ha minimo assoluto $-\frac{9}{4}$ (assunto in $(1,-1,-\frac{1}{2})$), e massimo assoluto 2 (assunto in $(-1,1,-1)$). La sequenza di insiemi di livello riportata in figura illustra in modo suggestivo l'esattezza dei risultati ottenuti.

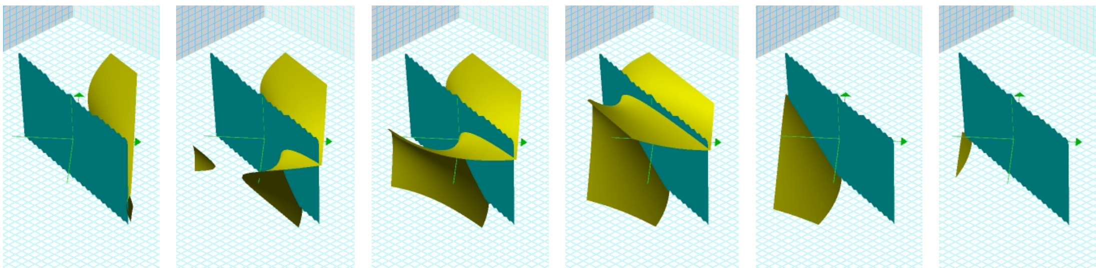
(iii) Si ha $d(g_2,g_3) = \begin{pmatrix} 3x^2 & z & y \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, dunque i punti di $\mathbb{R}^3$ in cui $(g_1,g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non è sommersiva sono dati da $3x^2 = -9x^2 = -3z - y = 0$, ovvero quelli del tipo $(0,-3\alpha,\alpha)$; ma nessuno di essi sta su M, in quanto da $y - 3z = -4$ si otterrebbe $-6\alpha = -4$ ovvero $(0,-2,\frac{2}{3})$, che però non soddisfa $x^3 + yz = -1$. Ciò prova che M è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$. Considerato ora $A(0,-1,1) \in$ M, da $d(g_2,g_3)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ notiamo che all'intorno di A si può parametrizzare M solo esplicitando y e z in funzione di x, ovvero tramite $\gamma(x) = (1, y(x), z(x))$ con $y(0) = -1$, $z(0) = 1$ e $\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vettore tangente a M in A è pertanto $\gamma'(0) = (1,0,0)$, da cui $\mathsf{T}_A\mathrm{M} = \mathbb{R}\underline{e}_1$, e ciò si vede subito anche dal sistema $d(g_2,g_3)_A(x,y,z) = (0,0)$. La retta affine tangente è perciò $\{(0,-1,1) + \lambda(1,0,0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda,-1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(iv) Si tratta di cercare gli estremi locali su M della funzione $f(x,y,z) = y^2 + z^2$. Il metodo di Lagrange dà i punti stazionari $A(0,-1,1)$, $B(0,-3,\frac{1}{3})$ e $C(-\sqrt[3]{\frac{13}{25}}, -\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$, ma per capire il loro carattere occorre ragionare in una carta locale. Da $d(g_2,g_3)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $d(g_2,g_3)_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ si ha che sia all'intorno di A che di B si può parametrizzare M solo esplicitando y e z in funzione di x: la funzione da studiare diventa perciò $\varphi(x) = y(x)^2 + z(x)^2$, che derivata più volte dà $\varphi'(x) = 2(yy' + zz')$, $\varphi''(x) = 2((y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'')$ e $\varphi'''(x) = 2(3y'y'' + yy''' + 3z'z'' + zz''')$: pertanto, per continuare, servono i valori delle derivate di $y(x)$ e $z(x)$ esplicitate all'intorno rispettivamente di A e B. Derivando più volte rispetto a x le identità $x^3 + y(x)z(x) = -1$ e $y(x) - 3z(x) = -4$ si ottiene $3x^2 + y'z + yz' = y' - 3z' = 0$, $6x + y''z + 2y'z' + yz'' = y'' - 3z'' = 0$ e $6 + y'''z + 3y''z' + 3y'z'' + yz''' = y''' - 3z''' = 0$. Ne ricaviamo che in A si ha $y(0) = -1$, $z(0) = 1$, $y'(0) = z'(0) = y''(0) = z''(0) = 0$, $y'''(0) = -9$ e $z'''(0) = -3$, pertanto in A vale $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ e $\varphi'''(0) = 2(9-3) = 12 \neq 0$; similmente, in B si ha $y(0) = -3$, $z(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = z'(0) = y''(0) = z''(0) = 0$, $y'''(0) = 9$ e $z'''(0) = 3$, da cui in B vale $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ e $\varphi'''(0) = 2(-27+1) = -52 \neq 0$. Ne ricaviamo che A e B sono punti di sella (flessi) sulla curva M per la distanza dall'asse x. Quanto a C, si ha invece $d(g_2,g_3)_C = \begin{pmatrix} 3(\frac{13}{25})^{\frac{2}{3}} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, dunque

all'intorno di C si può esplicitare qualsiasi coppia di coordinate rispetto alla terza: scegliendo ancora una volta di esplicitare y e z rispetto x, posto $x_0 = -\sqrt[3]{\frac{13}{25}}$ dalle espressioni precedenti si ricava che $y(x_0) = -\frac{2}{5}$, $z(x_0) = \frac{6}{5}$, $y'(x_0) = -\frac{45}{16}(\frac{13}{25})^{\frac{2}{3}}$, $z'(x_0) = -\frac{15}{16}(\frac{13}{25})^{\frac{2}{3}}$, $y''(x_0) = \frac{6255}{2048}\sqrt[3]{\frac{13}{25}}$ e $z''(x_0) = \frac{2085}{2048}\sqrt[3]{\frac{13}{25}}$, da cui in C vale $\varphi'(x_0) = 0$ e $\varphi''(x_0) = \frac{585}{64}\sqrt[3]{\frac{13}{25}} > 0$. Ne ricaviamo che C è un punto di minimo locale sulla curva M per la distanza dall'asse x.
Quanto al problema dell'esistenza di punti di M a distanza massima o minima dall'asse x rispetto a tutti gli altri, notiamo che l'asse x è tutto contenuto nel piano $y - 3z = 0$ mentre M è tutta contenuta nel piano $y - 3z = -4$: dunque la distanza tra un punto qualsiasi dell'asse x e un punto qualsiasi di M sarà sempre maggiore o uguale della distanza tra i due piani, che vale $\frac{|(0,-1,1)\cdot(0,1,-3)|}{||(0,1,-3)||} = \frac{4}{\sqrt{10}}$. D'altra parte si può scrivere globalmente $y = 3z-4$ e $x = \sqrt[3]{4z - 3z^2 - 1}$, ove la radice cubica è intesa in senso algebrico, dunque univocamente definita anche per numeri negativi (questa è una parametrizzazione globale di M in quanto curva continua, mentre come curva differenziabile essa non funziona dove il radicando è nullo, ovvero in A e B in cui, come detto, si può esplicitare solo rispetto x), perciò se $z \to \infty$ anche x e y divergono. È dunque evidente che non vi sono punti di distanza assoluta massima, mentre col solito argomento basato sulla riconduzione al caso compatto e applicazione di Weierstrass deduciamo che la distanza tra M e l'asse x ammette minimo assoluto, che sarà dunque quella del punto C, pari a $\sqrt{y_C^2 + z_C^2} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.



(a) Gli insiemi A (verde) e B (rosso) nell'esercizio 3. **(b)** La curva M nell'esercizio 4(iii)-(iv).



Il rettangolo compatto K (azzurro) e insiemi di livello crescente di g_1 (giallo) nell'esercizio 4.

Prova scritta (06/09/2005)

1. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali generalizzati (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x^\alpha}\,dx$ e (ii) $\int_0^1 \frac{e^{2x}\,|e^{\alpha x}-1|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(1-x)^{1-\alpha}}\,dx$? Calcolare quindi per $\alpha = 1$.

2. Risolvere, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione differenziale $y'' - \lambda y' + 2(\lambda - 2)y = e^{2x}$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Detta $y_\lambda(x)$ tale soluzione, per quali valori di λ il limite $\lim_{x\to -\infty} y_\lambda(x)$ è finito e non nullo?

3. Sia data la funzione $f(x,y) = \frac{|x^2+y|}{2x-y}$.

(i) Determinarne dominio, zeri, segno, continuità, differenziabilità, limiti notevoli.

(ii) Dire se f ha estremi locali e/o assoluti in tutto il suo dominio o se ristretta al tratto di parabola $X = \{(x,y) : y = 5 - x^2,\ -3 \le x \le 0\}$, e calcolarli.

(iii) Calcolare l'equazione cartesiana del piano affine Π tangente al grafico di f nel punto $(0,1)$ del suo dominio, e dire in quali altri punti del dominio il piano affine tangente al grafico di f è parallelo a Π.

(iv) Fissato $r > 0$, si disegni la curva Γ parametrizzata da $\gamma : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Trovare il baricentro geometrico di Γ, e calcolare la derivata totale di f lungo γ rispetto al parametro θ.

4. Sia $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (xy^2z + 1\ ,\ \log(y+z) - z\ ,\ \frac{x}{y})$.

(i) Dal sistema $\big(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\big) = (-3,-2)$ esplicitare in tutti i modi possibili due variabili rispetto alla terza all'intorno della soluzione $(-2,-1,2)$, e calcolare gli sviluppi di Taylor al primo ordine delle funzioni implicite trovate.

(ii) Dire in quali punti g è diffeomorfismo locale. Detta ψ l'inversa locale di g in $\underline{\tilde{x}} = (1,1,0)$, calcolare il valore della derivata direzionale $\frac{\partial\psi}{\partial(-1,1,0)}$ in $\underline{\tilde{y}} = g(\underline{\tilde{x}})$.

(iii) Quali insiemi di livello $\mathrm{M}_{\alpha,\beta} = \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = \alpha,\ g_3(x,y,z) = \beta\}$ sono curve regolari di $\mathbb{R}^3$? Calcolare in due modi la retta affine tangente a $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{3,-1}$ nel suo punto $(1,-1,2)$.

(iv) Determinare i punti della curva M a distanza minima dall'origine.

Soluzioni.

1. (i) Sia $f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x^\alpha}$; conviene dividere i casi (a) $\alpha < 2$ e (b) $\alpha \ge 2$. Nel caso (a) si ha $x^2 + 2x^\alpha \sim_0^* x^\alpha$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{\frac{1}{2}-\alpha}$, da cui la condizione $\frac{1}{2} - \alpha > -1$, ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$; si ha poi $x^2 + 2x^\alpha \sim_{+\infty}^* x^2$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* x^{-\frac{3}{2}}$, integrabile a $+\infty$. Nel caso (b) le asintoticità si invertono: si ha $x^2 + 2x^\alpha \sim_0^* x^2$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{-\frac{3}{2}}$, non integrabile in 0^+ (non serve dunque continuare l'esame in $+\infty$). Pertanto l'integrale generalizzato esiste per $\alpha < \frac{3}{2}$. Per $\alpha = 1$, ponendo $x = t^2$ si ottiene $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^4+2t^2} 2t\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2}\,dt = \big(\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(\frac{t}{\sqrt{2}})\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

(ii) Sia $f_\alpha(x) = \frac{e^{2x}\,|e^{\alpha x}-1|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(1-x)^{1-\alpha}}$. Se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) \equiv 0$, ovviamente integrabile; supponendo $\alpha \neq 0$ si ha invece $|e^{\alpha x} - 1| \sim_0^* x$, e si ottiene allora $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{\frac{1}{2}-\alpha}$, da cui la condizione $\frac{1}{2} - \alpha > -1$, ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$. D'altra parte, sempre per $\alpha \neq 0$ vale $f_\alpha(x) \sim_1^* (1-x)^{\alpha-1}$, da cui la condizione $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$. Pertanto l'integrale generalizzato esiste per $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$. Per $\alpha = 1$, ponendo $e^x - 1 = t^2$ si ottiene $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{t^2+1}{t}\,2t\,dt = 2\big(\frac{t^3}{3} + t\big]_0^{\sqrt{e-1}} = \frac{2}{3}(e+2)\sqrt{e-1}$.

2. Le radici dell'equazione caratteristica di $y'' - \lambda y' + 2(\lambda-2)y = e^{2x}$ sono $\lambda - 2$ e 2, entrambe reali; conviene allora dividere i due casi (a) $\lambda \neq 4$ (radici distinte) e (b) $\lambda = 4$ (radice doppia 2).
(a) Se $\lambda \neq 4$ le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{2x} + Be^{(\lambda-2)x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e una soluzione particolare dell'equazione completa è del tipo $\tilde{y}(x) = uxe^{2x}$ con $u \in \mathbb{C}$ da determinare; essendo $\tilde{y}'(x) = u(1+2x)e^{2x}$ e $\tilde{y}''(x) = u(4+4x)e^{2x}$, da $\tilde{y}''-\lambda\tilde{y}'+2(\lambda-2)\tilde{y} = e^{2x}$ si ricava $u(4+4x-\lambda-2\lambda x+2(\lambda-2)x)e^{2x} = e^{2x}$, da cui $u = \frac{1}{4-\lambda}$, e dunque l'integrale generale $y(x) = (A + \frac{1}{4-\lambda}x)e^{2x} + Be^{(\lambda-2)x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Da $y(0) = A + B = 0$ e $y'(0) = 2A + \frac{1}{4-\lambda} + B(\lambda-2) = 0$ si ottiene $A = -\frac{1}{(4-\lambda)^2}$ e $B = \frac{1}{(4-\lambda)^2}$, da cui la soluzione particolare $y_\lambda(x) = \frac{1}{(4-\lambda)^2}(e^{(\lambda-2)x} + ((4-\lambda)x - 1)e^{2x})$ (valida, lo si ricordi, per $\lambda \neq 4$).
(b) Se invece $\lambda = 4$ le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $(A + Bx)e^{2x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e una soluzione particolare dell'equazione completa è del tipo $\tilde{y}(x) = ux^2e^{2x}$ con $u \in \mathbb{C}$ da determinare; essendo $\tilde{y}'(x) = u(2x^2 + 2x)e^{2x}$ e $\tilde{y}''(x) = u(4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$, da $\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = e^{2x}$ si ricava $u(4x^2 + 8x + 2 - 4(2x^2 + 2x) + 4x^2)e^{2x} = e^{2x}$, da cui $u = \frac{1}{2}$, e dunque l'integrale generale $y(x) = (A + Bx + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Da $y(0) = A = 0$ e $y'(0) = B + 2A = 0$ si ottiene $A = B = 0$, da cui la soluzione particolare $y_4(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Infine, si nota facilmente che $\lim_{x\to-\infty} y_\lambda(x)$ vale $+\infty$ per $\lambda < 2$, vale $\frac{1}{4}$ per $\lambda = 2$ e vale 0 per $\lambda > 2$: dunque il solo caso in cui il limite è finito e non nullo si ha per $\lambda = 2$.

3. (i) Il dominio D di $f(x,y) = \frac{|x^2+y|}{2x-y}$ è tutto $\mathbb{R}^2$ eccetto i punti della retta r di equazione $y = 2x$; la funzione si annulla sui punti della parabola p di equazione $y = -x^2$ che stanno in D, ovvero tutti tranne $O(0,0)$ e $A(-2,-4)$; ed è > 0 quando $y < 2x$ e $y \neq -x^2$, ovvero sotto r e non su p. f è continua in D, ed è ivi di classe $\mathcal{C}^\infty$ tranne che eventualmente nei punti di p, ove l'argomento del modulo cambia segno. In effetti, fuori di p si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = \pm 2\frac{x^2-xy-y}{(2x-y)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm 2\frac{x(x+2)}{(2x-y)^2}$ (ove il segno "$\pm$" vale rispettivamente per i punti di D che stanno sopra e sotto p), così in un punto di p in cui almeno una delle due derivate parziali non è nulla tale derivata è discontinua, negando in tal modo la differenziabilità; restano da vedere gli eventuali punti di p in cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ma tale sistema dà le sole soluzioni O e A, che non sono accettabili. Dunque, nei punti di D che stanno su p la funzione è solo continua. Infine, i limiti notevoli: nei punti O e A il limite non esiste (tendendovi lungo p la funzione f è nulla, ma al loro intorno vi sono punti in cui $|f|$ è arbitrariamente grande); nei punti di r diversi da O e A la funzione diverge a ∞; infine, il limite a ∞_2 non esiste (tendendovi lungo p la funzione f è nulla, lungo l'asse x essa diverge a ∞ e lungo l'asse y essa vale costantemente -1 se $y > 0$, e 1 se $y < 0$).

(ii) Come visto, il sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ non ha soluzioni accettabili, dunque non vi sono estremi locali regolari in D; d'altra parte, sui punti di p che stanno in D la funzione è nulla, e al loro intorno essa ha il segno della funzione $2x - y$: pertanto, i punti di p che stanno sopra (risp. sotto) r sono di massimo (risp. di minimo) relativo in senso lato per f. D'altra parte, f non ha estremi assoluti in D perché ha direzioni in cui diverge a $\pm\infty$. Invece il tratto di parabola $X = \{(x,y) : y = 5 - x^2,\ -3 \leq x \leq 0\}$ è compatto, dunque f vi ammette estremi assoluti. Per il calcolo, basta esaminare $\varphi(x) = f(x, 5-x^2) = \frac{5}{x^2+2x-5}$ per $x \in [-3, 0]$: negli estremi si ha $\varphi(-3) = -\frac{5}{2}$ e $\varphi(0) = -1$, mentre all'interno si ha $\varphi'(x) = -\frac{10(x+1)}{(x^2+2x-5)^2}$, che mostra come $x = -1$ sia un punto di massimo locale, in cui vale $\varphi(-1) = -\frac{5}{6}$. Pertanto, se ristretta a X la funzione f ha massimo assoluto stretto $-\frac{5}{6}$ (assunto in $(-1,4)$), minimo assoluto stretto $-\frac{5}{2}$ (assunto in $(-3,-4)$), mentre nell'estremo $(0,5)$ ha solo un punto di minimo locale.

(iii) Il punto $(0,1)$ sta sopra la parabola p, perciò $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$: essendo poi $f(0,1) = -1$, l'equazione cartesiana di Π risulta $z = -1 + (-2)(x-0) + 0(y-1) = -2x - 1$. Gli altri punti del dominio D in cui il piano affine tangente al grafico di f è parallelo a Π sono le soluzioni $(x,y) \in D$ del sistema dato da $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2$ e

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Distinguendo la ricerca tra sopra e sotto p, le sole soluzioni accettabili sono $(0, \pm 1)$.
(iv) Γ è l'arco di circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio r che è contenuta nel secondo quadrante: per simmetria, il suo baricentro geometrico G_Γ starà dunque sulla retta $y = -x$. Basterà dunque calcolare $x_{G_\Gamma} = \frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma x\, d\sigma = \frac{1}{\frac{r\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r\cos\theta\; r d\theta = \frac{2}{r\pi} r^2 (\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2r}{\pi}$, da cui $G_\Gamma = (-\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi})$. Infine, si ha $\frac{df}{d\theta}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(\theta), y(\theta))\, x'(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\theta), y(\theta))\, y'(\theta)$, con $x(\theta) = r\cos\theta$ e $y(\theta) = r\sin\theta$.

4. (i) Da $d(g_1, g_2)_{(-2,-1,2)} = \begin{pmatrix} y^2 z & 2xyz & xy^2 \\ 0 & \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} - 1 \end{pmatrix}_{(-2,-1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si nota che, all'intorno di $(-2,-1,2)$, dal sistema $\big(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\big) = (-3,-2)$ si possono esplicitare (x,y) in funzione di z, oppure (y,z) in funzione di x. Nel primo caso $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui si ricava che $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + (z-2) + o_2(z-2) \\ -1 + o_2(z-2) \end{pmatrix}$; nel secondo $\begin{pmatrix} y'(-2) \\ z'(-2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + o_{-2}(x+2) \\ 2 + (x+2) + o_{-2}(x+2) \end{pmatrix}$ (si noti che i due sviluppi sono reciprocamente coerenti).
(ii) Il dominio di g è dato da $\mathbb{R}^3$ eccetto i punti dei piani $y = 0$ e $y + z = 0$. La matrice jacobiana di g è $\begin{pmatrix} y^2 z & 2xyz & xy^2 \\ 0 & \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} - 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{pmatrix}$, con determinante $-\frac{x(3yz+3z^2+y-3z)}{y+z}$: in base al Teorema della Funzione Inversa, g è diffeomorfismo locale in tutti i punti del suo dominio tranne che nei punti del piano $x = 0$ e della superficie $3yz + 3z^2 + y - 3z = 0$, che è un'iperbole del piano (y,z) invariante rispetto a x. Il punto $\underline{\tilde{x}} = (1,1,0)$ non sta su nessuno di questi luoghi singolari; si ha $\underline{\tilde{y}} = g(\underline{\tilde{x}}) = (1,0,1)$ da cui $\mathsf{J}_\psi(\underline{\tilde{y}}) = \mathsf{J}_g(\underline{\tilde{x}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e perciò $\frac{\partial\psi}{\partial(-1,1,0)}(\underline{\tilde{y}}) = d\psi_{\underline{\tilde{y}}}(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(iii) Il dominio di (g_1, g_3) è $\mathbb{R}^3$ meno i punti del piano $y = 0$. Poiché $d(g_1, g_3) = \begin{pmatrix} y^2 z & 2xyz & xy^2 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{pmatrix}$, i punti in cui (g_1, g_3) non è sommersiva sono dati dal sistema $-xz - 2xz = -xy = x^2 = 0$, ovvero sono tutti e soli i punti del dominio che stanno sul piano $x = 0$. Poiché $(g_1, g_3)(0, y, z) = (1, 0)$ per ogni y, z con $y \neq 0$, tutte le curve $\mathrm{M}_{\alpha,\beta}$ con $(\alpha, \beta) \neq (1,0)$ sono regolari, ed essendo contenute nel piano $x = \beta y$ esse sono piane; invece $\mathrm{M}_{1,0}$, data da $xy^2 z + 1 = 1$ e $\frac{x}{y} = 0$, degenera nel piano $x = 0$ privato dell'asse z. La retta tangente a $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{3,-1}$ in $(1,-1,2)$ ha equazione cartesiana $d(g_1, g_3)_{(1,-1,2)}(x-1, y+1, z-2) = (0,0)$, ovvero $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $2x - 4y + z - 8 = x + y = 0$; analogamente, esplicitando x e z in funzione di y all'intorno di $(1,-1,2)$ si ottiene $\begin{pmatrix} x'(-1) \\ z'(-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, e poiché un vettore parallelo alla retta è $(x(y), y, z(y))'_{y=-1} = (x'(-1), 1, z'(-1)) = (-1, 1, 6)$, si ottiene l'equazione parametrica $\{(1,-1,2) + t(-1,1,6) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t, -1+t, 2+6t) : t \in \mathbb{R}\}$, che dà lo stesso luogo di prima.
(iv) Applicando il metodo di Lagrange per determinare gli estremi locali della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ su M si trova il sistema $xy^2 z - 2 = x + y = 2x(x^2 + y^2 - 3z^2) = 0$ (con $y \neq 0$), con due soluzioni simmetriche $\pm(\sqrt[8]{6}, -\sqrt[8]{6}, \sqrt[8]{\frac{32}{27}})$, per conoscere il carattere delle quali servono parametrizzazioni locali. Notiamo allora che M, le cui equazioni sono $xy^2 z - 2 = x + y = 0$, è parametrizzata globalmente (e non solo localmente, come visto in precedenza all'intorno di $(1,-1,2)$) da $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ponendo $\gamma(y) = (-y, y, -\frac{2}{y^3})$: si ha $f(\gamma(y)) = y^2 + y^2 + \frac{4}{y^6} = 2(y^2 + \frac{2}{y^6})$, ed è così immediato notare che in tali punti della curva la distanza dall'origine diventa addirittura il minimo assoluto.

Prova scritta (20/09/2005)

1. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali generalizzati (i) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + x}{(2x^2+1)(x^2+1)}\, dx$ e (ii) $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha} \log(1+x^\alpha)\, dx$? Calcolare quindi per $\alpha = 1$.

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $4y'' + \lambda y = 1$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e determinare la soluzione $y_\lambda(x)$ tale che $y_\lambda(0) = 0$ e $y'_\lambda(0) = 0$. Detta poi $\tilde{z}(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale $x^2 z z' + 8 = 0$ tale che $\tilde{z}(1) = 4$, si trovino le soluzioni $t \in \mathbb{R}$ dell'equazione $y_0(t) = \tilde{z}(t)$.

3. Sia data la funzione $f(x, y) = \frac{x^2 - e^y}{y}$.

(i) Determinarne dominio, zeri, segno, continuità, differenziabilità, limiti notevoli.

(ii) Dire se f ha estremi locali e/o assoluti in tutto il dominio o se ristretta al triangolo K (interno e lati compresi) di vertici $(0, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, 2)$, e calcolarli.

(iii) Disegnare $A = \{(x, y) : f(x, y) > 0,\ y < 1\}$ e $B = \{(x, y) : f(x, 1) = y - 3,\ |x| \leq 2\}$ e dire, spiegando, se sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi per archi.

(iv) Un punto materiale percorre la retta $y = x$ secondo la legge oraria $x(t) = y(t) = t^2 - t + 1$. Considerata la funzione $F(x, y, t) = t\, f(2x - y, 1) + t^2$, calcolare la derivata totale $\frac{dF}{dt}(t)$ lungo il moto.

4. Sia $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (\log(xz + y^2) + 2x + y\ ,\ z - xy + \cos z)$.

(i) Dall'equazione $g_1(x, y, z) + 4 = 0$ esplicitare y in funzione di x e z all'intorno della soluzione $(-1, -2, 3)$, e calcolare lo sviluppo al primo ordine di $y(x, z)$.

(ii) La restrizione di g al piano (x, y) è un diffeomorfismo locale? In quali punti?

(iii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ gli insiemi $X_\alpha = \{(x, y) : g_1(x, y, x) = \alpha\}$ sono curve regolari del piano (x, y)? Calcolare la retta affine tangente a X_1 nel suo punto $(0, 1)$.

(iv) In quali punti di $\mathbb{R}^3$ il piano affine tangente alla corrispondente superficie di livello della funzione g_2 è parallelo al piano $x + z + 2 = 0$?

Soluzioni.

1. (i) Sia $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha + x}{(2x^2+1)(x^2+1)}$; conviene dividere i casi (a) $\alpha < 1$ e (b) $\alpha \geq 1$. Nel caso (a) si ha $x^\alpha + x \sim_0^* x^\alpha$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_0^* x^\alpha$, da cui la condizione $\alpha > -1$; si ha invece $x^\alpha + x \sim_{+\infty}^* x$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* x^{-3}$, integrabile a $+\infty$. Nel caso (b) la situazione è invertita: si ha $x^\alpha + x \sim_0^* x$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_0^* x$, integrabile in 0^+; si ha invece $x^\alpha + x \sim_{+\infty}^* x^\alpha$ e perciò $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* x^{\alpha-4}$, da cui la condizione $\alpha - 4 < -1$, ovvero $\alpha < 3$. Pertanto l'integrale generalizzato esiste per $-1 < \alpha < 3$. Per $\alpha = 1$, ponendo $x^2 = t$ si ottiene $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+1)(t+1)}\, dt = \int_0^{+\infty} (\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t+1})\, dt = \big(\log \frac{2t+1}{t+1}\big]_0^{+\infty} = \log 2$.

(ii) Sia $f_\alpha(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}\log(1+x^\alpha)$. Per l'integrabilità in 1^- basta notare che $f_\alpha(x) \sim^*_{1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}$, da cui la condizione $\frac{1}{2}-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$; per l'integrabilità in 0^+ conviene invece dividere lo studio a seconda del segno di α. Se $\alpha < 0$ si ha $x^\alpha \to +\infty$, dunque $f_\alpha(x) \sim_{0^+} \log(x^\alpha) = \alpha \log x \sim_{0^+} |\log x|$, che come noto è integrabile in 0^+ (confrontare ad esempio con $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$); se $\alpha = 0$ si ha $f_\alpha(x) = \sqrt{1-x}\log 2$, ovviamente integrabile (ha limite finito in 0^+); se $\alpha > 0$ si ha infine $x^\alpha \to 0$, dunque $f_\alpha(x) \sim_{0^+} x^\alpha$, integrabile in 0^+. Ricapitolando, l'integrale esiste per $\alpha < \frac{3}{2}$. Per $\alpha = 1$, ponendo $1-x=t^2$ si ottiene $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_1^0 \frac{\log(2-t^2)}{t}(-2t)\,dt = 2\int_0^1 \log(2-t^2)\,dt = 2\Big(\big(t\log(2-t^2)\big]_0^1 - \int_0^1 t\frac{-2t}{2-t^2}\,dt\Big) = 4\int_0^1 \frac{t^2}{2-t^2}\,dt = 4\int_0^1 (\frac{2}{2-t^2}-1)\,dt = 4\int_0^1 (\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-t} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+t} - 1)\,dt = 4\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} - t\big]_0^1 = 4(\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 1) = 4\big(\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1) - 1\big)$.

2. Conviene distinguere lo studio a seconda del segno di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a) Se $\lambda > 0$ l'equazione caratteristica di $4y''+\lambda y = 1$ ha due radici complesse coniugate $\pm i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$; una soluzione particolare è poi evidentemente la costante $\tilde{y}(x) = \frac{1}{\lambda}$, dunque l'integrale generale è $y(x) = A\cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x) + \frac{1}{\lambda}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Da $y(0) = A + \frac{1}{\lambda} = 0$ e $y'(0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}B = 0$ si ricava poi $y_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(1-\cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x))$.
(b) Se $\lambda = 0$ si ha $4y'' = 1$, il cui integrale generale si ottiene integrando due volte, ovvero $y(x) = A + Bx + \frac{1}{8}x^2$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Da $y(0) = A = 0$ e $y'(0) = B = 0$ si ricava poi $y_0(x) = \frac{1}{8}x^2$.
(c) Infine, se $\lambda < 0$ l'equazione caratteristica di $4y''+\lambda y = 1$ ha due radici reali distinte $\pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}$; una soluzione particolare è ancora la costante $\tilde{y}(x) = \frac{1}{\lambda}$, dunque l'integrale generale è $y(x) = Ae^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}x} + \frac{1}{\lambda}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Da $y(0) = A+B+\frac{1}{\lambda} = 0$ e $y'(0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{2}(A-B) = 0$ si ricava poi $y_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}(-e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}x} - e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}x} + 2) = \frac{1}{\lambda}(1-\cosh(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}x))$.
L'equazione differenziale $x^2zz' + 8 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili: da $zz' = -\frac{8}{x^2}$ integrando si ottiene $\frac{1}{2}z^2 = \frac{8}{x} + k$, e da $z(1) = 4$ si ha $8 = 8 + k$, ovvero $k = 0$: si ottiene allora $\tilde{z}(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, definita per $x > 0$. L'equazione $y_0(t) = \tilde{z}(t)$ diventa dunque $\frac{1}{8}t^2 = \frac{4}{\sqrt{t}}$, ovvero $t^{\frac{5}{2}} = 32$, che ha come unica soluzione $t = 4$.

3. (i) Il dominio di $f(x,y) = \frac{x^2-e^y}{y}$ è dato da $\mathbb{R}^2$ meno l'asse x. Gli zeri sono dati dall'equazione $x^2 - e^y = 0$, pertanto sono tutti e soli i punti dei due rami del grafico $y = 2\log|x|$ tranne $(\pm1, 0)$. Il numeratore di f è > 0 sotto i due rami di $y = 2\log|x|$, il denominatore sopra l'asse x: il segno di f ne segue per prodotto. f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in ogni punto del suo dominio. Tendendo ai punti dell'asse x diversi da $(\pm1,0)$ la funzione diverge a ∞; tendendo invece a $(\pm1,0)$ il limite non esiste (lungo i rami di $y = 2\log|x|$ il limite è zero ma, all'intorno, $|f|$ è arbitrariamente grande). Infine, tendendo a ∞_2 lungo i rami di $y = 2\log|x|$ il limite è zero, e lungo l'asse y esso è 0 oppure ∞: ne segue che il limite a ∞_2 non esiste.

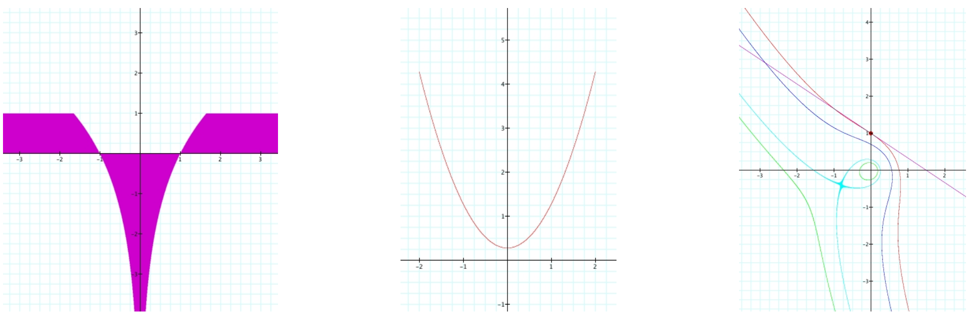
(ii) Da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1-y)e^y - x^2}{y^2} = 0$ si ricava l'unico punto stazionario $(0,1)$; tuttavia, poiché $\mathsf{H}_f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{-y^2e^y - 2((1-y)e^y - x^2)}{y^3} \end{pmatrix}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$ è indefinita, tale punto è una sella. Dunque nel suo dominio f non ammette estremi locali, ma nemmeno assoluti perché essa diverge a $\pm\infty$ tendendo all'asse x. Invece f ammetterà estremi assoluti sul triangolo K in base al teorema di Weierstrass, perché K è un compatto interamente contenuto nel dominio di f. Per quanto appena visto, nessun estremo locale o globale sarà assunto nei punti interni del triangolo, dunque passiamo all'esame dei punti perimetrali. Nei vertici si ha $f(0,1) = -e \sim -2,7$, $f(0,2) = -\frac{e^2}{2} \sim -3,7$ e $f(1,2) = \frac{1-e^2}{2} \sim -3,2$; sul lato verticale $x = 0$ (con $1 < y < 2$) si ha $\varphi(y) = f(0,y) = -\frac{e^y}{y}$, e poiché $\varphi'(y) = -\frac{(y-1)e^y}{y^2} < 0$ la funzione è strettamente decrescente; sul lato orizzontale $y = 2$ (con $0 < x < 1$) si ha $\psi(x) = f(x,2) = \frac{x^2-e^2}{2}$, e poiché $\psi'(x) = x > 0$ la funzione è strettamente crescente; infine, sul lato obliquo $y = x+1$ (con $0 < x < 1$) si ha $\eta(x) = f(x, x+1) = \frac{x^2 - e^{x+1}}{x+1}$, e poiché $\eta'(x) = \frac{x(x+2-e^{x+1})}{(x+1)^2} < 0$ la funzione è strettamente decrescente. Pertanto gli estremi assoluti della funzione f sul triangolo compatto K sono $-\frac{e^2}{2} \sim -3,7$ (assunto nel vertice $(0,2)$) e $-e \sim -2,7$ (assunto nel vertice $(0,1)$); nel terzo vertice $(1,2)$ non è assunto un estremo locale.

(iii) Gli insiemi A e B sono rappresentati in figura. A è un aperto illimitato, con tre componenti arco-connesse; B è un segmento parabolico con gli estremi inclusi, ed è compatto e connesso in $\mathbb{R}^2$.

(iv) La velocità del punto è $(x'(t), y'(t)) = (2t-1, 2t-1)$; d'altra parte si ha $F(x,y,t) = t\,f(2x-y, 1) + t^2 = t((2x-y)^2 - e) + t^2$, da cui $\frac{\partial F}{\partial x} = 4t(2x-y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2t(2x-y)$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = (2x-y)^2 - e + 2t$. Se ne ricava

$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x(t),y(t)) = 4t(t^2-t+1)\,(2t-1) - 2t(t^2-t+1)\,(2t-1) + (t^2-t+1)^2 - e + 2t = 5t^4 - 8t^3 + 9t^2 - 2t - e + 1$.

4. (i) Da $d(g_1)_{(-1,-2,3)} = (\frac{z}{xz+y^2}+2, \frac{2y}{xz+y^2}+1, \frac{x}{xz+y^2})_{(-1,-2,3)} = (5,-3,-1)$ si nota che, all'intorno di $(x_0,y_0,z_0) = (-1,-2,3)$, dall'equazione $g_1(x,y,z)+4=0$ si può esplicitare una qualunque delle tre variabili rispetto alle altre due; in particolare si può esplicitare y, ottenendo una funzione $y(x,z)$ definita all'intorno di (x_0,z_0) e tale che $y(x_0,z_0) = y_0$. Essendo $(\frac{\partial y}{\partial x}(x_0,z_0), \frac{\partial y}{\partial z}(x_0,z_0)) = -(\frac{\frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$, lo sviluppo richiesto è $y(x,z) \sim -2 + \frac{5}{3}(x+1) - \frac{1}{3}(z-3)$.
(ii) La restrizione di g al piano (x,y) è $\varphi(x,y) = g(x,y,0) = (2x+y+2\log|y|\ ,\ 1-xy)$, definita per $y \neq 0$. Poiché $\det \mathrm{J}_\varphi(x,y) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1+\frac{2}{y} \\ -y & -x \end{pmatrix} = y - 2x + 2$, il Teorema della Funzione Inversa dice che φ è diffeomorfismo locale in tutti i punti del suo dominio tranne quelli della retta $y = 2x - 2$.
(iii) Cerchiamo i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui $\psi(x,y) = g_1(x,y,x) = \log(x^2+y^2) + 2x + y$ non è sommersiva. Da $d\psi = (\frac{2x}{x^2+y^2} + 2, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1) = (0,0)$ si ottiene $x^2 + y^2 = -x = -2y$, da cui (escludendo $(0,0)$) si trova l'unico punto singolare $(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$, che giace sulla curva $X_{\tilde\alpha}$ con $\tilde\alpha := \psi(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}) = \log\frac{4}{5} - 2 \sim -2{,}22$. Tutte le altre curve di livello sono regolari; in particolare, la retta tangente a X_1 nel suo punto $(0,1)$ ha equazione $d\psi_{(0,1)}(x-0, y-1) = 0$, ovvero $2x + 3(y-1) = 0$.
(iv) Denotiamo con S_α la superficie di livello α di $g_2(x,y,z) = z - xy + \cos z$. La condizione di non sommersività $\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0$ dà le soluzioni $(0,0,\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$; ed essendo $g_2(0,0,\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ne ricaviamo che le S_α sono ovunque regolari quando $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Dato $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ e posto $\alpha_0 = g_2(x_0,y_0,z_0)$, sappiamo che il vettore ortogonale in (x_0,y_0,z_0) a S_{α_0} è (a meno di proporzionalità) il gradiente $\nabla g_2(x_0,y_0,z_0)$, pertanto la condizione richiesta equivale a chiedere che il vettore $\nabla g_2(x,y,z) = (-y,-x,1-\sin z)$ sia non nullo e parallelo a $(1,0,1)$: ciò dà $x = 0$ e $y = \sin z - 1$, con $y \neq 0$. In sostanza, i punti cercati sono quelli che stanno sulla curva $y = \sin z - 1$ nel piano (y,z).



(a), **(b)** Gli insiemi A (viola) e B (rosso) nell'esercizio 3(iii). **(c)** La curva di livello X_1 (rosso) e la retta affine tangente in $(0,1)$ (viola); la curva di livello singolare $X_{\tilde\alpha}$, con $\tilde\alpha \sim -2{,}2$ (azzurro). Le curve X_α con $\alpha > \tilde\alpha$ sono connesse come X_1 o X_0 (blu), mentre quelle con $\alpha < \tilde\alpha$ sono sconnesse come X_{-3} (verde).

Prima prova parziale (17/05/2006)

1. (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali impropri (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha+3}(x)}{x^{2-\alpha}+1}\,dx$ e (ii) $\displaystyle\int_1^{\pi} \sin^{\alpha-\frac{1}{2}}(x)\,\cos x\,\log^{\alpha}(x)\,dx$. Calcolarli poi per $\alpha = 0$.

(b) Studiare la funzione $F(x) = \int_{x^2}^{2} t\,e^{-\sqrt{t}}\,dt$ senza calcolare una primitiva di $f(t) = t\,e^{-\sqrt{t}}$. Solo alla fine trovare una primitiva di $f(t)$, e con essa una forma esplicita di $F(x)$, rispondendo ad eventuali questioni rimaste prima in sospeso.

2. (a) Trovare gli integrali generali reali S_1 e S_2 delle equazioni $2(e^x+1)yy' = e^x(y^2+1)$ e $y'' + 2y' + 2y = 2x^2$, e descrivere l'insieme $\{(\phi,\psi) \in S_1 \times S_2 : \phi(0) = \psi(0)\}$.

(b) Studiare crescenza e convessità delle soluzioni dell'equazione $xy' = y + e^{-x}$. Detta poi $\varphi(x)$ la soluzione del problema di Cauchy con $\varphi(1) = \alpha$, studiare i limiti notevoli di φ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (a) Disegnare e parametrizzare opportunamente le curve piane $A = \{(x,y) : 2x = y^2 - y,\ |y| \le 1 - x\}$ e B descritta da $\rho(\theta) = \frac{1}{2}\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$. Calcolare le lunghezze di A e B,**(20)** e le rette tangenti nei loro punti con $y = 0$.

(b) Disegnare il segmento di circonferenza C di $\mathbb{R}^3$ ottenuto intersecando la superficie sferica di centro l'origine e raggio 2 col quarto di piano dei punti con $x = 1$ e $y \ge |z|$. Parametrizzare C in almeno due modi**(21)** esibendo il cambio di parametro. Calcolare infine il baricentro geometrico di C.

4. (a) Data la funzione reale $f(x,y) = x\log|xy+1|$ studiarne (disegnando i risultati) il dominio $D_f \subset \mathbb{R}^2$, gli zeri, il segno, i limiti notevoli, la continuità.

(b) Disegnare gli insiemi $U = \{(x,y) \in D_f : xy = 1,\ f(x,y) < 0\}$ e $V = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) \ge 0,\ 0 \le y \le 4 - |x|\}$, dicendo se sono aperti, chiusi, compatti, connessi, limitati.

Soluzioni.

(1) Denotiamo sempre con $f_\alpha(x)$ la funzione integranda.

(a) (i) Per $x \to 0^+$ si ha $\operatorname{arctg} x \sim_0 x$, dunque il numeratore è asintotico a $x^{\alpha+3}$; il denominatore dipende dal comportamento di $x^{2-\alpha}$, perché se $2-\alpha \ge 0$ (ovvero $\alpha \le 2$) si ha $x^{2-\alpha}+1 \sim_0^* 1$, mentre se $2-\alpha < 0$ (ovvero $\alpha > 2$) si ha $x^{2-\alpha}+1 \sim_0 x^{2-\alpha}$. Dunque se $\alpha \le 2$ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{\alpha+3}$, da cui la condizione $\alpha + 3 > -1$, ovvero $\alpha > -4$;

(20) Basta scrivere correttamente gli integrali, anche senza completarne il conto.

(21) Come possibili parametri si consigliano la coordinata cartesiana z, l'angolo ψ delle coordinate polari sul piano $x = 1$, la coordinata sferica φ.

se invece $\alpha > 2$ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{(\alpha+3)-(2-\alpha)} = x^{2\alpha+1}$, da cui la condizione $2\alpha + 1 > -1$, ovvero $\alpha > -1$ (sempre vero): dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -4$. Passiamo ora a $+\infty$. Vale $\operatorname{arctg} x \sim_{+\infty}^* 1$, dunque il numeratore è ininfluente; il denominatore dipende ancora dal comportamento di $x^{2-\alpha}$, perché se $2 - \alpha \leq 0$ (ovvero $\alpha \geq 2$) si ha $x^{2-\alpha} + 1 \sim_{+\infty}^* 1$, mentre se $2 - \alpha > 0$ (ovvero $\alpha < 2$) si ha $x^{2-\alpha} + 1 \sim_{+\infty} x^{2-\alpha}$. Dunque se $\alpha \geq 2$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* 1$, e dunque non è integrabile a $+\infty$; se invece $\alpha < 2$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}^* x^{\alpha-2}$, da cui la condizione $\alpha - 2 < -1$, ovvero $\alpha < 1$: dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha < 1$. Pertanto l'integrale converge per $-4 < \alpha < 1$. Per $\alpha = 0$ si ottiene $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3(x)}{x^2+1}\, dx = (\frac{\operatorname{arctg}^4(x)}{4}]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}((\frac{\pi}{2})^4 - 0^4) = \frac{\pi^4}{64}$.
(ii) Per $x \to 1^+$ si ha $\log x \sim_1 (x - 1)$, dunque $f_\alpha(x) \sim_{1^+}^* (x - 1)^\alpha$, da cui la condizione $\alpha > -1$. Per $x \to \pi^-$ si ha invece $\sin x \sim_{\pi^-} (\pi - x)$, dunque $|f_\alpha(x)| \sim_{\pi^-}^* (\pi - x)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, da cui la condizione $\alpha - \frac{1}{2} > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{1}{2}$. Pertanto l'integrale converge per $\alpha > -\frac{1}{2}$. Per $\alpha = 0$ si ottiene $\int_1^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = (2\sqrt{\sin x}]_1^\pi = 0 - 2\sqrt{\sin 1} = -2\sqrt{\sin 1} < 0$.
(b) (Vedi Figura 1) Poiché la funzione integranda $f(t) = t\,e^{-\sqrt{t}}$ è continua (dunque localmente integrabile) su tutto $[0, +\infty[$, e poiché $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il dominio di $F(x) = \int_{x^2}^2 t\,e^{-\sqrt{t}}\, dt$ è $x \geq 0$, ed in ogni punto di esso F sarà derivabile. Inoltre, poiché $f(t) \geq 0$, si ha $F(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 \leq 2$, ovvero $|x| \leq \sqrt{2}$. È poi immediato notare che $F(-x) = F(x)$, dunque $F(x)$ è una funzione pari, e possiamo limitarci allo studio con $x \geq 0$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{+\infty}^2 t\,e^{-\sqrt{t}} = -\int_2^{+\infty} t\,e^{-\sqrt{t}}$, e questo integrale converge perché $te^{-\sqrt{t}} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$: dunque $F(x)$ ha un asintoto orizzontale bilatero a quota negativa $-\int_2^{+\infty} t\,e^{-\sqrt{t}}$, che non però possiamo precisare senza conoscere una primitiva di $f(t)$. Derivando (sempre per $x \geq 0$) si ottiene $F'(x) = -x^2\,e^{-x} \cdot 2x = -2x^3e^{-x}$, dunque $F(x)$ è strettamente decrescente per $x > 0$, e per simmetria ha dunque un punto di massimo assoluto in $x = 0$, col valore (ancora ignoto) $F(0) = \int_0^2 t\,e^{-\sqrt{t}}\, dt > 0$. Derivando ulteriormente si ha $F''(x) = 2x^2(x - 3)e^{-x}$, dunque per $x \geq 0$ si ha che $F(x)$ è convessa per $x \geq 3$, ed in $x = 3$ la funzione ha un flesso obliquo (con $F(3) = \int_9^2 t\,e^{-\sqrt{t}}\, dt < 0$ e $F'(3) = -54e^{-3} \sim -2{,}7$).
Cerchiamo ora di dedurre una forma esplicita per $F(x)$. Dall'espressione $F'(x) = -2x^3e^{-x}$ (valida solo per $x \geq 0$) si otterrebbe facilmente, con più integrazioni per parti, $F(x) = 2(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+k$ con $k \in \mathbb{R}$ da determinare ad esempio con la condizione $F(\sqrt{2}) = 0$, ovvero $2(2\sqrt{2}+6+6\sqrt{2}+6)e^{-\sqrt{2}}+k = 0$, da cui $k = -2(7\sqrt{2}+12)e^{-\sqrt{2}}$; poi, per parità, si deduce che su $\mathbb{R}$ vale $F(x) = 2(|x|^3 + 3x^2 + 6|x| + 6)e^{-|x|} - 2(7\sqrt{2} + 12)e^{-\sqrt{2}}$. Si può tuttavia anche cercare una primitiva di $f(t)$: col cambio $t = u^2$, per $x \geq 0$ si ha $F(x) = 2\int_x^{\sqrt{2}} u^3\,e^{-u}\, du$, e procedendo come prima si arriva alla medesima espressione per $F(x)$. Naturalmente, con l'espressione esplicita di $F(x)$ in mano si può rispondere a tutte le cose rimaste in sospeso in precedenza: ad esempio, la quota dell'asintoto orizzontale è $-2(7\sqrt{2} + 12)e^{-\sqrt{2}} \sim -11$, e quella del massimo è $F(0) = 12 - 2(7\sqrt{2} + 12)e^{-\sqrt{2}} \sim 0{,}7$.

(2) (a) L'equazione $2(e^x+1)yy' = e^x(y^2+1)$ è del primo ordine a variabili separabili: essendo $e^x+1 > 0$ e $y^2+1 > 0$ si può tranquillamente separare, ottenendo $\frac{2y}{y^2+1}y' = \frac{e^x}{e^x+1}$, da cui integrando si ottiene $\log(y^2+1) = \log(e^x+1)+k$, da cui $y^2+1 = e^k(e^x+1)$, da cui (posto $A = e^k > 0$) si trova $S_1 = \{\pm\sqrt{A(e^x + 1) - 1} : A > 0\}$. Invece l'equazione $y''+2y'+2y = x^2$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti reali. L'equazione caratteristica è $t^2+2t+2 = 0$ con radici semplici $-1\pm i$, dunque un sistema fondamentale di soluzioni per l'omogenea è $\{e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x\}$; per $b(x) = 2x^2$ si avrà una soluzione particolare del tipo $\tilde\varphi(x) = ax^2+bx+c$, ed imponendo che $\tilde\varphi''(x)+2\tilde\varphi'(x)'+2\tilde\varphi(x) = 2a + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = 2x^2$ si trova $a = 1$, $4a + b = 0$ (da cui $b = -4$) e $2a + 2b + c = 0$ (da cui $c = 6$), ovvero $\tilde\varphi(x) = x^2 - 4x + 6$: pertanto $S_2 = \{e^{-x}(B\cos x + C\sin x) + x^2 - 4x + 6 : B, C \in \mathbb{R}\}$. Essendo $(\pm\sqrt{A(e^x + 1) - 1}]_{x=0} = \pm\sqrt{2A - 1}$ (dunque con l'ipotesi $A \geq \frac{1}{2}$) e $(e^{-x}(B\cos x+C\sin x)+x^2-4x+6]_{x=0} = B+6$, la condizione richiesta è che $\pm\sqrt{2A - 1} = B+6$, da cui $2A-1 = (B+6)^2$, da cui $A = \frac{1}{2}(B^2+12B+37)$: pertanto $\{(\phi, \psi) \in S_1 \times S_2 : \phi(0) = \psi(0)\} = \{(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(B^2 + 12B + 37)(e^x + 1) - 1}, e^{-x}(B\cos x + C\sin x) + x^2 - 4x + 6) : B, C \in \mathbb{R}\}$.
(b) (Vedi Figura 2) Se $x = 0$, da $xy' = y + e^{-x}$ si ricava $0 = y(0) + 1$, dunque $y(0) = -1$: pertanto le eventuali soluzioni definite anche in $x = 0$ assumeranno ivi valore -1. Per $x \neq 0$ si ha invece $y' = \frac{y+e^{-x}}{x}$, dunque le soluzioni $y(x)$ saranno crescenti per $(x > 0,\ y > -e^{-x})$ oppure per $(x < 0,\ y < -e^{-x})$, e sulla curva $y = -e^{-x}$ (su cui $y' = 0$) si attendono estremi locali. Derivando ulteriormente si ha $y'' = \frac{(y'-e^{-x})x-(y+e^{-x})}{x^2} = -\frac{e^{-x}}{x}$, dunque le soluzioni saranno convesse per $x < 0$. Per $x \neq 0$ si può porre l'equazione (lineare del primo ordine) in forma normale $y' + p(x)y = q(x)$, con $p(x) = -\frac{1}{x}$ (da cui la primitiva $P(x) = -\log|x|$) e $q(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. Un'espressione integrale per la soluzione $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(1) = \alpha$ è pertanto $\varphi(x) = x(\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt + \alpha)$. Il

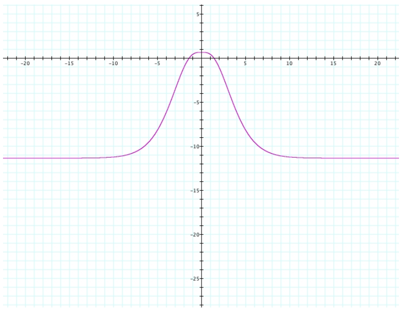
$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)$ è in forma indeterminata $0\cdot\infty$ (infatti $\frac{e^{-t}}{t^2}\sim_{0^+} t^{-2}$ non è integrabile in 0^+), e con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{-x}}{x^2}}{-1/x^2}=-1$ per ogni α (ciò non è una sorpresa, come visto sopra). Invece il $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ dipende da α: infatti $\frac{e^{-t}}{t^2}=o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ è integrabile a $+\infty$, dunque $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge ad un valore $\beta>0$, e perciò se $\alpha\gtrless-\beta$ il limite vale $\pm\infty$, mentre se $\alpha=-\beta$ con de l'Hôpital si trova $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{x^2}}{-1/x^2}=0^-$.

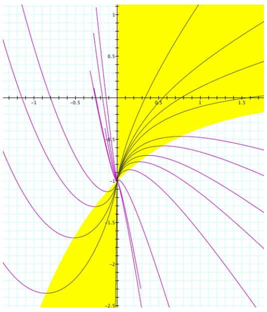
(3) (a) (Vedi Figura 3) A è il tratto di parabola $x=\frac{1}{2}(y^2-y)$ compreso tra le rette $y=1-x$ (sopra) e $y=x-1$ (sotto), dunque congiunge i punti $(0,1)$ e $(\frac{5-\sqrt{17}}{2},-\frac{\sqrt{17}-3}{2})$; invece B è un tratto di spirale archimedea, dall'origine $(0,0)$ fino a $(-\pi,0)$ passando per $(0,\frac{\pi}{2})$. Le parametrizzazioni più naturali sono dunque rispettivamente $\gamma:[-\frac{\sqrt{17}-3}{2},1]\to\mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y)=(\frac{1}{2}(y^2-y),y)$ e $\varphi:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ data da $\varphi(\theta)=(\frac{1}{2}\theta\cos\theta,\frac{1}{2}\theta\sin\theta)$. Si ha $\gamma'(y)=(\frac{1}{2}(2y-1),1)$ e $\varphi'(\theta)=(\frac{1}{2}(\cos\theta-\theta\sin\theta),\frac{1}{2}(\sin\theta+\theta\cos\theta))$, da cui gli elementi d'arco rispettivamente $\frac{1}{2}\sqrt{4y^2-4y+5}\,dy$ e $\frac{1}{2}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$, dunque le lunghezze di A e B sono $L_A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{17}-3}{2}}^{1}\sqrt{4y^2-4y+5}\,dy$ e $L_B=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$. Infine le tangenti: per A si tratta del solo punto $(0,0)=\gamma(0)$, in cui il vettore tangente è $\gamma'(0)=(-\frac{1}{2},1)$, e dunque la retta è $\{\lambda(-\frac{1}{2},1):\lambda\in\mathbb{R}\}$ (ovvero $y=-2x$); invece per B vi sono i punti $(0,0)=\varphi(0)$ (con vettore tangente $\varphi'(0)=(\frac{1}{2},0)$, da cui la retta $y=0$) e $(-\pi,0)=\gamma(\pi)$ (con vettore tangente $\varphi'(\pi)=(-\frac{1}{2},-\frac{\pi}{2})$, da cui la retta $\{(-\pi-\frac{1}{2}\lambda,-\frac{\pi}{2}\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$, ovvero $y=\pi(x+\pi)$).

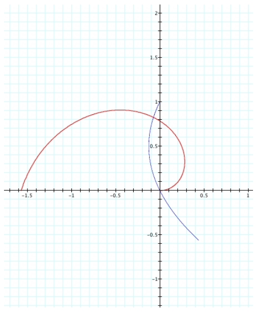
(b) (Vedi Figura 4) Il segmento di circonferenza C è ottenuto intersecando il luogo $x^2+y^2+z^2=4$ con il quarto del piano $x=1$ racchiuso tra i piani $y=z$ (sopra) e $y=-z$ (sotto). Dalle due relazioni si ottiene $y^2+z^2=3$, da cui $y=\sqrt{3-z^2}$ (infatti y è positivo su C): poiché i punti estremi di C sono $(1,\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$ (sotto) e $(1,\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$ (sopra), ne segue che una prima parametrizzazione di C usando z è $\gamma_1:[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma_1(z)=(1,\sqrt{3-z^2},z)$. Usando le coordinate sferiche (ρ,θ,φ), sulla sfera si ha $\rho=2$, e sul piano $x=\rho\cos\theta\sin\varphi=1$, da cui $\cos\theta=\frac{1}{2\sin\varphi}$: poiché sui punti estremi di C si ha $z=\rho\cos\varphi=2\cos\varphi=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}$, da cui $\varphi=\mp\varphi_0$ con $\varphi_0=\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}$, un'altra parametrizzazione di C usando φ è $\gamma_2:[-\varphi_0,\varphi_0]\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma_2(\varphi)=(2\cos\theta\sin\varphi,2\sin\theta\sin\varphi,2\cos\varphi)=(1,2(\sqrt{1-(\frac{1}{2\sin\varphi})^2})\sin\varphi,2\cos\varphi)=(1,\sqrt{4\sin^2\varphi-1},2\cos\varphi)$. Inoltre, le coordinate polari sul piano verticale $x=1$ (centrate nel punto $(1,0,0)$) percorrono C quando la distanza polare da $(1,0,0)$ è costantemente $\sqrt{3}$ e l'argomento ψ soddisfa $-\frac{\pi}{4}\le\psi\le\frac{\pi}{4}$, dunque un'ulteriore parametrizzazione di C usando ψ è $\gamma_3:[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma_3(\psi)=(1,\sqrt{3}\cos\psi,\sqrt{3}\sin\psi)$. Come al solito, i cambi di parametro sono le biiezioni che mandano un parametro nell'altro, ottenuti di volta in volta dalle uguaglianze $z=\sqrt{3}\sin\psi=2\cos\varphi$. Infine, per simmetria il baricentro geometrico di C deve stare sui piani $z=0$ e $x=1$, dunque la sola coordinata da trovare è y: essendo $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ la lunghezza di C (è un quarto di circonferenza di raggio $\sqrt{3}$), usando ad esempio γ_3 si ha $y=\sqrt{3}\cos\psi$ e $d\sigma=\sqrt{3}\,d\psi$, dunque $y=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}\cos\psi\sqrt{3}\,d\psi=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}(\sin\psi]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$. Il baricentro geometrico di C è perciò il punto $(1,\frac{2\sqrt{6}}{\pi},0)$.

(4) (a) (Vedi Figura 5) Il dominio $D_f\subset\mathbb{R}^2$ di $f(x,y)=x\log|xy+1|$ è dato dalla condizione $xy\neq-1$, dunque è tutto $\mathbb{R}^2$ meno i punti dell'iperbole $xy=-1$. Nel suo dominio, $f(x,y)$ è ovunque continua. Si ha $f(x,y)=0$ per $x=0$ oppure quando $\log|xy+1|=0$, ovvero per $xy+1=\pm1$, cioè sulle iperboli $xy=0$ (l'unione degli assi coordinati) e $xy=-2$: dunque f si annulla sugli assi e sull'iperbole $xy=-2$. Si ha poi $f(x,y)>0$ dove sono concordi i segni dei fattori x e $\log|xy+1|$: in particolare, il primo è >0 nel semipiano dei punti con ascissa positiva, mentre il secondo è >0 per $|xy+1|>1$, cioè per $xy>0$ (primo e terzo quadrante) oppure $xy<-2$ (zona esterna ai due rami dell'iperbole $xy=-2$). Tendendo ai punti dell'iperbole $xy=-1$ il limite di f è chiaramente $-\infty$ nel ramo con $x>0$, e $+\infty$ nel ramo con $x<0$. Infine, la funzione è nulla su tutto l'asse y, e tende a ∞ avvicinandosi ai rami dell'iperbole $xy=-1$: è dunque chiaro che il limite di $f(x,y)$ in ∞_2 non esiste.

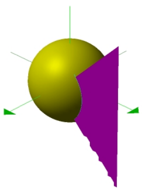
(b) (Vedi Figura 6) L'insieme $U=\{(x,y)\in D_f: xy=1,\ f(x,y)<0\}$ è niente altro che il ramo dell'iperbole $xy=1$ con $x<0$: dunque esso è chiuso e connesso, ma illimitato e dunque non compatto. L'insieme $V=\{(x,y)\in D_f: f(x,y)\ge0,\ 0\le y\le 4-|x|\}$, come si nota dalla figura, non è aperto (infatti contiene punti di frontiera) ma nemmeno chiuso (infatti i punti fuori del dominio di f sono di accumulazione per V, ma non appartengono a V), dunque non può essere compatto anche se è limitato. Esso inoltre non è connesso (è diviso in due componenti connesse dai punti dell'iperbole fuori dal dominio di f).

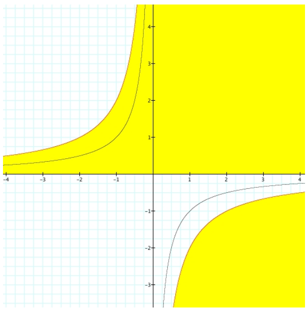


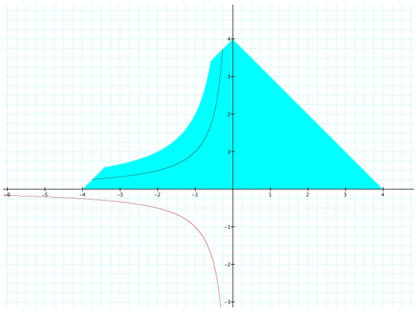




1. La funzione $F(x)$ di (1.b). **2.** Le zone di crescenza (gialle) e l'integrale generale di (2.b). **3.** Le curve A e B di (3.a).







4. La curva C di (3.b), intersezione tra superficie sferica e quarto di piano. **5.** L'iperbole nera è fuori dal dominio di $f(x, y)$ in (4.a); in rosso e giallo le zone in cui $f(x, y) \geq 0$. **6.** Gli insiemi U (rosso) e V (azzurro) di (4.b).

Prova scritta - Seconda prova parziale (23/06/2006)

1. [S] Per quali α convergono gli integrali (i) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{2\alpha}(x-1)^{1-\alpha}}\,dx$ e (ii) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^\alpha-\sqrt{x}}\,dx$? Calcolarli per $\alpha = 1$.

2. (a) [S] Trovare, per $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione di $x^2y' - y^\alpha = 0$ tale che $y(-1) = 1$.

(b) [S] Quali soluzioni reali $y(x)$ di $y'' + 4y' - 5(x+y) = 1$ hanno un massimo locale per $x = 0$?

3. Siano $u(x,y) = \log|x+y|$ e $v(x,y) = x^2 - y + 1$.

(a) [S, P] Determinare dominio, zeri, segno, limiti notevoli di $f = u/v$, disegnando i risultati ottenuti.

(b) [S, P] Quali insiemi di livello di $g = u + v$ sono curve regolari? Parametrizzare la curva $g(x,y) = 4$ all'intorno del suo punto $(-2,1)$, e usare quanto trovato per determinarne in due modi diversi la retta affine tangente.

(c) [P] Studiare la derivata totale di u lungo la curva Γ definita dall'equazione $v(x,y) - xy + 2 = 0$. Cercare poi gli estremi locali di u su Γ usando il metodo di Lagrange. I due problemi sono legati?

4. Sia $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (e^{xy}\,,\, x+z\,,\, \log(2x+y+z))$.

(a) [S,P] Mostrare che l'equazione $2x+y(z^4+z^2) = g_1(x,y,z)+1$ definisce una superficie regolare M di $\mathbb{R}^3$. Trovarne una parametrizzazione all'intorno del punto $A(1,0,-2)$, e usarla per trovare in due modi il piano affine tangente in A.

(b) [S,P] La funzione $h(x,y,z) = g_2(x,y,z)\cdot(x+y)$ ha estremi relativi in $\mathbb{R}^3$? E sulla curva $\{(x,y,z) : x = 1,\ y^2+z^2 = 3yz-1\}$?

(c) [P] Attorno a quali punti g è diffeomorfismo locale? Mostrare che lo è all'intorno di $B(-1,0,3)$, e calcolare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g^{-1} attorno a $g(B)$. Infine, calcolare esplicitamente tale inversa locale.

(d) [P] Calcolare l'immagine $\mathsf{n} = g(\mathsf{m})$ della curva $\mathsf{m} = \{(x,y,z) : z = 1,\ y = x^2\}$, e mostrare che n è una curva regolare. Dato il punto $C(0,0,1) \in \mathsf{m}$, mostrare con i conti che $dg_C(\mathsf{T}_C\mathsf{m}) = \mathsf{T}_{g(C)}\mathsf{n}$.

Soluzioni.

(1) Indichiamo con $f_\alpha(x)$ la funzione integranda.

(i) Essendo $\log x \sim_{1^+} (x-1)$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{1^+} (x-1)^{1-(1-\alpha)} = (x-1)^\alpha$, da cui $\alpha > -1$; si ha poi $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{\log x}{x^{2\alpha+(1-\alpha)}} = x^{-(\alpha+1)}\log x$, da cui $-(\alpha+1) < -1$, ovvero $\alpha > 0$. Dunque l'integrale converge per $\alpha > 0$. Per $\alpha = 1$ si ottiene $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx = (-\frac{\log x}{x}]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}(-\frac{1}{x^2})\,dx = -0 + 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = (-\frac{1}{x}]_1^{+\infty} = 1$.

(ii) Bisogna escludere fin da subito il valore $\alpha = \frac{1}{2}$, per il quale il denominatore sarebbe nullo. Per gli altri α il denominatore non si annulla mai in $]0,1[$, dunque i punti da controllare sono 0^+ e 1^-. Iniziamo da 0^+. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ si ha $x^\alpha - \sqrt{x} \sim_{0^+} x^\alpha$, dunque $|f_\alpha(x)| \sim_{0^+} \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, da cui $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$ (sempre vero); se invece $\alpha > \frac{1}{2}$ si ha $x^\alpha - \sqrt{x} \sim_{0^+} -\sqrt{x}$, dunque $|f_\alpha(x)| \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, integrabile. Dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Passiamo ora a 1^-, ove sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi: notando (con de l'Hôpital) che $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$, concludiamo subito che $f_\alpha(x)$ è integrabile in 1^- per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$ (ha limite finito). Dunque l'integrale converge per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Per $\alpha = 1$ si ottiene $\int_0^1 \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int_0^1 (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = (x + 2\sqrt{x}]_0^1 = 3$.

(2) (a) L'equazione $x^2 y' - y^\alpha = 0$ è del primo ordine a variabili separabili: attorno al punto $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ si ottiene infatti $y^{-\alpha} y' = \frac{1}{x^2}$. Se $\alpha \neq 1$, integrando si ha $\frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} = -\frac{1}{x} + k$: imponendo che $y(-1) = 1$ si ha $k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, dunque $y^{1-\alpha} = \frac{\alpha(x+1)-1}{x}$, da cui $y(x) = \left(\frac{\alpha(x+1)-1}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Se invece $\alpha = 1$ si ha $\log y = -\frac{1}{x} + k$: imponendo che $y(-1) = 1$ si ha $k = -1$, da cui $y(x) = e^{-\frac{1}{x}-1} = e^{-\frac{x+1}{x}}$.

(b) L'equazione $y'' + 4y' - 5(x+y) = 1$ si scrive anche $y'' + 4y' - 5y = 5x + 1$, lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Le radici dell'equazione caratteristica $t^2 + 4t - 5 = 0$ sono $t = 1$ e $t = -5$, dunque le soluzioni dell'omogenea sono $Ae^x + Be^{-5x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare di $y'' + 4y' - 5y = 5x + 1$ avrà la forma $\tilde{y}(x) = ax + b$, e da $\tilde{y}'' + 4\tilde{y}' - 5\tilde{y} = 5x + 1$ si ottiene $-5ax + (4a - 5b) = 5x + 1$, da cui $a = b = -1$: pertanto le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x) = Ae^x + Be^{-5x} - x - 1$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Essendo $y'(x) = Ae^x - 5Be^{-5x} - 1$ e $y''(x) = Ae^x + 25Be^{-5x}$, una condizione necessaria per avere un massimo locale in $x = 0$ è che $y'(0) = A - 5B - 1 = 0$ e che $y''(0) = A + 25B \leq 0$, ovvero $A = 5B + 1$ e $B \leq -\frac{1}{30}$. Se $y''(0) < 0$ (ovvero se $B < -\frac{1}{30}$) tale condizione è anche sufficiente; resta dunque solo il dubbio del caso $B = -\frac{1}{30}$ (e $A = 5B + 1 = \frac{5}{6}$), in cui $y'(0) = y''(0) = 0$, ma in questo caso si ha $y'''(0) = (Ae^x - 125Be^{-5x})_{A=\frac{5}{6},\, B=-\frac{1}{30},\, x=0} = 5 \neq 0$, dunque $x = 0$ non è un estremante locale (è un flesso orizzontale). Ricapitolando, c'è un massimo locale in $x = 0$ se e solo se $A = 5B + 1$ e $B < -\frac{1}{30}$.

(3) (a) (Vedi Figura 1) $f(x,y) = \frac{u(x,y)}{v(x,y)} = \frac{\log|x+y|}{x^2 - y + 1}$ ha come dominio $\mathbb{R}^2$ privato della retta $x + y = 0$ e della parabola $y = x^2 + 1$, e si annulla quando $u = 1$, ovvero sulle rette $x + y = \pm 1$. Si ha $u > 0$ per $|x + y| > 1$, ovvero per $y < -1 - x$ oppure $y > 1 - x$, mentre $v > 0$ per $y < x^2 + 1$ (punti al di sotto della parabola): il segno di f ne segue per moltiplicazione. Quando (x, y) tende ad un punto della retta $x + y = 0$ o della parabola $y = x^2 + 1$ diversi da $(0, 1)$ e $(-1, 2)$ il limite di $f(x, y)$ è evidentemente $\pm\infty$ (a seconda del lato da cui si tende al punto); i limiti in $(0, 1)$, $(-1, 2)$ e ∞_2 invece non esistono (tendendo ad essi lungo le rette $x + y = \pm 1$ il limite di f vale 0, ma al loro intorno vi sono punti in cui $|f|$ è arbitrariamente grande).

(b) (Vedi Figura 2) I punti del dominio in cui $g(x,y) = u(x,y) + v(x,y) = \log|x+y| + x^2 - y + 1$ non è sommersiva sono quelli in cui $\nabla g = (\frac{1}{x+y} + 2x, \frac{1}{x+y} - 1) = (0, 0)$, ovvero il solo punto $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, che sta sulla curva $g(x, y) = -\frac{1}{4}$. Tutte le altre curve di livello di g sono regolari, e tra esse anche $g(x, y) = 4$, che contiene il punto $(-2, 1)$ nel quale $\nabla g(-2, 1) = (-5, -2)$: la retta affine tangente è data dunque da $(-5, -2) \cdot (x + 2, y - 1) = 0$, ovvero $5x + 2y + 8 = 0$. All'intorno di $(-2, 1)$, da $g(x, y) = 4$ si può esplicitare ad esempio $y = y(x)$, con $y(-2) = 1$ e $y'(-2) = -\frac{-5}{-2} = -\frac{5}{2}$, e si ha dunque la parametrizzazione $\gamma(x) = (x, y(x))$ definita all'intorno di $x_0 = -2$, da cui la retta affine tangente $\{(-2, 1) + t(1, -\frac{5}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-2 + t, 1 - \frac{5}{2}t) : t \in \mathbb{R}\}$: da $x = -2 + t$ e $y = 1 - \frac{5}{2}t$ si riottiene l'equazione cartesiana $y = 1 - \frac{5}{2}(x + 2)$, ovvero $5x + 2y + 8 = 0$.

(c) (Vedi Figura 3) La curva Γ ha equazione $x^2 - xy - y + 3 = 0$, dunque è una conica (più precisamente, un'iperbole). Si noti che essa sta tutta nel dominio di $u(x, y) = \log|x+y|$, perché il sistema dato da $x^2 - xy - y + 3 = 0$ e $x + y = 0$ non ha soluzioni reali. Essa si può parametrizzare come grafico ponendo $\gamma(x) = (x, \frac{x^2+3}{x+1})$, dunque lungo essa risulta $\frac{du}{dx}(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, \frac{x^2+3}{x+1})\,1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x, \frac{x^2+3}{x+1})\,(\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}) = \frac{2(x^2+2x-1)}{(x+1)(2x^2+x+3)}$, da cui si ottengono i punti stazionari $x = -1 \pm \sqrt{2}$: poiché vale $\frac{du}{dx}(x) > 0$ per $-1 - \sqrt{2} < x < -1$ oppure $x > -1 + \sqrt{2}$, tali punti (che corrispondono ai punti dell'iperbole $(-1 \pm \sqrt{2}, \pm 3\sqrt{2} - 2)$) sono entrambi di minimo locale. Allo stesso risultato si deve ovviamente arrivare studiando gli estremi locali di u su Γ: con Lagrange si ottiene $\begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ 2x - y & -x - 1 \end{vmatrix} = 0$ e $x^2 - xy - y + 3 = 0$, ovvero il sistema $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x^2 - xy - y + 3 = 0 \end{cases}$, che dà nuovamente quanto appena trovato.

(4) (a) M è definita da $2x+y(z^4+z^2)=g_1(x,y,z)+1$, ovvero $f(x,y,z)=e^{xy}-2x-y(z^4+z^2)+1=0$, con $\nabla f=(y\,e^{xy}-2, x\,e^{xy}-z^4-z^2, -2yz(2z^2+1))$, dunque i punti in cui f non è sommersiva sono dati dal sistema $y\,e^{xy}-2=x\,e^{xy}-z^4-z^2=-2yz(2z^2+1)=0$. Dalla terza equazione si ricava che $y=0$ oppure $z=0$: la prima eventualità è impossibile (la prima equazione darebbe $-2=0$), mentre la seconda dà $ye^{xy}=2$ e $xe^{xy}=0$: dunque anche $x=0$, e $y=2$. Il solo punto di $\mathbb{R}^3$ in cui f non è sommersiva è perciò $(0,2,0)$, che però non sta in M (infatti $f(0,2,0)=2\neq 0$): ne deduciamo che M è superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Nel punto $A(1,0,-2)$ di M vale $\nabla f(A)=(-2,-19,0)$, e da $f(x,y,z)=0$ si può dunque esplicitare ad esempio $x(y,z)$ vicino a $(y_0,z_0)=(0,-2)$, con $x(0,-2)=1$ e $(\dot{x}_y(0,-2),\dot{x}_z(0,-2))=(-\frac{-19}{-2},-\frac{0}{-2})=(-\frac{19}{2},0)$: la parametrizzazione locale $\gamma(y,z)=(x(y,z),y,z)$ ha perciò matrice jacobiana $J_\gamma(0,-2)=\begin{pmatrix}\dot{x}_y(0,-2) & \dot{x}_z(0,-2)\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{19}{2} & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Per il calcolo del piano affine tangente a M in A si può dunque sia scrivere $\nabla f(A)\cdot(x-1,y-0,z+2)=(-2,-19,0)\cdot(x-1,y,z+2)=0$ che considerare $A+\operatorname{Im} d\gamma_{(0,-2)}$, ovvero $\{(x,y,z)=(1,0,-2)+\lambda(-\frac{19}{2},1,0)+\mu(0,0,1):\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$: in entrambi i casi si approda all'equazione cartesiana $2x+19y-2=0$.

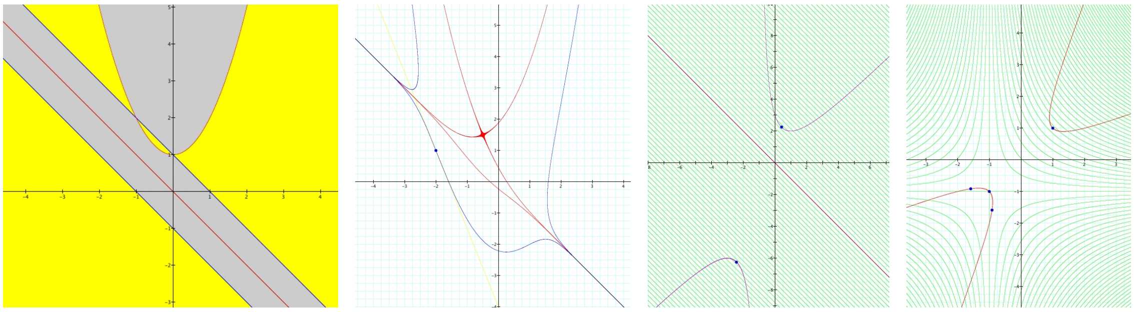
(b) La funzione $h(x,y,z)=g_2(x,y,z)\cdot(x+y)=(x+z)(x+y)$ ha gradiente $\nabla h=(2x+y+z, x+z, x+y)$, dunque i punti stazionari per h in $\mathbb{R}^3$ sono quelli per cui $2x+y+z=x+z=x+y=0$, ovvero della forma $(x,-x,-x)$ (retta passante per l'origine e parallela al vettore $(1,-1,-1)$). La matrice hessiana è la costante $\mathsf{H}_h(x,y,z)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$: poiché essa è indefinita, tali punti saranno delle selle. Dunque h non ha estremi relativi in $\mathbb{R}^3$.
La curva $\{(x,y,z): x=1,\ y^2+z^2=3yz-1\}$ è un'iperbole contenuta nel piano verticale $x=1$: si tratta dunque di studiare gli estremi locali della funzione $H(y,z)=h(1,y,z)=(z+1)(y+1)$ sull'iperbole $y^2-3yz+z^2+1=0$. Il metodo di Lagrange dà $\begin{vmatrix}2y-3z & 2z-3y\\ z+1 & y+1\end{vmatrix}=0$ (da cui $(y-z)(2y+2z+5)=0$) e $y^2-3yz+z^2+1=0$: se $z=y$ si ottiene $-y^2+1=0$, da cui $y=z=\pm 1$; se invece $z=-y-\frac{5}{2}$ allora $y^2-3y(-y-\frac{5}{2})+(-y-\frac{5}{2})^2+1=0$, da cui $y=\frac{-25\pm 3\sqrt{5}}{20}$ e $z=-y-\frac{5}{2}=\frac{-25\mp 3\sqrt{5}}{20}$. Si ottengono dunque i punti stazionari $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$, $C(1,\frac{-25+3\sqrt{5}}{20},\frac{-25-3\sqrt{5}}{20})$ e $D(1,\frac{-25-3\sqrt{5}}{20},\frac{-25+3\sqrt{5}}{20})$ (vedi Figura 4). Per capire ad esempio il carattere di A notiamo che, posto $\varphi(y,z)=y^2-3yz+z^2+1$, si ha $\nabla\varphi=(2y-3z,2z-3y)$, da cui $\nabla\varphi(1,1)=(-1,-1)$: esplicitando dunque $z=z(y)$ con $z(1)=1$, derivando più volte $\varphi(x,y)=0$ rispetto a y si ha $2y-3z-3yz'+2zz'=0$ (da cui, calcolando in $y=1$, si ottiene $2-3-3z'(1)+2z'(1)=0$, ovvero $z'(1)=-1$) e $2-3z'-3z'-3yz''+2(z')^2+2zz''=0$ (da cui, calcolando in $y=1$, si ottiene $2+3+3-3z''(1)+2+2z''(1)=0$, ovvero $z''(1)=10$). Se $\widetilde{H}(y):=H(y,z(y))=(z(y)+1)(y+1)$ si ha $\widetilde{H}'(y)=z'(y)\,(y+1)+z(y)+1$ (da cui $\widetilde{H}'(1)=-2+1+1=0$, come previsto) e $\widetilde{H}''(y)=z''(y)\,(y+1)+2z'(y)$ (da cui $\widetilde{H}''(1)=20-2=18>0$): ne deduciamo che A è un punto di minimo locale per h sulla curva, fatto che appare chiaro anche dalla Figura 4.

(c) La matrice jacobiana di g è $\mathsf{J}_g(x,y,z)=\begin{pmatrix}y\,e^{xy} & x\,e^{xy} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ \frac{2}{2x+y+z} & \frac{1}{2x+y+z} & \frac{1}{2x+y+z}\end{pmatrix}$, il cui determinante è $\frac{e^{xy}}{2x+y+z}(x-y)$. Pertanto g è diffeomorfismo locale attorno a tutti i punti che non giacciono sul piano verticale $x=y$, ed in particolare in $B(-1,0,3)$, in cui $\mathsf{J}_g(-1,0,3)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. L'immagine di B è $g(B)=(1,2,0)$: come noto, la matrice jacobiana di g^{-1} in $g(B)$ è $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ e dunque, chiamando (u,v,w) le variabili del codominio, si ha lo sviluppo di Taylor $g^{-1}(u,v,w)\simeq g^{-1}(1,2,0)+\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u-1\\ v-2\\ w-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+(u-1)-(v-2)+w\\ 0-(u-1)\\ 3-(u-1)+2(v-2)-w\end{pmatrix}$. Infine, da $\begin{cases}u=e^{xy}\\ v=x+z\\ w=\log(2x+y+z)\end{cases}$ se $u>0$ si ricava $\begin{cases}z=v-x\\ xy=\log u\\ x+y=e^w-v\end{cases}$, dunque x e y sono le radici reali dell'equazione $t^2-(e^w-v)t+\log u=0$, che esistono se $(e^w-v)^2\geq 4\log u$ e valgono $t_\pm=\frac{e^w-v\pm\sqrt{(e^w-v)^2-4\log u}}{2}$. Poiché $(x,y,z)(1,2,0)=(-1,0,3)$, l'inversa locale di g in $g(B)=(1,2,0)$ è $(x,y,z)=g^{-1}(u,v,w)=$

$$\left(\frac{e^w-v-\sqrt{(e^w-v)^2-4\log u}}{2},\frac{e^w-v+\sqrt{(e^w-v)^2-4\log u}}{2},\frac{-e^w+3v+\sqrt{(e^w-v)^2-4\log u}}{2}\right).$$

(d) Se nelle equazioni $u=e^{xy}$, $v=x+z$ e $w=\log(2x+y+z)$ si pone $z=1$ e $y=x^2$ resta la curva $u=e^{x^3}$, $v=x+1$ e $w=\log(x^2+2x+1)=2\log|x+1|$, descritta dal parametro x: eliminando tale parametro, da $x=v-1$ si ha che $\mathsf{n}=g(\mathsf{m})$ è definita dalle equazioni $u=e^{(v-1)^3}$ e $w=2\log|v|$, in cui essa appare direttamente come curva grafico $(u(v),w(v))$ (con $v\neq 0$). Essa è dunque una curva regolare. Se $C=(x_0,y_0,z_0)=(0,0,1)\in\mathsf{m}$

si ha $g(C) = (u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 0) \in \mathsf{n}$: un vettore tangente a m in C è $(x, x^2, 1)'_{x=0} = (1, 0, 0)$, un vettore tangente a n in $g(C)$ è $(e^{(v-1)^3}, v, 2\log|v|)'_{v=1} = (0, 1, 2)$, e $dg_C(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Poiché i vettori di $\mathsf{T}_C\mathsf{m}$ e $\mathsf{T}_{g(C)}\mathsf{n}$ sono multipli scalari rispettivamente di $(1, 0, 0)$ e di $(0, 1, 2)$, ciò mostra subito che $dg_C(\mathsf{T}_C\mathsf{m}) = \mathsf{T}_{g(C)}\mathsf{n}$.



(1) Zone in cui la funzione $f(x, y)$ di (3.a) non è definita (rosso), si annulla (blu), è positiva (giallo) e negativa (grigio). **(2)** Esercizio (3.b): la curva singolare $g(x, y) = -\frac{1}{4}$ (rossa), la curva regolare $g(x, y) = 4$ (blu) e la retta tangente affine nel suo punto $(-2, 1)$ (gialla). Si noti che le componenti connesse delle curve tendono asintoticamente alla retta $x + y = 0$, che sta fuori del dominio di g. **(3)** La curva Γ di (3.c) (porpora), le curve di livello di u (verdi) e i punti di minimo locale di u su Γ (blu): si noti che le curve di livello di u aumentano il loro valore tanto più sono distanti dalla retta $x + y = 0$ (rossa), sulla quale u non è definita. **(4)** Esercizio (4.b): nel piano verticale $x = 1$, di coordinate (y, z), sono rappresentate l'iperbole (rossa), le curve di livello della funzione $H(y, z) = h(1, y, z)$ (verdi) e gli estremanti locali di H sull'iperbole (blu).

Prova scritta (05/07/2006)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}(1-x^\alpha)\,dx$, e calcolarlo per $\alpha = 1$.

2. Determinare le soluzioni reali delle equazioni differenziali (i) $(x+2)y' = xy$ (in due modi) e (ii) $y''' + 8y = 1$. Dire poi quali tra esse hanno un estremo locale in $x = 0$.

3. Si abbia un tratto di elica cilindrica $\Gamma = \{(r\cos t, r\sin t, ht) : t_0 < t < t_1\}$ in $\mathbb{R}^3$. Determinare lunghezza, baricentro e momento d'inerzia rispetto all'asse z di Γ (supposta omogenea). Scrivere una funzione di definizione per Γ, e calcolare in due modi la retta affine tangente a Γ nel punto dato da $t = 2\pi$ (nell'ipotesi $t_0 < 2\pi < t_1$).

4. Sia $f(x, y) = \log(2 - \sqrt{x^2 - y})$.

(a) Determinare dominio, zeri, segno, limiti notevoli di f, disegnando i risultati.

(b) Quali curve di livello di f sono regolari? Parametrizzare la curva $f(x, y) = 0$ all'intorno del suo punto $(-2, 3)$, e usare quanto trovato per determinarne in due modi diversi la retta affine tangente.

(c) f ha estremi locali? Disegnare poi l'insieme $D = \{(x, y) : 2x^2 - x - 1 \le y \le 0\}$, dire perché f ammette estremi assoluti su D, e calcolarli.

(d) Siano $g(x, y, z) = x + yz - f(x+z, 0)$, $\mathrm{M} = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 1\}$ e $A(1, -1, 0) \in \mathrm{M}$. Mostrare che, all'intorno del suo punto A, M è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ che può essere espressa in un solo modo come grafico di una funzione φ di due delle tre variabili x, y, z, e utilizzare quanto trovato per determinare in due modi lo spazio affine tangente a M in A. Descrivere infine il comportamento locale di φ (ammette ivi un estremo locale o no?)

Soluzioni.

1. Iniziamo osservando che per $\alpha = 0$ la funzione $f_\alpha(x) = x^\alpha \operatorname{arctg}(1-x^\alpha)$ è identicamente nulla, dunque ovviamente integrabile: occupiamoci ora degli altri casi in cui $\alpha \neq 0$. Nell'intervallo di integrazione il solo possibile punto singolare è 0 (si noti che f_α è infinitesima in 1), dunque basta controllare l'integrabilità in 0^+. Se $\alpha < 0$ si ha $(1-x^\alpha) \to -\infty$, dunque $\operatorname{arctg}(1-x^\alpha) \to -\frac{\pi}{2}$ da cui $|f_\alpha(x)| \sim^*_{0^+} x^\alpha$, e la condizione è $\alpha > -1$ (ovvero $-1 < \alpha < 0$), mentre se $\alpha > 0$ si ha $(1-x^\alpha) \to 1$, dunque $\operatorname{arctg}(1-x^\alpha) \to \frac{\pi}{4}$ da cui ancora $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^\alpha$, integrabile perché infinitesima: pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile per ogni $\alpha > -1$. Per $\alpha = 1$, posto $t = 1 - x$ esso diventa $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(1-x)\,dx = \int_0^1 (1-t)\operatorname{arctg} t\,dt = (t - \frac{1}{2}t^2)\operatorname{arctg} t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}t^2}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1})\,dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}[t - \log(t^2+1) - \operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}[(1 - \log 2 - \frac{\pi}{4}) - (0)] = \frac{1-\log 2}{2}$.

2. L'equazione $(x+2)y' = xy$ è del primo ordine, e può essere trattata sia come lineare che come variabili separabili. Prima di farlo, notiamo però subito che all'intorno di $x = 0$ si può dividere per $x + 2$, ottenendo $y' = \frac{xy}{x+2}$, dunque $y'(0) = 0$ e $y' > 0$ per $((x < -2) \vee (x > 0),\ y > 0)$ oppure $(-2 < x < 0,\ y < 0)$: ne ricaviamo che tutte le soluzioni dell'equazione definite in $x = 0$ hanno ivi un estremo locale, più precisamente un minimo se $y(0) > 0$ ed un massimo se $y(0) < 0$ (se invece $y(0) = 0$ si ha la soluzione nulla $y \equiv 0$). Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione. Se trattata come lineare, supponendo $x \neq -2$ si può scrivere $y' + p(x)\,y = 0$, con $p(x) = -\frac{x}{x+2}$:

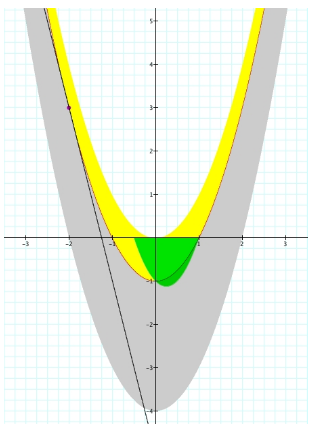
essendo $P(x) = \int p(x)\,dx = -x + 2\log|x+2|$, la soluzione generale è $y = ke^{-P(x)} = k\,\frac{e^x}{(x+2)^2}$ per $k \in \mathbb{R}$. Se trattata invece come variabili separabili, notata la soluzione $y \equiv 0$, per $x \neq -2$ si può scrivere $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x+2}$, che integrata dà $\log|y| = x - 2\log|x+2| + h$, da cui nuovamente $y = k\,\frac{e^x}{(x+2)^2}$ per $k \in \mathbb{R}$.
L'altra equazione $y''' + 8y = 1$ è lineare del terzo ordine, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^3 + 8 = 0$ ha come soluzioni le radici cubiche di -8, ovvero -2, $1 + i\sqrt{3}$ e $1 - i\sqrt{3}$, mentre una soluzione dell'equazione completa è evidentemente la costante $\tilde{y} \equiv \frac{1}{8}$: dunque, usando la base di soluzioni reali $\{e^{-2x},\, e^x\cos\sqrt{3}x,\, e^x \sin\sqrt{3}x\}$, le soluzioni reali dell'equazione sono $y(x) = Ae^{-2x} + e^x(B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{8}$ per $A, B, C \in \mathbb{R}$. Si ricava $y'(x) = -2Ae^{-2x} + e^x\big((B + C\sqrt{3})\cos\sqrt{3}x + (C - B\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x\big)$ e $y''(x) = 4Ae^{-2x} + 2e^x\big((C\sqrt{3} - B)\cos\sqrt{3}x - (B\sqrt{3} + C)\sin\sqrt{3}x\big)$: pertanto una condizione sufficiente per avere un estremo locale in $x = 0$ è che $y'(0) = -2A + B + C\sqrt{3} = 0$ e $y''(0) = 2(2A - B + C\sqrt{3}) \neq 0$, ovvero $B = 2A - C\sqrt{3}$ e $C \neq 0$. Il caso singolare $y'(0) = y''(0) = 0$, che corrisponde a $B = 2A - C\sqrt{3}$ e $C = 0$ (ovvero $B = 2A$ e $C = 0$) va trattato a parte: per esso si ricava $y'''(x) = -8A\big(e^{-2x} + 2e^x\cos\sqrt{3}x\big)$, da cui $y'''(0) = -24A$, pertanto se $A \neq 0$ le soluzioni $y(x) = A(e^{-2x} + 2e^x\cos\sqrt{3}x) + \frac{1}{8}$ hanno solo un flesso orizzontale in $x = 0$, mentre se $A = 0$ si ha la soluzione costante $\frac{1}{8}$ (in cui $x = 0$, se si vuole, è estremo locale...)

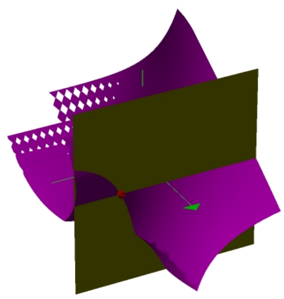
3. Il tratto di elica $\Gamma = \{(r\cos t, r\sin t, ht) : t_0 < t < t_1\}$ è parametrizzato da $\gamma :]t_0, t_1[\to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$. Essendo $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$ l'elemento d'arco è $||\gamma'(t)||\,dt = \sqrt{r^2 + h^2}\,dt$, dunque la lunghezza è $L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} ||\gamma'(t)||\,dt = \sqrt{r^2 + h^2}(t_1 - t_0)$, il baricentro geometrico è dato dal punto $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) = \frac{1}{L_\Gamma}(\int_\gamma x\,d\sigma, \int_\gamma y\,d\sigma, \int_\gamma y\,d\sigma) = \frac{1}{t_1 - t_0}(\int_{t_0}^{t_1} r\cos t\,dt, \int_{t_0}^{t_1} r\sin t\,dt, \int_{t_0}^{t_1} ht\,dt) = (\frac{\sin t_1 - \sin t_0}{t_1 - t_0} r, -\frac{\cos t_1 - \cos t_0}{t_1 - t_0} r, \frac{t_0 + t_1}{2} h)$ e (detta δ la densità lineare di massa) il momento d'inerzia rispetto a z è $\delta \int_\gamma (x^2 + y^2)\,d\sigma = \delta \int_{t_0}^{t_1} r^2\sqrt{r^2 + h^2}\,dt = \delta r^2\sqrt{r^2 + h^2}(t_1 - t_0)$. Essendo $t = \frac{z}{h}$, è chiaro che Γ è esprimibile come curva-grafico $(x(z), y(z)) = (r\cos\frac{z}{h}, r\sin\frac{z}{h})$, dunque una funzione di definizione per Γ è $g(x, y, z) = (x - r\cos\frac{z}{h}, y - r\sin\frac{z}{h})$. La retta affine tangente a Γ nel punto con $t = 2\pi$ ha forma parametrica $\{(r, 0, 2\pi h) + \lambda(0, r, h) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(r, r\lambda, h(2\pi + \lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$; ricavando $\lambda = \frac{1}{h}(z - 2\pi h)$ si ha la forma cartesiana $\begin{cases} x = r \\ y = \frac{r}{h}(z - 2\pi h) \end{cases}$. Alternativamente si può calcolare $dg_{(r,0,2\pi h)}(x - r, y - 0, z - 2\pi h) = 0$, ovvero $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{r}{h} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - r \\ y \\ z - 2\pi h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che ridà il luogo precedente $\begin{cases} x = r \\ y = \frac{r}{h}(z - 2\pi h) \end{cases}$.

4. (a) (Vedi Figura 1) Il dominio di $f(x, y) = \log(2 - \sqrt{x^2 - y})$ è dato dalle condizioni $x^2 - y \geq 0$ e $2 - \sqrt{x^2 - y} > 0$ (che, in virtù della prima, equivale a $4 > x^2 - y$), ovvero $x^2 - 4 < y \leq x^2$: si tratta della zona di piano compresa tra le due parabole $y = x^2 - 4$ (esclusa) e $y = x^2$ (compresa). In tutto il suo dominio la funzione f è $\mathcal{C}^\infty$ tranne nei punti di $y = x^2$, nei quali a priori è solo continua. Nel dominio si ha $f(x, y) \geq 0$ quando $2 - \sqrt{x^2 - y} \geq 1$, che equivale a $y \geq x^2 - 1$ (i punti sopra la parabola $y = x^2 - 1$, sulla quale f si annulla). È chiaro che, tendendo ai punti della parabola $y = x^2 - 4$, il limite di f è $-\infty$; ed è pure chiaro che il limite a ∞_2 non esiste (f è nulla su $y = x^2 - 1$ e tende a $-\infty$ avvicinandosi a $y = x^2 - 4$).
(b) Per $y \neq x^2$ vale $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(2 - \sqrt{x^2 - y})\sqrt{x^2 - y}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{x^2 - y})\sqrt{x^2 - y}}$, pertanto il sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ non ha soluzioni: dunque tutte le curve di livello di f sono regolari (d'altra parte, da $f(x, y) = \alpha$ si ricava facilmente $y = x^2 - (2 - e^\alpha)^2$, ovvero niente altro che le parabole $y = x^2 + k$ con $-4 < k \leq 0$: più regolari di così...). Il punto $(-2, 3)$ appartiene alla curva di livello $f(x, y) = 0$; si ha $\nabla f(-2, 3) = (2, \frac{1}{2})$, dunque la retta affine tangente in $(-2, 3)$ è data da $\nabla f(-2, 3) \cdot (x - (-2), y - 3) = 0$, ovvero $y = -4x - 5$. Da $f(x, y) = 0$ si può esplicitare $x(y)$ con $x(3) = -2$ e $x'(3) = -\frac{1/2}{2} = -\frac{1}{4}$, ottenendo una parametrizzazione $\gamma(y) = (x(y), y)$ da cui si ricava la retta affine tangente $\{(-2, 3) + \lambda\gamma'(3) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(-2 - \frac{1}{4}\lambda, 3 + \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, e da $(x, y) = (-2 - \frac{1}{4}\lambda, 3 + \lambda)$ si ricava nuovamente l'equazione cartesiana $y = -4x - 5$ (vedi Figura 1).
(c) Si è già visto che il sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ non ha soluzioni, dunque f non ha alcun estremo locale nel suo dominio. L'insieme $D = \{(x, y) : 2x^2 - x - 1 \leq y \leq 0\}$ è un compatto di $\mathbb{R}^3$ (chiuso perché definito da disuguaglianze late di funzioni continue, e limitato perché $2x^2 - x - 1 \leq y \leq 0$ implica $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ e $-\frac{9}{8} \leq y \leq 0$) interamente contenuto nel dominio di f, nel quale essa è continua: quanto affermato segue dunque dal Teorema di Weierstrass. Per il calcolo degli estremi assoluti di f su D (rappresentata in verde nella Figura 1), che è varietà con bordo, conviene decomporre D nell'aperto D_1 dei suoi punti interni (varietà di dimensione 2), nel segmento orizzontale aperto $D_2 = \{(x, 0) : -\frac{1}{2} < x < 1\}$ (varietà di dimensione 1), nell'arco di parabola $D_3 = \{(x, 2x^2 - x - 1) : -\frac{1}{2} < x < 1\}$ (un'altra varietà di dimensione 1) e nei due punti $D_4 = \{((-\frac{1}{2}, 0), (1, 0)\}$

(varietà di dimensione 0). In D_1 si è visto che non vi possono essere estremi locali, dunque tantomeno assoluti; in D_4 si ha $f(-\frac{1}{2},0)=\log\frac{3}{2}$ e $f(1,0)=0$; in D_2 si ha $f(x,0)=\varphi(x)=\log(2-|x|)$ con $-\frac{1}{2}<x<1$, ed essendo $\varphi'(x)=-\frac{\operatorname{sign}x}{2-|x|}$ (per $x\neq 0$) non vi sono punti critici eccetto $x=0$, in cui f vale $\varphi(0)=\log 2$; infine, in D_3 si ha $f(x,2x^2-x-1)=\psi(x)=\log(2-\sqrt{1+x-x^2})$ con $-\frac{1}{2}<x<1$, ed essendo $\psi'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{1+x-x^2}(2-\sqrt{1+x-x^2})}$ si ha $\psi'(x)\geq 0$ per $\frac{1}{2}\leq x<1$, dunque f ha su D_3 un punto di minimo per $x=\frac{1}{2}$, in cui f vale $\psi(\frac{1}{2})=\log(2-\frac{\sqrt{5}}{2})$ (e tale valore è <0, perché $2-\frac{\sqrt{5}}{2}<1$). Da quanto trovato si deduce che il massimo assoluto di f su D è $\log 2>0$ (assunto in $(0,0)$) e il minimo assoluto è $\log(2-\frac{\sqrt{5}}{2})<0$ (assunto in $(\frac{1}{2},-1)$): poiché, come detto, le curve di livello di f sono le parabole del tipo $y=x^2+k$ con $-4<k\leq 0$, ciò appare del tutto coerente con quanto si può evincere dall'esame grafico della Figura 1.

(d) Si ha $g(x,y,z)=x+yz-f(x+z,0)=x+yz-\log(2-|x+z|)$, definita e continua per $|x+z|<2$ e di classe $\mathcal{C}^\infty$ quando $x+z\neq 0$. Le superfici di livello di g possono dunque avere punti angolosi all'intersezione col piano $x+z=0$, ma il punto $A(1,-1,0)$ della superficie $\mathrm{M}=\{(x,y,z):g(x,y,z)=1\}$ non giace su tale piano. Per $x+z\neq 0$ si ha $\nabla g=(1+\frac{\operatorname{sign}(x+z)}{2-|x+z|},z,y+\frac{\operatorname{sign}(x+z)}{2-|x+z|})$, e da $\nabla g=(0,0,0)$ si ricavano le sole soluzioni $(-1,1,0)$ e $(3,1,0)$, nessuna delle quali sta su M. Per quanto detto, possiamo senz'altro affermare che M è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ all'intorno del suo punto A. Essendo $\nabla g(A)=(2,0,0)$, per Dini da $g(x,y,z)=1$ all'intorno di A è solo possibile esplicitare x come funzione $x=\varphi(y,z)$, con $\varphi(-1,0)=1$, e si ha $\nabla\varphi(-1,0)=(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(-1,0),\frac{\partial\varphi}{\partial z}(-1,0))=(-\frac{0}{2},-\frac{0}{2})=(0,0)$. La parametrizzazione locale $\gamma(y,z)=(\varphi(y,z),y,z)$ ha dunque matrice jacobiana $\mathsf{J}_\gamma(-1,0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, da cui si trova il piano affine tangente $\{A+\lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1):\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)=(1,-1+\lambda,\mu):\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$, di equazione cartesiana $x=1$, cui si arriva anche ponendo $\nabla g(A)\cdot(x-1,y-(-1),z-0)=(2,0,0)\cdot(x-1,y+1,z)=0$. Quanto al comportamento locale di $x=\varphi(y,z)$, essendo $\nabla\varphi(-1,0)=(0,0)$ si ha ivi un punto stazionario; differenziando l'identità $g(\varphi(y,z),y,z)=\varphi(y,z)+yz-\log(2-\varphi(y,z)-z)\equiv 1$ rispetto y e z si ottiene $\dot\varphi_y+z+\frac{\dot\varphi_y}{2-\varphi-z}\equiv 0$ e $\dot\varphi_z+y+\frac{\dot\varphi_z+1}{2-\varphi-z}\equiv 0$ (da cui, essendo $\varphi(-1,0)=1$, si ha nuovamente $\dot\varphi_y(-1,0)=\dot\varphi_z(-1,0)=0$), e continuando si ottiene $\ddot\varphi_{yy}+\frac{\ddot\varphi_{yy}(2-\varphi-z)+\dot\varphi_y^2}{(2-\varphi-z)^2}\equiv 0$, $\ddot\varphi_{yz}+1+\frac{\ddot\varphi_{yz}(2-\varphi-z)+\dot\varphi_y(\dot\varphi_z+1)}{(2-\varphi-z)^2}\equiv 0$ e $\ddot\varphi_{zz}+\frac{\ddot\varphi_{zz}(2-\varphi-z)+(\dot\varphi_z+1)^2}{(2-\varphi-z)^2}\equiv 0$, da cui $\ddot\varphi_{yy}(-1,0)=0$ e $\ddot\varphi_{yz}(-1,0)=\ddot\varphi_{zz}(-1,0)=-\frac{1}{2}$: essendo l'hessiano $\mathsf{H}_\varphi(-1,0)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ una matrice indefinita, la funzione $\varphi(y,z)$ (ovvero la coordinata x) avrà ivi un punto di sella, come appare chiaramente dall'esame della Figura 2.





(1) Zone in cui $f(x,y)=x-\log(2-\sqrt{x^2-y})$ dell'esercizio 4 è positiva (giallo), negativa (grigio) e nulla (rosso); sono rappresentati anche il punto $(-2,3)$ di (4.b) con la retta tangente, e l'insieme D di (4.c) (verde). **(2)** La varietà M di (4.d) (porpora) all'intorno del suo punto A (rosso); il piano affine tangente a M in A (giallo) mostra chiaramente che la coordinata $x=\varphi(y,z)$ ha una sella in A.

Prova scritta (12/07/2006)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\int_1^{+\infty} x^{3\alpha} \log|x^\alpha - 1|\, dx$, e calcolarlo per $\alpha = -1$.

2. Si consideri l'equazione differenziale $\alpha y'' + \varphi(x)\, y' - y = \sin x + 1$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Si trovi l'integrale generale nel caso in cui $\alpha \neq 0$ e $\varphi(x) \equiv 2$.

(b) Posto poi $\alpha = 0$ e $\varphi(x) = x$, si mostri la soluzione su $\mathbb{R}_{>0}$ tale che $y(1) = y_0$. (Facoltativo: discutere i limiti in 0^+ e $+\infty$ di tale soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.)

(c) Descrivere la struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione nel caso generale, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varphi(x)$ una funzione continua su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$.

3. Si disegni la cardiode C di equazione polare $\rho(\theta) = 2(1 + \sin\theta)$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(a) Calcolare**(22)** la lunghezza di C e la retta tangente nel suo punto P dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(b) Trovare**(23)** un polinomio $g(x, y)$ che sia funzione di definizione per C, e usarlo per determinare nuovamente la retta tangente a C in P.

(c) Determinare gli estremi locali di $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6y$ su C. Ci sono anche gli estremi assoluti? Perché?

4. Sia $h(x, y, z) = xyz + x^3 - 2y^2z + z^3$.

(a) Quali insiemi di livello di h sono superfici regolari? Detta M la superficie di livello contenenti il punto $A(-1, 0, 1)$, esprimere M, all'intorno di A, come grafico di una funzione di due delle tre variabili x, y, z. Calcolare poi in due modi il piano tangente a M in A.

(b) Mostrare che dal sistema formato dalle equazioni $h(x, y, z) = 7$ e $\cos(xyz) - x - z = 0$ è possibile esplicitare, all'intorno della soluzione $(-1, 0, 2)$, le variabili x e y in funzione di z, e calcolare i loro sviluppi di Taylor al primo ordine.

(c) La funzione h ha estremi locali in $\mathbb{R}^3$?

Soluzioni.

1. Nell'intervallo di integrazione la funzione $f_\alpha(x) = x^{3\alpha}\log|x^\alpha - 1|$ (che ha senso per $\alpha \neq 0$) ha possibili punti singolari solo negli estremi 1 e $+\infty$. Iniziamo con l'integrabilità in 1^+, in cui l'argomento $|x^\alpha - 1|$ del logaritmo è infinitesimo: notando che $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x^\alpha - 1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|\alpha| x^{\alpha-1}}{1} = |\alpha| \neq 0$, si ricava $|x^\alpha - 1| \sim^*_{1^+} x - 1$ da cui (ricordando che in generale se f, g sono funzioni positive all'intorno di c tali che $f \sim_c g$ e $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) \neq 1$ allora $\log f \sim_c \log g$) si ricava $|f_\alpha(x)| \sim^*_{1^+} |\log(x-1)|$, integrabile (perché $\log t$ è integrabile in $t =$

---

(22) È utile sapere che $\sin\theta = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) - 1$.

(23) Suggerimento: da $\rho = 2(1 + \sin\theta)$ e $y = \rho\sin\theta$ si ricava $y = \rho(\frac{1}{2}\rho - 1)$, ed essendo $\rho = \dots$

0^+). Pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in 1^+ per ogni $\alpha \neq 0$. Passiamo ora a $+\infty$. Se $\alpha > 0$ si ha $|x^\alpha - 1| \sim_{+\infty} |x^\alpha| = x^\alpha$: si ha pertanto $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^\alpha \log x^\alpha = \alpha x^\alpha \log x \sim^*_{+\infty} x^\alpha \log x$, che è integrabile per $\alpha < -1$, dunque mai (siamo nel caso $\alpha > 0$). Se invece $\alpha < 0$ il termine x^α è infinitesimo, dunque $|f_\alpha(x)| = x^{3\alpha}|\log(1-x^\alpha)| \sim_{+\infty} x^{3\alpha}|-x^\alpha| = x^{4\alpha}$, integrabile per $4\alpha < -1$, ovvero $\alpha < -\frac{1}{4}$. Pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ per $\alpha < -\frac{1}{4}$, così l'integrale generalizzato converge per ogni $\alpha < -\frac{1}{4}$. Per $\alpha = -1$ esso diventa $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \log|\frac{1}{x} - 1|\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \log(1 - \frac{1}{x})\, dx$: posto $t = 1 - \frac{1}{x}$ (da cui $x = \frac{1}{1-t}$, dunque $dx = \frac{1}{(1-t)^2}\, dt$) l'integrale diventa $\int_0^1 (1-t)\log t\, dt$ (si noti che la funzione integranda è negativa in $]0,1[$, dunque tale integrale avrà valore negativo). Cercando una primitiva di $(1-t)\log t$ si ottiene $\int (1-t)\log t\, dt = (t - \frac{t^2}{2})\log t - \int (t - \frac{t^2}{2})\frac{1}{t}\, dt = t(\frac{2-t}{2}\log t - 1 + \frac{t}{4}) + k$, dunque $\int_0^1 (1-t)\log t\, dt = \big(t(\frac{2-t}{2}\log t - 1 + \frac{t}{4})\big]_0^1 = -\frac{3}{4}$.

2. (a) L'equazione $\alpha y'' + 2\,y' - y = \sin x + 1$ con $\alpha \neq 0$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\alpha t^2 + 2t - 1 = 0$, con discriminante $\Delta = 4(1+\alpha)$: dunque se $\alpha > -1$ (con $\alpha \neq 0$) si hanno radici reali distinte $\frac{-1\pm\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}$, se $\alpha = -1$ la sola radice reale doppia 1, e se $\alpha < -1$ le radici complesse coniugate $\frac{-1\pm i\sqrt{-\alpha-1}}{\alpha}$. In ogni caso, né $t = i$ né $t = 0$ sono tra queste radici, dunque una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $\tilde{y} = a\cos x + b\sin x + c$, e imponendo che $\alpha\tilde{y}'' + 2\,\tilde{y}' - \tilde{y} = \sin x + 1$ si ottiene $(2b - (\alpha+1)a)\cos x + (-2a - (\alpha+1)b)\sin x - c = \sin x + 1$, da cui $(a,b,c) = (-\frac{2}{(\alpha+1)^2+4}, -\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2+4}, -1)$, e perciò $\tilde{y}(x) = -\frac{2\cos x + (\alpha+1)\sin x}{(\alpha+1)^2+4} - 1$. Pertanto l'integrale generale, al variare di $A, B \in \mathbb{C}$, è[24]

$$y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{\alpha}}\,(A\,\cosh(\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}x) + B\,\sinh(\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}x)) + \tilde{y}(x) & (\text{se } \alpha > -1 \text{ con } \alpha \neq 0), \\ e^x(A + Bx) - \frac{1}{2}\cos x - 1 & (\text{se } \alpha - 1), \\ e^{-\frac{x}{\alpha}}\,(A\,\cos(\frac{\sqrt{-\alpha-1}}{\alpha}x) + B\,\sin(\frac{\sqrt{-\alpha-1}}{\alpha}x)) + \tilde{y}(x) & (\text{se } \alpha < -1). \end{cases}$$

(b) L'equazione $xy' - y = \sin x + 1$ è lineare del primo ordine: visto che si chiede di risolverla per $x > 0$, possiamo scriverla nella forma $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{\sin x + 1}{x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = -\log x$, mentre della funzione $e^{P(x)}q(x) = \frac{\sin x+1}{x^2}$ non si riesce a calcolare una primitiva in modo elementare: comunque sia, la soluzione con $y(1) = y_0$ in forma integrale è $y(x) = x(\int_1^x \frac{\sin t + 1}{t^2}\, dt + y_0) = x(\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\, dt - \frac{1}{x} + 1 + y_0) = x(y_0 + 1 + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\, dt) - 1$. Per calcolare $\lim_{x\to 0^+} y(x)$ serve capire l'integrale generalizzato $\int_1^0 \frac{\sin t}{t^2}\, dt = -\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt$: poiché $\frac{\sin t}{t^2} \sim_{0^+} \frac{1}{t}$, tale integrale diverge a $-\infty$, e con esso tutta la parentesi. Usando de l'Hôpital si ha allora $\lim_{x\to 0^+} y(x) = (\lim_{x\to 0^+} \frac{y_0 + 1 + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\, dt}{1/x}) - 1 = (\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x/x^2}{-1/x^2}) - 1 = -1$, ovvero la soluzione tende a -1 qualunque sia y_0 (vedi Figura 1). Analogamente, per calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ serve capire l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$, che converge ad un valore finito (notare che $\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, dunque l'integrale converge assolutamente). Detto $\mathcal{J}$ tale valore, si ha $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$ a seconda che $y_0 \gtrless -\mathcal{J} - 1$; se invece $y_0 = -\mathcal{J} - 1$, ancora con de l'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = (\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x/x^2}{-1/x^2}) - 1 = -1 - \lim_{x\to+\infty} \sin x$, che però non esiste.

(c) L'equazione $\alpha y'' + \varphi(x)\,y' - y = \sin x + 1$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varphi(x)$ una funzione continua su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$) è lineare, dunque come noto lo spazio delle sue soluzioni su I sarà della forma $S = \{y(x) + \tilde{y}(x) : y(x) \in S_0\}$ ove S_0 è lo spazio vettoriale delle soluzioni su I dell'equazione omogenea associata $\alpha y'' + \varphi(x)\,y' - y = 0$ (di dimensione 2 se $\alpha \neq 0$, di dimensione 1 se $\alpha = 0$ e $\varphi \not\equiv 0$) e $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare su I dell'equazione completa.

3. I risultati di questo esercizio sono illustrati nella Figura 2.

(a) L'equazione polare $\rho(\theta) = 2(1 + \sin\theta)$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$ dà luogo alla parametrizzazione $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (2(1+\sin\theta)\cos\theta, 2(1+\sin\theta)\sin\theta)$. Il vettore derivato è $\gamma'(\theta) = (2(\cos 2\theta - \sin\theta), 2(\sin 2\theta + \cos\theta))$, e l'elemento d'arco $||\gamma'(\theta)||\, d\theta = 2\sqrt{2}\,\sqrt{1+\sin\theta}$. La lunghezza è perciò $L_{\mathrm{C}} = 2\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta = 4\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})|\, d\theta$; ponendo $t = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ si ottiene $8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t|\, dt = 8\big((\sin t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\big) = 8((1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})) + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1))) = 16$. Il punto dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$ è $P = \gamma(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, in cui il vettore tangente è $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = (0, 2\sqrt{3})$, dunque la retta tangente a C in P è $\{(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) + \lambda\,(0, 2\sqrt{3}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, ovvero la retta verticale $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(b) Seguiamo il suggerimento: da $\rho = 2(1+\sin\theta)$ e $y = \rho\sin\theta$ si ricava $y = \rho(\frac{1}{2}\rho - 1)$, ed essendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si ricava $y = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}$, da cui $2\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + y^2 - 2y$; elevando al quadrato

---

[24] Si ricordi che, se $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha $\cosh(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$ e $\sinh(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$, dunque $\{Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x} : A, B \in \mathbb{C}\} = \{A\cosh(\gamma x) + B\sinh(\gamma x) : A, B \in \mathbb{C}\}$ esattamente come accade per $\cos(\gamma x) = \frac{e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}}{2}$ e $\sin(\gamma x) = \frac{e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}}{2i}$ nei riguardi di $e^{i\gamma x}$ ed $e^{-i\gamma x}$.

(nell'ipotesi $x^2+y^2-2y \geq 0$) si ottiene $4x^2+4y^2 = x^4+y^4+4y^2+2x^2y^2-4x^2y-4y^3$, perciò $g(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2y-4y^3-4x^2 = 0$. Il gradiente $\nabla g = (4x(x^2+y^2-2y-2), 4(y^3+x^2y-x^2-3y^2))$ si annulla quando $x(x^2+y^2-2y-2) = y^3+x^2y-x^2-3y^2 = 0$; se $x=0$ si ha $y^3-3y^2=0$, da cui $y=0$ oppure $y=3$; se invece $x^2+y^2-2y-2=0$, (ovvero $x^2 = 2+2y-y^2$) si ha $y^3+x^2(y-1)-3y^2 = y^3+(2+2y-y^2)(y-1)-3y^2 = 0$, da cui $-2=0$, assurda. Pertanto i punti in cui g non è sommersiva sono $(0,0)$ e $(0,3)$; di essi solo il primo sta sulla cardiode C, ed è dunque (come atteso) il suo unico punto singolare. In tutti gli altri punti, invece, C è una curva regolare, ad esempio in P ove si ha $\nabla g(P) = (24\sqrt{3}, 0)$: pertanto l'equazione cartesiana della retta tangente in P è $\nabla g(P)\cdot(x-x_P, y-y_P) = 24\sqrt{3}(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}) = 0$, dunque nuovamente $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

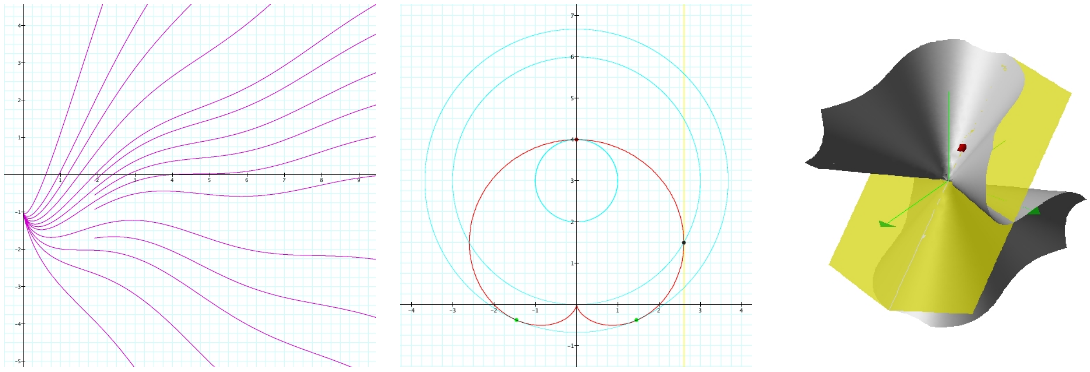
(c) Usando la parametrizzazione γ, per trovare gli estremi locali di $f(x,y) = x^2+y^2-6y$ su C basta trovare gli estremi locali di $\varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(\theta) = f(\gamma(\theta)) = 4(1+\sin\theta)^2 - 12(1+\sin\theta)\sin\theta = 4(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)$. Vale $\varphi'(\theta) = -4\cos\theta(1+4\sin\theta)$ e dunque in $[-\pi,\pi]$ si ha $\varphi'(\theta) = 0$ per $\theta_1 = -\pi + \arcsin\frac{1}{4}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = -\arcsin\frac{1}{4}$ e $\theta_4 = \frac{\pi}{2}$, e $\varphi'(\theta) > 0$ per $-\pi \leq \theta < \theta_1$, $\theta_2 < \theta < \theta_3$ e $\theta_4 < \theta \leq \pi$: pertanto θ_1 e θ_3 sono punti di massimo locale (con $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_3) = \frac{9}{2}$) mentre θ_2 e θ_4 sono punti di minimo locale (con $\varphi(\theta_2) = 0$ e $\varphi(\theta_4) = -8$). Poiché C è compatta (è chiusa in quanto luogo degli zeri di $g(x,y)$, e limitata perché $\rho = 2(1+\sin\theta) < 4$) e f è continua, per Weierstrass esistono anche gli estremi assoluti di f su C: e, per quanto visto, il minimo assoluto sarà -8 (assunto nel punto $\gamma(\theta_4) = (0,4)$) e il massimo assoluto sarà $\frac{9}{2}$ (assunto nei punti $\gamma(\theta_1) = (-\frac{3\sqrt{15}}{8}, -\frac{3}{8})$ e $\gamma(\theta_3) = (\frac{3\sqrt{15}}{8}, -\frac{3}{8})$). L'esame della Figura 2, in cui appaiono le curve di livello di f, conferma quanto trovato.[25]

4. (a) Il gradiente di $h(x,y,z) = xyz + x^3 - 2y^2z + z^3$ è $\nabla h = (yz+3x^2, xz-4yz, xy-2y^2+3z^2)$, che si annulla quando $yz+3x^2 = (x-4y)z = xy-2y^2+3z^2 = 0$. Dalla seconda equazione si ha che $z=0$ oppure $x=4y$: nel primo caso, le altre due danno $3x^2 = xy-2y^2 = 0$, da cui anche $x=y=0$; nel secondo caso, dalla terza equazione si ottiene $2y^2+3z^2=0$, che dà $y=z=0$ e dunque anche $x=0$. In sostanza, il solo punto in cui h non è sommersiva è $(0,0,0)$, che appartiene alla superficie di livello $h(x,y,z)=0$; tutte le altre superfici $h(x,y,z)=\alpha$ con $\alpha \neq 0$ sono regolari. Ora però, guarda caso, la superficie di livello M contenente $A(-1,0,1)$ è proprio $h(x,y,z)=0$: ma anch'essa è regolare al di fuori di $(0,0,0)$, dunque ha senso cercare quanto richiesto. In effetti si ha $\nabla h(A) = (3,-1,3)$, dunque all'intorno di A si può esprimere M come grafico di una funzione di due qualsiasi tra le tre variabili x,y,z: ciò equivale, infatti, ad esplicitare $h(x,y,z)=0$ rispetto ad una delle tre variabili, e per Dini ciò è possibile rispetto ad ognuna di esse. Scegliendo ad esempio di esplicitare $y(x,z)$ con $y(-1,1)=0$, si ha $\dot{y}_x(-1,1) = \dot{y}_z(-1,1) = -\frac{3}{-1} = 3$, dunque il piano tangente a M in A ha equazione cartesiana $y = 0 + 3(x-(-1)) + 3(z-1)$, ovvero $3x-y+3z=0$. Alla stessa equazione si arriva ponendo $\nabla h(A)\cdot(x-(-1), y-0, z-1) = 0$, ovvero $(3,-1,3)\cdot(x+1,y,z-1)=0$, da cui ancora $3x-y+3z=0$ (vedi Figura 3).

(b) Lo jacobiano della funzione che dà il sistema è $\begin{pmatrix} yz+3x^2 & xz-4yz & xy-2y^2+3z^2 \\ -yz\sin(xyz)-1 & -xz\sin(xyz) & -xy\sin(xyz)-1 \end{pmatrix}$, che calcolato in $(-1,0,2)$ diventa $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: poiché $\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, dal sistema è effettivamente possibile esplicitare x e y in funzione di z all'intorno di $(-1,0,2)$. Sarà dunque $\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$; a questi valori si arriva anche derivando in z il sistema $\begin{cases} h(x(z),y(z),z) \equiv 7 \\ \cos(x(z)\,y(z)z) - x(z) - z \equiv 0 \end{cases}$, ottenendo $\begin{cases} x'yz + xy'z + xy + 3x^2x' - 4yy'z - 2y^2 + 3z^2 = 0 \\ -(x'yz + xy'z + xy)\sin(xyz) - x' - 1 = 0 \end{cases}$, da cui per $z=2$ (ricordando che $x(2)=-1$ e $y(2)=0$) si ha $\begin{cases} -2y'(2) + 3x'(2) + 12 = 0 \\ -x'(2) - 1 = 0 \end{cases}$, che ridà $x'(2) = -1$ e $y'(2) = \frac{9}{2}$. In ogni caso, lo sviluppo di Taylor cercato è $\begin{cases} x(z) = -1 - 1(z-2) + o_2(z-2) \\ y(z) = 0 + \frac{9}{2}(z-2) + o_2(z-2). \end{cases}$

(c) Come visto prima, l'unico punto stazionario di $h(x,y,z) = xyz + x^3 - 2y^2z + z^3$ in $\mathbb{R}^3$ è $(0,0,0)$. La matrice hessiana $\mathsf{H}_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ z & -4z & x-4y \\ y & x-4y & 6z \end{pmatrix}$ è identicamente nulla in $(0,0,0)$, perciò il criterio dell'Hessiano non dà alcuna informazione; tuttavia, basta notare che $h(0,0,0)=0$ e ad esempio che $h(x,0,0) = x^3$ per rendersi conto che $(0,0,0)$ è una sella (infatti sull'asse x si ha $h \gtrless 0$ a seconda che $x \gtrless 0$).

[25] Agli stessi risultati si arriva (con un po' di pazienza) anche col metodo di Lagrange, usando la funzione di definizione $g(x,y)=0$.



(1) Grafici di alcune soluzioni di (2.b). **(2)** La cardiode C dell'esercizio 3 (rossa); il punto P (nero) con la retta tangente (gialla); le curve di livello di $f(x, y)$ (azzurre), il punto di minimo assoluto (rosso) e quelli di massimo assoluto (verdi) di f su C. **(3)** La varietà M (grigia), il punto A (rosso) ed il piano tangente ad M in A (giallo) dell'esercizio 4.

Prova scritta (06/09/2006)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha-1}(x)}{x^{\frac{\alpha}{2}}(4x^\alpha+1)}\,dx$, e calcolarlo per $\alpha = 1$.

2. Si consideri l'equazione differenziale $xy' = y(\alpha y+1)(2x^2+1)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Vi sono soluzioni costanti?

(b) Trovare la soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(1) = 1$, e dire quanto vale $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x)$.

(c) Posto poi $\alpha = 0$, trovare la soluzione $y_0(x)$ in un altro modo, verificando che si trova lo stesso risultato di prima.

3. Si disegni il tratto P della parabola di fuoco $(0,0)$ e direttrice $x+2y+2=0$ compreso tra i suoi due punti $A(-1,2)$ e $B(4,2)$ (inclusi).[(26)]

(a) Si scriva un'equazione cartesiana per P in forma di polinomio di secondo grado in x e y, e si determini la retta tangente a P in B.

(b) Dall'equazione trovata si ricavi una parametrizzazione globale per P; usarla per scrivere correttamente (senza calcolarlo) l'integrale che calcola la lunghezza di P, e per determinare nuovamente la retta tangente a P in B.

(c) Spiegare perché la funzione $f(x,y) = x-3y$ ha estremi assoluti su P, e calcolarli.

4. Sia $h(x,y,z) = (h_1(x,y,z), h_2(x,y,z)) = (e^{xyz} - x^2 + 2y\,,\, xz)$.

(a) Quali insiemi di livello di h sono curve regolari di $\mathbb{R}^3$? Detta Γ la curva di livello contenente $A(-1,0,2)$, esprimere Γ, all'intorno di A, come grafico di una funzione di una delle tre variabili, e calcolarne in due modi la retta tangente.

(b) Mostrare che dall'equazione $h_1(x,y,z) = 0$ si può esplicitare localmente $y(x,z)$ di modo che $y(-3,0) = 4$, e calcolare ivi lo sviluppo al primo ordine di $y(x,z)$. Qual'è allora il piano tangente alla superficie $h_1(x,y,z) = 0$ nel punto $(-3,4,0)$?

Soluzioni.

1. Nell'intervallo di integrazione la funzione $f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha-1}(x)}{x^{\frac{\alpha}{2}}(4x^\alpha+1)}$ ha possibili punti singolari solo negli estremi 0 e $+\infty$. In 0^+ si ha $\operatorname{arctg} x \sim_{0^+} x$; se $\alpha \ge 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{x^{\frac{\alpha}{2}}} = x^{\frac{\alpha}{2}-1}$, da cui la condizione $\frac{\alpha}{2}-1 > -1$, dunque $\alpha > 0$; se invece $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{x^{\frac{\alpha}{2}}x^\alpha} = x^{-\frac{\alpha}{2}-1}$, da cui la condizione $-\frac{\alpha}{2}-1 > -1$, dunque

(26) Si ricorda che, dati nel piano cartesiano una retta d e un punto F non su d, la parabola di fuoco F e direttrice d è il luogo dei punti equidistanti da F e d; l'asse di tale parabola è la retta ortogonale a d passante per F. Si ricorda anche che la distanza di un punto (α,β) da una retta $ax+by+c=0$ è $\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\alpha < 0$. Pertanto l'integrale converge in 0^+ per ogni $\alpha \neq 0$. In $+\infty$ si ha invece $\operatorname{arctg} x \sim^*_{+\infty} 1$; se $\alpha \geq 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}} x^\alpha} = x^{-\frac{3\alpha}{2}}$, da cui la condizione $-\frac{3\alpha}{2} < -1$, dunque $\alpha > \frac{2}{3}$; quando $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}} = x^{-\frac{\alpha}{2}}$, da cui la condizione $-\frac{\alpha}{2} < -1$, dunque $\alpha > 2$ (falso). Pertanto l'integrale converge in $+\infty$ per ogni $\alpha > \frac{2}{3}$. Riassumendo, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha > \frac{2}{3}$. Quando $\alpha = 1$, posto $x = t^2$ esso diventa $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{4t^2+1}\, dt$; posto ancora $\tau = 2t$ si ottiene $(\operatorname{arctg} \tau]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

2. L'equazione differenziale $xy' = y(\alpha y + 1)(2x^2 + 1)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$) è del primo ordine a variabili separabili, e per $\alpha = 0$ diventa anche lineare.

(a) Se la costante $y(x) \equiv k$ è una soluzione, si deve avere $0 = k(\alpha k + 1)(2x^2 + 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ciò dà $k = 0$ oppure $k = -\frac{1}{\alpha}$ (se $\alpha \neq 0$). Dunque le soluzioni costanti sono $y(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv -\frac{1}{\alpha}$ (quando $\alpha \neq 0$).

(b) Tenendo conto della condizione iniziale $y(1) = 1$, si può dividere ambo i membri per $\alpha y+1$ se e solo se $\alpha+1 \neq 0$, ovvero per $\alpha \neq -1$ (d'altra parte, se $\alpha = -1$ la soluzione costante $y(x) \equiv -1$ è quella cercata). Separando le variabili si ottiene $\frac{y'}{y(\alpha y+1)} = 2x + \frac{1}{x}$, ed integrando si ha $\log\left|\frac{y}{\alpha y+1}\right| = x^2 + \log|x| + h$, da cui $\left|\frac{y}{\alpha y+1}\right| = k|x|e^{x^2}$ con $k = e^h > 0$ da determinare; ma imponendo che $y(1) = 1$ si ottiene $\frac{1}{|\alpha+1|} = ke$, da cui $k = \frac{1}{e|\alpha+1|}$; si ha allora $\frac{y}{\alpha y+1} = \pm\frac{xe^{x^2-1}}{\alpha+1}$, e la condizione iniziale impone la scelta del segno "+". Ricavando infine la y si trova $y_\alpha(x) = \frac{xe^{x^2-1}}{\alpha+1-\alpha xe^{x^2-1}}$, ed è chiaro che $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha}$ (in altre parole, $y_\alpha(x)$ tende alla soluzione costante $y \equiv -\frac{1}{\alpha}$).

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $xy' = y(2x^2 + 1)$, lineare: per $x \neq 0$ essa si può scrivere nella forma normale $y' + p(x)y = 0$ con $p(x) = -2x - \frac{1}{x}$. Per $x > 0$ una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = -x^2 - \log x$, dunque l'integrale generale è $y = ke^{-P(x)} = kxe^{x^2}$; imponendo che $y(1) = 1$ si trova $1 = ke$, da cui $k = e^{-1}$, e perciò $y_0(x) = xe^{x^2-1}$ (che è quanto si era trovato in precedenza nel caso $\alpha = 0$).

3. Il tratto P della parabola è illustrato nella Figura 1.

(a) Se (x, y) è il punto generico del piano cartesiano, la condizione che definisce la parabola è $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x+2y+2|}{\sqrt{1+4}}$, da cui (elevando al quadrato, e a conti fatti) si ottiene l'equazione cartesiana cercata $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 8y - 4 = 0$. Essendo $\nabla g(x, y) = (8x - 4y - 4, 2y - 4x - 8)$, la retta tangente a P in $B(4, 2)$ ha equazione $\nabla g(4, 2) \cdot (x - 4, y - 2) = (20, -20) \cdot (x - 4, y - 2) = 0$, ovvero $x - y - 2 = 0$.

(b) Esplicitando y in funzione di x dall'equazione $g(x, y) = 0$ si ottiene $y = 2(x + 2 \pm \sqrt{5(x + 1)})$, e per descrivere P va scelto il segno "$-$" con la condizione $-1 \leq x \leq 4$; in altre parole, una parametrizzazione globale per P è data da $\gamma : [-1, 4] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(x) = (x, 2(x + 2 - \sqrt{5(x + 1)}))$. Per $x \neq -1$ si ha allora $\gamma'(x) = (1, 2 - \sqrt{\frac{5}{x+1}})$, da cui la lunghezza di P risulta $\int_{-1}^4 \sqrt{1 + (2 - \sqrt{\frac{5}{x+1}})^2}\, dx$ (è un integrale generalizzato in -1, ma convergente[(27)]), mentre $\gamma'(4) = (1, 1)$ permette di ritrovare la retta tangente $\{(x, y) = (4, 2) + t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, ovvero $x - y - 2 = 0$.

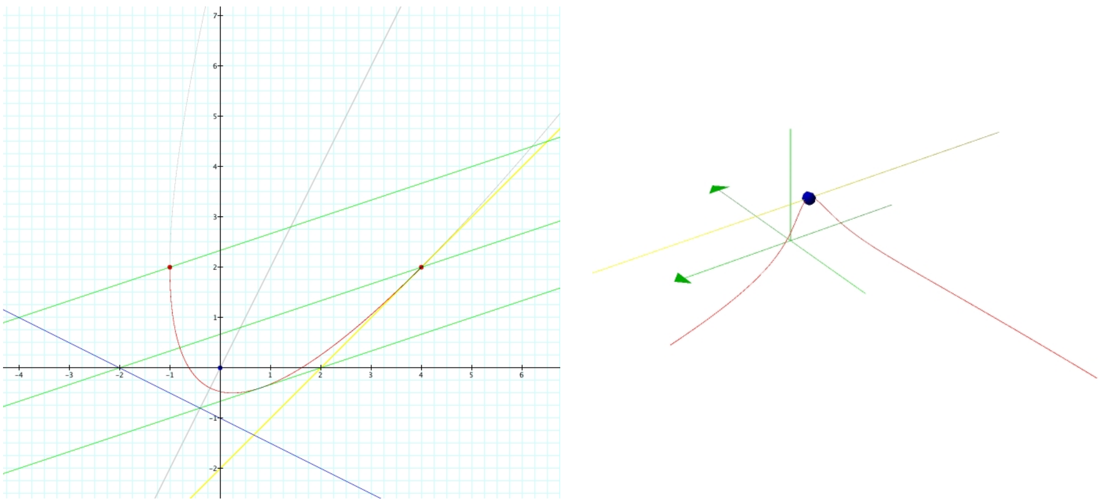
(c) La funzione $f(x, y) = x - 3y$ è continua, e P è un sottoinsieme compatto del piano cartesiano: dunque f ha estremi assoluti su P in base al teorema di Weierstrass. Per il calcolo, conviene decomporre P (varietà con bordo) nei sui estremi A e B da un lato, e nel resto dei suoi punti dall'altro. Negli estremi di P si ha $f(A) = -7$ e $f(B) = -2$; per gli altri punti, usando il metodo di Lagrange si ha il sistema dato da $g(x, y) = 0$ e $\det\begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla f \end{pmatrix} = 0$, ovvero $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 8y - 4 = 0 \\ (8x - 4y - 4)(-3) - (2y - 4x - 8)(1) = 0 \end{cases}$, che ha la sola soluzione $C(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ in cui $f(C) = 2$. Pertanto il minimo assoluto di f su P è -7 (assunto in A) ed il massimo è 2 (assunto in C). L'esame della Figura 1 conferma questo risultato.

4. (a) La matrice jacobiana di $h(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)) = (e^{xyz} - x^2 + 2y\,,\, xz)$ è $\mathsf{J}_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} - 2x & xze^{xyz} + 2 & xye^{xyz} \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$. I punti di $\mathbb{R}^3$ in cui h non è sommersiva sono quelli in cui si annullano i tre minori di ordine due, e a conti fatti si verifica che sono tutti e soli quelli dell'asse y (della forma $(0, y_0, 0)$ per qualche $y_0 \in \mathbb{R}$). Gli insiemi di livello $h(x, y, z) = (\alpha, \beta)$ che contengono tali punti sono della forma $(\alpha, \beta) = (1 + 2y_0, 0)$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, dunque sono tutti e soli quelli con $\beta = 0$; in effetti, è facile verifi-

[(27)] Ciò si può vedere notando che la funzione integranda è $\sim^*_{-1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; alternativamente, col cambio di variabile $2 - \sqrt{\frac{5}{x+1}} = t$ l'integrale diventa $10\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{t^3}\, dt$, che converge perché $\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{t^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$.

care che l'insieme di livello $h(x, y, z) = (\alpha, 0)$ è formato dall'unione della retta $y = \frac{\alpha-1}{2}$ sul piano $x = 0$ e della parabola $y = \frac{x^2+\alpha-1}{2}$ sul piano $z = 0$, e queste due curve hanno in comune il punto $(0, \frac{\alpha-1}{2}, 0)$ dell'asse y, che dunque diventa singolare per la loro unione. Gli altri insiemi di livello di h sono curve regolari di $\mathbb{R}^3$, ed in particolare lo è la curva di livello Γ contenente $A(-1, 0, 2)$, che corrisponde a $h(x, y, z) = (0, -2)$ (vedi Figura 2). Poiché $\mathsf{J}_h(-1, 0, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, l'unica possibilità per esprimere Γ, all'intorno di A, come grafico di una funzione di una delle tre variabili è quella di esplicitare x e z in funzione di y (ciò appare evidente dalla Figura 2), ottenendo funzioni $(x(y), z(y))$ con $(x(0), y(0)) = (-1, 2)$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una parametrizzazione locale di Γ attorno A è data da $\gamma(y) = (x(y), y, z(y))$ definita all'intorno di $y = 0$, e si ha dunque $\gamma'(0) = (x'(0), 1, z'(0)) = (0, 1, 0)$: dunque una forma parametrica della retta tangente a Γ in A è $\{(x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(0, 1, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (-1, t, 2) : t \in \mathbb{R}\}$. Alternativamente, basta calcolare $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che dà la forma cartesiana $\begin{cases} 2(x+1) = 0 \\ 2(x+1) - (z-2) = 0 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ (la stessa retta di prima).

(b) Per iniziare notiamo che effettivamente vale $h_1(-3, 4, 0) = 1 - 9 + 8 = 0$. Poiché $\nabla h_1(-3, 4, 0) = (6, 2, -12)$, all'intorno di $(-3, 4, 0)$ si può esplicitare una qualunque delle tre coordinate in funzione delle altre due; scegliendo come richiesto $y(x, z)$, si avrà $y(-3, 0) = 4$, $\frac{\partial y}{\partial x}(-3, 0) = -\frac{6}{2} = -3$ e $\frac{\partial y}{\partial z}(-3, 0) = -\frac{-12}{2} = 6$, dunque lo sviluppo cercato è $y(x, z) = 4 - 3(x + 3) + 6z + o_0(\|(x + 3, z)\|)$. Il piano tangente alla superficie $h_1(x, y, z) = 0$ nel punto $(-3, 4, 0)$ si può dunque calcolare in due modi: o con lo sviluppo al primo ordine appena trovato $y = 4-3(x+3)+6z$ (ovvero $3x + y - 6z + 5 = 0$) o da $\nabla h_1(-3, 4, 0) \cdot (x - (-3), y - 4, z - 0) = (6, 2, -12) \cdot (x + 3, y - 4, z) = 0$, che dà la stessa equazione.



(1) Il tratto di parabola P dell'esercizio 3 (rossa); il fuoco e la direttrice sono disegnati in blu, l'asse e la parte di parabola non considerata sono disegnati in grigio. La retta tangente in B è in giallo; le curve di livello di f sono verdi (abbassandosi corrispondono a valori crescenti di f), ed evidenziano i risultati trovati. **(2)** La curva di livello Γ di h (rossa) nel punto A (blu) e la retta tangente a Γ in A (gialla) dell'esercizio (4.a).

Prova scritta (19/09/2006)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log^\alpha(1+9x^2)}{x^{3\alpha-1}}\,dx$, e calcolarlo per $\alpha = 1$.

2. Si abbia l'equazione differenziale lineare $y'' - \alpha y' + (\alpha - 1)y = 2e^x + \cos x$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Esibirne un sistema fondamentale di soluzioni.(28)

(b) Si trovi l'integrale generale dell'equazione completa al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (reale).

(c) (Facoltativo) Posto $\alpha = 1 + i$, trovare tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$.

3. Sia $f(x, y) = x + 2y - \sqrt{1 + 4xy}$.

(a) Determinare dominio, zeri e segno di f, disegnando i risultati. Discutere la regolarità di f, e calcolare $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-1, -2)$ al variare del vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

(b) Quali curve di livello di f sono regolari? Parametrizzare la curva $f(x, y) + 8 = 0$ all'intorno del suo punto $(-1, -2)$, e usare quanto trovato per determinarne in due modi diversi la retta affine tangente.

(c) Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) : xy = 1,\ 1 \le 3x \le 9\}$, dire perché f ammette estremi assoluti su D, e calcolarli.

4. Sia $h(x, y, z) = x + y + z + \operatorname{arctg}(xz - 2y)$.

(a) Quali insiemi di livello di h sono superfici regolari di $\mathbb{R}^3$? Detta M quella passante per l'origine O, esprimere M, all'intorno di O, come grafico di una funzione di due delle tre variabili. Calcolare poi in due modi il piano tangente a M in O.

(b) Dal sistema $h(x, y, z) + 2 = xyz - 2 = 0$ si vorrebbero esplicitare due funzioni $x(y)$ e $z(y)$ tali che $x(1) = -1$ e $z(1) = -2$. Mostrare che ciò è possibile localmente in uno ed un solo modo, e calcolare $\lim_{y\to 1} \frac{x(y)-2z(y)-3}{\log(3y^2-2)}$.

Soluzioni.

1. L'integrabilità della funzione $f_\alpha(x) = \frac{\log^\alpha(1+9x^2)}{x^{3\alpha-1}}$ va controllata negli estremi 0 e $+\infty$. Ricordando che $\log(1 + t) \sim_{0^+} t$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} \frac{(x^2)^\alpha}{x^{3\alpha-1}} = x^{1-\alpha}$, da cui la condizione $1 - \alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. In $+\infty$ si ha invece $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{1-3\alpha} \log^\alpha x$, che converge se $1 - 3\alpha < -1$ (ovvero se $\alpha > \frac{2}{3}$) oppure se $1 - 3\alpha = -1$ e $\alpha < -1$ (assurdo), dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ per $\alpha > \frac{2}{3}$. Pertanto l'integrale generalizzato converge per $\frac{2}{3} < \alpha < 2$. Per $\alpha = 1$, integrando per parti e ponendo poi $t = 3x$ esso diventa $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+9x^2)}{x^2}\,dx = (-\frac{\log(1+9x^2)}{x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\frac{1}{x})\frac{18x}{1+9x^2}\,dx = 0 + 18\int_0^{+\infty}\frac{1}{9x^2+1}\,dx = 6\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt = (6 \operatorname{arctg} t]_0^{+\infty} = 3\pi$.

(28) Si ricorda che per "*sistema fondamentale di soluzioni*" di un'equazione differenziale lineare in forma normale si intende una base di funzioni per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

2. (a) L'equazione $y''-\alpha y'+(\alpha-1)y=2e^x+\cos x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2-\alpha t+\alpha-1=0$ ha soluzioni $\alpha-1$ e 1, dunque un sistema fondamentale di soluzioni è dato da $\{e^x,\, e^{(\alpha-1)x}\}$ se $\alpha\neq 2$, e da $\{e^x,\, x\,e^x\}$ se $\alpha=2$.

(b) Sia ora $\alpha\in\mathbb{R}$, e poniamo $b_1(x)=2e^x$ e $b_2(x)=\cos x$. Poiché i non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_2(x)$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x)=a\cos x+b\sin x$; imponendo che $\tilde{y}_2''-\alpha\tilde{y}_2'+(\alpha-1)\tilde{y}_2=\cos x$ si ottiene $((\alpha-2)a-\alpha b)\cos x+(\alpha a+(\alpha-2)b)\sin x=\cos x$, da cui $(\alpha-2)a-\alpha b=1$ e $\alpha a+(\alpha-2)b=0$, che dà $a=\frac{\alpha-2}{2(\alpha^2-2\alpha+2)}$ e $b=-\frac{\alpha}{2(\alpha^2-2\alpha+2)}$, perciò $\tilde{y}_2(x)=\frac{(\alpha-2)\cos x-\alpha\sin x}{2(\alpha^2-2\alpha+2)}$. Per $b_1(x)$ conviene invece distinguere ancora i casi $\alpha=2$ e $\alpha\neq 2$.
Se $\alpha=2$ la radice 1 è doppia, dunque una soluzione particolare relativa a $b_1(x)$ sarà della forma $\tilde{y}_1(x)=kx^2e^x$ con $k\in\mathbb{R}$ da determinare; imponendo che $\tilde{y}_1''-2\tilde{y}_1'+\tilde{y}_1=2e^x$ si ottiene $k(x^2+4x+2-2(x^2+2x)+x^2)e^x=2e^x$, da cui $k=1$: pertanto, essendo in questo caso $\tilde{y}_2(x)=-\frac{1}{2}\sin x$, l'integrale generale dell'equazione è $y(x)=(A+Bx+x^2)e^x-\frac{1}{2}\sin x$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$.
Se invece $\alpha\neq 2$ la radice 1 è semplice, dunque una soluzione particolare relativa a $b_1(x)$ sarà della forma $\tilde{y}_1(x)=kxe^x$ con $k\in\mathbb{R}$ da determinare; imponendo che $\tilde{y}_1''-2\tilde{y}_1'+\tilde{y}_1=2e^x$ stavolta si ottiene $k(x+2-\alpha(x+1)+(\alpha-1)x)e^x=2e^x$, da cui $k=\frac{2}{2-\alpha}$: pertanto l'integrale generale dell'equazione è $y(x)=(A+\frac{2}{2-\alpha}x)e^x+Be^{(\alpha-1)x}+\frac{(\alpha-2)\cos x-\alpha\sin x}{2(\alpha^2-2\alpha+2)}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$.

(c) Se $\alpha=1+i$ la radice 1 è semplice, dunque vale la soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)=\frac{2}{2-\alpha}xe^x=(1+i)xe^x$ trovata prima. Notando invece che $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, si tratta di trovare una soluzione particolare per e^{ix}, una per e^{-ix} e di considerare la loro semisomma. Essendo $\alpha-1=i$ una radice caratteristica, una soluzione particolare per e^{ix} è del tipo kxe^{ix}, e si trova $k=-\frac{1+i}{2}$; invece $-i$ non è radice, dunque una soluzione particolare per e^{-ix} è del tipo ke^{-ix}, e si trova $k=-\frac{1+i}{4}$. Dunque una soluzione particolare per $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ è $\frac{1}{2}(-\frac{1+i}{2}xe^{ix}-\frac{1+i}{4}e^{-ix})=-\frac{1+i}{8}(2xe^{ix}+e^{-ix})$. L'integrale generale è allora $y(x)=(A+(1+i)x)e^x+(B-\frac{1+i}{4}x)e^{ix}-\frac{1+i}{8}e^{-ix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$; e imponendo che $y(0)=0$ si ottiene $A+B=\frac{1+i}{8}$.

3. (a) (Vedi figura.) Il dominio di $f(x,y)=x+2y-\sqrt{1+4xy}$ è dato da $1+4xy\geq 0$, ovvero $xy\geq-\frac{1}{4}$: si tratta della zona di piano compresa tra i due rami (inclusi) dell'iperbole $xy=-\frac{1}{4}$, contenente gli assi coordinati. Vale $f(x,y)\geq 0$ dove $\sqrt{1+4xy}\leq x+2y$, che equivale al sistema $\begin{cases}1+4xy\geq 0\\ x+2y\geq 0\\ 1+4xy\leq(x+2y)^2\end{cases}$, ovvero $\begin{cases}xy\geq-\frac{1}{4}\\ y\geq-\frac{x}{2}\\ x^2+4y^2\geq 1\end{cases}$: sono i punti del dominio sopra la retta $y=-\frac{x}{2}$ che stanno fuori dall'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 1 e $\frac{1}{2}$ (ed f si annulla sui punti dell'ellisse sopra $y=-\frac{x}{2}$). La funzione è continua in tutto il dominio, e differenziabile nei soli punti interni in cui $xy>-\frac{1}{4}$ (a causa della radice). In tali punti si ha $\nabla f(x,y)=(1-\frac{2y}{\sqrt{1+4xy}},2-\frac{2x}{\sqrt{1+4xy}})$, e dunque se $\vec{v}=(v_1,v_2)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^2$ si ha $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(-1,-2)=\nabla f(-1,-2)\cdot(v_1,v_2)=\frac{7}{3}v_1+\frac{8}{3}v_2$.

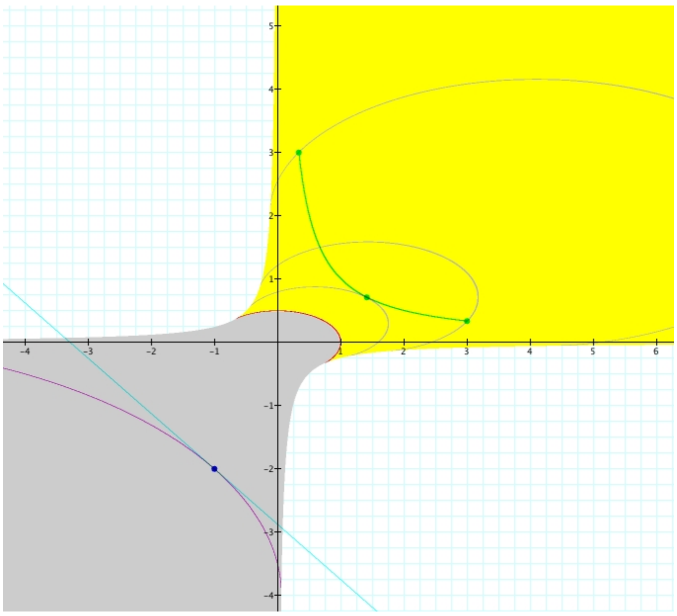
(b) Il gradiente ∇f si annulla dove $\sqrt{1+4xy}=x=2y$: si ottiene dunque $\sqrt{1+8y^2}=2y$, che nell'ipotesi $y>0$ equivale a $1+8y^2=4y^2$, ovvero $4y^2=-1$, assurdo. Dunque tutte le curve di livello di f sono regolari, e tra esse anche quella che passa per il punto $(-1,-2)$ (notiamo che effettivamente vale $f(-1,-2)=-8$). Come già visto si ha $\nabla f(-1,-2)=(\frac{7}{3},\frac{8}{3})$, perciò si può parametrizzare la curva esplicitando una qualsiasi delle due variabili rispetto all'altra; ad esempio, esplicitando $y(x)$ con $y(-1)=-2$ si ha $y'(-1)=-\frac{\frac{7}{3}}{\frac{8}{3}}=-\frac{7}{8}$, e la retta affine tangente risulta $y=-2-\frac{7}{8}(x-(-1))=-\frac{7}{8}x-\frac{23}{8}$, ovvero $7x+8y+23=0$ (vedi figura). Allo stesso risultato si arriva calcolando $\nabla f(-1,-2)\cdot(x-(-1),y-(-2))=(\frac{7}{3},\frac{8}{3})\cdot(x+1,y+2)=0$.

(c) L'insieme $D=\{(x,y):xy=1,\ 1\leq 3x\leq 9\}$ è un arco chiuso di iperbole equilatera (vedi figura): poiché esso è un compatto contenuto nel dominio di f, nel quale f è continua, f ha estremi assoluti su D in base al teorema di Weierstrass. Per il calcolo conviene decomporre D (varietà con bordo) negli estremi $(\frac{1}{3},3)$ e $(3,\frac{1}{3})$ da un lato, e nel resto dei punti dall'altro. Negli estremi si ha $f(\frac{1}{3},3)=\frac{19}{3}-\sqrt{5}$ e $f(3,\frac{1}{3})=\frac{11}{3}-\sqrt{5}$. Negli altri punti D è parametrizzata da $\gamma(x)=(x,\frac{1}{x})$ con $\frac{1}{3}<x<3$, e la funzione diventa $\varphi(x)=f(\gamma(x))=x+\frac{2}{x}-\sqrt{5}$; la derivata $\varphi'(x)=1-\frac{2}{x^2}$ si annulla per $x=\sqrt{2}$ ed è positiva per $\sqrt{2}<x<3$, e vale $\varphi(\sqrt{2})=f(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (minimo relativo). Pertanto (vedi ancora la figura), essendo $2\sqrt{2}<\frac{11}{3}<\frac{19}{3}$, il minimo assoluto di f su D è $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (assunto in $(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$) ed il massimo è $\frac{19}{3}-\sqrt{5}$ (assunto in $(\frac{1}{3},3)$).

4. (a) Il gradiente di $h(x,y,z)=x+y+z+\operatorname{arctg}(xz-2y)$ è $\nabla h(x,y,z)=(1+\frac{z}{1+(xz-2y)^2},1-\frac{2}{1+(xz-2y)^2},1+\frac{x}{1+(xz-2y)^2})$, che si annulla quando $1+(xz-2y)^2=-z=2=-x$. Si ricava dunque $x=z=-2$ e $1+(4-2y)^2=2$, da cui $4-2y=\pm 1$, ovvero $y=\frac{3}{2}$ o $y=\frac{5}{2}$. I punti di $\mathbb{R}^3$ nei quali h non è sommersiva sono dunque $(-2,\frac{3}{2},-2)$ e

$(-2, \frac{5}{2}, -2)$, sulle superfici di livello rispettivamente $h(x,y,z) = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{2}$ e $h(x,y,z) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$. La superficie di livello M passante per l'origine O (ovvero $h(x,y,z) = 0$) è dunque regolare; si ha $\nabla h(0,0,0) = (1,-1,1)$, perciò per Dini si può esplicitare localmente una qualunque delle tre variabili rispetto alle altre due. Ad esempio si può esplicitare $x(y,z)$ con $x(0,0) = 0$ e $(\frac{\partial x}{\partial y}(0,0), \frac{\partial x}{\partial z}(0,0)) = (-\frac{-1}{1}, -\frac{1}{1}) = (1,-1)$, e dunque il piano tangente a M in O ha equazione cartesiana $x = 0 + 1(y-0) + (-1)(z-0)$, ovvero $x - y + z = 0$. Allo stesso risultato si arriva calcolando $\nabla h(0,0,0) \cdot (x-0, y-0, z-0) = (1,-1,1) \cdot (x-0, y-0, z-0) = 0$.

(b) Si tratta di vedere se è possibile applicare il teorema del Dini. Notiamo innanzitutto che $(x,y,z) = (-1,1,-2)$ soddisfa $h(x,y,z) + 2 = xyz - 2 = 0$ Lo jacobiano della funzione che dà il sistema è dato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 + \frac{z}{1+(xz-2y)^2} & 1 - \frac{2}{1+(xz-2y)^2} & 1 + \frac{x}{1+(xz-2y)^2} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$, che in $(-1,1,-2)$ diventa $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$: poiché il minore formato dalla prima e terza colonna è nonsingolare, si possono effettivamente esplicitare $x(y)$ e $z(y)$ con $x(1) = -1$ e $z(1) = -2$, e vale $\begin{pmatrix} x'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tali valori ci aiutano a calcolare il limite $\lim_{y\to 1} \frac{x(y)-2z(y)-3}{\log(3y^2-2)}$, in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché grazie a de l'Hôpital esso è uguale a $\lim_{y\to 1} \frac{x'(y)-2z'(y)}{6y/(3y^2-2)} = \frac{x'(1)-2z'(1)}{6} = -\frac{3}{2}$.



Zone in cui la funzione $f(x,y)$ dell'esercizio 3 è positiva (giallo), negativa (grigio) e nulla (rosso); sono rappresentati anche la curva di livello (porpora) e la retta tangente (azzurra) di (3.b), e l'insieme compatto D di (3.c) (verde) con le curve di livello di f (grigie) che realizzano gli estremi assoluti di f su D.