Prima prova parziale (16/05/2007)

1. Sia $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}(x^3+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}$.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$, e calcolarlo per $\alpha = -2$.

(b) Studiare[29] l'andamento della funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{\frac{2}{x}} f_0(t)\,dt$.

2. (a) Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $4y'' + 4y' + 17y = 5e^x - 1$ il cui grafico passa per l'origine.

(b) Studiare a priori la crescenza delle soluzioni di $xy' - 2y = x^2e^x$ sull'intervallo $]0,+\infty[$. Determinare poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i limiti in 0^+ e in $+\infty$ della soluzione con $y(1) = \alpha$.

3. Nel piano cartesiano siano $\mathcal{A}$ il ramo di iperbole $xy + \sqrt{3} = 0$ nel secondo quadrante, e $\mathcal{B}$ il segmento chiuso che congiunge i punti $(1,-1)$ e $(2,2)$.

(a) Disegnare $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, trovarne le parametrizzazioni come curve-grafico $x = x(y)$ e usarle per calcolare la tangente a $\mathcal{A}$ in $(-\sqrt{3},1)$ e la lunghezza di $\mathcal{B}$.

(b) Parametrizzare poi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con la coordinata polare[30] θ, scrivere i cambi di parametro e ricalcolare la tangente a $\mathcal{A}$ in $(-\sqrt{3},1)$. Supponendo infine che $\mathcal{B}$ abbia densità lineare di massa data da $\delta(x,y) = \delta_0 + \mu y^2$, calcolarne il baricentro.

4. Si consideri la funzione reale $f(x,y) = \dfrac{2x+y+1}{x^2+y^2-1}$.

(a) Disegnare il dominio di f, gli zeri ed il segno; calcolarne poi i limiti notevoli nei punti d'accumulazione del dominio (in particolare, mostrare che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} f(x,y) = 0$).

(b) Disegnare $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 1,\ x+y \geq 2\}$, e spiegare perché $f(x,y)$ ammette estremi assoluti su K. Usando che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} f(x,y) = 0$, si può mostrare che f ammette estremi assoluti anche su $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2\}$: come?

---

[29] limitarsi a studiare dominio, zeri, segno, limiti notevoli e crescenza.

[30] dall'equazione cartesiana $f(x,y) = 0$ della curva ricavare $\rho = \rho(\theta)$ sostituendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$; quindi...

Soluzioni.

1. (a) L'integrabilità di $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}(x^3+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ va controllata in 0^+ e in $+\infty$. In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} x^{-\alpha}$, dunque la condizione è $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$; in $+\infty$ si ha invece $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^{-\alpha}(x^3)^{\alpha+\frac{1}{2}} = x^{2\alpha+\frac{3}{2}}$, dunque la condizione è $2\alpha + \frac{3}{2} < -1$, ovvero $\alpha < -\frac{5}{4}$. Pertanto l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge per $\alpha < -\frac{5}{4}$. In particolare, se $\alpha = -2$ si ricava $\int_0^{+\infty} x^2(x^3+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx = (\frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}]_0^{+\infty} = (-\frac{2}{3\sqrt{x^3+1}}]_0^{+\infty} = (0) - (-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

(b) La funzione integranda $f_0(t) = \sqrt{t^3+1}$ è definita per $t \ge -1$, dunque le condizioni che danno il dominio di $F(x) = \int_{x-1}^{2/x} f_0(t)\,dt$ sono $x-1 \ge -1$, $\frac{2}{x} \ge -1$ e, ovviamente, $x \ne 0$: se ne ricava che il dominio di $F(x)$ è $]0,+\infty[$. Poiché $f_0(t) \ge 0$, si avrà $F(x) \ge 0$ se e solo se $x - 1 \le \frac{2}{x}$, ovvero se e solo se (nel dominio) $0 < x \le 2$: in altre parole, F è positiva per $0 < x < 2$, si annulla in $x = 2$ ed è negativa per $x > 2$. Per i limiti notevoli, notando che $f_0(t) \sim_{+\infty} t^{\frac{3}{2}}$ si ha $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_{-1}^{+\infty} f_0(t) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{+\infty}^{0} f_0(t) = -\int_0^{+\infty} f_0(t) = -\infty$. Infine, si ha $F'(x) = f_0(\frac{2}{x})(\frac{2}{x})' - f_0(x-1)(x-1)' = -\frac{2}{x^2}\sqrt{\frac{8}{x^2}+1} - \sqrt{(x-1)^3+1}$, chiaramente sempre < 0: dunque $F(x)$ è strettamente decrescente nel suo dominio $]0,+\infty[$.

2. (a) L'equazione differenziale $4y'' + 4y' + 17y = 5e^x - 1$ è lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $4t^2 + 4t + 17 = 0$ ha radici $-\frac{1}{2} \pm 2i$, dunque le soluzioni reali dell'omogenea associata sono $S_0 = \{e^{-\frac{x}{2}}(A\cos 2x + B\sin 2x) : A, B \in \mathbb{R}\}$. Una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ per $b_1(x) = 5e^x$ è del tipo $\tilde{y}_1(x) = ae^x$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare: imponendo che $4\tilde{y}_1'' + 4\tilde{y}_1' + 17\tilde{y}_1 = 5e^x$ si ricava $25ae^x = 5e^x$, da cui $a = \frac{1}{5}$; una soluzione particolare per $b_2(x) = -1$ è evidentemente la costante $\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{17}$, così una soluzione particolare per $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ è $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{17}$. Pertanto l'integrale generale diventa $S = \{y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{17} : A, B \in \mathbb{R}\}$. Chiedendo che $y(0) = 0$ si ottiene $A + \frac{1}{5} - \frac{1}{17} = 0$, cioè $A = -\frac{12}{85}$: perciò le soluzioni richieste sono tutte quelle della forma $\{e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{12}{85}\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{17} : B \in \mathbb{R}\}$.
(b) L'equazione $xy' - 2y = x^2e^x$ è lineare del primo ordine, e su $]0,+\infty[$ è equivalente a $y' + (-\frac{2}{x})y = xe^x$, già in forma $y' + p(x)y = q(x)$. Partiamo comunque dall'analisi a priori della crescenza: da $y' = \frac{2y + x^2e^x}{x}$ si ricava (visto che $x > 0$) che le soluzioni crescono sopra il grafico della funzione $y = -\frac{1}{2}x^2e^x$ e decrescono sotto. Risolviamo ora l'equazione. Una primitiva $P(x)$ di $p(x) = -\frac{2}{x}$ è $P(x) = -2\log x = \log\frac{1}{x^2}$, ma $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int \frac{e^x}{x}\,dx$ non ha una primitiva elementare: usando allora la forma integrale, si ottiene $y_\alpha(x) = e^{-P(x)}(\int_1^x e^{P(x)}q(x)\,dx + \alpha e^{P(1)}) = x^2(\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + \alpha)$. Il $\lim_{x\to 0^+} y_\alpha(x)$ è in forma indeterminata $0\cdot\infty$ (poiché $\frac{e^t}{t} \sim_{0^+} \frac{1}{t}$ si ha $\int_1^0 \frac{e^t}{t} = -\int_0^1 \frac{e^t}{t} = -\infty$), ma de l'Hôpital dà $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + y_0}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x}{x}}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+}(-\frac{1}{2}x^2e^x) = 0^-$. Poiché poi $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$ si ha $\int_1^{+\infty}\frac{e^t}{t}\,dt = +\infty$, e dunque $\lim_{x\to 0^+} y_\alpha(x) = +\infty$. Ricapitolando: qualunque sia il dato iniziale $y(1) = \alpha$, la soluzione $y_\alpha(x)$ tende a 0^- per $x \to 0^+$, e a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

3. (a) (Vedi Figura 1) Dalle equazioni cartesiane $xy + \sqrt{3} = 0$ (per $\mathcal{A}$) e $3x - y - 4 = 0$ (per $\mathcal{B}$) si ricavano le parametrizzazioni richieste, che sono risp. $\gamma_{\mathcal{A}} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma_{\mathcal{A}}(y) = (-\frac{\sqrt{3}}{y}, y)$ e $\gamma_{\mathcal{B}} : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma_{\mathcal{B}}(y) = (\frac{1}{3}(y+4), y)$. Essendo $\gamma_{\mathcal{A}}'(y) = (\frac{\sqrt{3}}{y^2}, 1)$, un vettore tangente a $\mathcal{A}$ in $(-\sqrt{3}, 1)$ è $\gamma_{\mathcal{A}}'(1) = (\sqrt{3}, 1)$, dunque una forma parametrica della tangente cercata è $\{(x,y) = (-\sqrt{3}, 1) + \lambda(\sqrt{3}, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $\lambda = y - 1$ in $x = -\sqrt{3} + \lambda\sqrt{3}$ si ricava la forma cartesiana $x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$. Quanto a $\mathcal{B}$, derivando si ha $\gamma_{\mathcal{B}}'(y) = (\frac{1}{3}, 1)$, da cui $||\gamma_{\mathcal{B}}'(y)|| = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$: pertanto la lunghezza è $\int_{-1}^{2} ||\gamma_{\mathcal{B}}'(y)||\,dy = \frac{\sqrt{10}}{3}\int_{-1}^{2} dy = \sqrt{10}$, come ben noto.

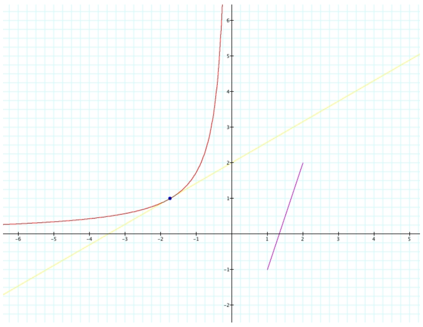
(b) Per $\mathcal{A}$, da $xy + \sqrt{3} = 0$ si ricava $\rho^2\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3} = 0$, da cui $\rho(\theta) = \sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta\cos\theta}}$ con $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$; per $\mathcal{B}$, da $3x - y - 4 = 0$ si ricava $3\rho\cos\theta - \rho\sin\theta - 4 = 0$, da cui $\rho(\theta) = \frac{4}{3\cos\theta - \sin\theta}$ con $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Pertanto le parametrizzazioni cercate sono $\tilde{\gamma}_{\mathcal{A}} :]\frac{\pi}{2}, \pi[\to \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\gamma}_{\mathcal{A}}(y) = (\sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta\cos\theta}}\cos\theta, \sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta\cos\theta}}\sin\theta) = \sqrt[4]{3}(-\sqrt{-\operatorname{cotg}\theta}, \sqrt{-\operatorname{tg}\theta})$, e $\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}} : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}}(y) = (\frac{4\cos\theta}{3\cos\theta - \sin\theta}, \frac{4\sin\theta}{3\cos\theta - \sin\theta})$; i cambi di parametro sono $\alpha_{\mathcal{A}} :]\frac{\pi}{2}, \pi[\to]0, +\infty[$ dato da $y = \alpha_{\mathcal{A}}(\theta) = \sqrt[4]{3}\sqrt{-\operatorname{tg}\theta}$, e $\alpha_{\mathcal{B}} : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \xrightarrow[-1,2]{}$ dato da $y = \alpha_{\mathcal{B}}(\theta) = \frac{4\sin\theta}{3\cos\theta - \sin\theta}$.

Essendo $(-\sqrt{3},1)=\tilde{\gamma}_{\mathcal{A}}(\frac{5\pi}{6})$, da $\tilde{\gamma}'_{\mathcal{A}}(\theta)=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}(-\frac{1}{\sin^2\theta\sqrt{-\operatorname{cotg}\theta}},-\frac{1}{\cos^2\theta\sqrt{-\operatorname{tg}\theta}})$ si trova il vettore tangente $\tilde{\gamma}'_{\mathcal{A}}(\frac{5\pi}{6})=2(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3},1)$, che è parallelo a $\gamma'_{\mathcal{A}}(1)=(\sqrt{3},1)$ e dunque dà luogo alla stessa retta di prima.
Infine, per calcolare il baricentro di $\mathcal{B}$ conviene tornare alla parametrizzazione iniziale. Posto $d\sigma_y:=||\gamma'_{\mathcal{B}}(y)||\,dy=\frac{\sqrt{10}}{3}\,dy$, la massa totale è $m_{\mathcal{B}}=\int_{-1}^2\delta(y)\,d\sigma_y=\frac{\sqrt{10}}{3}\int_{-1}^2(\delta_0+\mu y^2)\,dy=\frac{\sqrt{10}}{3}(\delta_0 y+\mu\frac{y^3}{3}]_{-1}^2=\sqrt{10}(\delta_0+\mu)$, pertanto il baricentro è $(x_{\mathcal{B}},y_{\mathcal{B}})=\frac{1}{m_{\mathcal{B}}}(\int_{-1}^2\delta(y)x(y)\,d\sigma_y,\int_{-1}^2\delta(y)y\,d\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{10}(\delta_0+\mu)}(\int_{-1}^2(\delta_0+\mu y^2)\frac{1}{3}(y+4)\frac{\sqrt{10}}{3}\,dy,\int_{-1}^2(\delta_0+\mu y^2)y\frac{\sqrt{10}}{3}\,dy)=(\frac{6\delta_0+7\mu}{4(\delta_0+\mu)},\frac{2\delta_0+5\mu}{4(\delta_0+\mu)})$. Il risultato è sensato: si noti infatti che il baricentro è un punto di $\mathcal{B}$ (infatti $3x_{\mathcal{B}}-y_{\mathcal{B}}-4=0$ e $-1\le y_{\mathcal{B}}\le 2$) ed inoltre, nel caso omogeneo ($\mu=0$), esso ne diventa il punto medio $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

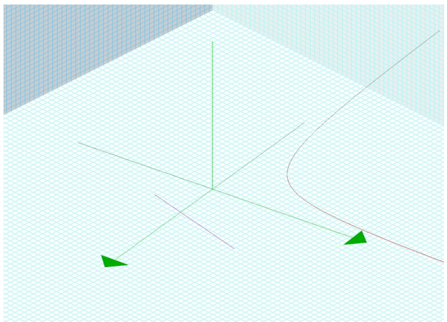
• **Complemento: la matrice d'inerzia di $\mathcal{B}$.** (Vedi Figura 2) Immaginiamo $\mathcal{B}$ nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ come un corpo rigido contenuto nel piano orizzontale $z=0$, e calcoliamone la *matrice d'inerzia* $\mathbf{I}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}\end{pmatrix}$ rispetto al sistema degli assi coordinati: si intende che $I_{xx}=\int_{-1}^2\delta(y)y^2\,d\sigma_y$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse x, $I_{yy}=\int_{-1}^2\delta(y)x(y)^2\,d\sigma_y$ quello rispetto all'asse y, $I_{zz}=\int_{-1}^2\delta(y)(x(y)^2+y^2)\,d\sigma_y=I_{xx}+I_{yy}$ quello rispetto all'asse z e, ad esempio, $I_{xy}=-\int_{-1}^2\delta(y)x(y)\,y\,d\sigma_y$ è il *momento misto* rispetto ad x e y. È evidente che il sistema cartesiano prescelto non è principale rispetto al corpo $\mathcal{B}$, dunque $\mathbf{I}_{\mathcal{B}}$ non sarà diagonale: così, essendo $I_{xz}=I_{yz}=0$ (perché $\mathcal{B}$ giace sul piano $z=0$), ci aspettiamo che $I_{xy}\neq 0$. Un paziente calcolo con $\delta(y)=\delta_0+\mu y^2$ dà in effetti $I_{xx}=\sqrt{10}(\delta_0+\frac{11}{5}\mu)$, $I_{yy}=\frac{\sqrt{10}}{3}(7\delta_0+\frac{47}{5}\mu)$, $I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{\sqrt{10}}{3}(10\delta_0+16\mu)$ e $I_{xy}=-\sqrt{10}(\delta_0+\frac{12}{5}\mu)$. Tra le varie cose per cui è importante (ad esempio lo studio della dinamica del corpo rigido), la matrice d'inerzia permette anche il calcolo immediato dei momenti d'inerzia rispetto ad una qualunque retta passante per l'origine (dunque, in combinazione col Teorema di Huygens-Steiner, rispetto ad una qualunque retta di $\mathbb{R}^3$): se $\underline{v}$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, il momento d'inerzia di $\mathcal{B}$ rispetto alla retta parallela a $\underline{v}$ e passante per l'origine è dato da $I_{\underline{v}}=\frac{1}{||\underline{v}||^2}(\underline{v}^t\,\mathbf{I}_{\mathcal{B}}\,\underline{v})$ (ove $\underline{v}^t$ è il vettore trasposto). Ad esempio, se $\underline{v}=(1,3,0)$ (un vettore orizzontale parallelo a $\mathcal{B}$) si ottiene $I_{\underline{v}}=\frac{1}{10}\left(\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10}(\delta_0+\frac{11}{5}\mu) & -\sqrt{10}(\delta_0+\frac{12}{5}\mu) & 0\\ -\sqrt{10}(\delta_0+\frac{12}{5}\mu) & \frac{\sqrt{10}}{3}(7\delta_0+\frac{47}{5}\mu) & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{3}(10\delta_0+16\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{8}{5}\sqrt{10}(\delta_0+\mu)$, che è la massa $m_{\mathcal{B}}$ moltiplicata per il quadrato della distanza di $\mathcal{B}$ dalla retta: risultato ovvio, visto che tutti i punti di $\mathcal{B}$ hanno la stessa distanza dalla retta.

4. (Vedi Figura 3) Il dominio di $f(x,y)=\frac{2x+y+1}{x^2+y^2-1}$ è dato dalla condizione $x^2+y^2-1\neq 0$, che esclude i punti della circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$. Vale $f(x,y)=0$ sui punti della retta $2x+y+1=0$, cioè $y=-2x-1$; il numeratore è >0 sopra la retta, il denominatore è >0 fuori della circonferenza, pertanto vale $f(x,y)>0$ fuori dalla circonferenza e sopra la retta oppure dentro la circonferenza e sotto la retta (si noti che retta e circonferenza si intersecano nei punti $(0,-1)$ e $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$). I limiti notevoli di $f(x,y)$ sono nei punti della circonferenza e in ∞_2. Se (x_0,y_0) è un punto della circonferenza diverso da $(0,-1)$ e $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$, allora per la permanenza del segno il numeratore $2x+y+1$ è $\neq 0$ in tutto un intorno di (x_0,y_0), pertanto $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\pm\infty$ (a seconda del lato da cui vi si tende). Nei due punti $(0,-1)$ e $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ invece il limite non esiste: infatti, tendendo ad essi lungo la retta $2x+y+1=0$ (su cui f si annulla) il limite sarebbe 0, ma al loro intorno vi sono punti in cui $|f(x,y)|$ è arbitrariamente grande (ad esempio, tendendo a $(0,-1)$ lungo la retta $y=-1$ si ottiene $f(x,-1)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$, dunque il limite è $\pm\infty$). Infine, passando in coordinate polari si ha $|f(x,y)|=|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|=\left|\frac{\rho(2\cos\theta+\sin\theta)+1}{\rho^2-1}\right|<\left|\frac{3\rho+1}{\rho^2-1}\right|<\left|\frac{3\rho+3}{\rho^2-1}\right|=\frac{3}{|\rho-1|}$, e quest'ultima tende a 0 quando $\rho\to+\infty$: pertanto $\lim_{(x,y)\to\infty_2}f(x,y)=0$.
(b) Il sottoinsieme $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-3)^2+(y+1)^2=1,\,x+y\ge 2\}$ è la semicirconferenza chiusa di raggio 1 centrata in $(3,-1)$ che sta sopra la retta $y=-x+2$. Si tratta di un insieme compatto (è chiuso perché definito da uguaglianze/disuguaglianze di funzioni continue, ed è limitato perché contenuto nella palla di centro $(0,0)$ e raggio 6) tutto dentro il dominio di f, sul quale f è continua: pertanto basta applicare il Teorema di Weierstrass. Invece il semipiano $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\ge 2\}$, anch'esso tutto contenuto nel dominio di f, non è compatto (è chiuso ma illimitato), pertanto non si può invocare direttamente Weierstrass come per K; tuttavia in questo caso, essendo $\lim_{(x,y)\to\infty_2}f(x,y)=0$, si riesce a mostrare comunque che f ammette estremi assoluti anche su S, in questo modo. Notiamo che $A(0,2)$ e $B(-2,2)$ sono punti di S tali che $f(A)=1>0$ e $f(B)=-\frac{1}{7}<0$; inoltre, per definizione di limite, esiste $N>0$ tale che $|f(x,y)|<\frac{1}{8}$ se $||(x,y)||>N$. Ora, il compatto $S_N=\{(x,y)\in S:||(x,y)||\le N\}$ (intersezione tra S e la palla chiusa di centro $(0,0)$ e raggio N) è non vuoto perché contiene A e B, dunque su esso f assume estremi assoluti per Weierstrass (il minimo sarà $\le-\frac{1}{7}$, e il massimo ≥ 1): ma poiché fuori da S_N la funzione è compresa tra $-\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{8}$, tali estremi sono estremi assoluti anche su tutto S. (Per il momento, sappiamo solo dimostrare che gli estremi assoluti di $f(x,y)$ esistono finiti restringendo il dominio a K o a S; nel proseguo del corso sapremo calcolare anche quanto valgono tali estremi, e

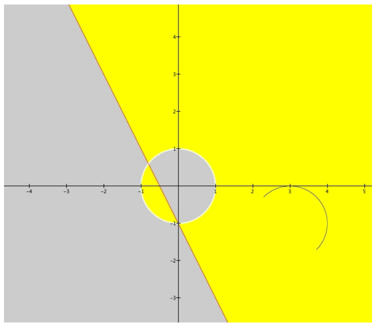
in quali punti di K e S vengono raggiunti.)



1. Le curve $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dell'esercizio 3.



2. Le curve $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dell'esercizio 3 viste in $\mathbb{R}^3$.



3. Dominio, zeri, segno di $f(x, y)$ e insieme K dell'esercizio 4.

Prova scritta - Seconda prova parziale (22/06/2007)

1. [S] Dire per quali α convergono gli integrali

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}\,\mathrm{arctg}(x^\alpha)}{(x+1)^{\alpha-2}}\,dx\ , \qquad\qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{|\log x|^{\alpha-1}}{x^{\frac{5}{2}-\alpha}}\,dx\ ,$$

calcolandoli poi per $\alpha = 2$ (per uno dei due sarà utile sapere che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$).

2. [S] Trovare tutte le soluzioni reali $y(x)$ delle equazioni differenziali (i) $(x+1)^2\,y' = (x-1)y^2$, (ii) $y'' + 3y = 3x^2 + 2 - 4e^x$ che hanno un minimo locale per $x = 0$.

3. [S, P] Sia $g(x, y, z) = (\,g_1(x, y, z)\ ,\ g_2(x, y, z)\,) = (\,\log(z + 1 - xy) - x + 2yz\ ,\ xyz + 1\,)$.

(a) Trovare dominio, segno, limiti di $h(x, y) := g_1(x, y, 0)$, disegnando i risultati sul piano.

(b) Dire quali curve di livello di h sono regolari; detta poi X' quella passante per $A'(1, 0)$, calcolare (possibilmente in due modi) la retta affine tangente a X' in A'.

(c) Calcolare gli estremi (locali, globali) di h nel suo dominio, e sul rombo pieno $|x|+|y| \le 1$.

(d) Dal sistema $g(x, y, z) = (1, y - x)$ si vorrebbero esplicitare $(x(y), z(y))$ all'intorno della soluzione $(-1, 0, 0)$. Mostrare che ciò è possibile, e calcolarne gli sviluppi al primo ordine.

(e) Mostrare che la superficie di livello X di g_1 passante per $A(1, 0, 0)$ è regolare in A, e calcolare (possibilmente in due modi) il piano affine tangente a X in A. Ricordando (b), notare che...

(f) Data $\mathrm{r} = \{(x, y, z) : y = 1,\ z = 1,\ x < 2\} \subset \mathbb{R}^3$, calcolare $\mathrm{s} = g(\mathrm{r}) \subset \mathbb{R}^2$ e mostrare che s è diffeomorfa a r.

4. [P] Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cono (pieno, chiuso) di vertice $V(0, 1, 3)$ e base il disco orizzontale di raggio 1 centrato in $(0, 1, 0)$, e sia S la superficie laterale di C (senza V e senza i punti della base).

(a) S è varietà? Di che classe e dimensione? Dopo averla parametrizzata, trovare lo spazio affine tangente a S nel suo punto $A(0, \frac{4}{3}, 2)$. Esprimere poi S in forma cartesiana tramite un'equazione polinomiale $p(x, y, z) = 0$, e ricalcolare il medesimo spazio tangente affine.

(b) Sia ℓ la spirale conica che, partendo da V, si arrotoli uniformemente su S in senso antiorario raggiungendo il punto $B(\frac{1}{3}, 1, 2)$ dopo due giri completi attorno all'asse. Parametrizzare ℓ, e calcolare la derivata totale di $f(x, y, z) = z^2 - x$ lungo ℓ.

(c) Sia $X = \{(x, y, z) \in C : 3y + z - 3 = 0\}$. Descrivere X, dimostrare che è compatto, e calcolare i suoi punti a distanza minima e massima dall'origine.

Soluzioni.

1. (i) L'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}\,\mathrm{arctg}(x^\alpha)}{(x+1)^{\alpha-2}}$ va controllata in 0^+ e in $+\infty$, e la presenza di $\mathrm{arctg}(x^\alpha)$ suggerisce di distinguere lo studio a seconda del segno di α. Se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \frac{\mathrm{arctg}\,1}{(x+1)^{-2}} = \frac{\pi}{4}(x+1)^2$, che non è integrabile a $+\infty$. Se $\alpha > 0$, si ha $f_\alpha(x) \sim_0 x^{-\alpha}\,x^\alpha = 1$ (ok) e $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{x^{\alpha-2}} = x^{2-2\alpha}$, integrabile per $2-2\alpha < -1$, ovvero $\alpha > \frac{3}{2}$. Infine, se $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_0 x^{-\alpha}$, integrabile per $-\alpha > -1$, cioè $\alpha < 1$ (ok), e $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} \frac{x^{-\alpha}x^\alpha}{x^{\alpha-2}} = x^{2-\alpha}$, integrabile per $2-\alpha < -1$, ovvero $\alpha > 3$ (no). Ricapitolando, l'integrale converge per $\alpha > \frac{3}{2}$. Quando $\alpha = 2$, integrando per parti si ha $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(x^2)}{x^2}\,dx = (-\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}(x^2)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\frac{1}{x})\frac{2x}{x^4+1}\,dx = (0)-(0)+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

(ii) L'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{|\log x|^{\alpha-1}}{x^{\frac{5}{2}-\alpha}}$ va controllata in 0^+ e in 1^-. Essendo $f_\alpha(x) \sim_{0^+} x^{\alpha-\frac{5}{2}}|\log x|^{\alpha-1}$, e ricordando che $x^\gamma|\log x|^\delta$ è integrabile in 0^+ per ogni $\gamma > -1$ e per $\gamma = -1$ e $\delta < -1$, si ha la condizione $\alpha - \frac{5}{2} > -1$, cioè $\alpha > \frac{3}{2}$, mentre se $\alpha = \frac{3}{2}$ si ha $\alpha - 1 = \frac{1}{2} \not< -1$. Si ha poi $f_\alpha(x) \sim_{1^-} |\log x|^{\alpha-1} \sim_{1^-} (1-x)^{\alpha-1}$, da cui la condizione $\alpha-1 > -1$, cioè $\alpha > 0$. Ricapitolando, l'integrale converge per $\alpha > \frac{3}{2}$. Quando $\alpha = 2$, integrando per parti si ha $\int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{x}}\,dx = -\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = (-2\sqrt{x}\log x]_0^1 + \int_0^1 2\sqrt{x}\frac{1}{x}\,dx = -(0)+(0)+2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = (4\sqrt{x}]_0^1 = 4$.

2. (i) L'equazione $(x+1)^2\,y' = (x-1)y^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Considerata la soluzione costante $y \equiv 0$, separando le variabili quando $x \neq -1$ (anzi, visto il quesito, possiamo già pensare $x > -1$) si ottiene $\frac{y'}{y^2} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$; posto $t = x+1 > 0$, si ha allora $-\frac{1}{y} = \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2}\,dt = \log t + \frac{2}{t} + k = \log(x+1) + \frac{2}{x+1} + k = \frac{(x+1)\log(x+1)+k(x+1)+2}{x+1}$, da cui $y = -\frac{x+1}{(x+1)\log(x+1)+k(x+1)+2}$ con $k \in \mathbb{R}$. Essendo $y(0) = -\frac{1}{k+2}$, dall'equazione si ricava $(0+1)^2y'(0) = (0-1)y(0)^2$, ovvero $y'(0) = -\frac{1}{(k+2)^2}$, che non si annulla mai. Pertanto l'unica soluzione con un minimo locale (ovviamente non stretto) in $x = 0$ è quella nulla $y \equiv 0$.

(ii) L'equazione differenziale $y'' + 3y = 3x^2 + 2 - 4e^x$ è lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 3 = 0$ ha radici $\pm\sqrt{3}\,i$, dunque le soluzioni reali dell'omogenea associata sono $S_0 = \{A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x)) : A, B \in \mathbb{R}\}$. Una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ per $b_1(x) = 3x^2 + 2$ è del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare: imponendo che $\tilde{y}_1'' + 3\tilde{y}_1 = 3x^2 + 2$ si ricava $3ax^2 + 3bx + (3c + 2a) = 3x^2 + 2$, da cui $a = 1$ e $b = c = 0$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = x^2$; una soluzione particolare per $b_2(x) = -4e^x$ ha la forma $\tilde{y}_2(x) = d\,e^x$ con $d \in \mathbb{R}$ da determinare: imponendo che $\tilde{y}_2'' + 3\tilde{y}_2 = -4e^x$ si ricava $4d\,e^x = -4e^x$, da cui $d = -1$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = -e^x$. Pertanto l'integrale generale diventa $S = \{y(x) = A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x)) + x^2 - e^x : A, B \in \mathbb{R}\}$. Una condizione necessaria per avere un minimo in $x = 0$ è che $y'(0) = 0$ e $y''(0) \geq 0$: essendo $y' = \sqrt{3}(B\cos(\sqrt{3}\,x) - A\sin(\sqrt{3}\,x)) + 2x - e^x$ e $y'' = -3(A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x)) + 2 - e^x$, ciò equivale a $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $A \leq \frac{1}{3}$. Se inoltre $y''(0) > 0$ (cioè se $A < \frac{1}{3}$), tale condizione è anche sufficiente; il caso particolare $(A, B) = (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ va trattato a parte, ma in tal caso vale $y'''(0) \neq 0$, dunque si ha solo un flesso orizzontale. Ricapitolando, le soluzioni con un minimo locale in $x = 0$ sono $A\cos(\sqrt{3}\,x) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\,x) + x^2 - e^x$ con $A < \frac{1}{3}$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $h(x, y) := g_1(x, y, 0) = \log(1 - xy) - x$ è dato da $xy < 1$, ovvero la parte di piano compresa tra i rami dell'iperbole equilatera $xy = 1$. Vale $h(x, y) = 0$ per $\log(1 - xy) = x$, che nel dominio equivale a $1 - xy = e^x$, ovvero $xy = 1 - e^x$: ciò è vero per $x = 0$ (asse y), mentre per $x \neq 0$ si trova il grafico $y = \frac{1-e^x}{x}$, di facile rappresentazione. Quanto al segno, si ha $h(x, y) > 0$ per $xy < 1 - e^x$, che per $x \gtrless 0$ equivale a $y \lessgtr \frac{1-e^x}{x}$. I limiti notevoli di h (che nel suo dominio è ovviamente di classe $\mathcal{C}^\infty$) sono nei punti dell'iperbole $xy = 1$ e a ∞_2: tendendo nel dominio ad un punto $(x_0, \frac{1}{x_0})$ dell'iperbole, la funzione h tende evidentemente a $-\infty$; quanto a ∞_2, poiché la funzione è nulla sull'asse y e diverge a $-\infty$ avvicinandosi all'iperbole $xy = 1$, il limite non esiste.

(b) (Figura 1) Si ha $\nabla h = (-\frac{y}{1-xy} - 1, -\frac{x}{1-xy})$, pertanto dal sistema $\nabla h = (0, 0)$ si ottiene il solo punto singolare $(0, -1)$, che appartiene alla curva di livello $h(x, y) = 0$. Tutte le altre curve $h(x, y) = \alpha$ con $\alpha \neq 0$ sono regolari, ed in particolare lo è X' che passa che $A'(1, 0)$, ovvero $h(x, y) = -1$: la retta affine tangente a X' in A' ha equazione cartesiana $\nabla h(1, 0) \cdot (x - 1, y - 0) = 0$, ovvero $(-1, -1) \cdot (x - 1, y) = 0$, che dà $y = 1 - x$. Alternativamente, visto che da $h(x, y) = -1$ si può esplicitare ad esempio $x = x(y)$ con $x(0) = 1$ e $x'(0) = -\frac{-1}{-1} = -1$, si trova la stessa retta dalla forma grafico $x - x(0) = x'(0)(y - 0)$.

(c) (Figura 1) Il dominio di h è aperto, dunque possiamo usare i metodi consueti per trovare eventuali estremi locali (non ve ne saranno di globali, perché h diverge a $-\infty$ avvicinandosi all'iperbole $xy = 1$ e a $+\infty$ ad esempio lungo il semiasse delle ascisse con $x < 0$): si è visto che l'unico punto stazionario è $(0, -1)$, ma in esso l'Hessiano $\mathsf{H}_h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{(1-xy)^2} & -\frac{1}{(1-xy)^2} \\ -\frac{1}{(1-xy)^2} & \frac{x^2}{(1-xy)^2} \end{pmatrix}$ diventa $\mathsf{H}_h(0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che è indefinito (si tratta dunque di una sella). Sul rombo pieno $|x| + |y| \le 1$, che è compatto, invece h assumerà di certo estremi globali in base a Weierstrass. Per la ricerca, conviene decomporre il rombo nell'aperto suoi punti interni (aperto, 2-varietà), nei suoi quattro lati senza estremi (quattro 1-varietà) e nei suoi quattro vertici (0-varietà). All'interno, come visto poco fa, non succede nulla. I quattro lati senza estremi si parametrizzano facilmente: ad esempio, quello in alto a destra è dato da $\gamma(x, 1-x)$ con $0 < x < 1$, dunque si tratta di studiare $H :]0, 1[\to \mathbb{R}$ data da $H(x) := h(x, 1-x) = \log(x^2 - x + 1) - x$ su $]0, 1[$, che a conti fatti risulta sempre decrescente, e cose simili si trovano sugli altri tre lati. Dunque nulla da fare nemmeno sui lati. Restano solo i vertici: essendo $h(0, \mp 1) = 0$ e $h(\mp 1, 0) = \pm 1$, il massimo assoluto di h sul rombo è 1 (in $(-1, 0)$) e il minimo assoluto è -1 (in $A'(1, 0)$).

(d) Lo jacobiano di $(g_1(x, y, z)-1, g_2(x, y, z)-y+x) = (0, 0)$ è $\begin{pmatrix} -\frac{y}{z+1-xy} - 1 & -\frac{x}{z+1-xy} + 2z & \frac{1}{z+1-xy} + 2y \\ yz + 1 & xz - 1 & xy \end{pmatrix}$, che calcolato nella soluzione $(-1, 0, 0)$ diventa $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: poiché il minore relativo a (x, z) è nonsingolare, si può esplicitare $(x(y), z(y))$ grazie al teorema del Dini, con $\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui gli sviluppi richiesti $x(y) = -1 + y + o_0(y)$ e $z(y) = o_0(y)$.

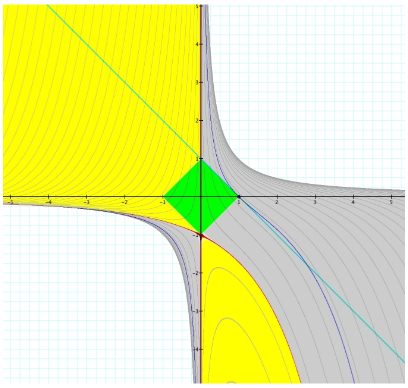
(e) Da $\nabla g_1 = (-\frac{y}{z+1-xy} - 1, -\frac{x}{z+1-xy} + 2z, \frac{1}{z+1-xy} + 2y)$. si ricava $\nabla g_1(1, 0, 0) = (-1, -1, 1) \ne (0, 0, 0)$, dunque la superficie di livello X di g_1 passante per $A(1, 0, 0)$ (che è data da $g_1(x, y, z) = g(A) = -1$, ovvero $\log(z + 1 - xy) - x + 2yz + 1 = 0$) è effettivamente regolare in A. Il piano tangente affine a X in A ha equazione cartesiana $\nabla g_1(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y - 0, z - 0) = 0$, ovvero $x + y - z - 1 = 0$; analogamente, esplicitando ad esempio $z(x, y)$ con $z(1, 0) = 0$ e $\nabla z(1, 0) = (\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0), \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)) = -\frac{1}{1}(-1, -1) = (1, 1)$ si si trova lo stesso piano dalla forma grafico $z - z(1, 0) = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)\,(x - 1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)\,(y - 0)$. Riguardo a (b), l'osservazione è ovvia: si noti che (b) è niente altro che il problema (e) nell'intersezione col piano (x, y), dunque $X' = X \cap \{z = 0\}$ e idem per la retta tangente affine a X' in A' (è l'intersezione tra il piano $z = 0$ e il piano affine tangente a X in A).

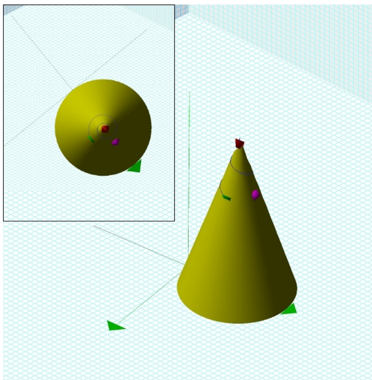
(f) L'insieme $\mathrm{r} = \{(x, y, z) : y = 1,\ z = 1, x < 2\}$ è la semiretta aperta di $\mathbb{R}^3$ uscente all'indietro dal punto $(2, 1, 1)$ e parallela all'asse x: calcoliamone l'immagine $\mathrm{s} = g(\mathrm{r})$ in $\mathbb{R}^2$ munito di coordinate (u, v). Da $(u, v) = g(x, 1, 1)$, ovvero il sistema formato da $u = \log(2 - x) - x + 2$ e $v = x + 1$ (con $x < 2$), eliminando il parametro $x = v - 1$ si ottiene la forma grafico $u = \phi(v) = \log(3 - v) + 3 - v$ (con $v < 3$), che mostra direttamente che s è una curva piana regolare. Il diffeomorfismo è chiaramente $g|_{\mathrm{r}} : \mathrm{r} \rightleftharpoons \mathrm{s}$, con inversa $\varphi = (g|_{\mathrm{r}})^{-1} : \mathrm{s} \rightleftharpoons \mathrm{r}$ data da $\varphi(\phi(v), v) = (v - 1, 1, 1)$ (basta ricordare che $x = v - 1$).

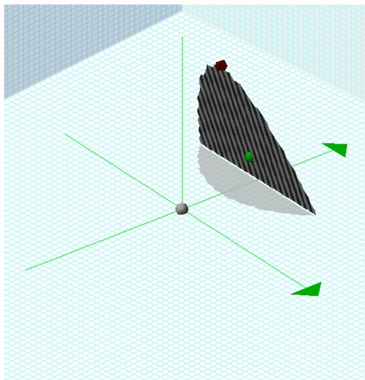
4. (a) (Figura 2) Il disco orizzontale senza bordo di raggio 1 centrato in $(0, 1, 0)$ è l'aperto $D = \{(x, y, 0) : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ (identificato ad un aperto del piano cartesiano), e S è parametrizzata globalmente dal "disco bucato" $D^\times := D \setminus \{(0, 1, 0)\}$ pure esso aperto: essendo $z = z(x, y) = 3(1 - \sqrt{x^2 + (y - 1)^2})$ (come si verifica senza troppa difficoltà), la parametrizzazione è quella del grafico di $z(x, y)$, ovvero $\gamma : D^\times \to S \subset \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(x, y) = (x, y, 3(1 - \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}))$. Poiché la funzione $z(x, y)$ è $\mathcal{C}^\infty$ al di fuori di $(0, 1)$, otteniamo che S è una superficie $\mathcal{C}^\infty$ di $\mathbb{R}^3$.**(31)** Si ha $d\gamma_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{3x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & -\frac{3(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \end{pmatrix}$, da cui, essendo $A(0, \frac{4}{3}, 2) = \gamma(0, \frac{4}{3})$, si ottiene $d\gamma_{(0,\frac{4}{3})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$: pertanto lo spazio tangente affine a S in A è dato da $\{(x, y, z) = (0, \frac{4}{3}, 2) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, -3) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, ed eliminando i parametri $\lambda = x$ e $\mu = y - \frac{4}{3}$ in $z = 2 - 3\mu$ si ottiene l'equazione cartesiana $3y + z - 6 = 0$ (come prevedibile, si tratta di un piano parallelo all'asse x). Alternativamente, si può usare per S la parametrizzazione (non globale, ma comprendente il punto A, ed è ciò che interessa) ricavata dalle coordinate cilindriche traslate di 1 nella direzione y (dunque, dette (r, ϑ) queste coordinate, si ha $(x, y) = (r\cos\vartheta, 1 + r\sin\vartheta)$): essendo $z = 3(1 - r)$, stavolta sarà $\tilde{\gamma} :]0, 1[\times]-\pi, \pi[\to S \subset \mathbb{R}^3$ con $\tilde{\gamma}(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, 1 + r\sin\vartheta, 3(1 - r))$, e si

(31) Non farsi ingannare dal vertice V: in questo caso V non sta in S. Se V fosse compreso in S, S sarebbe sempre sempre una superficie, ma solo di classe $\mathcal{C}^0$ in V (punto angoloso).

noti che $A = \tilde{\gamma}(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2})$.[32] Da $d\tilde{\gamma}_{(r,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene $d\tilde{\gamma}_{(\frac{1}{3},\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, e si trova lo stesso piano affine tangente di prima. Infine dall'espressione $z = 3(1-\sqrt{x^2+(y-1)^2})$, spostando i termini ed elevando al quadrato (ma ricordando che $0 < z < 3$) si ricava $9(x^2+(y-1)^2) = (3-z)^2$, ovvero la desiderata equazione polinomiale $p(x,y,z) = 9x^2+9y^2-z^2-18y+6z = 0$, con la quale si ritrova il piano affine tangente in A calcolando $\nabla p(0, \frac{4}{3}, 2) \cdot (x-0, y-\frac{4}{3}, z-2) = 0$.







1. Studio di $h(x,y)$ in (3.a-b-c): le zone gialle/grigie sono quelle in cui $h(x,y) \gtrless 0$, e le curve grigie sono le curve di livello $h(x,y) = k$ (in particolare, la curva di livello 0 è rossa, e quella di livello -1 —passante per $(1,0)$, con relativa tangente affine affine— è blu). Il rombo $|x|+|y| \leq 1$ è in verde. **2.** Cono C, punti A, B, V e curva ℓ (blu) in (4.a-b). **3.** L'insieme X di (4.c) (con in grigio la sua proiezione sul piano orizzontale), e punti a distanza minima (verde) e massima (rosso) dall'origine.

(b) (Figura 2) Converrà parametrizzare ℓ usando l'angolo ϑ della parametrizzazione $\tilde{\gamma}(r,\vartheta)$ introdotta in precedenza, che descrive proprio la rotazione antioraria: poiché si fanno due giri esatti partendo da V prima di raggiungere il punto $B(\frac{1}{3}, 1, 2) = \tilde{\gamma}(\frac{1}{3}, 0)$, si potrà parametrizzare ℓ tramite una funzione del tipo $\psi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\psi(\vartheta) = (r(\vartheta)\cos\theta, 1 + r(\vartheta)\sin\theta, 3(1 - r(\vartheta))$, e tutto sta a capire chi sia la funzione $r(\vartheta)$ che descrive l'allontanamento del punto della spirale dall'asse del cilindro. Ora, l'"uniformità" citata nel testo fa riferimento al fatto che r cresce *linearmente* con ϑ (come accade per la spirale d'Archimede), ovvero che sarà $r(\vartheta) = a\vartheta + b$ per certi a, b da determinare. Sappiamo però che $\psi(0) = V(0,1,3)$ (dunque $r(0) = b = 0$) e $\psi(4\pi) = B(\frac{1}{3}, 1, 2)$ (dunque $r(4\pi) = 4a\pi + b = \frac{1}{3}$), da cui $a = \frac{1}{12\pi}$ e $b = 0$, ovvero $r(\vartheta) = \frac{1}{12\pi}\vartheta$. Troviamo dunque $\psi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\psi(\vartheta) = (\frac{1}{12\pi}\vartheta\cos\vartheta, 1 + \frac{1}{12\pi}\vartheta\sin\vartheta, 3 - \frac{1}{4\pi}\vartheta)$, da cui $\psi'(\vartheta) = \frac{1}{12\pi}(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta, -3)$: se ora vogliamo calcolare la derivata totale di $f(x,y,z) = z^2 - x$ lungo ℓ, questa sarà $\frac{\partial f}{\partial\vartheta}(\vartheta) = \nabla f(\psi(\theta)) \cdot \psi'(\vartheta) = (-1, 0, 2(3 - \frac{1}{4\pi}\vartheta)) \cdot \frac{1}{12\pi}(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta, -3) = -\frac{1}{12\pi}(\cos\vartheta - \vartheta(\frac{3}{2\pi} + \sin\vartheta) + 18)$.

(c) (Figura 3) Notiamo che il piano $3y + z - 3 = 0$ è parallelo all'asse x, ha la stessa pendenza della generatrice del cono passante per A e passa per il centro della base del cono: dunque X è il pezzo di questo piano che rappresenta il taglio causato sul cono, ed ha il bordo formato da un tratto inclinato di parabola e da un segmento orizzontale sul piano (x,y) (sia il tratto di parabola che il segmento hanno come estremi i punti $P(1,1,0)$ e $Q(-1,1,0)$). X è compatto in quanto chiuso (intersezione di due chiusi) e limitato (sta in C), dunque avrà senz'altro qualche punto a distanza massima e minima dall'origine: in effetti, tale ricerca equivale a cercare massimo e minimo

[32] La parametrizzazione γ copre tutto S, mentre $\tilde{\gamma}$ lascia fuori i punti di S che stanno nel semipiano $\{(x,1,z) : x < 0\}$ (che corrisponderebbero a $\vartheta = \mp\pi$, ma questi valori non sono compresi). Pertanto, detto $D_0^\times = D^\times \setminus \{(x,1) : x < 0\}$, si può passare da γ a $\tilde{\gamma}$ usando il diffeomorfismo globale $\alpha :]0,1[\times]-\pi,\pi[\to D_0^\times$ dato da $(x,y) = \alpha(r,\vartheta) = (r\cos\vartheta, 1 + r\sin\vartheta)$, tramite il quale vale $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$. È chiaro che, in questo contesto, la nozione di "diffeomorfismo" generalizza quella di "cambio di parametro" delle curve parametriche: in effetti, un "cambio di parametro" non è altro che un diffeomorfismo in una variabile.

assoluti della funzione "distanza dall'origine" (al quadrato, per comodità di calcolo) $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su X, e questi esistono per Weierstrass. Per il calcolo, converrà decomporre X nei suoi punti non di bordo X_1 (una 2-varietà), nel tratto di parabola X_2 senza estremi (una 1-varietà), nel segmento orizzontale X_3 senza estremi (un'altra 1-varietà) e nei due punti $X_4 = \{P(1, 1, 0), Q(-1, 1, 0)\}$ (una 0-varietà). Per iniziare, notiamo che la proiezione di X_2 sul piano orizzontale si ottiene sostituendo l'equazione del piano $z = 3(1-y)$ nell'equazione della superficie conica $p(x, y, z) = 0$, ovvero $p(x, y, 3(1-y)) = 9(x^2 - 2y + 1) = 0$, che dà l'atteso tratto di parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ con $|x| < 1$: pertanto la proiezione di X_1 sul piano orizzontale non è altro che la zona aperta di piano U racchiusa all'interno di questo tratto di parabola e del segmento PQ. In questo modo siamo riusciti a parametrizzare sia X_1 (con $\gamma_1 : U \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma_1(x, y) = (x, y, 3(1-y)))$ che X_2 (con $\gamma_2 :]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma_2(x) = (x, \frac{1}{2}(x^2+1), 3(1-(\frac{1}{2}(x^2+1)))) = (x, \frac{1}{2}(x^2+1), \frac{3}{2}(1-x^2))$, mentre X_3 si lascia parametrizzare ovviamente da $\gamma_3 :]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma_3(x) = (x, 1, 0)$. Calcolando la funzione $d(x, y, z)$ in queste parametrizzazioni, e facendo i soliti conti, su X_1 si trova un solo punto stazionario $(0, \frac{9}{10}, \frac{3}{10})$ (in cui d vale $\frac{9}{10}$); su X_2 i tre punti $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (estremità superiore del tratto di parabola, in cui d vale $\frac{5}{2}$) e $(\mp\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ (in cui d vale $\frac{8}{5}$); su X_3 il punto $(0, 1, 0)$ (in cui d vale 1). Tenendo conto che su X_4 vale $d(P) = d(Q) = 2$, il punto a distanza massima di X dall'origine è $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ sul bordo parabolico, mentre quello a distanza minima è $(0, \frac{9}{10}, \frac{3}{10})$, all'interno. Tutto questo va d'accordo con quanto suggerisce il buonsenso guardando la geometria della situazione.

Prova scritta (04/07/2007)

1. Dire per quali α convergono i seguenti integrali, calcolandoli poi per $\alpha = -1$:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{x^{\frac{\alpha}{2}} - \log x}{(1-x^2)^{\alpha+1}}\, dx\ , \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} (x^{\frac{\alpha}{2}+1} - 1)(x^2-1)^{\alpha}\, e^{(\alpha+1)x}\, dx.$$

2. (a) Determinare la soluzione $y_{k,\alpha}(x)$ su $\mathbb{R}_{>0}$ (al variare di $k, \alpha \in \mathbb{R}$) del problema di Cauchy dato da $x^{1-k}(y'-1) + ky = 0$ con $y(1) = \alpha$, e se ne calcolino i limiti notevoli.

(b) Trovare un'equazione differenziale lineare del secondo ordine per la quale $\{\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = e^x\}$ sia sistema fondamentale di soluzioni. Una volta trovata, risolvere il problema di Cauchy formato dalla stessa equazione posta in forma normale con termine non omogeneo $b(x) = (x^2-1)e^x$, e dal dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (-1, 0)$.

3. Si consideri la curva piana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ in forma polare $\rho = \sqrt{2 \sin 2\theta}$, con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

(a) Dopo aver studiato l'andamento della funzione $h(x) = \sqrt{2\sin 2x}$, disegnare Γ. Esibendo un'opportuna parametrizzazione γ, calcolare la retta tangente affine a Γ nel punto con $\theta = \frac{\pi}{6}$. Infine, esprimere Γ in forma cartesiana tramite un'equazione polinomiale $p(x,y) = 0$,[(33)] e ricalcolare il medesimo spazio tangente affine.

(b) Scrivere correttamente gli integrali che descrivono lunghezza e baricentro geometrico di Γ.

(c) Dimostrare che Γ è compatta, quindi calcolare in due modi diversi (prima con γ, poi con p) gli estremi di $f(x,y) = x+y$ su Γ. Dare infine un'interpretazione geometrica dei risultati.

4. Sia $g(x,y,z) = (x^2-3)z + y^3 + 2e^{x+z} - xy$.

(a) Dire quali superfici di livello $\mathsf{X}_\alpha = \{g(x,y,z) = \alpha\}$ hanno punti singolari sul piano (x,y); notato che $A(0,-1,0) \in \mathsf{X}_1$ non è tra questi punti, calcolare $\mathsf{T}_A\mathsf{X}_1$ in due modi.

(b) Mostrare che l'equazione $g(x,y,z) = 4$ definisce implicitamente un'unica funzione $y(x,z)$ con $y(1,-1) = 0$, ed illustrare il carattere del punto $(x_0, z_0) = (1,-1)$ per tale funzione.

(c) Sia ℓ la curva ottenuta intersecando X_0 col piano $x + z = 0$. Mostrare che ℓ è regolare, e calcolare le rette tangenti affini nei suoi punti con $y = 0$.

[(33)] Suggerimento: eliminare $\cos\theta$ e $\sin\theta$ dalle equazioni $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ e $\rho(\theta) = \sqrt{2\sin 2\theta}$.

Soluzioni.

1. (a) Sia $f_\alpha(x) = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}} - \log x}{(1-x^2)^{\alpha+1}}$. Se $\alpha \geq 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} -\log x$, che è integrabile, mentre se $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} x^{\frac{\alpha}{2}}$, integrabile per $\frac{\alpha}{2} > -1$, cioè $\alpha > -2$: pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -2$. D'altra parte, essendo $1 - x^2 \sim^*_{1^-} 1 - x$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{1^-} (1-x)^{-\alpha-1}$: pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in 1^- se e solo se $-\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha < 0$. Riassumendo, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $-2 < \alpha < 0$. Per $\alpha = -1$ esso diventa $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - \log x)\,dx = (2\sqrt{x} - x(\log x - 1)]_0^1 = (2 - (-1)) - (0 - 0) = 3$.

(b) Sia $f_\alpha(x) = (x^{\frac{\alpha}{2}+1} - 1)(x^2-1)^\alpha\, e^{(\alpha+1)x}$. Se $\alpha = -2$ vale $f_{-2}(x) \equiv 0$, banalmente integrabile; d'ora in poi poniamo $\alpha \neq -2$. Essendo $x^{\frac{\alpha}{2}+1} - 1 \sim^*_{1^+} x - 1$ e $x^2 - 1 \sim^*_{1^+} x - 1$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{1^+} (x-1)^{1+\alpha}$, da cui $f_\alpha(x)$ è integrabile in 1^- se e solo se $1 + \alpha > -1$, ovvero $\alpha > -2$. Passiamo adesso a $+\infty$. Se $\alpha > -1$ l'esponenziale fa certamente divergere $f_\alpha(x)$ a $+\infty$, e con essa l'integrale; viceversa, se $\alpha < -1$ l'esponenziale decresce rapidamente a 0^+, e $f_\alpha(x)$ sarà integrabile a $+\infty$ per confronto; infine, se $\alpha = -1$ si trova $f_{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \sim_{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}$, integrabile. Ne ricaviamo che $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha \leq -1$, e dunque l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $-2 \leq \alpha \leq -1$. Per $\alpha = -1$ si trova $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^4-1}\,2t\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{2t}{(t+1)(t^2+1)}\,dt = \int_1^{+\infty} (\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1})\,dt = (\log \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \operatorname{arctg} t]_1^{+\infty} = (0 + \frac{\pi}{2}) - (\log \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$.

2. (a) Se $k = 0$ l'equazione diventa $x(y' - 1) = 0$, che col dato $y(1) = \alpha$ ha evidentemente soluzione $y_{0,\alpha}(x) = x + \alpha - 1$, con $\lim_{x\to 0^+} y_{0,\alpha}(x) = \alpha - 1$ e $\lim_{x\to+\infty} y_{0,\alpha}(x) = +\infty$. Posto ora $k \neq 0$, dividendo per x^{1-k} si ottiene $y' + kx^{k-1}y = 1$, lineare del primo ordine, la cui soluzione cercata, in forma integrale, è $y_{k,\alpha}(x) = e^{-x^k}(\alpha e + \int_1^x e^{t^k}\,dt)$ (per alcuni k, precisamente per $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, si può ricavare anche una forma finita per $y_{k,\alpha}(x)$, ma non è importante in questo caso: per il nostro scopo, ovvero il calcolo dei limiti notevoli, va bene anche la forma integrale). Se $k > 0$ è chiaro che $\lim_{0^+} y_{k,\alpha}(x) = \alpha e - \int_0^1 e^{t^k}\,dt \in \mathbb{R}$, mentre $\lim_{+\infty} y_{k,\alpha}(x) = +\infty$ è in forma indeterminata $0 \cdot \infty$, ma con de l'Hôpital si ricava $\lim_{+\infty} y_{k,\alpha}(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^{x^k}}{kx^{k-1}e^{x^k}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{kx^{k-1}}$, che vale $+\infty$ per $0 < k < 1$, vale 1 per $k = 1$ e vale 0^+ per $k > 1$. Se invece $k < 0$ il limite $\lim_{0^+} y_{k,\alpha}(x)$ è in forma indeterminata $0 \cdot \infty$, e con de l'Hôpital si ricava ancora $\lim_{0^+} y_{k,\alpha}(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{kx^{k-1}} = 0^-$ per ogni $k < 0$; d'altra parte $\lim_{+\infty} y_{k,\alpha}(x)$ è determinato, e vale $+\infty$ per ogni $k < 0$.

(b) Se $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ è un'equazione differenziale lineare del 2o ordine con sistema fondamentale di soluzioni $\{\varphi_1(x) = x,\, \varphi_2(x) = e^x\}$, dovrà aversi $\varphi_j''(x) + a_1(x)\varphi_j'(x) + a_0(x)\varphi_j(x) \equiv 0$ per $j = 1, 2$, ovvero $a_1(x) + x\,a_0(x) = 0$ e $1 + a_1(x) + a_0(x) = 0$: si ricava perciò $a_1(x) = -x\,a_0(x)$ e $1 - (x-1)a_0(x) = 0$, da cui $a_0(x) = \frac{1}{x-1}$ e $a_1(x) = -\frac{x}{x-1}$. Dunque l'equazione cercata è $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$.[(34)] Consideriamo poi l'equazione non omogenea $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = (x^2-1)e^x$, della quale cerchiamo la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (-1, 0)$: non trattandosi di un caso a coefficienti costanti, bisogna applicare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (si noti che abbiamo a disposizione un sistema fondamentale dato da $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = e^x$). Si ha $\gamma_1(x) = -\int \frac{e^x}{(x-1)e^x}(x^2-1)e^x\,dx = -\int (x+1)e^x\,dx = x\,e^x$ e $\gamma_2(x) = +\int \frac{x}{(x-1)e^x}(x^2-1)e^x\,dx = \int x(x+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$, dunque una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è $\tilde{\varphi}(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x) = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^x$, dunque l'integrale generale (per $x < 1$, come interessa a noi) è $y(x) = Ax + e^x(B + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)$, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Essendo $y'(x) = A + e^x(B + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x)$, da $(y(0), y'(0)) = (-1, 0)$ si ricava $(B, A + B) = (-1, 0)$, ovvero $A = 1$ e $B = -1$, da cui $y(x) = x + e^x(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)$.

3. (a) Per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ la funzione $h(x) = \sqrt{2\sin 2x}$ è ovviamente ≥ 0, si annulla solo negli estremi $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$, cresce per $x < \frac{\pi}{4}$ e decresce dopo, dunque ha massimo assoluto $\sqrt{2}$ per $x = \frac{\pi}{4}$; è poi simmetrica rispetto a $x = \frac{\pi}{4}$, perché vale $h(x) = h(\frac{\pi}{2} - x)$. Pertanto Γ appare come in Figura 1. La parametrizzazione naturale è, in questo caso, $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ data da $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta, \sqrt{2\sin 2\theta}\sin\theta)$; derivando e ricordando le formule di addizione si ottiene allora $\gamma'(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}(\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta, \sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta) =$

[(34)]Si noti che i coefficienti sono definiti per $x \neq 1$. Questo era prevedibile, perché il wronskiano di $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = e^x$ vale $(x-1)e^x$, e si annulla proprio per $x = 1$: pertanto $\{\varphi_1(x) = x,\, \varphi_2(x) = e^x\}$ può essere un sistema fondamentale di soluzioni per un'equazione differenziale lineare del 2o ordine solo su un intervallo che non contiene 1.

$\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$. Il punto con $\theta = \frac{\pi}{6}$ è $\gamma(\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3}}{2})$, in cui $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}(0,1)$ (vettore verticale), perciò la retta affine tangente a Γ in esso è $x = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$. Cerchiamo ora un'espressione cartesiana per Γ: sostituendo $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ e $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$ in $\rho = \sqrt{4\sin\theta\cos\theta}$ si ottiene $\rho = \frac{2\sqrt{xy}}{\rho}$, da cui $\rho^2 = 2\sqrt{xy}$, ovvero $x^2 + y^2 = 2\sqrt{xy}$ (con $x > 0$ e $y > 0$): elevando al quadrato si ottiene allora l'equazione polinomiale cercata $p(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 4xy + y^4 = 0$. Essendo $\nabla p(x,y) = 4(x^3 + xy^2 - y, x^2y - x + y^3)$ si ottiene $\nabla p(\frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3}}{2}) = 4(\sqrt[4]{3}, 0)$, pertanto l'equazione $\nabla p(\frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3}}{2}) \cdot (x - \frac{\sqrt[4]{27}}{2}, y - \frac{\sqrt[4]{3}}{2}) = 0$ ridà la retta tangente $x = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$.

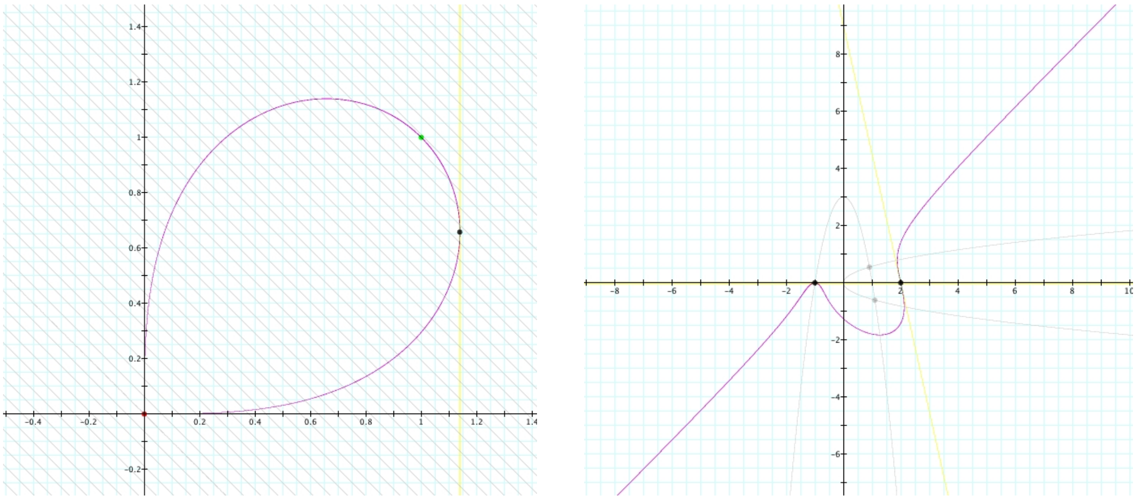
(b) Da $\gamma'(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ si ricava subito l'elemento d'arco $d\sigma = \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}\, d\theta$, pertanto l'integrale (generalizzato, ma convergente!) che esprime la lunghezza di Γ è $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$ (col cambio di variabile $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ tale integrale diventa $\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t^2)}}$); l'ascissa del baricentro geometrico è poi $x_\Gamma = \frac{1}{L}\int_\gamma x\, d\sigma = \frac{1}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}\, d\theta = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{2}{L}$, e lo stesso per l'ordinata y_Γ.

(c) Γ è compatta perché immagine dell'intervallo compatto $[0, \frac{\pi}{2}]$ tramite la funzione continua γ, dunque su di essa $f(x,y) = x + y$ assume estremi assoluti in base a Weierstrass. La parametrizzazione $\gamma(\theta)$ è $\mathcal{C}^1$ solo in $]0, \frac{\pi}{2}[$, dunque il punto $\gamma(0) = \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$ (in cui f vale 0) va tenuto a parte; in tutti gli altri punti possiamo considerare invece $F(\theta) := f(\gamma(\theta)) = \sqrt{2\sin 2\theta}(\cos\theta + \sin\theta)$ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Essendo $F'(\theta) = \sqrt{2}\big(\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}(\cos\theta + \sin\theta) + \sqrt{\sin 2\theta}(-\sin\theta + \cos\theta)\big) = \sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$, si ha $F'(\theta) = 0$ per $3\theta = \frac{3\pi}{4}$ (ovvero $\theta = \frac{\pi}{4}$) e $F'(\theta) > 0$ per $0 < 3\theta < \frac{3\pi}{4}$ (ovvero $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$): pertanto il massimo assoluto di f su Γ è ottenuto in $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (1,1)$ e vale 2, mentre il minimo assoluto è ottenuto in $(0,0)$ col valore 0. Usiamo ora $p(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 4xy + y^4 = 0$: sottraendo membro a membro le due equazioni $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, notiamo che $\nabla p(x,y) = 4(x^3 + xy^2 - y, x^2y - x + y^3) = (0,0)$ nei punti $(0,0)$ e $\mp(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, dei quali solo $(0,0)$ sta in Γ. Per gli altri punti, il metodo di Lagrange porge $\det\begin{pmatrix} 4(x^3 + xy^2 - y) & 4(x^2y - x + y^3) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $x^3 + xy^2 - y - (x^2y - x + y^3) = 0$, ovvero $(x - y)(x^2 + y^2 + 1) = 0$, ovvero $x = y$, che sostituito in $p(x,y) = 0$ (con $x, y > 0$) dà il solo punto stazionario $(1,1)$; essendo $\nabla p(1,1) = 4(1,1)$, da $p(x,y) = 0$ si può esplicitare ad esempio $y(x)$ con $y(1) = 1$, $y(1) = -\frac{1}{1} = -1$ e (dopo conti) $y''(1) = -6$: dunque, essendo $F(x) := x + y(x)$ con $F'(x) = 1 + y'(x)$ e $F''(x) = y''(x)$, si deduce nuovamente che $(1,1)$ è un punto massimo per f. L'interpretazione geometrica dei risultati è piuttosto naturale, visto che le curve di livello $f(x,y) = k$ sono le rette $x + y = k$, tanto più in alto quanto maggiore è k (vedi ancora la Figura 1).

4. (a) Da $g(x,y,z) = (x^2 - 3)z + y^3 + 2e^{x+z} - xy$ si ha $\nabla g(x,y,z) = (2xz + 2e^{x+z} - y\,,\, 3y^2 - x\,,\, x^2 - 3 + 2e^{x+z})$; imponendo che $\nabla g(x,y,z) = (0,0,0)$ sul piano $z = 0$ si ottengono le equazioni $2e^x - y = 0$, $3y^2 - x = 0$ e $x^2 - 3 + 2e^x = 0$. Dalla prima si ottiene $y = 2e^x$, dalla seconda $x = 3y^2$ e dalla terza $y = 3 - x^2$: ma un facile confronto grafico mostra che questi tre luoghi non hanno alcun punto in comune. Pertanto nessuna delle superfici di livello $\mathsf{X}_\alpha = \{g(x,y,z) = \alpha\}$ ha punti singolari sul piano (x,y). Considerando così $A(0,-1,0)$, con $g(A) = 1$ (dunque $A \in \mathsf{X}_1$) e $\nabla g(A) = (3,3,-1)$, si ha $\mathsf{T}_A\mathsf{X}_1 = \ker dg_A = \{\nabla g(A)\cdot(x,y,z) = 0\} = \{3x + 3y - z = 0\}$. Alternativamente, esplicitando da $g(x,y,z) = 1$ la coordinata $z(x,y)$ con $z(0,-1) = 0$ e $\nabla z(0,-1) = -\frac{1}{-1}(3,3) = (3,3)$, si ha $\mathsf{T}_A\mathsf{X}_1 = \{z = \nabla z(0,-1)\cdot(x,y)\} = \{z = 3x + 3y\}$, che è quanto già trovato.

(b) Posto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$, vale $g(x_0,y_0,z_0) = 4$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = (0,-1,0)$, ed essendo $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = -1 \neq 0$ la conclusione segue dal Teorema del Dini. Essendo $\nabla y(x_0,z_0) = -\frac{1}{-1}(0,0) = (0,0)$, il punto $(x_0,z_0) = (1,-1)$ è stazionario per $y(x,z)$: si tratta dunque di capirne la natura tramite l'Hessiano $\mathsf{H}_y(x_0,z_0)$. Derivando l'identità $g(x, y(x,z), z) \equiv 4$ rispetto a x e a z si ottiene rispettivamente $2xz + 3y^2\frac{\partial y}{\partial x} + 2e^{x+z} - y - x\frac{\partial y}{\partial x} \equiv 0$ e $x^2 - 3 + 3y^2\frac{\partial y}{\partial z} + 2e^{x+z} - x\frac{\partial y}{\partial z} \equiv 0$ (da cui, calcolando in $(x_0,z_0) = (1,-1)$ con $y(x_0,z_0) = 0$, si riottiene ovviamente $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0,z_0) = \frac{\partial y}{\partial z}(x_0,z_0) = 0$); derivando di nuovo rispetto a x e a z si ottiene $2z + 6y(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + 3y^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2e^{x+z} - 2\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \equiv 0$, $2x + 6y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial z} + 3y^2\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z} + 2e^{x+z} - \frac{\partial y}{\partial z} - x\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z} \equiv 0$ e $6y(\frac{\partial y}{\partial z})^2 + 3y^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2e^{x+z} - x\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \equiv 0$ (da cui, calcolando in $(x_0,z_0) = (1,-1)$, si ottiene $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}(x_0,y_0) = 4$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(x_0,y_0) = 2$). Pertanto l'Hessiano $\mathsf{H}_y(x_0,z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ è indefinito, e ciò mostra che (x_0,y_0) è una sella per $y(x,z)$.

(c) Sostituendo $z = -x$ nell'equazione $g(x,y,z) = 0$ si ottiene l'equazione in due variabili $u(x,y) = x^3 + xy - 3x - y^3 - 2 = 0$, cubica che rappresenta la proiezione di ℓ sul piano (x,y) (vedi Figura 2). Usando le due equazioni $x + z = 0$ e $u(x,y) = 0$ per definire ℓ, notiamo che la matrice jacobiana $\mathsf{J}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y - 3 & x - 3y^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 nei punti di ℓ (infatti i due punti del piano in cui $\nabla u = (0,0)$ —trovati intersecando le parabole $x = 3y^2$ e $y = 3 - x^2$— non soddisfano $u(x,y) = 0$), dunque ℓ è una curva regolare. I punti di ℓ con $y = 0$ soddisfano $u(x,0) = 0$, ovvero $x^3 - 3x - 2 = 0$, le cui soluzioni sono facilmente $x = -1$ (doppia) e $x = 2$: si ottengono dunque i punti $B(-1,0,1)$ e $C(2,0,-2)$. La retta affine tangente a ℓ in B si ottiene dal sistema $\mathsf{J}(B)\cdot(x - x_B, y - y_B, z - z_B) = (0,0)$, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che dà $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$; analogamente, quella per C è data da $\mathsf{J}(C)\cdot(x - x_C, y - y_C, z - z_C) = (0,0)$, ovvero $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che dà $\begin{cases} 9x + 2y - 18 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ (è chiaro che queste rette sono contenute nel piano $x + z = 0$).



1. La curva Γ dell'esercizio 3. Il punto $\gamma(\frac{\pi}{6})$ è in nero, e la retta affine tangente a Γ in esso è gialla. Si vedono inoltre i punti estremali $(1,1)$ (verde) e $(0,0)$ (rosso) su Γ della funzione $f(x,y) = x + y$, le cui curve di livello sono grigie. **2.** La proiezione sul piano orizzontale (x,y) della curva ℓ dell'esercizio (4.c), definita da $u(x,y) = 0$ (la coordinata z dei punti di ℓ è legata alla x da $z = -x$). I due punti singolari dati da $\nabla h = (0,0)$ sono in grigio, ma si noti che nessuno di essi è la proiezione di un punto di ℓ. Le proiezioni dei punti B e C sono nere, e le proiezioni delle rette affini tangenti a ℓ in B e C sono gialle.

Prova scritta (10/07/2007)

1. (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}(x+1)^{4-\alpha}\exp(-x^\alpha)\,dx$, calcolandolo poi per $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$ (eventualmente con l'uso della funzione Γ di Eulero).**(35)**

(b)* Studiare la funzione integrale $F(x) = \int_1^{1/x} \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt$ *senza* calcolare una primitiva di $f(t) = \frac{1}{t(t^2+2)}$. Solo alla fine dello studio calcolare una primitiva di $f(t)$, determinando di conseguenza una forma finita per $F(x)$ e rispondendo alle eventuali questioni in sospeso.

2. (a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, la soluzione $y_k(x)$ del problema di Cauchy dato da $x^k y' = \cos^2(2y)$ con $y(1) = k\pi$. Tale soluzione è prolungabile anche per $x = 0$?

(b)* Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''' + y'' - 2y = b(x)$ nei casi $b(x) = 3e^x$ e $b(x) = 4\sin x$.

3. Si consideri il ramo di iperbole equilatera $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ avente come asintoti le rette $x = 2$ e $y = 1$, e passante per il punto $(3,3)$.

(a) Disegnare Γ, e trovarne una funzione di definizione $g(x,y) = 0$. A partire da g, esprimere Γ sia come grafico $x = \phi(y)$ che come forma polare $\rho = \rho(\theta)$, esibendo il cambio di parametro tra le due parametrizzazioni associate. Calcolare quindi la retta tangente affine a Γ nel punto $(3,3)$ in due modi, partendo dalle forme cartesiana e polare.

(b) Usando la forma grafico, scrivere l'integrale della lunghezza di $\widetilde{\Gamma} = \{(x,y) \in \Gamma : 2 \leq y \leq 5\}$.

(c) Spiegare perché $f(x,y) = 2x + 3y$ ammette estremi assoluti su $\widetilde{\Gamma}$, e calcolarli. Interpretare poi geometricamente i risultati ottenuti.

4. Sia $g(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 - 2x - z) + z - xy$.

(a) Dire qual'è il dominio di g, dandone una descrizione geometrica. Dire poi quali superfici di livello $\mathsf{X}_\alpha = \{g(x,y,z) = \alpha\}$ sono regolari, e calcolare il piano tangente affine a X_3 nel suo punto $A(0,-2,3)$ in due modi. Visto cosa risulta questo piano, cosa si può dire di A?

(b) Dal sistema formato dalle equazioni $g(x,y,z) = 3$ e $x^2 + yz + 6 = 0$, all'intorno della soluzione A si possono esplicitare due delle tre variabili (x,y,z) rispetto alla rimanente in un solo modo: dire quale, e dare lo sviluppo delle funzioni implicite fino al 2o ordine. Relazioni col punto (a)?

(35) $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è data da $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Vale $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ per ogni $x > 0$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$.

(c)* Descrivere $\mathsf{D} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4,\ x \leq 0,\ -1 \leq z \leq 0\}$, dimostrare che è un compatto dentro il dominio di g, e portare avanti per quanto possibile il calcolo degli estremi di g in esso.

Soluzioni.

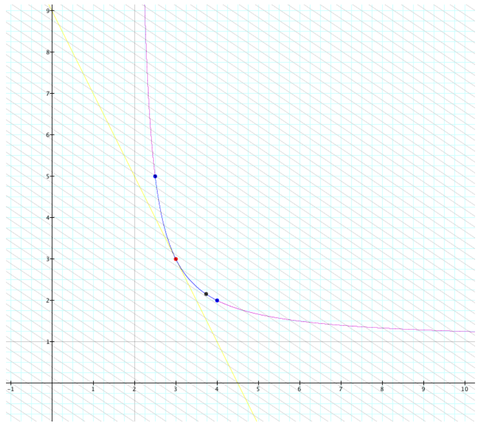
1. (a) Posto $f_\alpha(x) = x^{\alpha-2}(x+1)^{4-\alpha}\exp(-x^\alpha)$, vista la presenza di $\exp(-x^\alpha)$ conviene distinguere lo studio a seconda del segno di α. Intanto, se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \frac{(x+1)^4}{x^2}$, che non è integrabile né in 0^+ (infatti $f_0(x) \sim_{0^+} x^{-2}$) né in $+\infty$ (infatti $f_0(x) \sim_{+\infty} x^2$). Se $\alpha > 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} x^{\alpha-2}$, da cui la condizione $\alpha - 2 > -1$, ovvero $\alpha > 1$; essendo poi $\exp(-x^\alpha)$ rapidamente decrescente a $+\infty$, si ha $f_\alpha(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$, dunque integrabile. Se invece $\alpha < 0$, stavolta $\exp(-x^\alpha)$ è rapidamente decrescente a 0^+, dunque $f_\alpha(x)$ è ivi infinitesima (perciò banalmente integrabile); d'altra parte vale $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^{\alpha-2}x^{4-\alpha} = x^2$, che ovviamente non è integrabile a $+\infty$. Ricapitolando, l'integrale proposto converge per $\alpha > 1$. Per $\alpha = 2$, posto $x^2 = t$ si ha $\int_0^{+\infty}(x+1)^2\exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\sqrt{t} + 2 + \frac{1}{\sqrt{t}})e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}(\Gamma(\frac{3}{2}) + 2\Gamma(1) + \Gamma(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) + 2\Gamma(1) + \Gamma(\frac{1}{2})) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} + 1$. Per $\alpha = 3$, posto $u = x^3$ si ha invece $\int_0^{+\infty} x(x+1)\exp(-x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{u}})e^{-u}\,du = \frac{1}{3}(\Gamma(1) + \Gamma(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3}(\Gamma(\frac{2}{3}) + 1)$.

(b) (Figura 1) La funzione $f(t) = \frac{1}{t(t^2+2)}$ non è integrabile in 0 (infatti $f(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$), dunque il dominio di $F(x)$ è per $\frac{1}{x} > 0$, ovvero $x > 0$: poiché allora $f(t)$ viene integrata dove è positiva, si avrà $F(x) \geq 0$ nei punti del dominio ove $\frac{1}{x} \geq 1$, ovvero per $0 < x \leq 1$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt$, che è ignoto ma di certo finito (infatti $f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}$), e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^0 \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = -\int_0^1 \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = -\infty$ (perché, come detto, si ha $f(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$); essendo poi $F'(x) = f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})' - f(1)(1)' = -\frac{x}{2x^2+1}$, il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ usando de l'Hôpital risulta 0, e ciò mostra che non vi è asintoto lineare a $+\infty$. Si ha poi che F è strettamente decrescente, perché $F'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Infine, derivando ancora si ha $F''(x) = \frac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2}$, dunque $F(x)$ è convessa per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ed ha un flesso in $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a quota ignota $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ma con pendenza nota $F'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Fin qui si può arrivare con il solo studio della funzione integrale; si noti però che, già dal fatto che $F'(x) = -\frac{x}{2x^2+1}$ si potrebbe aver dedotto immediatamente che $F(x) = -\frac{1}{4}\log(2x^2+1) + k$ per una certa costante $k \in \mathbb{R}$, e dovendo essere $F(1) = 0$ si avrebbe $0 = -\frac{1}{4}\log 3 + k$, ovvero $k = \frac{1}{4}\log 3$, da cui infine la forma finita $F(x) = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2x^2+1}$. A tale forma si arriva anche calcolando una primitiva di $f(t)$: infatti $\int \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t} - \frac{t}{2t^2+1})\,dt = \frac{1}{4}\log\frac{t^2}{t^2+2}$, e perciò nuovamente $F(x) = (\frac{1}{4}\log\frac{t^2}{t^2+2}]_1^{1/x} = \frac{1}{4}(\log\frac{1}{2x^2+1} - \log\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2x^2+1}$. A questo punto possiamo calcolare le cose in sospeso: il limite $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ vale $\frac{1}{4}\log 3 \sim 0{,}27$, e la quota del flesso $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$ vale $\frac{1}{4}\log\frac{3}{2} \sim 0{,}1$.

2. (a) Le uniche soluzioni costanti $y(x) \equiv \alpha$ dell'equazione $x^k y' = \cos^2(2y)$ sono quelle per cui $\cos(2\alpha) = 0$, ovvero $\alpha = \frac{\pi}{4} + \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$: ma nessuna di queste ci interessa (infatti il problema di Cauchy impone che $y(1) \in \mathbb{Z}\pi$). Per $x \neq 0$ possiamo allora separare le variabili, ottenendo $\frac{1}{\cos^2(2y)}\,dy = x^{-k}\,dx$. Quando $k = 1$, integrando con la condizione $y(1) = \pi$ si ottiene $\operatorname{tg}(2y) = 2\log|x|$, da cui (ricordando che $\operatorname{arctg} x$ ha valori in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, mentre qui si richiede che $y(1) = \pi$) si ricava $2y = \operatorname{arctg}(2\log|x|) + 2\pi$, ovvero $y_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\log|x|) + \pi$. Quando invece $k \neq 1$, integrando con la condizione $y(1) = k\pi$ si ottiene $\operatorname{tg}(2y) = \frac{2}{1-k}x^{1-k}$, da cui (ragionando come prima) si ricava $2y = \operatorname{arctg}(\frac{2}{1-k}(x^{1-k} - 1)) + 2k\pi$, ovvero $y_k(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{2}{1-k}(x^{1-k} - 1)) + k\pi$. Si noti che tutte le soluzioni $y_k(x)$ con $k \leq 1$ sono prolungabili per continuità in $x = 0$ (col valore $y_1(0) = \frac{3\pi}{4}$ se $k = 1$, e col valore $y_k(0) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{1-k} + k\pi$ se $k \leq 0$; si verifichi che per $k < 0$ tale prolungamento è anche derivabile), mentre per $k > 1$ si ha $\lim_{x\to 0^-} y_k(x) = k\pi + \frac{\pi}{4} \neq \lim_{x\to 0^+} y_k(x) = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

(b) L'equazione differenziale $y''' + y'' - 2y = b(x)$ è lineare del 3o ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^3 + t^2 - 2 = 0$ ha radici semplici $t_1 = 1$, $t_2 = -1 + i$ e $t_3 = -1 - i$, pertanto un sistema fondamentale reale di soluzioni (per l'omogenea) è dato da $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}\cos x$ e $\varphi_3(x) = e^{-x}\sin x$. Se $b(x) = 3e^x$, una soluzione particolare sarà della forma $\tilde{y}(x) = axe^x$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare, ed imponendo che $\tilde{y}''' + \tilde{y}'' - 2\tilde{y} = 3e^x$ si ricava $a(x + 3 + x + 2 - 2x)e^x = 3e^x$, da cui $a = \frac{3}{5}$: pertanto l'integrale generale sarà

$\{Ae^x + e^{-x}(B\cos x + C\sin x) + \frac{3}{5}xe^x : A, B, C \in \mathbb{C}\}$. Se invece $b(x) = 4\sin x$ una soluzione particolare sarà della forma $\tilde{y}(x) = a\cos x + b\sin x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare, ed imponendo che $\tilde{y}''' + \tilde{y}'' - 2\tilde{y} = 4\sin x$ si ricava $(-3a-b)\cos x + (a-3b)\sin x = 4\sin x$, da cui $-3a-b = 0$ e $a-3b = 4$, ovvero $a = \frac{2}{5}$ e $b = -\frac{6}{5}$: dunque l'integrale generale sarà $\{Ae^x + e^{-x}(B\cos x + C\sin x) + \frac{2}{5}(\sin x - 3\cos x) : A, B, C \in \mathbb{C}\}$. (Se interessa il solo spazio delle soluzioni reali, in entrambi i casi si sceglierà $A, B, C \in \mathbb{R}$.)

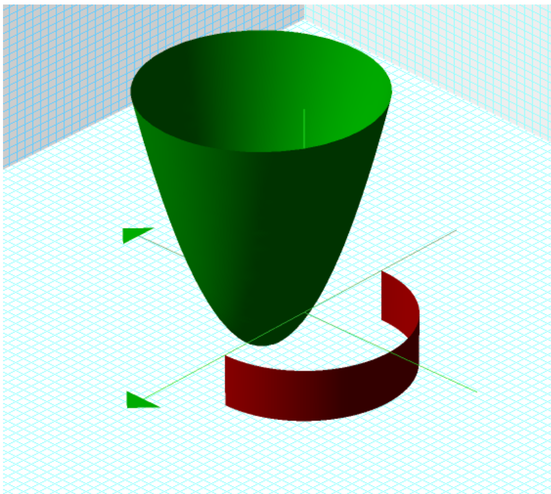


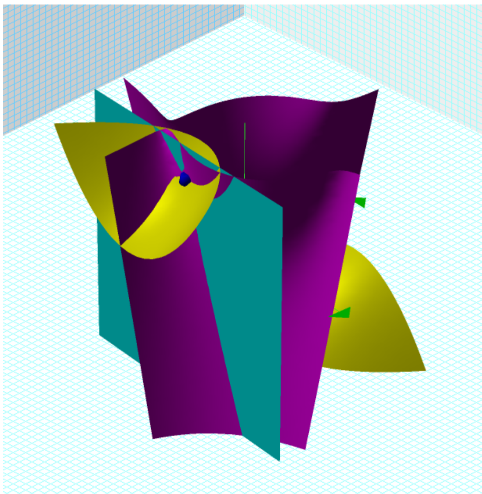
1. La funzione integrale dell'esercizio (1.b). **2.** La curva Γ dell'esercizio 3: la porzione $\widetilde{\Gamma}$ è blu, e le linee di livello di $f(x, y) = 2x + 3y$ sono grigie.

3. (a) (Figura 2) Rispetto al sistema cartesiano (X, Y) dei propri asintoti è noto che Γ ha un'equazione cartesiana del tipo $XY = k$ con $k \in \mathbb{R}$; essendo $X = x-2$ e $Y = y-1$ si avrà così un'equazione della forma $(x-2)(y-1) = k$, e l'appartenenza del punto $(3, 3)$ impone che $k = 2$: pertanto otteniamo $g(x, y) = (x-2)(y-1) - 2 = xy - x - 2y = 0$ (con $x > 2$, visto che consideriamo il solo ramo che passa per $(3, 3)$). Da $g(x, y) = 0$ si trova subito la forma grafico $x = \phi(y) = \frac{2y}{y-1}$ (con $\phi :]1, +\infty[\to]2, +\infty[$), e sostituendo $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ si ottiene $\rho^2\cos\theta\sin\theta - \rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta = 0$, da cui la forma polare $\rho(\theta) = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$, con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Le parametrizzazioni associate alla forma grafico e alla forma polare sono rispettivamente $\gamma_1(y) = (\frac{2y}{y-1}, y)$ (con $y > 2$) e $\gamma_2(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) = (\frac{\cos\theta+2\sin\theta}{\sin\theta}, \frac{\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta})$ (con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), ed il cambio di parametro (tramite cui vale $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$) è $\alpha :]0, \frac{\pi}{2}[\to]2, +\infty[$ dato da $\alpha(\theta) = y(\theta) = \frac{\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta}$. Infine, la retta r tangente a Γ in $(3, 3)$ è data da $\nabla g(3, 3) \cdot (x-3, y-3) = 0$: essendo $\nabla g(x, y) = (y-1, x-2)$ si ottiene $(2, 1) \cdot (x-3, y-3) = 0$, ovvero $2x + y - 9 = 0$. D'altra parte, poiché a conti fatti $\gamma_2'(\theta) = (-\frac{1}{\sin^2\theta}, \frac{2}{\cos^2\theta})$, essendo $(3, 3) = \gamma_2(\frac{\pi}{4})$ si ha la forma parametrica r $= \{(3, 3) + \lambda\gamma_2'(\frac{\pi}{4}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(3 - 2\lambda, 3 + 4\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, e da $x = 3 - 2\lambda$ e $y = 3 + 4\lambda$ si ricava nuovamente $2x + y - 9 = 0$.

(b) (Figura 2) Si noti che $\widetilde{\Gamma} = \{(x, y) \in \Gamma : 2 \leq y \leq 5\}$ è il tratto della curva Γ compreso tra i punti $B(\frac{5}{2}, 5)$ e $C(4, 2)$: pertanto, essendo $\gamma_1'(y) = (-\frac{2}{(y-1)^2}, 1)$ e perciò $\|\gamma_1'(y)\| = \sqrt{\frac{4}{(y-1)^4} + 1} = \frac{\sqrt{(y-1)^4+4}}{(y-1)^2}$, la lunghezza di $\widetilde{\Gamma}$ è data da $\int_2^5 \frac{\sqrt{(y-1)^4+4}}{(y-1)^2}\, dy = \int_1^4 \frac{\sqrt{u^4+4}}{u^2}\, du$ (ove $u = y - 1$).

(c) Poiché $\widetilde{\Gamma}$ è compatto (essendo chiuso e limitato, in quanto...) e $f(x, y) = 2x + 3y$ è continua, la conclusione segue da Weierstrass. Negli estremi B e C (varietà di dimensione 0) si ha $f(B) = 20$ e $f(C) = 14$; invece $\widetilde{\Gamma} \setminus \{B, C\}$ (curva regolare) è parametrizzata da $\gamma_1(y) = (\frac{2y}{y-1}, y)$ con $2 < y < 5$, dunque basta cercare lì eventuali punti stazionari di $F(Y) := f(\gamma_1(y)) = 2\frac{2y}{y-1} + 3y = \frac{y(3y+1)}{y-1}$. Essendo $F'(y) = \frac{3y^2-6y-1}{(y-1)^2}$, in $]2, 5[$ si ha $F'(y) \geq 0$ per $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq y < 5$: dunque $y_0 := 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ è un punto di minimo locale per F, e corrispondentemente lo è il punto $D(\frac{2y_0}{y_0-1}, y_0) = (2 + \sqrt{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$ per f su $\widetilde{\Gamma} \setminus \{B, C\}$. Poiché $f(D) = 2(2 + \sqrt{3}) + 3(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}) = 7 + 4\sqrt{3} \sim 13{,}93 < 14 = f(C)$, il massimo assoluto di f su $\widetilde{\Gamma}$ è 20 (assunto in B) ed il minimo assoluto è $7 + 4\sqrt{3}$ (assunto in D). L'interpretazione geometrica dei risultati è chiara, una volta che si esaminino le curve di livello di f (ovvero le rette $2x + 3y = k$, vedi ancora la Figura 2).





3. Il paraboloide verde è quello che delimita superiormente il dominio di $g(x,y,z)$ dell'esercizio 4. La striscia cilindrica rossa è l'insieme D di (4.c). **4.** Il punto $A(0,-2,3)$ dell'esercizio 4 è in blu. Esso sta sulla superficie di livello X_3 (porpora), ed il piano tangente a X_3 in A è $y=-2$ (azzurro): dalla posizione reciproca di piano e superficie si capisce che A è una sella per la coordinata y su X_3. In giallo è evidenziata la superficie $x^2+yz+6=0$ di (4.b), che pure contiene A: guardando la curva intersezione tra tale superficie e X_3 si capiscono i risultati ottenuti riguardo allo sviluppo locale in A delle funzioni implicite $y(x)$ e $z(x)$.

4. (a) Il dominio di $g(x,y,z)=\log(x^2+y^2-2x-z)+z-xy$ è dato da $x^2+y^2-2x-z>0$, ovvero $z<x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1$: si tratta della parte di spazio che sta sotto il consueto paraboloide ellittico con asse parallelo all'asse z e rivolto verso l'alto, ma stavolta con vertice nel punto $(1,0,-1)$ anziché nell'origine (vedi Figura 3). I punti del dominio in cui g non è sommersiva sono dati da $\nabla g(x,y,z)=(0,0,0)$; essendo $\nabla g(x,y,z)=(\frac{2(x-1)}{x^2+y^2-2x-z}-y, \frac{2y}{x^2+y^2-2x-z}-x, -\frac{1}{x^2+y^2-2x-z}+1)$, si ricava allora $x^2+y^2-2x-z=1$, da cui $2(x-1)-y=0$ e $2y-x=0$: pertanto si ottiene il solo punto $P(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{9})$, con $g(P)=-\frac{7}{3}$. Ne ricaviamo che le superfici di livello $\mathsf{X}_\alpha=\{g(x,y,z)=\alpha\}$ con $\alpha\neq-\frac{7}{3}$ sono tutte regolari, mentre $\mathsf{X}_{-\frac{7}{3}}$ lo è di certo in tutti i punti diversi da P. Il piano tangente affine a X_3 nel suo punto $A(0,-2,3)$ è dato da $\nabla g(0,-2,3)\cdot(x-0,y-(-2),z-3)=0$, ovvero $(0,-4,0)\cdot(x,y+2,z-3)=0$, ovvero $y=-2$ (parallelo al piano (x,z)). Per Dini, da $g(x,y,z)=3$ all'intorno di A si può solo esplicitare $y(x,z)$, con $y(0,3)=-2$ e $\nabla y(0,3)=(0,0)$: dunque A è un punto stazionario per la coordinata y su X_3. Ma di che tipo? Derivando con pazienza l'identità $g(x,y(x,z),z)\equiv 3$ si trova la matrice hessiana $\mathsf{H}_y(0,3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$, che è indefinita: dunque A è solo una sella per la y su X_3 (vedi Figura 4).

(b) Lo jacobiano del sistema è $\begin{pmatrix}\frac{2(x-1)}{x^2+y^2-2x-z}-y & \frac{2y}{x^2+y^2-2x-z}-x & -\frac{1}{x^2+y^2-2x-z}+1\\ 2x & z & y\end{pmatrix}$, che calcolato nella soluzione $A(0,-2,3)$ diventa $\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$: l'unico minore nonsingolare è quello relativo a (y,z), dunque si può solo esplicitare $(y(x),z(x))$, con $\begin{pmatrix}y(0)\\ z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}y'(0)\\ z'(0)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Per trovare lo sviluppo richiesto bisogna derivare due volte rispetto a x il sistema formato dalle identità $g(x,y(x),z(x))=3$ e $x^2+y(x)\,z(x)+6=0$, ricavando alla fine $\begin{pmatrix}y''(0)\\ z''(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$: pertanto si ha $y(x)=-2-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)$ e $z(x)=3+\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)$, che mostra come, per la curva definita dal sistema iniziale (intersezione tra le superfici X_3 e $x^2+yz+6=0$), il punto A sia di massimo locale per la coordinata y (e, coerentemente col punto (a), il valore di $y''(0)=-\frac{1}{2}$ è lo stesso di prima) e di minimo locale per la coordinata z. Questo si può effettivamente dedurre anche dall'osservazione della Figura 4.

(c) L'insieme $\mathsf{D}=\{(x,y,z): x^2+y^2=4,\ x\le 0,\ -1\le z\le 0\}$ è una striscia di superficie cilindrica (vedi Figura 3), ed è compatto perché chiuso (definito da equazioni e disequazioni larghe continue) e limitato (infatti $x^2+y^2\le 4$ e $|z|\le 1$). Inoltre esso è contenuto nel dominio di g, perché per i punti di D vale $x^2+y^2-2x-z=4-2x-z\ge 4>0$. Per il calcolo degli estremi di g su D dividiamo quest'ultimo in $\mathsf{D}_1=\{(x,y,z): x^2+y^2=4,\ x<0,\ -1<z<0\}$

(punti non sul bordo, superficie regolare), $\mathsf{D}_2^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4,\, x < 0, z = 0\}$ (bordo semicircolare superiore senza estremi, curva regolare), $\mathsf{D}_2^- = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4,\, x < 0, z = -1\}$ (bordo semicircolare inferiore senza estremi, curva regolare), $\mathsf{D}_3^+ = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4,\, x = 0, y = 2\}$ (lato verticale sinistro del bordo senza estremi, curva regolare), $\mathsf{D}_3^- = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4,\, x = 0, y = -2\}$ (lato verticale destro del bordo senza estremi, curva regolare) e $\mathsf{D}_4 = \{E_1(0,2,0),\, E_2(0,-2,0),\, E_3(0,2,-1),\, E_4(0,-2,-1)\}$ (i quattro estremi, varietà di dimensione zero). Per D_4 si ha $g(E_1) = g(E_2) = 2\log 2 \sim 1{,}39$ e $g(E_3) = g(E_4) = 2\log 2 - 1 \sim 0{,}39$. I segmenti verticali $\mathsf{D}_3^\mp$ si parametrizzano facilmente con la coordinata z considerando $(0, \mp 2, z)$ con $-1 < z < 0$: su entrambi la funzione diventa $G(z) := g(0, \mp 2, z) = \log(4-z) + z$, che è priva di punti stazionari in $-1 < z < 0$. Le semicirconferenze $\mathsf{D}_2^\mp$ conviene parametrizzarle con l'angolo θ delle cooordinate cilindriche: ad esempio per D_2^+ si può considerare $(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ con $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, e lo stesso per D_2^- con $z = -1$ anziché $z = 0$; quanto a D_1, si può applicare il metodo di Lagrange (la sua equazione è $x^2+y^2 = 4$, con le limitazioni $x < 0$ e $-1 < z < 0$). Tuttavia, per questi ultimi settori di D il calcolo diventa complicato, e non lo completiamo.

Prova scritta (04/09/2007)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali, calcolandoli poi per $\alpha = 0$:

$$\text{(i)} \quad \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}(x^2+1)^{-\alpha} \sin 2x \, dx, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\log|1 - x^{\frac{\alpha+1}{2}}|}{(1-x)^\alpha} \, dx \,.$$

2. Si abbia l'equazione differenziale $\log(xy' + y) = \alpha x$, ove $\alpha \neq 0$.

(a) Studiare, senza risolvere l'equazione, l'esistenza di eventuali soluzioni costanti e la crescenza e convessità delle soluzioni non costanti.

(b) Determinare l'integrale generale dell'equazione, mostrando se esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Trovare poi la soluzione $f_\alpha(x)$ dell'equazione per $x > 0$ tale che $f_\alpha(1) = 0$.

(c) Determinare la soluzione $g_\alpha(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - \alpha^2 y = \alpha$ tale che $g_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha}$ e $g'_\alpha(0) = 0$. Per quali $\alpha \neq 0$ l'equazione $2x\, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ ha soluzioni reali $x_\alpha > 0$?

3. Sia $g(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy^2$.

(a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ le curve di livello $\Gamma_k = \{(x,y) : g(x,y) = k\}$ non sono regolari, indicando quali sono i loro punti singolari. Parametrizzare la curva Γ_1 all'intorno dei suoi punti $A(1,0)$ e $B(0,-1)$, determinando in due modi la retta tangente affine a Γ_1 in essi.

(b) Dopo aver provato che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x,y) = +\infty$,[36] dimostrare che g ha minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$ e che tutte le sue curve di livello Γ_k sono compatte.

(c) Determinare i punti di $\mathbb{R}^2$ di estremo relativo per g, dicendo in quali di essi g assume il valore minimo assoluto.

(d) Calcolare gli estremi assoluti di $f(x,y) = 2x - y^2$ su Γ_1, e le estremità est e ovest di Γ_1.

4. Sia X la superficie dell'ellissoide di centro $(-1,0,1)$, con assi paralleli ai tre assi coordinati e semiassi di lunghezza 2, 1 e 1 nelle direzioni rispettivamente x, y e z.

(a) Scrivere un'equazione di definizione g per X, e usarla per calcolare il piano tangente affine a X nel suo punto $A(-2, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$. Parametrizzare poi X adattando in modo opportuno le coordinate sferiche nello spazio tridimensionale, e ricalcolare lo stesso piano tangente affine.

[36] passare in coordinate polari (ρ, θ), facendo attenzione all'uniformità in θ.

(b) Dal sistema formato dalle equazioni $g(x, y, z) = 0$ e $\log(xy - z^2 + 1) = xyz - 1$, all'intorno della soluzione $B(-1, -1, 1)$ si vorrebbero esplicitare due delle coordinate (x, y, z) in funzione della rimanente. Spiegare come ciò sia possibile, e trovare gli sviluppi al secondo ordine delle coordinate esplicitate. Come si interpreta geometricamente il risultato?

Soluzioni.

1. (i) L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}(x^2+1)^{-\alpha} \sin 2x\, dx$ va studiato in 0^+ e $+\infty$. In 0^+ la funzione integranda è infinitesima per ogni α, dunque ovviamente integrabile. Quanto a $+\infty$, per $\alpha < 1$ si ha che $f_\alpha(x) = e^{(\alpha-1)x}(x^2 + 1)^{-\alpha}$ decresce a 0^+, dunque l'integrale converge grazie a Abel-Dirichlet (in realtà converge anche assolutamente, grazie alla rapidità con cui decresce l'esponenziale); al contrario, per $\alpha > 1$ $f_\alpha(x)$ diverge rapidamente a $+\infty$, e l'integrale proposto non può convergere (il ragionamento è simile a quello fatto per $\int_1^{+\infty} x^\gamma \sin x\, dx$ quando $\gamma > 0$); infine, per $\alpha = 1$ l'integrale diventa $\int_0^{+\infty}(x^2+1)^{-1} \sin 2x\, dx$, che in $+\infty$ converge per confronto perché $|(x^2+1)^{-1} \sin 2x| < \frac{1}{x^2}$. Ricapitolando, l'integrale converge per $\alpha \le 1$. Per $\alpha = 0$ si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x\, dx = (-\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x)]_0^{+\infty} = -\frac{1}{5}(0-2) = \frac{2}{5}$.

(ii) L'integrale $\int_0^1 \frac{\log|1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}|}{(1-x)^\alpha}\, dx$, che ha senso per $\alpha \ne -1$, va studiato in 0^+ e 1^-. In 0^+ distinguiamo $\alpha \lessgtr -1$: se $\alpha < -1$ il termine $x^{\frac{\alpha+1}{2}}$ è un infinito, dunque $\log|1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}| \sim_{0^+} \log(x^{\frac{\alpha+1}{2}}) \sim^*_{0^+} \log x$ (si ricordi che se $f \sim_c g$ sono > 0 e lontane da 1 allora $\log f \sim_c \log g$), perciò l'integrale converge; mentre se $\alpha > -1$ il termine $x^{\frac{\alpha+1}{2}}$ è un infinitesimo, perciò $\log|1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}| = \log(1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}) \sim_{0^+} -x^{\frac{\alpha+1}{2}}$ da cui la condizione $\frac{\alpha+1}{2} > -1$, ovvero $\alpha > -3$ (vero). Dunque l'integrale converge in 0^+ per ogni $\alpha \ne -1$. Passiamo ora a 1^-: poiché $|1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}| \sim^*_{1^-} (1-x)$ si ha $\log|1-x^{\frac{\alpha+1}{2}}| \sim_{1^-} \log(1-x)$, pertanto si tratta di capire l'integrabilità di $\frac{\log t}{t^\alpha} = t^{-\alpha}\log t$ in $t \sim 0^+$, verificata se e solo se $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$. Ricapitolando, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha < 1$ (con $\alpha \ne -1$). Per $\alpha = 0$ esso diventa $\int_0^1 \log(1-\sqrt{x})\, dx$: posto $x = t^2$ si ha $\int \log(1-\sqrt{x})\, dx = \int 2t \log(1-t)\, dt = t^2\log(1-t) - \int t^2(-\frac{1}{1-t})\, dt = t^2\log(1-t) + \int(\frac{1}{1-t} - t - 1)\, dt = (t^2-1)\log(1-t) - \frac{1}{2}t^2 - t + k = (x-1)\log(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x - \sqrt{x} + k$, dunque $\int_0^1 \log(1-\sqrt{x})\, dx = ((x-1)\log(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x - \sqrt{x}]_0^1 = (-\frac{1}{2} - 1) - (0) = -\frac{3}{2}$.

2. (a) Una soluzione costante $y(x) \equiv y_0$ di $\log(xy' + y) = \alpha x$ dovrebbe soddisfare l'identità $\log y_0 = \alpha x$ per ogni x, cosa evidentemente impossibile: dunque non vi sono soluzioni costanti. Si ricava poi $xy' + y = e^{\alpha x}$: una soluzione eventualmente definita in $x = 0$ dovrà soddisfare $y(0) = 1$ mentre per $x \ne 0$ si ha $y' = \frac{e^{\alpha x} - y}{x}$, dunque le soluzioni non costanti avranno un punto stazionario sulla curva $y = e^{\alpha x}$, e per $x \gtrless 0$ saranno crescenti sotto/sopra tale curva. Derivando ambo i membri rispetto a x si ottiene $y'' = \frac{x(\alpha e^{\alpha x} - y') - (e^{\alpha x} - y)}{x^2} = \frac{(\alpha x - 2)e^{\alpha x} + 2y}{x^2}$, dunque le soluzioni avranno flessi sulla curva $y = -\frac{1}{2}(\alpha x - 2)e^{\alpha x}$ e saranno convesse/concave sopra/sotto tale curva.

(b) Dividendo per x si ha l'equazione lineare $y' + p(x)\, y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$, che per $x \ne 0$ ha integrale generale $y = \frac{1}{x}(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + k_\pm)$ (ove $k_\pm$ sono le costanti per $x \gtrless 0$); l'unica soluzione su $\mathbb{R}$ si ha per $k_+ = k_- = -\frac{1}{\alpha}$, ovvero $y = \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x}$ (con $y(0) = 1$ e $y'(0) = \frac{\alpha}{2}$). Imponendo invece che $y(1) = 0$ si trova $k_+ = -\frac{1}{\alpha}e^\alpha$, da cui $f_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^\alpha}{\alpha x}$.

(c) L'equazione $y'' - \alpha^2 y = \alpha$, lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, si risolve facilmente trovando $y(x) = A\, e^{\alpha x} + B\, e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha}$, ed imponendo che $y(0) = \frac{1}{\alpha}$ e $y'(0) = 0$ si trova $A = B = \frac{1}{\alpha}$, da cui $g_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1}{\alpha}$. L'equazione $2x\, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ diventa dunque $2e^{\alpha x} - 2e^\alpha = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1$, ovvero $\sinh \alpha x = \frac{1}{2}(e^\alpha - 1)$, che per ogni $\alpha \ne 0$ ha sempre una e una sola soluzione $x_\alpha > 0$ (si noti che $\operatorname{sign} \frac{1}{2}(e^\alpha - 1) = \operatorname{sign} \alpha$).

3. (a) (Figura 1) Data $g(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy^2$, si noti che $g(x, -y) = g(x, y)$: dunque le curve di livello Γ_k saranno simmetriche rispetto all'asse x. Il gradiente $\nabla g = (4(x^3 - y^2), 4y(y^2 - 2x))$ si annulla in $O(0, 0)$ e $P_\pm(\sqrt{2}, \pm\sqrt[4]{8})$, punti singolari di Γ_0 (per O) e Γ_{-4} (per P_+ e P_-). Tutte le altre curve Γ_k saranno regolari, e tra esse anche Γ_1, cui appartengono $A(1,0)$ e $B(0,-1)$. Essendo $\nabla g(A) = (4,0)$, all'intorno di A l'equazione $g(x,y) = -1$ può essere esplicitata solo rispetto a x, ottenendo la parametrizzazione (forma grafico) $x(y)$ con $x(0) = 1$ e $g(x(y),y) \equiv 1$ per $y \sim 0$; da $x'(0) = -\frac{0}{4} = 0$ si ottiene la retta affine tangente $x - 1 = 0(y-0)$ ovvero $x = 1$, ottenibile anche da $\nabla g(A) \cdot (x-1, y-0) = 0$. D'altra parte, essendo $\nabla g(B) = (-4,-4)$, all'intorno di B l'equazione $g(x,y) = 1$ può essere esplicitata sia rispetto a x che a y: ad esempio si ha la parametrizzazione $y(x)$ con $y(0) = -1$ e $g(x, y(x)) \equiv 1$ per $x \sim 0$; da $y'(0) = -\frac{-4}{-4} = -1$ si ottiene la retta affine tangente $y - (-1) = (-1)(x-0)$ ovvero $y = -x-1$, ottenibile anche da $\nabla g(B) \cdot (x-0, y-(-1)) = 0$.

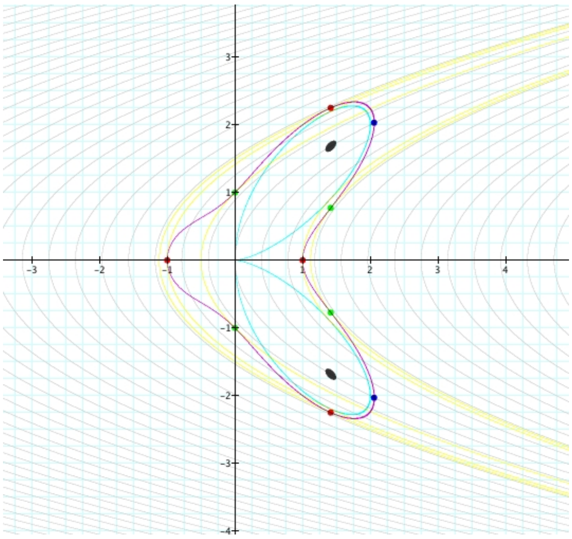
(b) In coordinate polari (ρ,θ) si ha $g(x,y) = g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^3(\rho(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\cos\theta\sin^2\theta) \geq \rho^3(\frac{1}{2}\rho - 4)$ (per uniformizzare in θ si è usato il fatto che $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq \frac{1}{2}$ per ogni θ, come si verifica facilmente), dunque $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x,y) \geq \lim_{\rho\to+\infty} \rho^3(\frac{1}{2}\rho - 4) = +\infty$. Poiché g è continua, non è difficile ora provare che g ha minimo assoluto e che le curve Γ_k sono compatte. Il primo passo è osservare che, preso un qualsiasi $k \in \mathbb{R}$, si ha che $C_k = \{(x,y) : g(x,y) \leq k\}$ è compatto in quanto chiuso (disuguaglianza larga di funzione continua) e limitato (per la definizione di limite: essendo $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x,y) = +\infty$ esisterà di certo un raggio $r_k > 0$ tale che $g(x,y) > k$ se $\|(x,y)\| > r_k$, dunque C_k è contenuto nella palla $\{(x,y) : \|(x,y)\| \leq k\}$). Poi, osservando che ad esempio $g(O) = 0$, si avrà che C_0 è un compatto non vuoto (perché O vi appartiene) , e l'eventuale minimo assoluto di g in $\mathbb{R}^2$ dovrà essere uguale al minimo assoluto di g in C_0 (infatti, se $P \in \mathbb{R}^2$ è un punto di minimo assoluto per g allora dovrà essere $g(P) \leq 0$, e dunque $P \in C_0$), e il minimo assoluto di g in C_0 esiste per il teorema di Weierstrass. Infine, la curva Γ_k è compatta in quanto chiusa (equazione di funzione continua) e limitata (perché contenuta in C_k, che è limitato).

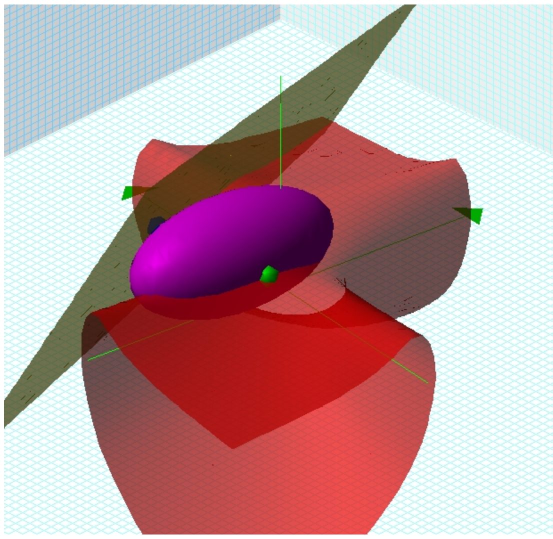
(c) Poiché g è differenziabile, gli estremanti relativi (e in particolare anche i punti di minimo assoluto) di g in $\mathbb{R}^2$ si trovano tra i punti stazionari, ovvero in cui ∇g si annulla: ma questi punti li abbiamo già trovati prima, e sono O, P_+ e P_-. Per determinarne la natura usiamo il metodo dell'hessiano, che è $\mathsf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -8y \\ -8y & 4(3y^2-2x) \end{pmatrix}$. Essendo $\mathsf{H}_g(P_\pm) = \begin{pmatrix} 24 & \mp 8\sqrt[4]{8} \\ \mp 8\sqrt[4]{8} & 16\sqrt{2} \end{pmatrix}$ definite positive, i punti P_+ e P_- sono di minimo relativo stretto (con $g(P_\pm) = -4$). D'altra parte $\mathsf{H}_g(O)$ è identicamente nulla, dunque non dice nulla circa la natura di O, ma basta osservare ad esempio che $g(O) = 0$ e che $g(x,x) = 2x^3(x-2)$ (restrizione di g alla retta $y = x$, passante per O) cambia segno per $x \gtreqless 0$ per rendersi conto che O è una sella. A questo punto è ovvio che il minimo assoluto di g in $\mathbb{R}^2$ è -4, assunto in P_+ e P_-.

(d) (Figura 1) Per calcolare gli estremi assoluti di $f(x,y) = 2x - y^2$ su $\Gamma_1 = \{(x,y) : g(x,y) = 1\}$ conviene usare il metodo di Lagrange. I punti stazionari per f su Γ_1 sono le soluzioni del sistema dalle equazioni $\det\begin{pmatrix} 4(x^3-y^2) & 4y(y^2-2x) \\ 2 & -2y \end{pmatrix} = 0$ (ovvero $xy(x^2-2) = 0$) e $x^4 + y^4 - 4xy^2 = 1$, ovvero gli otto punti $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B'(0,1)$, $B(0,-1)$, $C_\pm(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})$ e $D_\pm(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{5}})$: essendo $f(A) = 2$, $f(A') = -2$, $f(B) = f(B') = -1$, $f(C_\pm) = -\sqrt{5}$ e $f(D_\pm) = \sqrt{5} \sim 2{,}2$, il massimo assoluto di f su Γ_1 è $\sqrt{5}$ (assunto in D_+ e D_-) ed il minimo è -2 (assunto in A').
La ricerca delle estremità est e ovest di Γ_1 si fa allo stesso modo, sostituendo $f(x,y)$ con $h(x,y) = x$: stavolta andranno trovate le soluzioni del sistema dato dalle equazioni $\det\begin{pmatrix} 4(x^3-y^2) & 4y(y^2-2x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ (ovvero $y(y^2-2x) = 0$) e $x^4 + y^4 - 4xy^2 = 1$, che sono i quattro punti $A(1,0)$, $A'(-1,0)$ e $E_\pm(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \pm\sqrt[4]{4(\sqrt{5}+2)})$. Essendo $x_A = 1$, $x_{A'} = -1$ e $x_{E_\pm} = \sqrt{\sqrt{5}+2} \sim 2{,}1$, l'estremità ovest di Γ_1 è A' e quelle est sono E_+ e E_-.

4. (a) (Figura 2) In generale la superficie dell'ellissoide di centro (x_0,y_0,z_0) e di semiassi a,b,c ha equazione $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ e, adattando le coordinate sferiche, si può parametrizzare (a parte i punti che stanno sul semipiano $y = y_0$ con $x \leq x_0$) tramite $\gamma(\theta,\varphi) = (x_0 + a\cos\theta\sin\varphi, y_0 + b\sin\theta\sin\varphi, z_0 + c\cos\varphi)$ con $\theta \in]-\pi,\pi[$ e $\varphi \in]0,\pi[$: nel nostro caso si ha pertanto $\frac{1}{4}(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$ (o anche $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2x - 8z + 1 = 0$) e $\gamma(\theta,\varphi) = (-1 + 2\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 1 + \cos\varphi)$. Il punto $A(-2, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$ sta su X (si noti che $g(A) = 0$ e che $A = \gamma(\theta_A, \varphi_A)$ con $(\cos\theta_A, \sin\theta_A) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ e $(\cos\varphi_A, \sin\varphi_A) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, ovvero $\theta_A = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\varphi_A = \frac{\pi}{3}$), dunque il piano tangente a X in A da un lato ha equazione $\nabla g(A) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) = 0$ ovvero $x - 2\sqrt{2}\,y - 2z + 7 = 0$, e dall'altro ha espressione parametrica $\{A + \lambda\, d\gamma_{(\theta_A,\varphi_A)}(1,0) + \mu\, d\gamma_{(\theta_A,\varphi_A)}(0,1) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (-2 - \sqrt{2}\,\lambda - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{6}}{6}\mu, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$, che eliminando λ,μ ridà la precedente equazione cartesiana.

(b) (Figura 2) Lo jacobiano del sistema è $\begin{pmatrix} 2x+2 & 8y & 8z-8 \\ \frac{y}{xy-z^2+1}-yz & \frac{x}{xy-z^2+1}-xz & -\frac{2z}{xy-z^2+1}-xy \end{pmatrix}$, che nella soluzione $B(-1,-1,1)$ diventa $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$: l'unico minore nonsingolare è quello in (y,z), dunque per il teorema del Dini si può solo esplicitare $(y(x),z(x))$, con $(y(-1),z(-1)) = (-1,1)$. Per lo sviluppo richiesto bisogna derivare due volte rispetto a x il sistema delle due identità con $y(x)$ e $z(x)$, ricavando $(y'(-1),z'(-1)) = (0,0)$ e $(y''(-1),z''(-1)) = (\frac{1}{4},-\frac{1}{3})$: pertanto si ha $y(x) = -1+\frac{1}{8}(x+1)^2+o((x+1)^2)$ e $z(x) = 1-\frac{1}{6}(x+1)^2+o_0((x+1)^2)$. Il punto B è la y-estremità negativa di X, dunque geometricamente è piuttosto ovvio che (come mostra lo sviluppo) $y(x)$ abbia un minimo locale (che sarà in realtà globale) in $x=-1$; meno intuibile il risultato per $z(x)$ (lo sviluppo evidenzia un massimo locale in $x=-1$), per il quale conta l'andamento locale della superficie $\log(xy-z^2+1) = xyz-1$ in B.





1. Le curve Γ_0 (azzurra, col punto singolare O), Γ_{-4} (nera, ridotta ai soli punti $P_{\mp}$ di minimo assoluto per g su $\mathbb{R}^2$), Γ_1 (porpora) con i punti di massimo (verde) e minimo (rosso) locale per $f(x,y)$, le cui curve di livello sono grigie o gialle. Le estremità est della curva sono blu.
2. La superficie X (porpora), il punto B (verde), la superficie $\log(xy-z^2+1) = xyz-1$ (rosso). Dietro si intravedono il punto A ed il piano tangente affine (giallo).

Prova scritta (18/09/2007)

1. Sia $f_\alpha(x) = (e^x - 1)^{\frac{\alpha}{2}}$.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} f_\alpha(x)\, dx$, e calcolarlo per $\alpha = -1$.

(b) Studiare l'andamento della funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} f_1(t)\, dt$ senza calcolare una primitiva di $f_1(t)$. Solo alla fine cercare tale primitiva, ricavandone un forma finita per F.

2. (a) Dire se l'equazione differenziale $2x^3yy' \cos(y^2) = 1$ ha soluzioni costanti. Trovarne poi, al variare di $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, la soluzione $y_m(x)$ del problema di Cauchy con $y_m(1) = \sqrt{m\pi}$.

(b) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione $y''+2e^{-\alpha x}+\alpha y' = 0$.

3. Nel piano cartesiano, Γ è l'ellisse con fuochi $O(0,0)$ e $F(2,1)$ e semiasse maggiore lungo $\frac{3}{2}$.

(a) Determinare[(37)] un polinomio $g(x,y)$ tale che $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$, e calcolare la retta r ortogonale a Γ nel suo punto $A(2,0)$. Trovare poi una parametrizzazione di Γ all'intorno di A, ed usarla per calcolare nuovamente la retta r.

(b) Dire perché $f(x,y) = x + 2y - 1$ ammette estremi assoluti su Γ, e calcolarli. Interpretare poi graficamente i risultati ottenuti.

(c) Parametrizzare globalmente $\widetilde{\Gamma} = \{(x,y) \in \Gamma : y \le 0\}$, e scrivere correttamente (senza calcolarli) gli integrali che ne danno la lunghezza e le coordinate del baricentro geometrico.

4. Sia $h(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x + y - z) - x + yz$.

(a) Dire quali superfici di livello $\mathsf{X}_\alpha = \{(x,y,z) : h(x,y,z) = \alpha\}$ sono regolari, e calcolare il piano tangente affine a X_7 nel suo punto $Q(-1,3,2)$.

(b) Dall'equazione $h(x,y,z) = 7$ si vorrebbe, all'intorno della soluzione Q, esplicitare $y(x,z)$. Mostrare che ciò è possibile, calcolare lo sviluppo al primo ordine di tale funzione implicita ed usare quanto trovato per ricalcolare il precedente piano tangente affine.

(c) Mostrare che la curva ℓ ottenuta intersecando X_7 col paraboloide ellittico $3z = x^2+y^2-4$ è regolare all'intorno del suo punto Q, e calcolare $\mathsf{T}_Q\ell$ in forma cartesiana e parametrica.

[(37)] Si ricorda che, dati nel piano cartesiano due punti distinti F_1 e F_2 ed un numero $\alpha > \frac{1}{2}|\overline{F_1F_2}|$, l'ellisse avente F_1 e F_2 come fuochi e α come lunghezza del semiasse maggiore coincide col luogo dei punti $P(x,y)$ tali che $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2\alpha$.

Soluzioni.

1. (a) L'integrale $\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}(e^x-1)^{\frac{\alpha}{2}}\,dx$ va studiato in 0^+ e in $+\infty$. Poiché $e^x-1\sim_0 x$ si ha $x^{\alpha+1}(e^x-1)^{\frac{\alpha}{2}}\sim_{0^+} x^{\alpha+1+\frac{\alpha}{2}}=x^{\frac{3\alpha}{2}+1}$, da cui la condizione $\frac{3\alpha}{2}+1>-1$, ovvero $\alpha>-\frac{4}{3}$. Quanto a $+\infty$, a causa della rapida decrescenza dell'esponenziale si ha integrabilità quando $\alpha<0$, mentre per $\alpha=0$ si ottiene x, che non è integrabile a $+\infty$. Ricapitolando, l'integrale proposto esiste per $-\frac{4}{3}<\alpha<0$. Quando $\alpha=-1$, posto $e^x-1=u^2$ (da cui $x=\log(u^2+1)$ e $dx=\frac{2u}{u^2+1}\,du$) si ha $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}\,du=2(\operatorname{arctg} u]_0^{+\infty}=2(\frac{\pi}{2}-0)=\pi$.

(b) (Figura 1) La funzione $f_1(t)=\sqrt{e^t-1}$ è definita (e localmente integrabile) per $t\ge 0$, dunque il dominio di $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\sqrt{e^t-1}\,dt$ è dato da $\frac{1}{x}\ge 0$, ovvero $x>0$. Poiché $f_1(t)$ è positiva, si avrà $F(x)=0$ quando $\frac{1}{x}=1$ (ovvero $x=1$), e $F(x)>0$ se e solo se $\frac{1}{x}>1$ (ovvero $0<x<1$). I limiti notevoli sono $\lim_{x\to 0^+}F(x)=\int_1^{+\infty}\sqrt{e^t-1}\,dt=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_1^0\sqrt{e^t-1}\,dt=-\int_0^1\sqrt{e^t-1}\,dt=:\ell<0$, un numero finito e negativo di cui non conosciamo il valore preciso fin tanto che non disponiamo di una primitiva di $f_1(t)$: in ogni caso, $F(x)$ ha la retta $y=\ell$ come asintoto orizzontale a $+\infty$. Derivando si ha $F'(x)=f_1(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})'-f_1(1)(1)'=-\frac{\sqrt{e^{1/x}-1}}{x^2}<0$, dunque F è strettamente decrescente. Infine, derivando ancora si ha $F''(x)=\frac{e^{1/x}+4x(e^{1/x}-1)}{2x^4\sqrt{e^{1/x}-1}}>0$, dunque F è strettamente convessa. Solo a questo punto cerchiamo una primitiva di $f_1(t)$: posto come prima $e^t-1=u^2$, si ottiene $\int\sqrt{e^t-1}\,dt=2\int\frac{u^2}{u^2+1}\,du=2(u-\operatorname{arctg} u)+k=2(\sqrt{e^t-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^t-1})+k$, da cui si determina la forma finita $F(x)=2(\sqrt{e^{1/x}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^{1/x}-1})-2(\sqrt{e-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e-1})$ che permette finalmente di calcolare il valore di $\ell=\lim_{x\to+\infty}F(x)=-2(\sqrt{e-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e-1})\sim -0{,}8$.

2. (a) Se $y\equiv y_0$ fosse una soluzione costante di $2x^3yy'\cos y^2=1$, essendo $y'\equiv 0$ si avrebbe $0=1$, assurdo: dunque l'equazione non ha soluzioni costanti. Notiamo che, per lo stesso motivo, nessuna delle soluzioni può essere definita in $x=0$, né può annullarsi, né può assumere valori del tipo $\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ con $k\in\mathbb{Z}$. Separando le variabili si ha allora $(2y\cos y^2)y'=\frac{1}{x^3}$, da cui, integrando, si ottiene $\sin y^2=-\frac{1}{2x^2}+k$; la condizione $y(1)=\sqrt{m\pi}$ dà allora $0=-\frac{1}{2}+k$, da cui $k=\frac{1}{2}$, e dunque $\sin y^2=\frac{x^2-1}{2x^2}$. Usando ancora la condizione di Cauchy si ottiene allora $y_m(x)^2=\arcsin\frac{x^2-1}{2x^2}+m\pi$, da cui finalmente $y_m(x)=\sqrt{\arcsin\frac{x^2-1}{2x^2}+m\pi}$, definita per $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(b) L'equazione $y''+2e^{-\alpha x}+\alpha y'=0$, ovvero $y''+\alpha y'=-2e^{-\alpha x}$, è del 2o ordine a coefficienti costanti. Trattiamo subito a parte il caso $\alpha=0$, in cui si ha $y''=-2$, che ha come soluzioni $y(x)=A+Bx-x^2$ con $A,B\in\mathbb{C}$; d'ora in poi supponiamo $\alpha\ne 0$. Le radici dell'equazione caratteristica sono 0 e $-\alpha$, dunque un sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea sono 1 e $e^{-\alpha x}$. Una soluzione particolare della completa sarà della forma $\tilde{y}(x)=ax\,e^{-\alpha x}$ con a da determinare; imponendo che $\tilde{y}''+\alpha\tilde{y}'=-2e^{-\alpha x}$ si ottiene $a=\frac{2}{\alpha}$, dunque l'integrale generale sarà $y(x)=A+(B+\frac{2}{\alpha}x)e^{-\alpha x}$ con $A,B\in\mathbb{C}$. Naturalmente, nel caso $\alpha\ne 0$ si può procedere anche come segue: da $y''+\alpha y'=-2e^{-\alpha x}$ integrando si ricava $y'+\alpha y=\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha x}+k$ con $k\in\mathbb{C}$, e risolvendo come equazione lineare del 1o ordine si ha $y(x)=e^{-\alpha x}(\frac{ke^{\alpha x}+2x}{\alpha}+h)$ con $k,h\in\mathbb{C}$, che è del tipo precedente con $(A,B)=(\frac{1}{\alpha}k,h)$.

3. (a) (Figura 2) Come ricordato, l'ellisse è il luogo dei $P(x,y)$ per i quali vale $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3$. Scrivendo $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3-\sqrt{x^2+y^2}$ ed elevando al quadrato si ottiene $x^2-4x+4+y^2-2y+1=9+x^2+y^2-6\sqrt{x^2+y^2}$, ovvero $3\sqrt{x^2+y^2}=2x+y+2$; elevando ancora al quadrato si ha $9x^2+9y^2=4x^2+y^2+4+4xy+8x+4y$, ovvero il polinomio richiesto $g(x,y)=5x^2-4xy+8y^2-8x-4y-4=0$. Si noti che $g(A(2,0))=0$: un vettore ortogonale a Γ in A è $\nabla g(A)=(10x-4y-8,\,-4x+16y-4)_{(2,0)}=12(1,-1)$, dunque la retta ortogonale a Γ in A è $r=\{(x,y)=(2,0)+t(1,-1):t\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)=(2+t,-t):t\in\mathbb{R}\}$; eliminando il parametro t si ottiene la forma cartesiana $x+y-2=0$. Essendo $\frac{\partial g}{\partial y}(A)=-12\ne 0$, per ottenere una parametrizzazione di Γ all'intorno di A si può esplicitare $y(x)$ da $g(x,y)=0$, con $y(2)=0$ e $y'(2)=-\frac{12}{-12}=1$ (per uso futuro, notiamo che in questo caso da $g(x,y)=8y^2-4(x+1)y+5x^2-8x-4=0$ si può trovare la forma esplicita $y(x)=\frac{2(x+1)-\sqrt{4(x+1)^2-8(5x^2-8x-4)}}{8}=\frac{1}{4}(x+1-3\sqrt{1+2x-x^2}))$, dunque la retta ortogonale a Γ in A è $y-0=-\frac{1}{1}(x-2)$, cioè nuovamente $x+y-2=0$.

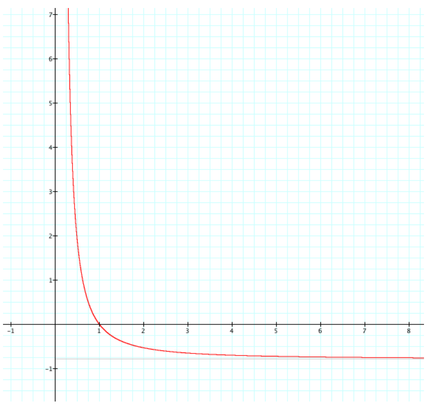
(b) Γ è compatta in quanto chiusa e limitata, perciò la funzione continua $f(x,y) = x+2y-1$ vi ammette estremi assoluti per Weierstrass. Per determinarli usiamo il metodo di Lagrange, in base al quale i punti stazionari di f su Γ sono le soluzioni del sistema dato dalle equazioni $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10x-4y-8 & -4x+16y-4 \end{pmatrix} = 0$ (ovvero $2x-2y-1=0$) e $g(x,y) = 5x^2-4xy+8y^2-8x-4y-4 = 0$, ovvero i punti $B(0,-\frac{1}{2})$ e $C(2,\frac{3}{2})$: essendo $f(B) = -2$ e $f(C) = 4$, gli estremi di f su Γ sono -2 (assunto in B) e 4 (assunto in C). L'interpretazione grafica dei risultati ottenuti è evidente, visto che le curve di livello di f sono le rette del tipo $x+2y+k=0$ (Figura 2).

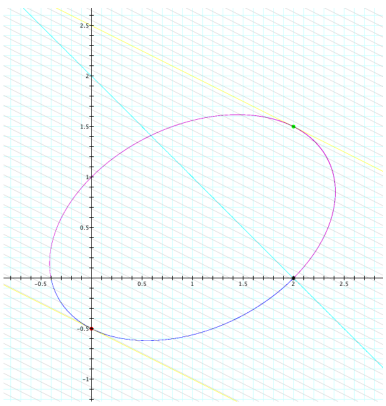
(c) (Figura 2) La porzione di ellisse $\widetilde{\Gamma} = \{(x,y) \in \Gamma : y \le 0\}$ può essere parametrizzata globalmente come il tratto di curva-grafico della funzione $y(x) = \frac{1}{4}(x+1-3\sqrt{1+2x-x^2})$ (ricavata poco fa) compreso tra i punti $(-\frac{2}{5},0)$ e $(2,0)$, ovvero tramite $\gamma : [-\frac{2}{5},2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(x) = (x,y(x))$. Da $\gamma'(x) = (1,y'(x)) = (1,\frac{1}{4}(1+\frac{3(x-1)}{\sqrt{1+2x-x^2}}))$ si ha l'elemento d'arco $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+\frac{1}{16}(1+\frac{3(x-1)}{\sqrt{1+2x-x^2}})^2}$, con cui si calcolano la lunghezza $L = \int_{-\frac{2}{5}}^{2} \|\gamma'(x)\|\,dx$ e le coordinate del baricentro $(\frac{1}{L}\int_{-\frac{2}{5}}^{2} x\|\gamma'(x)\|\,dx\,,\ \frac{1}{L}\int_{-\frac{2}{5}}^{2} y(x)\|\gamma'(x)\|\,dx)$.

4. (a) Data $h(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x+y-z)-x+yz$, si ha $\nabla h = (\frac{1}{(x+y-z)^2+1}-1, \frac{1}{(x+y-z)^2+1}+z, -\frac{1}{(x+y-z)^2+1}+y)$; ponendo $\nabla h = (0,0,0)$, ovvero $\frac{1}{(x+y-z)^2+1} = -z = y = 1$, si ottiene il solo punto $P(-2,1,-1)$. Poiché $h(P) = 1$, tutte le superfici di livello X_α con $\alpha \ne 1$ saranno regolari, e lo sarà anche X_1 in tutti i punti diversi da P. Essendo $h(Q(-1,3,2)) = 7$ si ha $Q \in \mathsf{X}_7$, ed il piano tangente affine a X_7 in $Q(-1,3,2)$ ha equazione cartesiana $\nabla h(-1,3,2) \cdot (x-(-1), y-3, z-2) = 0$, ovvero $(0,3,2) \cdot (x+1,y-3,z-2) = 0$, ovvero $3y+2z-13=0$.

(b) Da $\nabla h(Q) = (0,3,2)$ si nota che $\frac{\partial h}{\partial y}(Q) = 3 \ne 0$, dunque da $h(x,y,z) = 7$ si può esplicitare $y(x,z)$ all'intorno di Q, con $y(-1,2) = 3$ e $\nabla y(-1,2) = (\frac{\partial y}{\partial x}(-1,2), \frac{\partial y}{\partial z}(-1,2)) = -\frac{1}{3}(0,2) = (0,-\frac{2}{3})$: pertanto lo sviluppo richiesto è $y(x,z) = 3+0(x+1)-\frac{2}{3}(z-2)+o(\|(x+1,z-2)\|)$. Inoltre, poiché X_7 è espressa localmente in Q come grafico di $y(x,z)$, il piano tangente affine a X_7 in Q è dato da $y = 3+0(x+1)-\frac{2}{3}(z-2)$, ovvero ancora $3y+2z-13=0$.

(c) Per vedere che la curva ℓ ottenuta intersecando X_7 col paraboloide ellittico $k(x,y,z) = x^2+y^2-3z-4=0$ è regolare all'intorno del suo punto $Q(-1,3,2)$ basta verificare che la matrice $\begin{pmatrix} \nabla h(Q) \\ \nabla k(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ ha rango 2, il che è evidente. Lo spazio tangente (omogeneo) $\mathsf{T}_Q\ell$ è la retta di forma cartesiana $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} 3y+2z=0 \\ 2x-6y+3z=0 \end{cases}$; un vettore parallelo è perciò $(21,4,-6)$, da cui la forma parametrica $\mathsf{T}_Q\ell = \{t(21,4,-6) : t \in \mathbb{R}\}$.





1. Grafico della funzione integrale $F(x)$ dell'ex. (1.b). **2.** L'ellisse Γ dell'ex. 2 (la porzione $\widetilde{\Gamma}$ è in blu). La retta ortogonale a Γ in A è in azzurro. Le curve di livello di f sono grigie, mentre quelle passanti per B e C —estremanti assoluti per f su Γ— sono gialle.

Prima prova parziale (15/05/2008)

1. Sia $f_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\quad f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha + \sqrt{x}}$.

(a) Studiare l'integrabilità (semplice e assoluta) di $f_\alpha(x)$ e di $f_\alpha(x)\sin(3x^2)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare poi $\int_0^{+\infty} f_{\frac{3}{2}}(x)\,dx$.

(b) Studiare l'andamento di $F(x) = \int_{x^2}^{1} f_2(t)\,dt$; risalire poi a una forma finita di F.

2. Si abbia l'equazione differenziale $\lambda y'' + (\lambda - 1)y' - y = \varphi(x)$, ove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\varphi(x)$ è continua.

(a) Posti $\lambda \neq 0$ e $\varphi(x) = 1 + e^{-x}$, determinare l'integrale generale.

(b) Posti $\lambda = 0$ e $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$, dare un'espressione della soluzione $\tilde{y}(x)$ tale che $\tilde{y}(1) = 2$ e calcolarne i limiti in -1^+ e in $+\infty$.

3. (a) Disegnare nel piano le curve $\mathcal{A}$ di equazione $\log y + 1 = xy$ e $\mathcal{B}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$ con $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, parametrizzarle in modo opportuno e calcolare l'equazione delle rette tangenti nel loro punto $P(1,1)$. Scrivere poi in modo corretto (senza calcolarlo) l'integrale che dà la lunghezza del tratto di $\mathcal{B}$ con $x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(b) Intersecando in $\mathbb{R}^3$ la superficie $z = x^2 - 2y^2$ (cos'è?[(38)]) col semipiano $2x + 4y - z = 0$ con $y > -1$ si ottiene una curva Γ. Descrivere Γ e parametrizzarla in due modi diversi, prima come grafico di x e poi con un uso opportuno delle funzioni iperboliche $\cosh t$ e $\sinh t$, esibendo il cambio di parametro, e calcolare in due modi un vettore tangente a Γ in $O(0,0,0)$.

4. Si consideri la funzione reale $f(x,y) = \frac{x + y^2 - 2}{x - y}\, e^{-\frac{1}{|xy|}}$.

(a) Disegnare il dominio di f, gli zeri ed il segno; parlare della continuità; calcolarne poi i limiti notevoli nei punti d'accumulazione in $\overline{\mathbb{R}^2}$ del dominio.

(b) Disegnare $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \geq 1,\ x - y + 1 \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$, e descriverne le proprietà topologiche (aperto, chiuso, compatto, connesso...?). Che dire di $f(L)$ e di $f|_L$?

[(38)]per capirlo, provare ad intersecarla con i piani verticali $y = k$ e orizzontali $z = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzioni.

1. (a) La funzione $f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha+\sqrt{x}}$ va esaminata in 0^+ e in $+\infty$, all'intorno dei quali ha segno positivo. In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, dunque l'integrale converge per ogni α per il confronto. In $+\infty$, se $\alpha \le \frac{1}{2}$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$, non integrabile; se invece $\alpha > \frac{1}{2}$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, da cui $-\alpha < -1$ ovvero $\alpha > 1$. Pertanto $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ ha senso se e solo se $\alpha > 1$.
Passiamo ora a $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)\sin(3x^2)$. In 0^+ si noti che g_α è infinitesima, dunque integrabile, per ogni α. Quanto a $+\infty$, $g_\alpha(x)$ ha segno oscillante; ponendo $t = x^2$ si ha $\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{2}}+t^{\frac{1}{4}}} \sin 3t\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}+t^{\frac{3}{4}}}\,dt$: se $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ (ovvero se $\alpha > 1$) si ha $|\frac{\sin 3t}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}+t^{\frac{3}{4}}}| \le \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ e dunque si ha integrabilità assoluta, mentre se $\frac{\alpha+1}{2} \le 1$ (ovvero se $\alpha \le 1$), grazie alla presenza di $t^{\frac{3}{4}}$ si ha integrabilità semplice per Abel-Dirichlet, anche se non assoluta. Ricapitolando, $\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\,dx$ converge semplicemente per $\alpha \le 1$ e assolutamente per $\alpha > 1$. Infine, se $\alpha = \frac{3}{2}$, posto $x = u^2$ si ha $\int_0^{+\infty} f_{\frac{3}{2}}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = (2\operatorname{arctg} u]_0^{+\infty} = \pi$.

(b) (Figura 1) $F(x) = \int_{x^2}^1 f_2(t)\,dt = \int_{x^2}^1 \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,dt$ è definita per $x \ne 0$ (infatti, poiché $f_2(t)$ è definita per $t > 0$ va posto $x^2 > 0$, che equivale appunto a $x \ne 0$) ed è evidentemente pari, dunque la studieremo per $x > 0$. Essendo $f_2(t) \ge 0$ si ha $F(x) \ge 0$ se e solo se $x^2 \le 1$, ovvero $0 < x \le 1$. Come visto in precedenza la funzione $f_2(t)$ è integrabile sia in 0^+ che in $+\infty$, dunque i due limiti notevoli di $F(x)$ sono finiti e valgono $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,dt > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{+\infty}^1 \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,dt = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,dt < 0$ (per il valore preciso servirebbe ad esempio una primitiva di $f_2(t)$). Derivando per $x > 0$ si trova $F'(x) = -2x\, f_2(x^2) = -\frac{2}{x^3+1}$, dunque F è strettamente decrescente per $x > 0$; derivando ulteriormente si trova $F''(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$, dunque F è strettamente convessa per $x > 0$. Da $F'(x) = -\frac{2}{x^3+1}$ si può risalire integrando ad una forma finita per F: essendo $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ si avrà $-\frac{2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ per opportuni $a, b, c \in \mathbb{R}$, e sommando e confrontando si ottiene $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ e $c = -\frac{4}{3}$: dunque $-\frac{2}{x^3+1} = \frac{2}{3}(\frac{x-2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{x+1}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} - 2\frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1})$, da cui $F(x) = \int \frac{-2}{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}(\log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})) + k$, ed imponendo che $F(1) = 0$ si ottiene $k = \frac{2}{3}(\log 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6})$ (si ricordi che ciò vale solo per $x > 0$: in generale, data la parità di F, basta sostituire x con $|x|$). Per finire, è ora possibile calcolare precisamente i limiti notevoli di F: essi sono $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{2}{3}(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \log 2) \sim 1{,}67$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{2}{3}(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \log 2) \sim -0{,}75$.

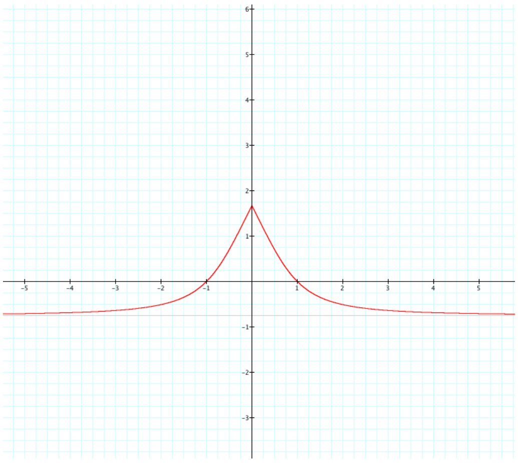
2. (a) L'equazione $\lambda y'' + (\lambda-1)y' - y = 1 + e^{-x}$ è del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica ha radici -1 e $\frac{1}{\lambda}$: dunque un sistema fondamentale di soluzioni per l'omogenea è dato da $\varphi_1(x) = e^{-x}$ e $\varphi_2(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x}$ (se $\lambda \ne -1$) e da da $\varphi_1(x) = e^{-x}$ e $\varphi_2(x) = xe^{-x}$ (se $\lambda = -1$). Una soluzione particolare relativa a $b_1(x) = 1$ è la costante $\tilde{\varphi}_1(x) = -1$. Quanto a $b_2(x) = e^{-x}$, se $\lambda \ne -1$ una soluzione particolare è del tipo $\tilde{\varphi}_2(x) = axe^{-x}$, e si ricava $a = -\frac{1}{\lambda+1}$; se invece $\lambda = -1$ una soluzione particolare è del tipo $\tilde{\varphi}_2(x) = ax^2e^{-x}$, e si ricava $a = -\frac{1}{2}$. Dunque, se $\lambda \ne -1$ l'integrale generale reale (al variare di $A, B \in \mathbb{R}$) è $y(x) = (A - \frac{1}{\lambda+1}x)e^{-x} + Be^{\frac{1}{\lambda}x} - 1$; se invece $\lambda = -1$ esso è $y(x) = (A + Bx - \frac{1}{2}x^2)e^{-x} - 1$.
(b) Posti $\lambda = 0$ e $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ si ottiene l'equazione lineare del primo ordine $y' + y = -\frac{1}{x+1}$; un'espressione integrale della soluzione $\tilde{y}(x)$ tale che $\tilde{y}(1) = 2$ è $\tilde{y}(x) = e^{-x}(2e - \int_1^x \frac{e^t}{t+1}\,dt)$. Poiché l'integrale generalizzato $\int_1^{-1} \frac{e^t}{t+1}\,dt = -\int_{-1}^1 \frac{e^t}{t+1}\,dt$ diverge a $-\infty$ (infatti $\frac{e^t}{t+1} \sim^*_{-1^+} \frac{1}{t+1}$ non è integrabile in -1^+) si ha $\lim_{x\to-1^+} \tilde{y}(x) = +\infty$. Quanto a $+\infty$, l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t+1}\,dt$ diverge a $+\infty$ (infatti $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t+1} = +\infty$), dunque $\lim_{x\to+\infty} \tilde{y}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e - \int_1^x \frac{e^t}{t+1}\,dt}{e^x}$ è in forma $\frac{\infty}{\infty}$: con de l'Hôpital si ha allora $\lim_{x\to+\infty} \tilde{y}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{e^x}{x+1}}{e^x} = 0^-$.

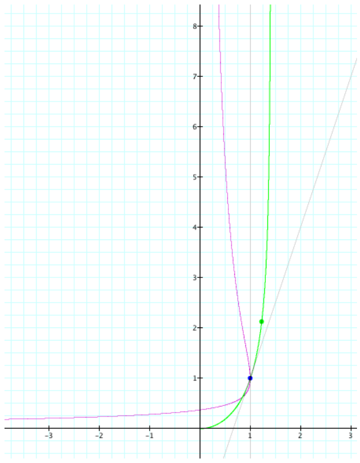
3. (a) (Figura 2) La curva $\mathcal{A}$ definita dall'equazione $\log y + 1 = xy$ (deve essere dunque $y > 0$) è esprimibile in forma-grafico $x(y) = \frac{\log y + 1}{y}$, di facile disegno (si ha $x(y) \ge 0$ per $y \ge \frac{1}{e}$, $\lim_{y\to 0^+} x(y) = -\infty$, $\lim_{y\to+\infty} x(y) = 0^+$, $x'(y) = -\frac{\log y}{y^2}$ dunque $x(y)$ ha massimo assoluto $x(1) = 1$ in $y = 1$). La parametrizzazione associata è

$\gamma_{\mathcal{A}} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ con $\gamma_{\mathcal{A}}(y) = (x(y), y)$, dunque un vettore tangente a $\mathcal{A}$ in $P(1,1)$ è $\gamma'_{\mathcal{A}}(1) = (x'(1), 1) = (0,1)$: pertanto la retta tangente a $\mathcal{A}$ in $P(1,1)$ è $x = 1$.
La curva polare $\mathcal{B}$ data da $\rho(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$ con $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ si parametrizza come noto tramite $\gamma_{\mathcal{B}} :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ con $\gamma_{\mathcal{B}}(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) = (\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta})$. Derivando si trova $\gamma'_{\mathcal{B}}(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}))$, dunque un vettore tangente a $\mathcal{B}$ in $P(1,1) = \gamma_{\mathcal{B}}(\frac{\pi}{4})$ è $\gamma'_{\mathcal{B}}(\frac{\pi}{4}) = (1,3)$: la retta cercata è $\{(1,1) + t(1,3) : t \in \mathbb{R}\}$, ovvero $3x - y - 2 = 0$.
L'elemento d'arco per $\mathcal{B}$ è $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\frac{\sqrt{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}\, d\theta$; si ha $x(\theta) = \sqrt{2}\sin\theta \le \sqrt{\frac{3}{2}}$ per $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, dunque la lunghezza cercata è $\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}\, d\theta$.
(b) (Figura 3) La superficie $z = x^2 - 2y^2$ è un *paraboloide iperbolico* ("sella da cavallo"): la traccia che lascia sul piano verticale $y = k$ è una parabola $z = x^2 - 2k^2$, e sul piano orizzontale $z = k$ è l'iperbole $x^2 - 2y^2 = k$ (con vertici lungo l'asse x o y a seconda che $k \gtrless 0$) che degenera nelle due rette $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ su $z = 0$. Il piano è dato da $z = 2x + 4y$, e confrontando le due espressioni di z si ottiene $x^2 - 2y^2 = 2x + 4y$, ovvero $\frac{(y+1)^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \frac{(x-1)^2}{(1)^2} = 1$, un'iperbole nel piano orizzontale $z = 0$ di semiasse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lungo y e asintoti pendenti $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ traslata nel centro $(1,-1)$: il ramo di questa iperbole con $y > -1$ non è altro che la proiezione di Γ sul piano $z = 0$, ed è dato da $y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} - x + 1} - 1$ (ricavata dall'equazione precedente). Ricordando che $z = 2x + 4y$ si ha allora $z(x) = 2x + 4y(x) = 2x + 4\sqrt{\frac{x^2}{2} - x + 1} - 4$, da cui la parametrizzazione $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma_1(x) = (x, y(x), z(x))$ come grafico di x. Ricordando che $(\sinh t, \cosh t)$ è il punto che corre sul ramo di iperbole $Y^2 - X^2 = 1$ con $Y > 0$, adattando opportunamente alla nostra situazione (bisogna traslare il centro in $(1,-1)$, riscalare rispetto y di un fattore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e ricordare che $z(t) = 2x(t) + 4y(t)$) si ottiene la parametrizzazione alternativa $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma_2(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1 + \sinh t, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh t, 2(-1 + \sinh t - \sqrt{2}\cosh t))$. Il cambio di parametro è $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $x = \alpha(t) = 1 + \sinh t$ (è biiettiva, e $\alpha'(t) = \cosh t \neq 0$ per ogni t). Si ha $O = \gamma_1(0) = \gamma_2(t_0)$ con $1 + \sinh t_0 = 1 + \frac{e^{t_0} - e^{-t_0}}{2} = 0$, ovvero $t_0 = \log(\sqrt{2} - 1)$: derivando si trovano i vettori tangenti $\gamma'_1(0) = (1, -\frac{1}{2}, 0)$ e $\gamma'_2(t_0) = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, ovviamente paralleli.

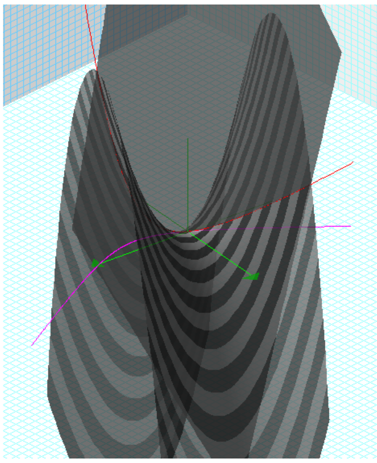
4. (a) (Figura 4) Il dominio di $f(x,y) = \frac{x+y^2-2}{x-y}\, e^{-\frac{1}{|xy|}}$ si ottiene rimuovendo dal piano $\mathbb{R}^2$ i due assi coordinati e la bisettrice $y = x$; in tale dominio f è continua, si annulla sulla parabola $x = 2 - y^2$ ed ha segno dato dal quoziente tra i segni del numeratore (positivo fuori dalla parabola e negativo dentro) e del numeratore (positivo sotto la bisettrice e negativo sopra). I limiti notevoli sono nei punti degli assi coordinati, in quelli della bisettrice e in ∞_2. In un qualsiasi punto degli assi coordinati diverso da $O(0,0)$ il limite è 0, perché evidentemente $e^{-\frac{1}{|xy|}}$ tende a 0^+. Nei punti della bisettrice diversi da $P(1,1)$ e $Q(-2,-2)$ (sono le intersezioni con la parabola) e da $O(0,0)$ il limite è ∞, perché $x - y$ tende a 0; in P e Q il limite non esiste, perché tendendovi lungo la parabola f è nulla, ma in ogni loro intorno vi sono punti della bisettrice in cui –come visto– f diverge. E non esiste nemmeno in O: infatti, tendendovi lungo l'altra bisettrice si ha $\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-2}{2x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, ma anche in ogni suo intorno vi sono punti della bisettrice in cui f diverge. Ci resta solo ∞_2, nemmeno nel quale esiste il limite (si ragiona come per P e Q: tendendovi lungo la parabola f è nulla, ma nei punti della bisettrice f diverge).
(b) (Figura 4) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \ge 1,\ x - y + 1 \le 0,\ x^2 + y^2 \le 4\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso (si noti che $\max\{|x|,|y|\} \ge 1$ dà un chiuso perché è l'unione dei due chiusi $|x| \ge 1$ e $|y| \ge 1$) e limitato (è contenuto nella palla di centro O e raggio 2), dunque compatto; esso è inoltre connesso per archi (infatti, comunque dati due suoi punti, è un facile esercizio descrivere una curva continua fra loro) e dunque connesso. Se L fosse interamente contenuto nel dominio di f, poiché f è continua la sua immagine $f(L)$ sarebbe anch'essa un sottoinsieme compatto e connesso di $\mathbb{R}$, dunque un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato. È però evidente che L non è contenuto nel dominio di f (infatti gli assi ne sono esclusi). Dobbiamo alzare bandiera bianca? In questo caso, non troppo presto: infatti, da quanto visto prima si può estendere per continuità f a tutti i punti degli assi diversi dall'origine O con valore 0 (ovvero definendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e ogni $y \neq 0$), e se pensiamo a questa f estesa allora quanto detto prima diventa vero (infatti L si tiene ben lontano dalla bisettrice, i cui punti sono ora gli unici esclusi dal dominio). Gli estremi a e b dell'intervallo $f(L) = [a,b]$ saranno rispettivamente il minimo e massimo assoluti di $f|_L$, che esistono per Weierstrass: tuttavia, a questo livello del corso non siamo ancora in grado di calcolarli[**39**]. Lo saremo alla fine del corso, una volta acquisiti i mezzi del calcolo differenziale.

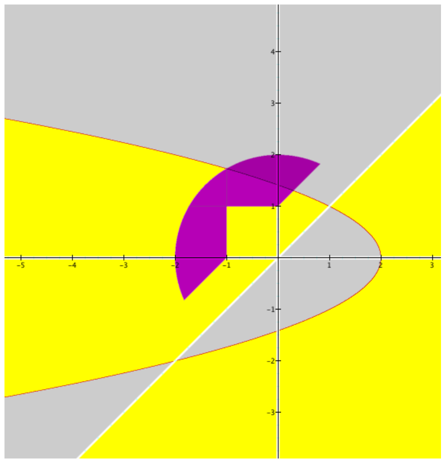
[**39**] A dire il vero, dalla figura si può dedurre che $a < 0$ e $b > 0$: perché?





1. La funzione integrale $F(x)$ dell'esercizio 1. **2.** Le curve $\mathcal{A}$ (viola) e $\mathcal{B}$ (verde) dell'esercizio 3.





3. Il paraboloide iperbolico (grigio rigato) e il semipiano (grigio), la curva Γ (rosso) e la sua proiezione sul piano orizzontale (viola).

4. Dominio (zone colorate), zeri (rosso), segno di $f(x, y)$ (positiva in giallo, negativa in grigio) e insieme L (viola) dell'esercizio 4.

Prova scritta - Seconda prova parziale (16/06/2008)

1. [S] Studiare l'integrabilità generalizzata di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{3-4\alpha}}{|x-1|^{\alpha+1}}|\log x|^{2\alpha} + e^{-\alpha x}$.

2. [S]

(a) Trovare in due modi l'integrale generale S dell'equazione $y - 2xy' = 1$ per $x > 0$.

(b) Data per $x > 0$ l'equazione differenziale lineare $2x^2y'' - xy' + y = 5x^3 + 1$, cercarne un sistema fondamentale di soluzioni[(40)] del tipo $\{x^\alpha,\ x^\beta\}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$, e scriverne l'integrale generale T. Calcolare infine $S \cap T$.

3. [S, P] Sia $f(x,y) = x^2 - y + \log(xy + 3)$.

(a) Trovare dominio e limiti notevoli di f.

(b) Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta poi X quella passante per $A(2,-1)$, calcolare la retta affine tangente a X in A.

(c) Mostrare che, all'intorno di $B(-1,2)$, da $f(x,y) = f(B)$ si può esplicitare $y(x)$. Calcolare lo sviluppo di $y(x)$ fino al secondo ordine in $x = -1$, deducendo il carattere di tale punto.

(d) Trovare eventuali estremi locali di f nel dominio. Dire poi perché f ammette estremi assoluti nell'insieme $C = \{(x,y) : x^2 - 3 \leq y \leq 1\}$, e calcolarli.

4. [P] In $\mathbb{R}^3$ si abbiano la funzione $g(x,y,z) = 2xy + e^{x+2yz} + 3z$ e il punto $A(1,1,-\frac{1}{2})$.

(a) Dire quali delle superfici di livello di g sono regolari. Detta X quella passante per A, calcolare T_AX in due modi.

(b) Sia Π il piano orizzontale (x,y), e sia A' la proiezione di A su Π. Determinare la spirale di Archimede in Π (rispetto alle usuali coordinate polari di Π) alla quale appartiene A'.[(41)] Detto Γ il tratto di tale spirale nel primo quadrante di Π, si faccia ruotare Γ di un giro completo attorno all'asse y: trovare una forma cartesiana della superficie così ottenuta.

(c) La curva ℓ giace su X, passa per A e la sua proiezione su Π è Γ. Spiegare perché ℓ esiste ed è unica (almeno vicino a A), parametrizzarla e determinarne la retta tangente affine in A.

[(40)] si ricorda che un "sistema fondamentale di soluzioni" è una base dello spazio di soluzioni dell'omogenea associata.

[(41)] una spirale di Archimede è una curva polare di tipo $\rho = k\theta$, per qualche $k > 0$: si chiede dunque di trovare il buon k.

Soluzioni.

1. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^{3-4\alpha}}{|x-1|^{\alpha+1}}|\log x|^{2\alpha} + e^{-\alpha x}$ è definita in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0,\, x \neq 1\}$, dunque l'integrabilità va controllata in 0^+, in $1^\mp$ e in $+\infty$; inoltre, in 0^+ e $1^\mp$ l'addendo $e^{-\alpha x}$, avendo limite finito, non influisce sull'eventuale integrabilità o meno di $f_\alpha(x)$, e dunque lì ci occuperemo solo dell'altro addendo.
In 0^+ si ha $\frac{x^{3-4\alpha}}{|x-1|^{\alpha+1}}|\log x|^{2\alpha} \sim_{0^+} x^{3-4\alpha}|\log x|^{2\alpha}$, dunque la condizione è $3 - 4\alpha > -1$ (ovvero $\alpha < 1$) oppure $3 - 4\alpha = -1$ e $2\alpha < -1$ (no); pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha < 1$.
In $1^\pm$ si ha $|\log x| \sim |x - 1|$, dunque $\frac{x^{3-4\alpha}}{|x-1|^{\alpha+1}}|\log x|^{2\alpha} \sim_{1^\mp} |x - 1|^{\alpha-1}$, da cui $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$.
Infine, in $+\infty$, se $\alpha \leq 0$ si ha $\lim f_\alpha(x) = +\infty$ (a causa di $e^{-\alpha x}$ se $\alpha > 0$, o per conto diretto se $\alpha = 0$), dunque niente integrabilità; se $\alpha > 0$ l'addendo $e^{-\alpha x}$ è integrabile (dunque ancora una volta non influisce sull'integrabilità o meno di $f_\alpha(x)$), mentre l'altro addendo è $\sim_{+\infty} \frac{x^{3-4\alpha}}{x^{\alpha+1}}(\log x)^{2\alpha} = x^{2-5\alpha}(\log x)^{2\alpha}$, dunque la condizione è $2-5\alpha < -1$ (ovvero $\alpha > \frac{3}{5}$) oppure $2 - 5\alpha = -1$ e $2\alpha < -1$ (no); pertanto $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha > \frac{3}{5}$.

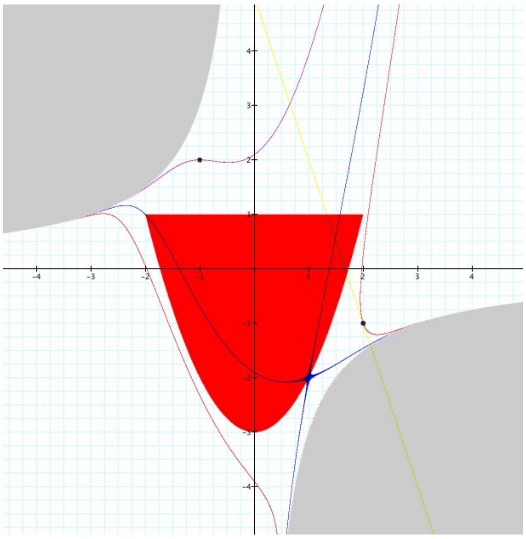
2. (i) L'equazione (del primo ordine) $y - 2xy' = 1$ si può risolvere per $x > 0$ sia come lineare che come variabili separabili: in entrambi i casi si ottiene facilmente $S = \{k\sqrt{x} + 1 : k \in \mathbb{R}\}$.
(ii) Essendo $x > 0$ possiamo portare l'equazione in forma normale $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{2x^2}y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2x^2}$. Imponendo che x^γ soddisfi per ogni $x > 0$ l'equazione omogenea associata si ottiene $\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} - \frac{1}{2x}\gamma x^{\gamma-1} + \frac{1}{2x^2}x^\gamma \equiv 0$, ovvero $\frac{1}{2}(2\gamma^2 - 3\gamma + 1)x^{\gamma-2} \equiv 0$, verificato per $\gamma = 1$ oppure $\gamma = \frac{1}{2}$: dunque un sistema fondamentale è dato da $\{\sqrt{x},\ x\}$. Per trovare la soluzione particolare, usando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie si trova $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$,[(3)] e perciò $T = \{A\sqrt{x} + Bx + \frac{1}{2}x^3 + 1 : A, B \in \mathbb{R}\}$. A causa della presenza dell'addendo $\frac{1}{2}x^3$ si nota dunque che $S \cap T = \varnothing$.

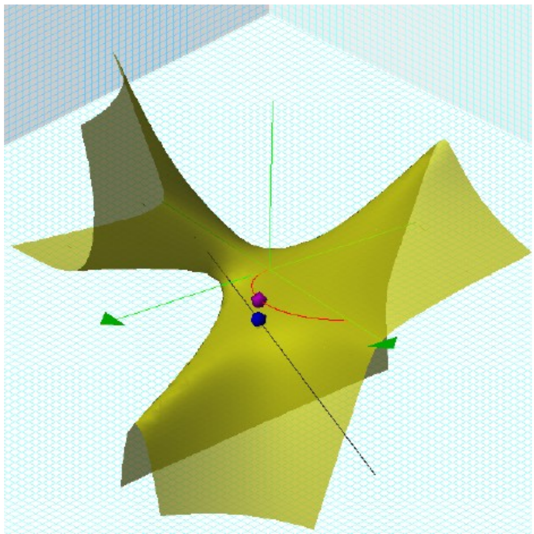
3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x, y) = x^2 - y + \log(xy + 3)$ è dato da $xy > -3$, ovvero la parte di piano compresa tra i rami dell'iperbole equilatera $xy = -3$ (esclusa). I limiti notevoli sono nei punti dell'iperbole e in ∞_2: in un qualsiasi punto dell'iperbole $(\alpha, -\frac{3}{\alpha})$ il limite vale chiaramente $-\infty$; quanto a ∞_2, tendendovi lungo il semiasse $\{(x, 0) : x > 0\}$ si tende a $+\infty$, mentre l'insieme degli zeri $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ non è limitato (ad esempio è facile vedere, con un confronto grafico, che per ogni $y = k > 0$ fissato, dunque anche per k grandissimo, l'equazione $f(x, k) = 0$, ovvero $k - x^2 = \log(kx + 3)$, ha una soluzione $x_k > 0$): perciò il limite in ∞_2 non esiste.
(b) Si ha $\nabla f = (2x + \frac{y}{xy+3}, -1 + \frac{x}{xy+3})$, dunque si ha $\nabla f = (0, 0)$ quando $xy + 3 = x = -\frac{y}{2x}$: si ricava dunque $y = -2x^2$ da cui $2x^3 + x - 3 = 0$, e poiché quest'ultima equazione ha come unica (evidente) soluzione reale $x = 1$, si ottiene il solo punto stazionario $P(1, -2)$. Dunque l'unica curva di livello con un punto singolare in P è (eventualmente, ma anche nella realtà: vedi la Figura 1) quella data da $f(x, y) = f(P) = 3$. In particolare X, che è data da $f(x, y) = f(A) = 5$, è regolare; e la retta affine tangente a X in A è data da $\nabla f(A)\cdot(x-2, y-(-1)) = 0$, ovvero $(3, 1) \cdot (x - 2, y + 1) = 0$, ovvero la retta $3x + y - 5 = 0$.
(c) Essendo $\nabla f(B) = (0, -2)$, per Dini si può esplicitare $y(x)$ all'intorno di $x = -1$ con $y(-1) = 2$ e $y'(-1) = -\frac{0}{-2} = 0$: il punto $x = -1$ è dunque stazionario per $y(x)$, ma per capirne il carattere serve anche $y''(-1)$. Da $f(x, y) = f(B) = -1$, derivando rispetto x si ricava $2x - y' + \frac{y+xy'}{xy+3} = 0$ (da cui, calcolando per $x = -1$ con $y(-1) = 2$, si ritrova $y'(-1) = 0$); derivando ancora si ha $2-y''+\frac{(y'+y'+xy'')(xy+3)-(y+xy')^2}{(xy+3)^2} = 0$ da cui, calcolando per $x = -1$, si ha $y''(-1) = -1 < 0$: dunque $x = -1$ è di massimo locale per $y(x)$, come conferma la Figura 1.
(d) (Figura 1) Come visto, l'unico punto stazionario è $P(1, -2)$; l'hessiano $\mathsf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{y^2}{(xy+3)^2} & \frac{3}{(xy+3)^2} \\ \frac{3}{(xy+3)^2} & -\frac{x^2}{(xy+3)^2} \end{pmatrix}$ in P diventa $\mathsf{H}_f(P) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, che è indefinito: dunque P è una sella. L'insieme $C = \{(x, y) : x^2 - 3 \leq y \leq 1\}$ è un compatto interamente contenuto nel dominio di f, e dunque per Weierstrass f vi assume estremi assoluti; per il calcolo conviene decomporre C nel suo interno C_1 (aperto, dunque varietà di dimensione 2), nel tratto rettilineo C_2 senza estremi (varietà di dimensione 1), nel tratto parabolico C_3 senza estremi (altra varietà di dimensione

---

[(3)] a dire il vero, che dovesse esserci una soluzione particolare del tipo $\alpha x^3 + 1$ era abbastanza intuibile anche osservando l'equazione nella forma di partenza, e bastava imporlo per trovare il buon α.

1) e nei due punti $C_4\{D(2,1),\ E(-2,1)\}$ (varietà di dimensione 0). In C_1, come appena visto, non vi sono punti stazionari (l'unico stazionario, peraltro non estremante, sarebbe P, ma non vi sta). C_2 è parametrizzata da $(t,1)$ con $|t|<2$, dunque si ha $F(t):=f(t,1)=t^2-1+\log(t+3)$: da $F'(t)=2t+\frac{1}{t+3}=0$ si ottiene l'unica soluzione accettabile $t=-\frac{3-\sqrt{7}}{2}$, da cui il punto $G(-\frac{3-\sqrt{7}}{2},1)$. C_3 è parametrizzata da (t,t^2-3) con $|t|<2$, dunque si ha $F(t):=f(t,t^2-3)=3+\log(t^3-3t+3)$: da $F'(t)=\frac{3t^2-3}{t^3-3t+3}=0$ si ottiene $t=\mp 1$, ovvero $L(-1,-2)$ e la vecchia conoscenza $P(1,-2)$; infine, entrambi i punti di C_4 sono da considerarsi stazionari. Gli estremi di f potranno dunque essere assunti solo nei punti $\{G,\ L,\ P,\ D,\ E\}$: essendo $f(G)=\log(\frac{3+\sqrt{7}}{2})-\frac{3}{2}(\sqrt{7}-2)\sim 0{,}07$, $f(L)=f(D)=3+\log 5\sim 4{,}6$ e $f(P)=f(E)=3$, il massimo assoluto di f su C è $3+\log 5$ (assunto in D e L) e il minimo è $\log(\frac{3+\sqrt{7}}{2})-\frac{3}{2}(\sqrt{7}-2)$ (assunto in G).





1. Esercizio 3: la curva blu è $f(x,y)=3$, che come si osserva è singolare in $P(1,-2)$; la curva rossa è $f(x,y)=5$ passante per $A(2,-1)$, con retta tangente in giallo; la curva porpora è $f(x,y)=-1$ passante per $B(-1,2)$, e si nota che la funzione implicita $y(x)$ ha ivi un massimo locale; infine, l'insieme compatto C è quello rosso. **2.** Esercizio 4: la superficie $g(x,y,z)=\frac{3}{2}$ (gialla) passa per A (blu); la spirale Γ (porpora) passa per A' (rosso) nel piano Π; la retta r tangente a ℓ in A (nero).

4. (a) (Figura 2) Data $g(x,y,z)=2xy+e^{x+2yz}+3z$, il gradiente $\nabla g=(2y+e^{x+2yz},\ 2x+2z\,e^{x+2yz},\ 2y\,e^{x+2yz}+3)$ si annulla quando $e^{x+2yz}=-2y=-\frac{x}{z}=-\frac{3}{2y}$: si ricava perciò $4y^2=3$, da cui $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ma essendo $e^{x+2yz}=-2y>0$ si può accettare solo $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$: perciò $\frac{x}{z}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ovvero $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}z$, che messo con $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $e^{x+2yz}=-2y$ dà $e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}z-z\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, ovvero $e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}z}=\sqrt{3}$, ovvero $-\frac{3\sqrt{3}}{2}z=\log(\sqrt{3})=\frac{1}{2}\log 3$, ovvero $z=-\frac{\sqrt{3}}{9}\log 3$, da cui $x=\frac{1}{6}\log 3$. Si ottiene dunque il solo punto singolare $P(\frac{1}{6}\log 3,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{9}\log 3)$, in cui vale $g(P)=-\frac{\sqrt{3}}{6}\log 3+e^{\frac{1}{2}\log 3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\log 3=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\log 3)\sim 0{,}8$. La superficie di livello $X=\{(x,y,z):g(x,y,z)=g(A)=\frac{3}{2}\}$ contenente $A(1,1,-\frac{1}{2})$ è dunque regolare, ed essendo $\nabla g(A)=(3,1,5)$ si ha $T_AX=\ker dg_A=\{(x,y,z):\nabla g(A)\cdot(x,y,z)=0\}=\{3x+y+5z=0\}$; alternativamente, da $g(x,y,z)=\frac{3}{2}$ si può esplicitare ad esempio $z(x,y)$ all'intorno di $(x_0,y_0)=(1,1)$ con $z(1,1)=-\frac{1}{2}$ e $(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})(1,1)=(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5})$, perciò T_AX può essere anche visto come il grafico di $dz_{(1,1)}$, che è $z=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y$, dunque nuovamente $3x+y+5z=0$.

(b) (Figura 2) Le coordinate polari di $A'(1,1,0)$ sul piano Π sono $(\rho_0,\theta_0)=(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$, dunque la spirale di Archimede contenente A' è $\rho=k_0\theta$ con $k_0=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$. (Per uso futuro, calcoliamo un vettore tangente alla spirale in A': usando la solita parametrizzazione $\gamma(\theta)=k_0(\theta\cos\theta,\theta\sin\theta)$, si ha $\gamma'(\frac{\pi}{4})=k_0(\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4})=(\frac{4}{\pi}-1,\frac{4}{\pi}+1)$.) Nel primo quadrante si ha $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, dunque un'equazione cartesiana per Γ è data da $\sqrt{x^2+y^2}=k_0\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; per avere un'equazione cartesiana della superficie ottenuta ruotando Γ di un giro completo attorno all'asse y, grazie alla simmetria cilindrica attorno all'asse basterà allora rimpiazzare x (che nel primo quadrante è > 0) con $\rho_{\text{cil}} = \sqrt{x^2+z^2}$, ottenendo $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = k_0 \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

(c) (Per capire meglio quanto si sta per spiegare, si cerchi di farsi nella mente un'immagine della situazione descritta nel quesito aiutandosi con la Figura 2.) Come visto prima, essendo $\frac{\partial g}{\partial z}(A) \neq 0$ si può esplicitare $z(x,y)$ vicino ad A: in altre parole, esiste un intorno aperto U di A in $\mathbb{R}^3$ tale che, detto U' la sua proiezione su Π (dunque U' è un intorno aperto di A' visto come il punto $(1,1)$ del piano (x,y)), il pezzo di varietà $X \cap U$ può essere visto come grafico della funzione $z(x,y) : U' \to \mathbb{R}$, ovvero $X \cap U = \{(x,y,z(x,y)) : (x,y) \in U'\}$; ancora con parole diverse, per ogni punto (x,y) di U' (nel piano) c'è uno e un solo punto di $X \cap U$ (nella varietà) che gli corrisponde diffeomorficamente, ed è quello con le prime due coordinate uguali a (x,y) e la terza coordinata data da $z(x,y)$. Dunque la curva ℓ non è altro che la copia diffeomorfa in $X \cap U$ della curva Γ, o perlomeno del pezzo di Γ che sta in U'; una parametrizzazione $\tilde{\gamma}$ per ℓ è ereditata dalla γ di Γ, ovvero $\tilde{\gamma}(\theta) = (\gamma(\theta), z(\gamma(\theta)))$, definita per θ vicino a $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ (l'argomento di A'). Derivando rispetto a θ e ponendo poi $\theta = \frac{\pi}{4}$, un vettore tangente a ℓ è allora $\tilde{\gamma}'(\frac{\pi}{4}) = (\gamma'(\frac{\pi}{4}), \nabla z(1,1) \cdot \gamma'(\frac{\pi}{4}))$: ricordando che $\nabla z(1,1) = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ e $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{4}{\pi} - 1, \frac{4}{\pi} + 1)$ si ottiene $\tilde{\gamma}'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{4}{\pi} - 1, \frac{4}{\pi} + 1, -\frac{1}{5}(\frac{16}{\pi} - 2))$ (che giustamente, si noti, è ortogonale a $\nabla g(A) = (3,1,5)$). Una forma parametrica della retta cercata è perciò $\{(1,1,-\frac{1}{2}) + \lambda(\frac{4}{\pi} - 1, \frac{4}{\pi} + 1, -\frac{1}{5}(\frac{16}{\pi} - 2)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Prova scritta (30/06/2008)

1. Dire qual'è il dominio (valido per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$) e studiare in esso l'integrabilità generalizzata di $f_\alpha(x) = x^\alpha\,|x-2|^{\frac{3\alpha}{2}+1}\,(\operatorname{arctg} x)^{\alpha+1}$. Calcolare poi $\int_0^2 f_0(x)\,dx$ e $\int_2^{+\infty} f_{-1}(x)\,dx$.

2. Sia data l'equazione differenziale $(y')^2 = xy^3$. Mostrare che l'integrale generale è dispari[42]; determinare quindi l'integrale generale per $x > 0$, verificando se, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, esso ha elementi in comune con quello dell'equazione $y'' + \alpha y' = 2$.

3. Sia $f(x) = \dfrac{3}{2 - \sin x}$, e sia Γ la curva polare data da $\rho = f(\theta)$ con $-\pi \le \theta \le \frac{\pi}{6}$.

(a) Dopo aver studiato l'andamento di $f(x)$ nel periodo $[-\pi, \pi]$, disegnare Γ (cos'è?), parametrizzarla opportunamente e calcolarne la retta tangente affine nel punto dato da $\theta = 0$. Esprimere poi Γ in forma cartesiana e ricalcolare la medesima retta.

(b) Dopo aver mostrato che Γ è compatta, calcolare gli estremi su Γ di $h(x, y) = x^2+y^2+y$ interpretando poi geometricamente i risultati.

4. Sia $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (\operatorname{arctg}(2x - y + z) + x^2 + yz,\ xyz - z^2 + 1)$.

(a) Dire quali superfici $\mathsf{X}_\alpha = \{g_1(x, y, z) = \alpha\}$ hanno punti singolari; esibire una parametrizzazione di X_0 all'intorno dell'origine, e calcolarne in due modi il piano tangente affine.

(b) Dal sistema $g(x, y, z) = (1, 0)$ esplicitare, all'intorno della soluzione $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$, due coordinate in funzione della rimanente, e calcolare gli sviluppi al primo ordine delle funzioni implicite così trovate.

(c) La funzione $x - y$ ha estremi locali su $\mathsf{Y} = \{g_2(x, y, z) = 2\}$?

Soluzioni.

1. Il dominio di $f_\alpha(x) = x^\alpha\,|x-2|^{\frac{3\alpha}{2}+1}\,(\operatorname{arctg} x)^{\alpha+1}$, valido per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, è $]0, +\infty[\setminus\{2\}$; l'integrabilità va dunque esaminata in 0^+, $2^\mp$ e $+\infty$. In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^\alpha x^{\alpha+1} = x^{2\alpha+1}$, da cui $2\alpha + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -1$. In $2^\mp$ vale $f_\alpha(x) \sim^*_{2^\mp} |x-2|^{\frac{3\alpha}{2}+1}$, da cui $\frac{3\alpha}{2} + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -\frac{4}{3}$. Infine, in $+\infty$ vale $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^\alpha x^{\frac{3\alpha}{2}+1} = x^{\frac{5\alpha}{2}+1}$, da cui $\frac{5\alpha}{2}+1 < -1$ ovvero $\alpha < -\frac{4}{5}$. Dunque i due integrali richiesti convergono: $\int_0^2 f_0(x)\,dx = \int_0^2 (2-x)\,\operatorname{arctg} x\,dx$ è un integrale ordinario, e vale $((2x - \frac{1}{2}x^2)\,\operatorname{arctg} x]_0^2 - \int_0^2 (2x - \frac{1}{2}x^2)\frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\,\operatorname{arctg} 2 - 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2-4x}{x^2+1}\,dx = 2\,\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\int_0^2 (1 - 2\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1})\,dx = 2\,\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}(x - 2\log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x]_0^2 = 2\,\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}(2 - 2\log 5 - \operatorname{arctg} 2) - (0) = \frac{3}{2}\operatorname{arctg} 2 + 1 - \log 5$; per l'altro, ponendo $x - 2 = u^2$ (da cui $x = u^2 + 2$ e $dx = 2u\,du$) si ha $\int_2^{+\infty} f_{-1}(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+2}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\frac{u}{\sqrt{2}})^2+1}\,du = (\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}(\frac{u}{\sqrt{2}})]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

---

[42] ovvero, detti $S^\pm$ gli integrali generali per $x \gtrless 0$, si ha $S^- = \{-f(-x) : f \in S^+\}$.

2. Sia $\varphi(x)$ una soluzione di $(y')^2 = xy^3$ per $x > 0$, e si consideri $\psi(x) := -\varphi(-x)$, definita dunque per $x < 0$: poiché allora $\psi'(x) := -(-1)\varphi'(-x) = \varphi'(-x)$, si ottiene $(\psi'(x))^2 = (\varphi'(-x))^2 = (-x)(\varphi(-x))^3 = x(-\varphi(-x))^3 = x(\psi(x))^3$, ovvero anche $\psi(x)$ è soluzione per $x < 0$. Il viceversa si dimostra allo stesso modo: dunque l'integrale generale è dispari. Per $x > 0$ si noti che deve essere $y(x) \geq 0$ (infatti $x(y(x))^3 = (y'(x))^2 \geq 0$): notato che la costante $y \equiv 0$ è soluzione, separando le variabili in $y' = \pm\sqrt{xy^3}$ si ottiene $y^{-\frac{3}{2}}y' = \pm\sqrt{x}$, da cui integrando $\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, ovvero $y(x) = \frac{9}{(k\mp x\sqrt{x})^2}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (ed entrambi i segni $\mp$ sono ammissibili). L'equazione $y'' + \alpha y' = 2$ ha integrale generale $y(x) = A + Be^{-\alpha x} + \frac{2}{\alpha}x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ (se $\alpha \neq 0$) oppure $y(x) = A + Bx + x^2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ (se $\alpha = 0$), che non ha elementi comuni col precedente.

3. (a) (Figura 1) In $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \frac{3}{2-\sin x}$ è positiva; da $f'(x) = \frac{3\cos x}{(2-\sin x)^2}$ si nota che f cresce in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ha minimo 1 in $x = -\frac{\pi}{2}$ e massimo 3 in $x = \frac{\pi}{2}$. La curva polare Γ è data da $\rho = \frac{3}{2-\sin\theta} = \frac{p}{1+e\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}$ con $p = \frac{3}{2}$ e $e = \frac{1}{2}$, e dunque —a meno di una traslazione dell'anomalia θ— si tratta di un segmento di ellisse; come noto, è opportuno usare la parametrizzazione $\gamma : [-\pi, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) = (\frac{3\cos\theta}{2-\sin\theta}, \frac{3\sin\theta}{2-\sin\theta})$. Derivando si ha $\gamma'(\theta) = 3(\frac{1-2\sin\theta}{(2-\sin\theta)^2}, \frac{2\cos\theta}{(2-\sin\theta)^2})$, pertanto la retta tangente richiesta è $\{\gamma(0) + \lambda\gamma'(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{3}{2}, 0) + \lambda(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\lambda, \frac{3}{2}\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, con forma cartesiana $2x - y - 3 = 0$. Da $\rho = \frac{3}{2-\sin\theta}$ si ricava poi $2\rho - \rho\sin\theta = 3$, ovvero $2\sqrt{x^2+y^2} = 3 + y$, da cui la forma cartesiana $p(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6y - 9 = 0$. Essendo $\nabla p(x,y) = (8x, 6y-6)$ si ottiene $\nabla p(\frac{3}{2}, 0) = (12, -6) = 6(2, -1)$, pertanto l'equazione $\nabla p(\frac{3}{2}, 0) \cdot (x - \frac{3}{2}, y - 0) = 0$ ridà la retta tangente $2x - 3 - y = 0$, già trovata in precedenza.

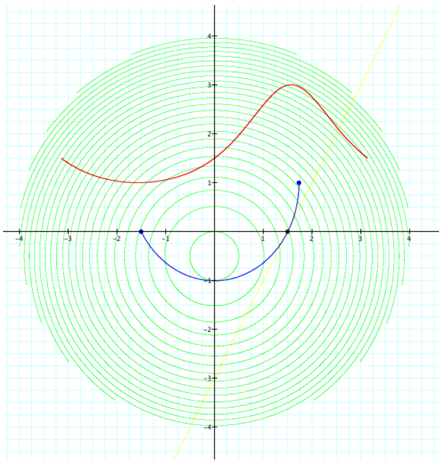
(b) (Figura 1) Γ è compatta perché immagine dell'intervallo compatto $[-\pi, \frac{\pi}{6}]$ tramite la funzione continua γ. Per il calcolo degli estremi di $h(x,y) = x^2 + y^2 + y$ su Γ basta considerare quest'ultima come fatta dai vertici $\{A(-\frac{3}{2}, 0),\ B(\sqrt{3}, 1)\}$ e dalla curva senza vertici data da $-\pi < \theta < \frac{\pi}{6}$ (curva regolare). Per i punti basta il calcolo (vale $h(A) = \frac{9}{4}$ e $h(B) = 5$). Per la curva senza vertici, componendo h con la parametrizzazione γ si ottiene $H(\theta) = \frac{9}{(2-\sin\theta)^2} + \frac{3\sin\theta}{2-\sin\theta} = 3\frac{3+2\sin\theta-\sin^2\theta}{(2-\sin\theta)^2}$; derivando si calcola $H'(\theta) = \frac{6\cos\theta(5-\sin\theta)}{(2-\sin\theta)^3}$, e vale $H'(\theta) = 0$ per $\theta = -\frac{\pi}{2}$, ovvero il punto $C(0,-1)$ in cui vale $h(C) = H(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Dunque il massimo di h su Γ è 5 (ottenuto in B), e il minimo è 0 (in C). Poiché, come si vede in figura, le curve di livello di h sono le circonferenze centrate in $(0, -\frac{1}{2})$, con valore crescente al crescere del raggio, l'interpretazione geometrica è del tutto chiara.

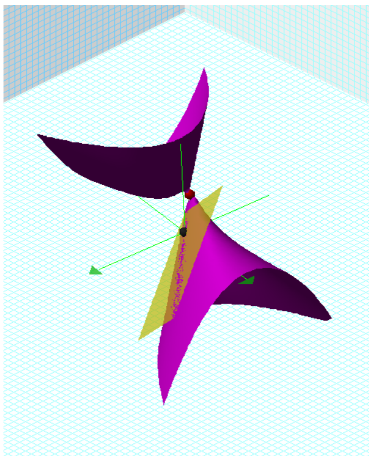
4. (a) (Figura 2) Da $g_1(x,y,z) = \mathrm{arctg}(2x-y+z)+x^2+yz$ si ha $\nabla g_1(x,y,z) = (\frac{2}{1+(2x-y+z)^2}+2x, -\frac{1}{1+(2x-y+z)^2}+z, \frac{1}{1+(2x-y+z)^2}+y)$; imponendo che $\nabla g_1(x,y,z) = (0,0,0)$ si ottiene $\frac{1}{1+(2x-y+z)^2} = -x = z = -y$ da cui $y = x,\ z = -x$ e dunque $\frac{1}{1+(2x-x+(-x))^2} = -x$, ovvero l'unico punto singolare $(-1,-1,1)$ che appartiene a X_0. Pertanto tutte le altre superfici X_α con $\alpha \neq 0$ sono regolari, e lo è anche X_0 negli altri suoi punti, in particolare nell'origine $O(0,0,0)$: essendo $\nabla g_1(O) = (2,-1,1)$, da $g_1(x,y,z) = 0$ si può ad esempio esplicitare localmente $y(x,z)$ con $y(0,0) = 0$ e $(\dot{y}_x, \dot{y}_z)(0,0) = (2,1)$, e questo fornisce una parametrizzazione locale tramite $\gamma(x,z) = (x, y(x,z), z)$ definita all'intorno di $(0,0)$. Il piano tangente affine a X_0 in O si può ricavare dalla forma cartesiana $g_1(x,y,z) = 0$ come $\nabla g_1(O) \cdot (x-0, y-0, z-0) = 0$, oppure si può esprimere dalla forma grafico $y(x,z)$ come $y = y(0,0) + \dot{y}_x(0,0)\,(x-0) + \dot{y}_z(0,0)\,(z-0)$, oppure dalla forma parametrica $\gamma(x,z)$ come $\{(0,0,0) + s(1,\ \dot{y}_x(0,0),\ 0) + t(0,\ \dot{y}_z(0,0),\ 1) : s,t \in \mathbb{R}\}$: in tutti e tre i modi si arriva al piano $2x - y + z = 0$.

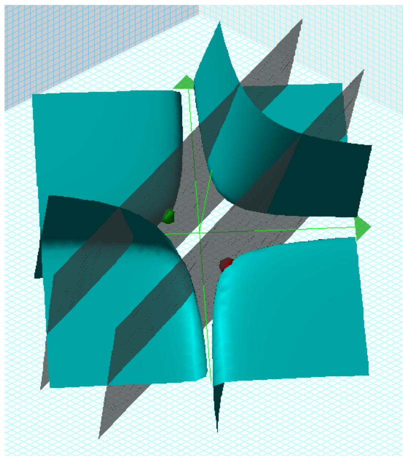
(b) Lo jacobiano del sistema $g = (1,0)$ è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+(2x-y+z)^2}+2x & -\frac{1}{1+(2x-y+z)^2}+z & \frac{1}{1+(2x-y+z)^2}+y \\ yz & xz & xy-2z \end{pmatrix}$: essendo $\mathsf{J}_g(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, la sola possibilità è di esplicitare (x,z) in funzione di y, con $\begin{pmatrix} x(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (alternativamente, derivando il sistema-identità $g(x(y), y, z(y)) \equiv (1,0)$ rispetto a y si ottiene $\begin{cases} \frac{2x'-1+z'}{1+(2x-y+z)^2} + 2xx' + z + yz' = 0 \\ x'yz + xz + xyz' - 2zz' = 0 \end{cases}$ da cui, calcolando in $y = 1$ e ricordando che $x(1) = 0$ e $z(1) = 1$ si ottiene $\begin{cases} 2x'(1) + 2z'(1) = 0 \\ x'(1) - 2z'(1) = 0 \end{cases}$, ovvero di nuovo $x'(1) = z'(1) = 0$): dunque lo sviluppo al primo ordine è $\begin{pmatrix} x(y) \\ z(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_1(y-1) \\ 1 + o_1(y-1) \end{pmatrix}$.

(c) (Figura 3) L'insieme $\mathsf{Y} = \{g_2(x,y,z) = 2\}$ è una superficie regolare (infatti $\nabla g_2(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy-2z)$ si annulla su tutti e soli i punti dell'asse x e dell'asse y, nessuno dei quali però sta in Y): per cercare eventuali punti stazionari di $\ell(x,y,z) = x-y$ su Y converrà usare il metodo di Lagrange, che qui dà il sistema $\begin{cases} yz = -xz \\ xy - 2z = 0 \\ xyz - z^2 = 1 \end{cases}$ con soluzioni $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)$ e $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$. Lo studio del carattere dei punti A e B necessita di parametrizzare

Y al loro intorno: ad esempio, vediamo cosa accade per A. Da $\nabla g_2(A) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$ si nota che da $xyz - z^2 = 1$ si può esplicitare $x(y,z)$ con $x(-\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2}$ e $(\dot{x}_y, \dot{x}_z)(-\sqrt{2}, -1) = (1, 0)$; derivando parzialmente rispetto a y e z l'identità $x(y,z)\, yz - z^2 = 1$ si ottiene $\begin{cases} \dot{x}_y yz + xz = 0 \\ \dot{x}_z yz + xy - 2z = 0 \end{cases}$ (da cui, calcolando in $(y,z) = (-\sqrt{2}, -1)$ si ritrova $(\dot{x}_y, \dot{x}_z)(-\sqrt{2}, -1) = (1, 0)$) e derivando di nuovo parzialmente si ha $\begin{cases} \ddot{x}_{yy} yz + 2\dot{x}_y z = 0 \\ \ddot{x}_{yz} yz + \dot{x}_y y + \dot{x}_z z + x = 0 \\ \ddot{x}_{zz} yz + 2\dot{x}_z y - 2 = 0 \end{cases}$ (da cui, calcolando in $(y,z) = (-\sqrt{2}, -1)$ si trova $\mathsf{H}_x(-\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$). Componendo ℓ con la parametrizzazione $\gamma(y,z) = (x(y,z), y, z)$ (definita all'intorno di $(-\sqrt{2}, -1)$) di Y all'intorno di A si ottiene $L(y,z) = x(y,z) - y$: poiché $\nabla L(y,z) = (\dot{x}_y - 1, \dot{x}_z)$ si ottiene (come previsto) $\nabla L(-\sqrt{2}, -1) = (0, 0)$, ed essendo in questo caso $\mathsf{H}_L(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z)$ si ha $\mathsf{H}_L(-\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, definita positiva: dunque $(-\sqrt{2}, -1)$ è di minimo relativo per L (ovvero A è di minimo relativo per ℓ su Y). In modo analogo si può provare che B è di massimo relativo per ℓ su Y, e la Figura 3 mostra in modo chiaro la natura di entrambi i punti.







1. Esercizio 3: il grafico $y = f(x)$ è rosso, la curva Γ in blu; il punto $\gamma(0)$ è nero, e la retta affine tangente è gialla; le curve di livello di h sono in verde. **2.** La superficie X_0 dell'esercizio 4(a) è in porpora, il suo punto singolare $(-1, -1, 1)$ è rosso; il piano tangente nell'origine (punto nero) è in giallo. **3.** La superficie Y dell'esercizio 4(c) è in azzurro (l'asse z è quello che punta verso l'osservatore), i punti A e B sono rispettivamente in rosso e in verde; poiché le superfici di livello di ℓ sono i piani grigi paralleli a quelli visibili (e il valore di ℓ cresce tantopiù il piano si sposta verso destra in basso nella figura) è chiaro che A e B sono rispettivamente di minimo e massimo locale per ℓ su Y.

Prova scritta (07/07/2008)

1. Studiare per $x > 0$ l'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{\log(x^{2\alpha}+1)}{x^{3\alpha}} + \frac{|\log x|^{2\alpha-1}}{(x+1)^{4\alpha}}$; calcolare $\int_0^{+\infty} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$.

2. Sia data in $]0,+\infty[$ l'equazione differenziale $xy' = y^{1-\alpha} + \varphi(x)$, ove $\varphi(x)$ è continua.

(a) Posto $\varphi(x) = 0$, risolvere il problema di Cauchy con $y(1) = 1$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Posto $\alpha = 0$ e $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(x^3)$, calcolare i limiti notevoli delle soluzioni al variare di $y_0 = y(1)$.

3. Sia $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9(x^2+y^2) = 5(x^3-y^3)\} \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Mostrare che Σ è una curva regolare, cercando per quanto possibile di intuirne l'andamento[(43)]. Calcolarne poi la retta tangente affine r nel punto $P(2,-1)$.

(b) Parametrizzare Σ (all'intorno di P) prima come curva-grafico e poi tramite il fascio proprio di rette per l'origine, esibendo il cambio di parametro; e ricalcolare poi r in altri due modi. Dire, infine, qual'è la conica che meglio approssima Σ vicino a P.

(c) Σ ha estremità locali in direzione alto-basso?

4. Sia $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z),\, g_2(x,y,z)) = (\sqrt{x-2y+z} - 3xz + y^2,\, x - y + 2z)$.

(a) Mostrare che $\mathsf{X} = \{g_1(x,y,z) = 2\}$ è una superficie regolare, e calcolarne la retta normale affine r in $A(3,1,0)$; parametrizzare poi X attorno A, e ricalcolare la retta r.

(b) Dal sistema $g(x,y,z) = (-4,4)$ esplicitare x e z in funzione di y all'intorno della soluzione $(1,1,2)$, e calcolare il limite $\lim_{y\to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x(y)+z(y)-3y)}{x^2(y)-z^2(y)+3x(y)\,y}$.

(c) Disegnare l'insieme $L = \{(x,y,z) : x^2 + (y+1)^2 \le z \le 2\}$, dire perché g_2 ammette estremi assoluti su di esso, e calcolarli.

Soluzioni.

1. Poniamo $f_\alpha(x) = f_\alpha^{(1)}(x) + f_\alpha^{(2)}(x)$, con $f_\alpha^{(1)}(x) = \frac{\log(x^{2\alpha}+1)}{x^{3\alpha}}$ e $f_\alpha^{(2)}(x) = \frac{|\log x|^{2\alpha-1}}{(x+1)^{4\alpha}}$: poiché per $x > 0$ entrambe le funzioni sono positive, la loro somma $f_\alpha(x)$ sarà integrabile in un certo punto se e solo se lo saranno entrambe. Per lo studio, sarà opportuno ricordare che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\beta > -1$ (per ogni γ) oppure $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, ed integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < -1$ (per ogni γ) oppure $\beta = -1$ e $\gamma < -1$. Iniziamo da $f_\alpha^{(1)}(x)$, che va studiata in 0^+ e in $+\infty$. In 0^+, se $\alpha > 0$ si ha $\log(x^{2\alpha}+1) \sim_{0^+} x^{2\alpha}$ e dunque

[(43)] Ad esempio, vedere dove Σ interseca gli assi, e mostrare che ha un'evidente simmetria; notato poi che dall'equazione si ricava $\cos^3\theta - \sin^3\theta = \frac{9}{5}\frac{1}{\rho}$ e $x - y = \frac{9(x^2+y^2)}{5(x^2+xy+y^2)} = \frac{9}{5(1+\sin\theta\cos\theta)}$, si ha che tendendo a ∞^2 stando sulla curva Σ...

$f_\alpha^{(1)}(x) \sim_{0^+} x^{-\alpha}$, da cui $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$; se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \log 2$ (integrabile); se invece $\alpha < 0$ si ha che $f_\alpha^{(1)}(x)$ è sempre infinitesima, dunque integrabile. Pertanto $f_\alpha^{(1)}(x)$ è integrabile in 0^+ quando $\alpha < 1$. Quanto a $+\infty$, se $\alpha > 0$ si ha $\log(x^{2\alpha} + 1) \sim_{+\infty} \log(x^{2\alpha}) \sim^*_{+\infty} \log x$, dunque $f_\alpha^{(1)}(x) \sim^*_{+\infty} x^{-3\alpha} \log x$, integrabile per $-3\alpha < -1$ ovvero $\alpha > \frac{1}{3}$; se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \log 2$ (non integrabile); se invece $\alpha < 0$ si ha che $f_\alpha^{(1)}(x)$ è sempre infinita, dunque non integrabile. Pertanto $f_\alpha^{(1)}(x)$ è integrabile in $+\infty$ per $\alpha > \frac{1}{3}$.
Passiamo ora a $f_\alpha^{(2)}(x)$, che va studiata in 0^+, $1^\mp$ e $+\infty$. In 0^+ si ha $f_\alpha^{(2)}(x) \sim_{0^+} |\log x|^{2\alpha-1} = x^0 |\log x|^{2\alpha-1}$, sempre integrabile; in $1^\mp$ si ha $f_\alpha^{(2)}(x) \sim^*_{1^\mp} |x-1|^{2\alpha-1}$ da cui $2\alpha - 1 > -1$ ovvero $\alpha > 0$; infine, in $+\infty$ si ha $f_\alpha^{(2)}(x) \sim_{+\infty} x^{-4\alpha}(\log x)^{2\alpha-1}$, da cui $-4\alpha < -1$ (cioè $\alpha > \frac{1}{4}$) oppure $-4\alpha = -1$ e $2\alpha - 1 < -1$ (no).
Ricapitolando, $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ per $\alpha < 1$; lo è in $1^\mp$ per $\alpha > 0$; e lo è in $+\infty$ per $\alpha > \frac{1}{3}$. In particolare $\int_0^{+\infty} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$ converge (come somma dei due integrali convergenti di $f_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$ e $f_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$), e (posto $u = \sqrt{x}$) vale $\int_0^{+\infty} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\log(u^2+1)}{u^2}\,du + (-\frac{1}{x+1}]_0^{+\infty} = 2\big(-\frac{1}{u}\log(u^2+1) - \int(-\frac{1}{u})\frac{2u}{u^2+1}\,du\big]_0^{+\infty} + (0) - (-1) = 1 + 2(2\operatorname{arctg} u - \frac{1}{u}\log(u^2+1)]_0^{+\infty} = 1 + 2((\pi - 0) - (0 - 0)) = 2\pi - 1$.

2. (a) Nell'equazione $xy' = y^{1-\alpha}$, visto che ci interessa la soluzione per cui $y(1) = 1$ possiamo separare le variabili, ottenendo $y^{\alpha-1}y' = \frac{1}{x}$. Se $\alpha = 0$, integrando si ottiene $\log|y| = \log x + h$, e la condizione iniziale dà $h = 0$, da cui $y(x) = x$. Se invece $\alpha \neq 0$, integrando si ottiene $\frac{y^\alpha}{\alpha} = \log x + h$, e la condizione iniziale dà $h = \frac{1}{\alpha}$: si ricava allora $y^\alpha = \alpha \log x + 1$, da cui $y(x) = (\alpha \log x + 1)^{\frac{1}{\alpha}}$ (si noti che $\lim_{\alpha \to 0}(\alpha \log x + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = x$).
(b) L'equazione $xy' = y + \operatorname{arctg}(x^3)$ è lineare, e può essere posta nella consueta forma $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = -\log x$, ma la primitiva $\int e^{P(x)}\,q(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2}\,dx$ è ardua da calcolare, dunque conviene ricorrere alla forma integrale $y(x) = x(\int_1^x \frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2}\,dt + y_0)$, con $y_0 = y(1)$; i limiti notevoli da calcolare sono in 0^+ e in $+\infty$. Poiché $\frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2} \sim_{0^+} t$ è infinitesima (dunque ovviamente integrabile), il $\lim_{x\to 0^+} y(x)$ vale 0 per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$. Si ha poi $\frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2} \sim^*_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, dunque $\frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2}$ è integrabile anche a $+\infty$: detto $\ell > 0$ il valore finito di $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2}\,dt$, se $y_0 \neq -\ell$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \pm\infty$ a seconda che $y_0 \gtrless -\ell$; nel caso particolare $y_0 = -\ell$, usando de l'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{\operatorname{arctg}(t^3)}{t^2}\,dt - \ell}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)/x^2}{-1/x^2} = -\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x^3) = -\frac{\pi}{2}$.

3. (a) (Figura 1) Posto $h(x,y) = 9(x^2+y^2) - 5(x^3-y^3)$ si ha $\Sigma = \{h(x,y,z) = 0\} \setminus \{(0,0)\}$, dunque per vedere che Σ è una curva regolare basta mostrare che in nessuno dei suoi punti si annulla $\nabla h = 3(6x - 5x^2, 6y + 5y^2)$: ponendo $6x - 5x^2 = 6y + 5y^2 = 0$ si ottengono i quattro punti $(0,0)$, $(0, -\frac{6}{5})$, $(\frac{6}{5}, 0)$ e $(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5})$, nessuno dei quali sta però in Σ (si noti che $(0,0)$ è esplicitamente escluso, mentre per gli altri punti vale $h(0, -\frac{6}{5}) = h(\frac{6}{5}, 0) = \frac{108}{25}$ e $h(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}) = \frac{216}{25}$). La curva è dunque regolare, interseca gli assi in $(\frac{9}{5}, 0)$ e $(0, -\frac{9}{5})$, ed è evidentemente simmetrica rispetto alla bisettrice $y = -x$ (infatti scrivendo $(-y, -x)$ al posto di (x,y) l'equazione non cambia). Seguendo il suggerimento proposto, possiamo notare anche che da $\cos^3\theta - \sin^3\theta = \frac{9}{5}\frac{1}{\rho}$ segue che $\operatorname{tg}\theta$ tende a 1 sui punti della curva quando $\rho \to +\infty$, dunque la curva tende a diventare parallela all'altra bisettrice $x - y = 0$; inoltre, se in $x - y = \frac{9(x^2+y^2)}{5(x^2+xy+y^2)} = \frac{9}{5(1+\sin\theta\cos\theta)}$ si fa tendere $\rho \to +\infty$ (e dunque $\operatorname{tg}\theta \to 1$, da cui $\sin\theta\cos\theta = \operatorname{tg}\theta\cos^2\theta \to 1(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$) si nota che il secondo membro tende a $\frac{9}{5(1+\frac{1}{2}+1)} = \frac{6}{5}$, dunque Σ tende asintoticamente alla retta $x - y = \frac{6}{5}$. La retta tangente affine r nel punto $P(2,-1)$ ha equazione cartesiana $\nabla h(P) \cdot (x-2, y-(-1)) = 0$, ovvero $3(-8,-1) \cdot (x-2, y+1) = 0$, ovvero $8x + y - 15 = 0$.
(b) (Figura 1) Poiché $\nabla h(P) = 3(-8,-1) \neq (0,0)$ si può esprimere localmente Σ come curva-grafico $x(y)$ oppure $y(x)$. Ad esempio, scegliendo $y(x)$ (definita in un intorno aperto $I \subset \mathbb{R}$ di $x = 2$), all'intorno di P la curva si esprime come $y(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + o_2(x-2) = -1 - \frac{-8}{-1}(x-2) + o_2(x-2) = -1 - 8(x-2) + o_2(x-2)$, e lo sviluppo al primo ordine (cioè $y = -1 - 8(x-2) = -8x + 15$) ridà la retta r. Alternativamente, intersecando la retta generica $y = mx$ con Σ si ottiene il punto $\gamma(m) = (-\frac{9(m^2+1)}{5(m^3-1)}, -\frac{9m(m^2+1)}{5(m^3-1)})$, e in questo modo si ottiene un'altra parametrizzazione di Σ vicino a P (si noti che $P = \gamma(-\frac{1}{2})$, e che dunque basta pensare γ definita in $]-\infty, 1[$: prevedibile, visto che la retta $y = x$ è parallela alla retta asintotica a Σ); il cambio di parametro con la precedente è allora $x(m) = -\frac{9(m^2+1)}{5(m^3-1)}$. Derivando $\gamma(m)$ si ottiene $\gamma'(m) = \frac{9}{5}(\frac{m(m^3+3m+2)}{(m^3-1)^2}, \frac{2m^3+3m^2+1}{(m^3-1)^2})$ da cui il vettore tangente $\gamma'(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{15}(-1, 8)$, che è effettivamente parallelo a r. Infine, la conica che meglio approssima

$\Sigma = \{h(x,y) = 0\}$ vicino a P è la conica "osculatrice" data dalla stessa curva di livello dello sviluppo di Taylor al secondo ordine di h in P (si rimanda agli appunti del corso per maggiori dettagli), ovvero $h(P) + \nabla h(P) \cdot (x-2, y+1) + \frac{1}{2}(x-2, y+1) \cdot \mathsf{H}_h(P) \cdot (x-2, y+1)^t = 0$, ovvero, a conti fatti, $3x^2 + 2y^2 - 4x + 5y - 1 = 0$ (un'ellisse).

(c) Tradotto in termini precisi, la domanda equivale a chiedersi se la funzione $f(x,y) = y$ abbia estremi locali in Σ. Il metodo di Lagrange dice che, per trovare i punti stazionari di f su Σ, bisogna risolvere il sistema $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = h(x,y) = 0$. Da $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3(6x - 5x^2) = 0$ si ricava $x = 0$ oppure $x = \frac{6}{5}$; se $x = 0$, da $h(x,y) = 0$ si ricava $9y^2 + 5y^3 = 0$ da cui la sola soluzione accettabile $y = -\frac{9}{5}$ (dunque il punto $A(0, -\frac{9}{5})$); se invece $x = \frac{6}{5}$, da $h(x,y) = 0$ si ricava $125y^3 + 225y^2 + 108 = 0$, che si vede facilmente avere una sola soluzione reale $y_0 \in]-3,-2[$,[44] da cui un ulteriore punto stazionario $B(\frac{6}{5}, y_0)$. Per scoprire la natura di A e B (picchi, valli o flessi?) basterà sviluppare al secondo ordine la funzione $y(x)$ definita implicitamente al loro intorno da $h(x,y) = 0$, tenendo presente che in essi dovrà essere $y' = 0$. Derivando $h(x, y(x)) \equiv 0$ si ottiene $6(x + yy') - 5(x^2 - y^2 y') = 0$, che calcolata sia per A (con $x = 0$ e $y(0) = -\frac{9}{5}$) che per B (con $x = \frac{6}{5}$ e $y(\frac{6}{5}) = y_0$) ridà effettivamente $y' = 0$. Derivando ancora si ha $6(1 + (y')^2 + yy'') - 5(2x - 2y(y')^2 - y^2 y'') = 0$: calcolando per $x = 0$ (con $y(0) = -\frac{9}{5}$ e $y'(0) = 0$) si ha $y''(0) = -\frac{10}{9} < 0$, mentre per $x = \frac{6}{5}$ (con $y(\frac{6}{5}) = y_0$ e $y'(\frac{6}{5}) = 0$, e ricordando che $-3 < y_0 < -2$) si ha $y''(\frac{6}{5}) = \frac{6}{y_0(6+5y_0)} > 0$. Dunque A è un picco per Σ, e B una valle, come confermato dalla Figura 1.

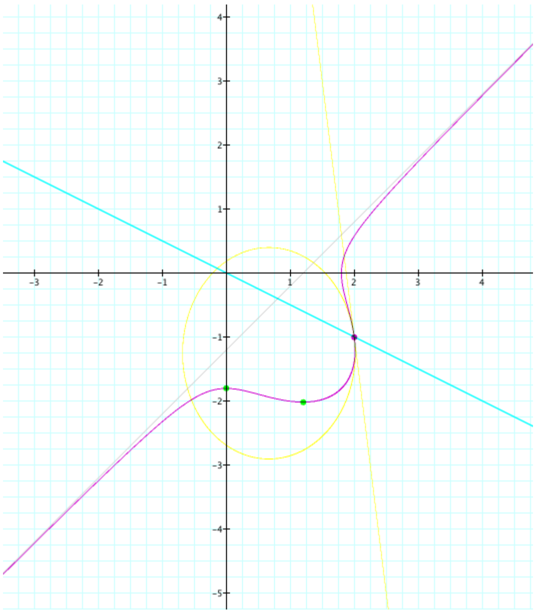
4. (a) Ponendo $\nabla g(x,y,z) = (\frac{1}{2\sqrt{x-2y+z}} - 3z, -\frac{2}{2\sqrt{x-2y+z}} + 2y, \frac{1}{2\sqrt{x-2y+z}} - 3x) = (0,0,0)$ si ottiene $3z = y = 3x = \frac{1}{2\sqrt{x-2y+z}}$, da cui $y = 3x$, $z = x$ e $3x = \frac{1}{4\sqrt{-x}}$, ma quest'ultima equazione non ha soluzioni (dovrebbe essere contemporaneamente $x < 0$ e $x > 0$). Dunque tutte le superfici di livello di g sono regolari (nei punti sopra il piano $x - 2y + z = 0$), e in particolare lo è X in $A(3,1,0)$: essendo $\nabla g(A) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{17}{2})$ un vettore normale a X in A, la retta normale affine in A è data parametricamente da $r = \{(3 + \frac{1}{2}t, 1 + t, -\frac{17}{2}t) : t \in \mathbb{R}\}$. Altrimenti, da $g(x,y,z) = 2$ si può esplicitare $y(x,z)$ con $y(3,0) = 1$ e $(\dot{y}_x, \dot{y}_z)(3,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{17}{2})$, e ciò dà una parametrizzazione locale $\gamma(x,z) = (x, y(x,z), z)$ di X, da cui differenziando si ricavano due vettori paralleli $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$ e $\vec{w} = (0, \frac{17}{2}, 1)$; la retta r è allora generata da $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\frac{1}{2}, 1, -\frac{17}{2})$, ed è la stessa di prima.

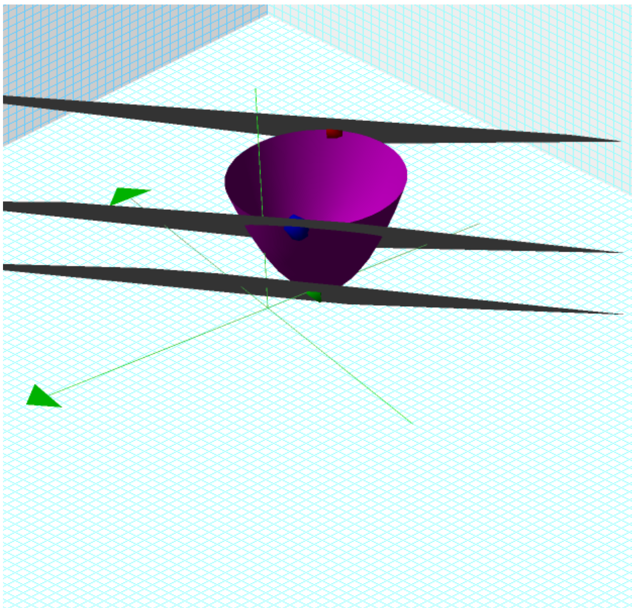
(b) Lo jacobiano del sistema $g = (-4,4)$ è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x-2y+z}} - 3z & -\frac{2}{2\sqrt{x-2y+z}} + 2y & \frac{1}{2\sqrt{x-2y+z}} - 3x \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: essendo $\mathsf{J}_g(1,1,2) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ si può esplicitare (x,z) in funzione di y, con $\begin{pmatrix} x(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ \frac{9}{17} \end{pmatrix}$. Il limite $\lim_{y \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x(y)+z(y)-3y)}{x^2(y)-z^2(y)+3xy}$ è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$: usando de l'Hôpital, si ha $\lim_{y \to 1} \frac{\frac{x'+z'-3}{1+(x+z-3y)^2}}{2xx'-2zz'+3x'y+3x} = \frac{\frac{-\frac{1}{17}+\frac{9}{17}-3}{1+(1+2-3)^2}}{2(-\frac{1}{17})-4(\frac{9}{17})+3(-\frac{1}{17})+3} = -\frac{43}{10}$.

(c) (Figura 2) L'insieme $L = \{(x,y,z) : x^2 + (y+1)^2 \le z \le 2\}$ è la zona di piano limitata in basso dal paraboloide ellittico $z = x^2 + (y+1)^2$ (che ha il vertice in $(0,-1,0)$ anziché nell'origine) e in alto dal piano orizzontale $z = 2$: si tratta di un compatto (chiuso perché definito da disuguaglianza larghe di funzioni continue, e limitato perché $0 \le z \le 2$ e dunque $x^2 + (y+1)^2 \le 2$, ovvero $|x| \le \sqrt{2}$ e $|y+1| \le \sqrt{2}$, ovvero $-\sqrt{2} - 1 \le y \le \sqrt{2} - 1$) contenuto nel dominio di $g_2(x,y,z) = x - y + 2z$: dunque g_2 ammette estremi assoluti su L in base a Weierstrass. Per il calcolo, dividiamo come di consueto L nell'unione disgiunta di varietà e cerchiamo su ciascuna di esse eventuali punti stazionari di g_2. Nei punti interni di L di certo gli estremi non vengono assunti (infatti ∇g_2 non si annulla mai). La superficie di paraboloide senza il bordo (dunque per $z < 2$) si può parametrizzare globalmente come grafico, ovvero $\gamma(x,y) = (x, y, x^2 + (y+1)^2)$ al variare di (x,y) nel disco aperto $x^2 + (y+1)^2 < 2$ del piano orizzontale: componendo g_2 con γ si ottiene $\phi(x,y) = x - y + 2x^2 + 2(y+1)^2$, e facendo $\nabla \phi(x,y) = (1 + 4x, -1 + 4(y+1)) = (0,0)$ si ottiene l'unica soluzione accettabile $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, che dà il punto $U(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$. Il disco superiore senza bordo è anch'esso parametrizzabile globalmente come grafico, ovvero con $\delta(x,y) = (x,y,2)$ sempre al variare di (x,y) nel disco aperto $x^2 + (y+1)^2 < 2$ del piano orizzontale: componendo g_2 con δ si ottiene $\psi(x,y) = x - y + 2$, il cui gradiente però stavolta non si annulla mai. Infine restano solo i punti della circonferenza $\{(x,y,z) : x^2 + (y+1)^2 = 2,\ z = 2\}$, per i quali si può usare Lagrange o la parametrizzazione naturale $(\sqrt{2}\cos\theta, -1 + \sqrt{2}\sin\theta, 2)$: in entrambi i casi si ottengono i punti $V(1,-2,2)$ e $W(-1,0,2)$. Gli estremi di g_2 su L potranno venire assunti dunque solo sui punti U, V e W: essendo $g_2(U) = \frac{3}{4}$, $g_2(V) = 7$ e $g_2(W) = 3$ si ha che il minimo di g_2 su L è $\frac{3}{4}$ (assunto in U) e il

[44] Infatti $p(y) = 125y^3 + 225y^2 + 108$ tende a $\pm\infty$ quando y tende a $\pm\infty$, la derivata $p'(y) = 75y(5y+6)$ si annulla in $y = -\frac{6}{5}$ (massimo locale, con $p(-\frac{6}{5}) > 0$) e $y = 0$ (minimo locale, con $p(0) > 0$); dunque c'è un solo zero reale $y_0 < -\frac{6}{5}$, ed essendo $p(-2) > 0$ e $p(-3) < 0$ si ha $y_0 \in]-3,-2[$ (in realtà, un'analisi più accurata —dividendo ulteriormente l'intervallo $]-3,-2[$— mostra che y_0 è assai vicino a -2, essendo $y_0 \sim -2{,}013$).

massimo è 7 (assunto in V), cosa confermata dalla Figura 2.





1. Esercizio 3: la curva Σ e il suo punto P sono in porpora; la retta affine tangente affine e la conica osculatrice a Σ in P sono in giallo; la retta asintotica è grigia; le estremità locali in alto-basso di Σ sono verdi. **2.** L'insieme L dell'esercizio 4(c) è porpora, e i suoi punti U, V e W sono rispettivamente in verde, rosso e blu: poiché le superfici di livello di g_2 sono i piani grigi, tanto maggiori quanto più in alto, i risultati dell'esercizio sono chiari.

Prova scritta (27/08/2008)

1. Studiare l'integrabilità per $x > 0$ di $f_\alpha(x) = \dfrac{|x-2|^\alpha\, x^{\alpha-1}}{|\sqrt{x+2}\ - x|^{2\alpha-1}}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^2 f_1(x)\, dx$.

2. Sia data l'equazione differenziale $\alpha y'' + (\alpha - 1)y' - y = x + 3e^{2x}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione al variare di $\alpha \neq 0$.

(b) Risolvere poi l'equazione nel caso $\alpha = 0$, spiegando il legame col punto precedente.

3. Sia $f(x, y) = x + y + 2\sin(x - 2y)$, e sia Γ la sua curva di livello 3.

(a) Mostrare che Γ è una curva regolare, e calcolarne in due modi la retta tangente r nel punto $P(2, 1)$. Trovare poi tutti gli altri punti di Γ nei quali la retta tangente è parallela a r.

(b) Disegnare $K = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \frac{\pi}{2}\}$, e calcolare gli estremi assoluti di $f|_K$.

4. Sia $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z),\ g_2(x, y, z)) = (2x^3yz - 3x - 2y^2z^2,\ y^2 - 2xz)$.

(a) Quali delle superfici di livello di g_1 sono regolari? Detta X quella del punto $A(0, 1, -1)$, calcolare il piano tangente Π a X in A; dopo aver parametrizzato X vicino A, ricalcolare Π.

(b) Determinare eventuali estremi (locali, globali) di g_2 prima in tutto $\mathbb{R}^3$, poi sulla circonferenza $C = \{(x, y, z) : x = 1,\ y^2 + z^2 = 4\}$.

(c) Mostrare che la curva $\ell = \{g(x, y, z) = (-2, 1)\}$ è regolare nel suo punto A, e calcolarne la retta affine r ivi tangente; riguardo al piano Π, notare che...

Soluzioni.

1. L'integrabilità della funzione $f_\alpha(x) = \frac{|x-2|^\alpha\, x^{\alpha-1}}{|\sqrt{x+2}\ - x|^{2\alpha-1}}$ va studiata in 0^+, $2^\mp$ e $+\infty$ (si noti che la quantità $\sqrt{x+2} - x$ si annulla solo per $x = 2$). • In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^{\alpha-1}$, da cui $\alpha - 1 > -1$, ovvero $\alpha > 0$. • Poiché $|\sqrt{x+2} - x| \sim^*_{2^\pm} |x-2|$ (infatti $\lim_{x\to 2} \frac{|\sqrt{x+2}\ - x|}{|x-2|} = \frac{3}{4}$) si ha poi $f_\alpha(x) \sim^*_{2^\mp} |x-2|^{\alpha-(2\alpha-1)} = |x-2|^{1-\alpha}$, da cui $1 - \alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. • Infine, poiché per x sufficientemente grande si ha $|\sqrt{x+2} - x| = x - \sqrt{x+2} \sim^*_{+\infty} x$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^{\alpha+(\alpha-1)-(2\alpha-1)} = x^0 = 1$, non integrabile.
Dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ per $\alpha > 0$; lo è in $2^\mp$ per $\alpha < 2$; e non lo è mai in $+\infty$. Così $\int_0^2 f_1(x)\, dx = \int_0^2 \frac{2-x}{\sqrt{x+2}-x}\, dx$ converge, e (posto $u = \sqrt{x+2}$, da cui $x = u^2 - 2$ e $dx = 2u\, du$) vale $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{4-u^2}{u-(u^2-2)}\, 2u\, du = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u(u+2)}{u+1}\, du = 2\int_{\sqrt{2}}^2 (u + 1 - \frac{1}{u+1})\, du = (u^2 + 2u - 2\log(u+1)]_{\sqrt{2}}^2 = 2(3 - \sqrt{2} - \log 3(\sqrt{2} - 1)) \sim 3$.

2. (a) Per $\alpha \neq 0$ l'equazione differenziale $\alpha y'' + (\alpha-1)y' - y = x + 3e^{2x}$ è del 2o ordine a coefficienti costanti; le radici dell'equazione caratteristica sono -1 e $\frac{1}{\alpha}$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea è generato da e^{-x} e $e^{\frac{1}{\alpha}x}$ (se $\alpha \neq -1$) oppure da e^{-x} e xe^{-x} (se $\alpha = -1$). Una soluzione particolare riferita a x sarà del tipo $ax+b$, e imponendolo si trova $a=-1$ e $b = 1-\alpha$; quanto a $3e^{2x}$, se $\alpha \neq \frac{1}{2}$ una soluzione particolare sarà del tipo ae^{2x} (e imponendolo si trova $a = \frac{1}{2\alpha-1}$), mentre se $\alpha = \frac{1}{2}$ sarà del tipo axe^{2x} (e imponendolo si trova $a=2$). Ricapitolando, se $\alpha=-1$ le soluzioni sono $y(x) = (A+Bx)e^{-x} - x + 2 - \frac{1}{3}e^{2x}$; se $\alpha = \frac{1}{2}$ sono $y(x) = Ae^{-x} + (B+2x)e^{2x} - x + \frac{1}{2}$; e se $\alpha \notin \{-1, \frac{1}{2}\}$ sono $y(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{1}{\alpha}x} - x + 1 - \alpha + \frac{1}{2\alpha-1}e^{2x}$ (al variare di $A, B \in \mathbb{R}$).

(b) Posto $\alpha = 0$ si ottiene l'equazione lineare del 1o ordine $-y'-y = x+3e^{2x}$, ovvero $y'+y = -x-3e^{2x}$, che si risolve nel modo consueto dando $y(x) = ke^{-x} - x + 1 - e^{2x}$. Si noti che, al tendere di $\alpha \to 0$, lo spazio delle soluzioni dell'equazione del 2o ordine diventa quello appena trovato con $k = A$, mentre l'altra funzione generatrice $e^{\frac{1}{\alpha}x}$ perde di significato.[45]

3. (a) (Vedi figura) I punti del piano in cui $f(x,y) = x+y+2\sin(x-2y)$ non è sommersiva sono dati dall'equazione vettoriale $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (1+2\cos(x-2y),\, 1-4\cos(x-2y)) = (0,0)$, evidentemente priva di soluzioni. Dunque tutte le curve di livello di f sono regolari, e tra queste $\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 3\}$, cui appartiene il punto $P(2,1)$. La retta tangente r a Γ in P è data da $\nabla f(2,1)\cdot(x-2, y-1) = 0$, ovvero $(3,-3)\cdot(x-2,y-1) = 0$, cioè $x-y-1=0$; alternativamente, poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3 \neq 0$ si può parametrizzare Γ vicino P come grafico $x(y)$ con $x(1) = 2$ e $x'(1) = -\frac{-3}{3} = 1$, da cui si riottiene r tramite $x = 2 + 1(y-1)$. Infine, i punti di Γ nei quali la retta tangente è parallela a r si trovano imponendo che in essi il gradiente ∇f sia parallelo a $(3,-3)$ (ovvero $\nabla f(x,y)\cdot(1,1) = 0$), e che $f(x,y) = 3$: si ha allora il sistema $\begin{cases} 1+2\cos(x-2y)+1-4\cos(x-2y) = 0 \\ x+y+2\sin(x-2y) = 3 \end{cases}$. Dalla prima equazione si ha $\cos(x-2y) = 1$, ovvero $x - 2y = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; messo nella seconda, questo dà $(2y+2k\pi)+y = 3$, cioè $y = 1 - k\frac{2\pi}{3}$, da cui $x = 2 + k\frac{2\pi}{3}$. Si ha pertanto la famiglia infinita di punti $P_k = (2 + k\frac{2\pi}{3},\, 1 - k\frac{2\pi}{3})$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, tra i quali ovviamente appare anche $P = P_0$.

(b) (Vedi figura) L'insieme $K = \{(x,y) : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq \frac{\pi}{2}\}$ è il triangolo chiuso di estremi $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, $B(0, \frac{\pi}{2})$ e $O(0,0)$: gli estremi assoluti di $f|_K$ esistono in $\mathbb{R}$ in base a Weierstrass, perché K è un compatto contenuto nel dominio di f, che è continua. Per la ricerca, come di consueto, dividiamo l'insieme in sottoinsiemi-varietà, su ciascuno dei quali cercheremo i punti stazionari di f. Nel sottoinsieme dei punti interni di K (aperto di $\mathbb{R}^2$) non vi sono punti stazionari per f, come visto in precedenza. I tre lati privi di estremi sono curve regolari, facilmente parametrizzabili. Sul lato AB si ha $F(t) := f(t, -t+\frac{\pi}{2}) = t - t + \frac{\pi}{2} + 2\sin(t - \pi + 2t) = \frac{\pi}{2} - 2\sin 3t$, la cui derivata $F'(t) = -6\cos 3t$ si annulla in $3t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ovvero (in $]0, \frac{\pi}{2}[$) per $t = \frac{\pi}{6}$: si trova allora il punto stazionario $C(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$. Sul lato BO si ha $F(t) := f(0,t) = t - 2\sin 2t$, la cui derivata $F'(t) = 1 - 4\cos 2t$ si annulla in $2t = \mp \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi$, ovvero (in $]0, \frac{\pi}{2}[$) per $t = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} \sim 0{,}66$: da cui il punto stazionario $D(0, \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4})$. Sul lato OA si ha $F(t) := f(t, 0) = t + 2\sin t$, la cui derivata $F'(t) = 1 + 2\cos t$ non si annulla mai in $]0, \frac{\pi}{2}[$. Poiché $f(A) = \frac{\pi}{2} + 2 \sim 3{,}5$, $f(B) = \frac{\pi}{2} \sim 1{,}5$, $f(O) = 0$, $f(C) = \frac{\pi}{2} - 2 \sim -0{,}5$ e $f(D) = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + 2\sin(-\arccos\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} - 2\frac{\sqrt{15}}{4} \sim -1{,}3$, il massimo assoluto di f su K è assunto in A e il minimo in D (la figura conferma il risultato).

4. (a) Ponendo $\nabla g_1(x,y,z) = (6x^2yz - 3, 2x^3z - 4yz^2, 2x^3y - 4y^2z) = (0,0,0)$, dopo conti si trova $x = 1$ e $2yz = 1$, sistema che rappresenta i punti di un'iperbole equilatera del piano $x = 1$. Si noti peraltro che in tutti questi punti g_1 vale $-\frac{5}{2}$, dunque tutte le altre superfici di livello di g_1 sono regolari. Tra queste vi è anche quella di $A(0,1,-1)$, ovvero $\mathsf{X} = \{g_1(x,y,z) = -2\}$: il piano tangente Π a X in A è dato da $\nabla g_1(A)\cdot(x-0, y-1, z-(-1)) = 0$, ovvero $(-3,-4,4)\cdot(x, y-1, z+1) = 0$, cioè $3x+4y-4z-8 = 0$. Essendo poi $\frac{\partial g_1}{\partial z}(A) = 4 \neq 0$, vicino A si può esprimere X come grafico $z(x,y)$ con $z(0,1) = -1$ e $\nabla z(0,1) = (\dot{z}_x(0,1), \dot{z}_y(0,1)) = (\frac{3}{4}, 1)$, da cui la parametrizzazione $\gamma(x,y) = (x, y, z(x,y))$: pertanto Π è il piano passante per A e parallelo ai vettori $(1, 0, \dot{z}_x(0,1)) = (1, 0, \frac{3}{4})$ e $(0, 1, \dot{z}_y(0,1)) = (0,1,1)$, e risulta lo stesso di prima.

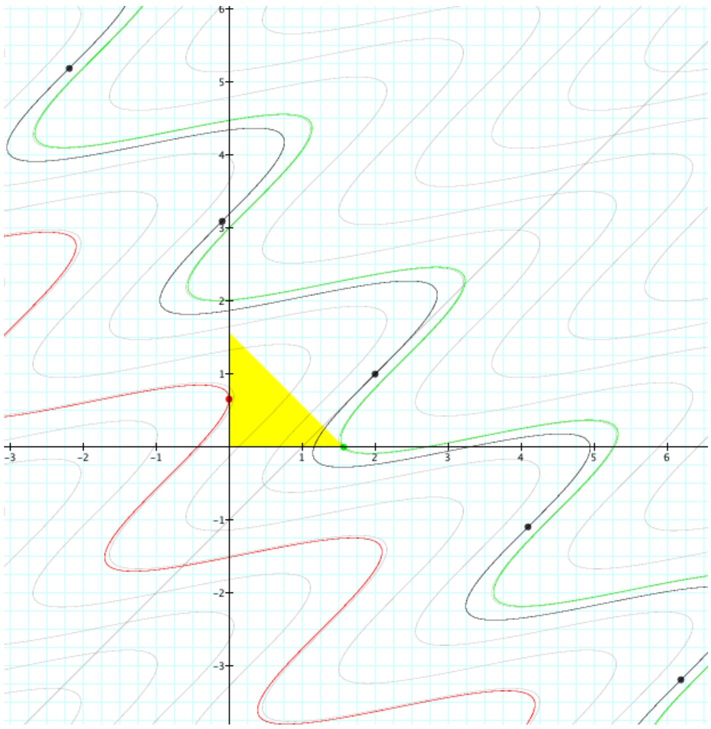
(b) Il gradiente $\nabla g_2(x,y,z) = (-2z, 2y, -2x)$ si annulla nell'origine $O(0,0,0)$, che è dunque il solo punto stazionario di g_2: ivi si ha $g_2(O) = 0$, e basta osservare che lungo la parabola $\{(x, 0, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ (passante per O) la funzione cambia segno per $x \gtrless 0$ per concludere che O è una sella per g_2 (alternativamente si può osservare che l'hessiano $\mathsf{H}_{g_2}(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinito). Dunque g_2 non ha alcun estremo locale in $\mathbb{R}^3$. La circonferenza

---

[45] allo stesso modo in cui, nell'equazione caratteristica $\alpha t^2 + (\alpha-1)t - 1 = 0$, si direbbe che quando α tende a 0 la seconda radice "tende a ∞" e perde di significato come numero reale lasciando solo la prima, ovvero -1.

$C = \{(x, y, z) : x = 1,\ y^2 + z^2 = 4\}$ si può parametrizzare tramite $\gamma(\theta) = (1, 2\cos\theta, 2\sin\theta)$, dunque si ottiene $F(\theta) := f(1, 2\cos\theta, 2\sin\theta) = 4(\cos^2\theta - \sin\theta)$; in $]-\pi, \pi[$ la derivata $F'(\theta) = -4\cos\theta(2\sin\theta + 1)$ si annulla per $\theta = -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$, ed è $F'(\theta) > 0$ per $-\pi \le \theta < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta \ge \pi$, dunque $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ (che corrispondono ai punti $Q_\mp = (1, 0, \mp 2)$) sono di minimo relativo mentre $\theta = -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ (che corrispondono ai punti $R_\mp = (1, \mp\sqrt{3}, -1)$) sono di massimo relativo: in realtà, poiché C è compatta, in tali punti verranno assunti anche gli estremi assoluti di g_2 su C, ed essendo $g_2(Q_\mp) = \pm 2$ e $g_2(R_\mp) = 5$ si ha che $R_\mp$ sono di massimo assoluto, mentre Q_+ è di minimo assoluto. (Agli stessi risultati si arriva, naturalmente, usando il metodo di Lagrange.)

(c) Lo jacobiano del sistema $g(x, y, z) = (-2, 1)$ è $\mathsf{J}_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x^2yz - 3 & 2x^3z - 4yz^2 & 2x^3y - 4y^2z \\ -2z & 2y & -2x \end{pmatrix}$, e calcolato in $A(0, 1, -1)$ diventa $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, di rango due: dunque la curva $\ell = \{g(x, y, z) = (-2, 1)\}$ è regolare in A, e la retta tangente affine r cercata è data da $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} 3x + 4y - 4z - 8 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ (si noti che, ovviamente, la retta r è contenuta nel piano Π).



Esercizio 3: la curva Γ (nero), i punti P_k (nero), la retta tangente in $P = P_0$ (grigio); altre curve di livello di f (grigio); l'insieme K (giallo), il punto A di massimo assoluto (verde) e il punto D di minimo assoluto (rosso), con le curve di livello di f passanti per essi (stesso colore).

Prova scritta (15/09/2008)

1. Studiare l'integrabilità per $x > 0$ di $f_\alpha(x) = \dfrac{|\log x|^\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}|\sqrt{x}-1|^{2\alpha}}$, e calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

2. Studiare a priori crescenza e convessità delle soluzioni $y(x)$ di $xy' = \sin^2 y$, trovandone poi quella per cui $y(1) = -\frac{5\pi}{6}$. Determinare poi tutte le soluzioni $y(x)$ di $4y'' + 4y' + y + \pi = 0$ che soddisfano alla stessa condizione.

3. Sia ℓ la curva piana in forma polare definita da $\rho(\theta) = 2 - \sin\theta$ per $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(a) Disegnare ℓ, parametrizzarla in modo opportuno e calcolarne la retta r tangente nel punto P dato da $\theta = 0$. Ricavare poi un'equazione cartesiana per ℓ, ed usarla per ricalcolare r.

(b) Scrivere in modo corretto (senza calcolarli) gli integrali che esprimono la lunghezza e le coordinate del baricentro geometrico di ℓ.

(c) Dopo aver mostrato che ℓ è compatta, determinarne i punti a distanza minima e massima da $(0, -1)$. (Facoltativo: più in generale, da $(0, u)$ al variare di $u \in \mathbb{R}$.)

4. Sia $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z),\, g_2(x, y, z),\, g_3(x, y, z)) = (x^2 y - e^{x^2-y+z},\, xyz^2,\, 3x - y)$.

(a) Dire quali superfici di livello di g_1 sono regolari; detta X quella con $A(0, 1, 1)$, determinare il piano Π tangente a X in A. Mostrare poi che è possibile parametrizzare X come grafico $z(x, y)$ attorno A (in questo caso, si può dire esplicitamente chi è $z(x, y)$?), e ricalcolare Π.

(b) Dal sistema $(g_1(x, y, z),\, g_2(x, y, z)) = (-1, 0)$ si vorrebbero esplicitare, all'intorno di A, due delle variabili in funzione della terza. Spiegare se ciò è possibile, e come, descrivendo le funzioni implicite fino al primo ordine.

(c) Mostrare che g è un diffeomorfismo se ristretta ad un opportuno intorno di A; detta h l'inversa locale di g, calcolare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di h in $B = g(A)$.

Soluzioni.

1. L'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}|\sqrt{x}-1|^{2\alpha}}$ va studiata in 0^+, $1^\mp$ e $+\infty$. A tal fine, è opportuno ricordare che la funzione $x^\gamma|\log x|^\delta$ è integrabile in 0^+ se $\gamma > -1$ (per ogni δ) o se $\gamma = -1$ e $\delta < -1$; è integrabile in $1^\mp$ se $\delta > -1$; ed è integrabile in $+\infty$ se $\gamma < -1$ (per ogni δ) o se $\gamma = -1$ e $\delta < -1$. • In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^{-\frac{\alpha}{2}}|\log x|^\alpha$, da cui $-\frac{\alpha}{2} > -1$ (ovvero $\alpha < 2$) oppure $-\frac{\alpha}{2} = -1$ e $\alpha < -1$ (no). • In $1^\pm$ si ha $|\log x| \sim_{1^\pm} |x-1|$ e $|\sqrt{x}-1| \sim^*_{1^\pm} |x-1|$ (infatti $\lim_{x\to 1} \frac{|\sqrt{x}-1|}{|x-1|} = \frac{1}{2}$), pertanto $f_\alpha(x) \sim^*_{1^\mp} |x-1|^{\alpha-2\alpha} = |x-1|^{-\alpha}$, da cui $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$. • Infine, essendo $|\sqrt{x}-1| \sim_{+\infty} \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}2\alpha}(\log x)^\alpha = x^{-\frac{3\alpha}{2}}(\log x)^\alpha$, da cui $-\frac{3\alpha}{2} < -1$

(ovvero $\alpha > \frac{2}{3}$) oppure $-\frac{3\alpha}{2} = -1$ e $\alpha < -1$ (no).
Dunque $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ per $\alpha < 2$; lo è in $1^\mp$ per $\alpha < 1$; e lo è in $+\infty$ per $\alpha > \frac{2}{3}$. Così $\int_2^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\,dx$ converge, e (posto $x = u^2$, da cui $dx = 2u\,du$) vale $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2\log u}{u(u-1)^2} 2u\,du = 4\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\log u}{(u-1)^2}\,du = 4(-\frac{\log u}{u-1} + \int \frac{1}{u(u-1)}\,du]_2^{+\infty} = 4(-\frac{\log u}{u-1} + \log\frac{u-1}{u}]_2^{+\infty} = 4((0) - (-\log 2 + \log\frac{1}{2})) = 8\log 2$.

2. Per $x \neq 0$, dividendo si trova $y' = \frac{\sin^2 y}{x}$, da cui si nota che le soluzioni per $x < 0$ (risp. $x > 0$) sono decrescenti (risp. crescenti). Derivando ancora i due membri rispetto x e sostituendo poi $y' = \frac{\sin^2 y}{x}$ si ottiene $y'' = \frac{(2\sin y\cos y\, y')x - \sin^2 y}{x^2} = \frac{(\sin^2 y)(\sin 2y - 1)}{x^2}$ che è sempre ≤ 0, dunque le soluzioni sono concave sia per $x < 0$ che per $x > 0$. Separando poi (per x all'intorno di 1) le variabili e integrando si ottiene $-\operatorname{cotg} y = \log x + k$, e imponendo $y(1) = -\frac{5\pi}{6}$ si trova $k = -\sqrt{3}$, da cui $y = \operatorname{arccotg}(\sqrt{3} - \log x) + h\pi$, e ancora una volta la condizione $y(1) = -\frac{5\pi}{6}$ dà $h = -1$: dunque la soluzione cercata (definita per $x > 0$) è $y(x) = \operatorname{arccotg}(\sqrt{3} - \log x) - \pi$. L'altra equazione $4y'' + 4y' + y + \pi = 0$ è lineare del 2o ordine a coefficienti costanti: l'equazione caratteristica ha soluzione doppia $-\frac{1}{2}$, mentre una soluzione particolare è evidentemente la costante $y \equiv -\pi$, dunque l'integrale generale è $y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}} - \pi$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Imponendo che $y(1) = -\frac{5\pi}{6}$ si ha $(A + B)\frac{1}{\sqrt{e}} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$, da cui $B = \frac{\pi\sqrt{e}}{6} - A$, perciò le soluzioni cercate sono $y(x) = (A + (\frac{\pi\sqrt{e}}{6} - A)x)e^{-\frac{x}{2}} - \pi$ per $A \in \mathbb{R}$.

3. (a) (Vedi figura) La curva polare ℓ data da $\rho(\theta) = 2 - \sin\theta$ si disegna facilmente (si noti che, dipendendo da θ tramite il seno, ℓ sarà simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), e si può parametrizzare come di consueto tramite $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(\theta) = ((2 - \sin\theta)\cos\theta, (2 - \sin\theta)\sin\theta)$; derivando si trova $\gamma'(\theta) = (-2\sin\theta - \cos 2\theta, 2\cos\theta - \sin 2\theta)$, dunque la retta tangente nel punto $P = \gamma(0) = (2, 0)$ è data parametricamente da $r = \{\gamma(0) + \lambda\gamma'(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0) + \lambda(-1, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2 - \lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, e cartesianamente da $2x + y - 4 = 0$. Moltiplicando poi per ρ ambo i membri di $\rho = 2 - \sin\theta$ si ottiene $x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} - y$, ovvero l'equazione cartesiana $h(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0$: la retta r si può allora ritrovare tramite $\nabla h(2, 0) \cdot (x - 2, y - 0) = 0$, cioè $(2, 1) \cdot (x - 2, y) = 0$ (che ridà $2x + y - 4 = 0$).
(b) L'elemento d'arco è $d\sigma = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta = \sqrt{5 - 4\sin\theta}\,d\theta$, dunque la lunghezza di ℓ è data da $L_\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5 - 4\sin\theta}\,d\theta$ mentre il baricentro geometrico è il punto G di coordinate

$$(x_G, y_G) = \left(\frac{1}{L_\ell} \int_{-\pi}^{\pi} (2 - \sin\theta)\cos\theta\sqrt{5 - 4\sin\theta}\,d\theta,\ \frac{1}{L_\ell} \int_{-\pi}^{\pi} (2 - \sin\theta)\sin\theta\sqrt{5 - 4\sin\theta}\,d\theta \right)$$

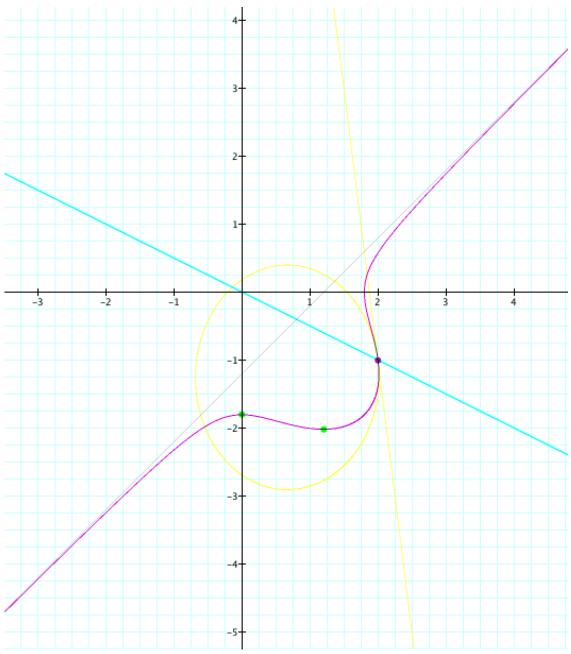
(si noti che, come suggerito dalla simmetria della curva, l'ascissa x_G del baricentro risulta nulla, come si vede subito facendo il cambio di variabile $t = \sin\theta$ nell'integrale).
(c) (Vedi figura) Il modo più rapido di mostrare che ℓ è compatta è di osservare che è l'immagine tramite γ (continua) dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (compatto). Per il resto, trattiamo fin da subito il caso generale (facoltativo) della distanza da $(0, u)$, specificando alla fine il caso richiesto di $u = -1$. Si tratta allora di trovare i massimi e minimi su ℓ della funzione $d(x, y) = x^2 + (y - u)^2$ che rappresenta (per semplicità di calcolo, il quadrato del)la distanza di un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da $(0, u)$: componendo d con la parametrizzazione γ, si tratta di trovare gli estremi assoluti di $D : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $D(\theta) = d(\gamma(\theta)) = (2 - \sin\theta)^2\cos^2\theta + (2 - \sin\theta)^2\sin^2\theta + u^2 + 2u(2 - \sin\theta)\sin\theta = (2u + 1)\sin^2\theta - 4(u + 1)\sin\theta + u^2 + 4$. La derivata $D'(\theta) = \frac{dD}{d\theta}(\gamma(\theta)) = 2\cos\theta\,[(2u + 1)\sin\theta - 2(u + 1)]$ si annulla se $\cos\theta = 0$, ovvero se $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$, oppure (nell'ipotesi $|\frac{2(u+1)}{2u+1}| \leq 1$, che equivale a $u \leq -\frac{3}{4}$) se $\sin\theta = \frac{2(u+1)}{2u+1}$, ovvero se $\theta := \theta_+ = \arcsin\frac{2(u+1)}{2u+1}$ e $\theta := \theta_- =$ il simmetrico di θ_+ rispetto all'asse delle ordinate. Osservando che $D(\frac{\pi}{2}) = (u - 1)^2$, $D(-\frac{\pi}{2}) = (u + 3)^2$, che $D(\theta_\mp) = \frac{u^2(2u-3)}{2u+1}$ (se $u \leq -\frac{3}{4}$), che $D(\frac{\pi}{2}) \leq D(-\frac{\pi}{2})$ se e solo se $u \geq -1$, che se $u \leq -\frac{3}{4}$ si ha $D(\theta_\mp) > D(\frac{\pi}{2})$ e $D(\theta_\mp) \geq D(\frac{\pi}{2})$ (e quest'ultima è un'uguaglianza per $u = -\frac{3}{4}$), si può concludere che: (a) se $u > -\frac{3}{4}$ il punto di ℓ a massima distanza da $(0, u)$ è $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0, -3)$ e quello a minima è $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$; (b) se $u = -\frac{3}{4}$ i punti di ℓ a massima distanza da $(0, u)$ sono $\gamma(\theta_\mp)$ e $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0, -3)$ e quello a minima è $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$; (c) se $u < -\frac{3}{4}$ i punti di ℓ a massima distanza da $(0, u)$ sono $\gamma(\theta_\mp)$ e quello a minima è $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ (se $-1 \leq \alpha < -\frac{3}{4}$) oppure $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0, -3)$ (se $\alpha \leq -1$). In particolare, se $u = -1$ i punti di massima distanza sono $\gamma(\theta_\mp) = (\mp 2, 0)$, e quelli a minima sono sia $(0, -3)$ che $(0, 1)$.

4. (a) Essendo $g_1(x, y, z) = x^2 y - e^{x^2 - y + z}$, il gradiente $\nabla g_1(x, y, z) = (2xy - 2x\,e^{x^2 - y + z},\ x^2 + e^{x^2 - y + z},\ -e^{x^2 - y + z})$ non si annulla mai (si guardi la terza componente $\frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z)$), dunque tutte le superfici di livello di g_1 sono regolari. In particolare lo è quella di $A(0, 1, 1)$, ovvero $\mathsf{X} = \{g_1(x, y, z) = -1\}$, e il piano tangente Π ha equazione cartesiana $\nabla g_1(A)\cdot(x-0,y-1,z-1)=(0,1,-1)\cdot(x,y-1,z-1)=0$, ovvero $y-z=0$. Essendo $\frac{\partial g_1}{\partial z}(A)=-1\neq 0$ si può effettivamente parametrizzare X come grafico $z(x,y)$ attorno A, con $z(0,1)=1$ e $\nabla z(0,1)=(\dot z_x(0,1),\dot z_y(0,1))=-(-1)^{-1}(0,1)=(0,1)$, da cui il piano Π si ritrova come $z=1+0(x-0)+1(y-1)$, ovvero $z=y$. In realtà, poiché come visto $\frac{\partial g_1}{\partial z}$ non si annulla mai, la superficie X (ma anche ogni altra superficie di livello di g_1) si presenta come grafico $z(x,y)$ attorno a ogni suo punto, e qui è anche facile ricavare tale funzione: infatti, da $x^2y-e^{x^2-y+z}=-1$ si ricava subito $z=y-x^2+\log(x^2y+1)$.

(b) Lo jacobiano del sistema $(g_1,\,g_2)=(-1,0)$ è $\mathsf{J}_{(g_1,g_2)}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2xy-2x\,e^{x^2-y+z} & x^2+e^{x^2-y+z} & -e^{x^2-y+z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz\end{pmatrix}$, che calcolato in $A(0,1,1)$ diventa $\mathsf{J}_{(g_1,g_2)}(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Poiché l'unico minore di ordine due nonsingolare di $\mathsf{J}_{(g_1,g_2)}(A)$ è quello rispetto (x,y), per il teorema del Dini l'unica maniera possibile di esplicitare, all'intorno di A, due delle variabili in funzione della terza è di ricavare $(x(z),y(z))$: sarà allora $(x(1),y(1))=(0,1)$ e $(x'(1),y'(1))=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o_1(z-1) \\ 1+1(z-1)+o_1(z-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o_1(z-1) \\ z+o_1(z-1)\end{pmatrix}$. (In realtà è facile verificare che il sistema proposto ha soluzioni $\{(0,\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$, dunque le funzioni implicite sono precisamente $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ z\end{pmatrix}$, con resto $o_1(z-1)$ nullo.)

(c) In base al teorema della funzione inversa, per verificare che g è un diffeomorfismo se ristretta ad un opportuno intorno di A basta vedere se $\det\mathsf{J}_g(A)\neq 0$, e ciò è vero perché $\mathsf{J}_g(A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ ha determinante 1. Dette $\underline{u}=(u,v,w)$ le variabili del codominio di $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ (mentre quelle del dominio sono naturalmente $\underline{x}=(x,y,z)$), lo sviluppo locale di h (inversa locale di g) attorno $B=g(A)=(u_0,v_0,w_0)=(-1,0,-1)$ è dato da $h(\underline{u})=h(B)+\mathsf{J}_h(B)(\underline{u}-B)+o_B(\|\underline{u}-B\|)=A+\mathsf{J}_g(A)^{-1}(\underline{u}-B)+o_B(\|\underline{u}-B\|)$, cioè (scrivendo $\sigma=o_B(\|\underline{u}-B\|)$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_1(u,v,w) \\ h_2(u,v,w) \\ h_3(u,v,w)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-(-1) \\ v-0 \\ w-(-1)\end{pmatrix}+\sigma=\begin{pmatrix} v \\ 1+(u+1)+3v+3(w+1) \\ 1-v-(w+1)\end{pmatrix}+\sigma.$$



Esercizio 3: la curva ℓ (celeste) e il suo punto P (rosso) con la tangente r (grigio); i punti di ℓ a distanza massima da $(0,-1)$ (nero) sono rossi, mentre quelli a distanza minima sono verdi.

Prima prova parziale (14/05/2009)

1. (a) Discutere per $\alpha \geq 0$ dominio[46] e integrabilità di $f_\alpha(x) = \dfrac{|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{(\alpha-1)x}}{|x|^{2\alpha} + x - 2}$; calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(x)\, dx$.

(b) Studiare la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x f_{\frac{1}{2}}(t)\, dt$.

2. (a) Determinare le soluzioni per $x > 0$ dell'equazione differenziale $\log(x+1) = 2x\, y' + y$, dicendo quali sono prolungabili come tali anche in $x = 0$. Trovare poi le soluzioni di $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$, vedendo quali di esse appaiono tra le precedenti.

(b) Data l'equazione differenziale $(x+1)e^x\, y' - y^2 = 0$ indagare a priori quanto possibile su crescenza, convessità e eventuali simmetrie delle soluzioni. Calcolare poi la soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(0) = \alpha$ (ove $\alpha \geq 0$), e dire quali sono i suoi limiti notevoli.

3. (a) Disegnare la curva $\mathcal{A}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = 6\cos 2\theta$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. Dopo averne trovato un'opportuna parametrizzazione γ, calcolare la retta tangente a $\mathcal{A}$ nel suo punto dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$, e scrivere correttamente l'integrale $\int_\gamma (x - 2y)\, d\sigma$.

(b) Sia $\mathcal{B}$ il ramo destro di iperbole di asintoti $x + 2y - 5 = 0$ e $x - 2y + 3 = 0$ passante per il punto $(2, 2)$. Trovare un'equazione cartesiana $f(x, y) = 0$ che definisce $\mathcal{B}$, e ricavarne un'opportuna parametrizzazione. Usando poi in modo opportuno le funzioni iperboliche, determinare un'altra parametrizzazione di $\mathcal{B}$ ed esibire il cambio di parametro. Infine, scrivere correttamente gli integrali che definiscono il baricentro geometrico del tratto di $\mathcal{B}$ contenuto nella striscia $0 \leq y \leq 3$.

4. (a) Disegnare il dominio di $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(|x| + y)}{x^2 + y^2 + 2x}$, gli zeri ed il segno; parlare della continuità; calcolarne i limiti notevoli nei punti d'accumulazione in $\overline{\mathbb{R}^2}$ del dominio. Considerato poi il segmento $I = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$, dire a priori come sarà fatta $f(I)$, e quindi calcolarla.

(b) Disegnare gli insiemi $L_1 = \{(x, y) : (x+2)^2 + 1 \leq |y+1|\,,\ |y| \leq 3\}$, $L_2 = \{(x, y) : y = \log(x-1)\,,\ y \geq -2\}$ e $L_3 = \{(x, y) : 2\sin(x^2 + y^2) > 1\,,\ |x| > 3\}$, descrivendone le proprietà topologiche (aperti, chiusi, compatti, connessi...). Su quali di essi la funzione f ammette estremi assoluti?

[46] Per vedere dove si annulla il denominatore, si potrà fare un confronto grafico tra le funzioni $|x|^{2\alpha}$ e $2 - x$.

Soluzioni.

1. (a) Le cose che possono influire sul dominio di $f_\alpha(x) = \frac{|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{(\alpha-1)x}}{|x|^{2\alpha}+x-2}$ con $\alpha \geq 0$ sono la potenza $|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}$ (se $\alpha - \frac{1}{2} \leq 0$ — ovvero se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ — deve essere $x \neq 0$), la potenza $|x|^{2\alpha}$ (se $2\alpha \leq 0$ — ovvero se $\alpha = 0$ — deve essere $x \neq 0$, ma ciò è ricompreso in quanto appena detto per l'altra potenza) e il denominatore $|x|^{2\alpha} + x - 2$ (esso si annulla se e solo se $|x|^{2\alpha} = 2 - x$, e un semplice confronto grafico tra le funzioni $|x|^{2\alpha}$ e $2 - x$ mostra che ciò avviene sempre quando $x = 1$, e se $2\alpha > 1$ — cioè se $\alpha > \frac{1}{2}$ — anche in un altro punto $\tilde{x}_\alpha < -1$). Ricapitolando, se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ i punti da escludere dal dominio di $f_\alpha(x)$ sono 0 e 1, mentre se $\alpha > \frac{1}{2}$ sono $\tilde{x}_\alpha$ e 1. È dunque in tali punti, oltre che in $\mp\infty$, che l'integrabilità va controllata. • In $+\infty$, a causa dell'esponenziale si ha che $f_\alpha(x)$ è integrabile se $0 \leq \alpha < 1$, non integrabile se $\alpha > 1$, mentre quando $\alpha = 1$ si ottiene $f_1(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|^2+x-2} \sim_{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}$ e dunque è integrabile per asintoticità. • In $-\infty$, con considerazioni analoghe si ha integrabilità se $\alpha \geq 1$ e non integrabilità se $0 \leq \alpha < 1$. • In $1^\mp$ si ha $|f_\alpha(x)| \sim_1^* \frac{1}{|x^{2\alpha}+x-2|} \sim_1^* \frac{1}{|x-1|}$ (per quest'ultima asintoticità si noti che se $\alpha = 0$ essa è evidente, mentre se $\alpha > 0$ si ottiene $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2\alpha}+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\alpha x^{2\alpha-1}+1}{1} = 2\alpha > 0$). Dunque $f_\alpha(x)$ non è mai integrabile in 1. • Se $\alpha > \frac{1}{2}$ c'è poi da guardare $\tilde{x}_\alpha$: ma, ancora una volta, si ha $|f_\alpha(x)| \sim_{\tilde{x}_\alpha}^* \frac{1}{|x-\tilde{x}_\alpha|}$ e dunque $f_\alpha(x)$ non è mai integrabile in $\tilde{x}_\alpha$. • Infine, se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ c'è da guardare $0^\mp$: ed essendo in tal caso $|f_\alpha(x)| \sim_0^* |x|^{\alpha-\frac{1}{2}}$, la condizione d'integrabilità diventa $\alpha - \frac{1}{2} > -1$, che per $\alpha \geq 0$ è sempre vera.
• Per quanto detto, l'integrale proposto $\int_2^{+\infty} f_1(x)\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}\, dx$ è convergente. Per il calcolo, col cambio $x = u^2$ si ottiene $2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+u^2-2}\, du = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} (\frac{1}{u^2-1} + \frac{2}{u^2+2})\, du = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}})]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{2}{3}(\sqrt{2}\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\log(\sqrt{2}+1) \sim 1{,}3$.

(b) (Figura 1) $F(x) = \int_0^x f_{\frac{1}{2}}(t)\, dt = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{|t|+t-2}\, dt$ è definita per $x < 1$ (infatti la funzione integranda è localmente integrabile in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$ e perciò, dovendo calcolarne l'integrale con punto iniziale 0 e fino a x, ciò è possibile solo scegliendo $x \in]-\infty, 1[$). Inoltre, poiché la funzione integranda è anche continua in $]-\infty, 1[$, per Torricelli siamo già certi che $F(x)$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$. Quanto a zeri e segno, notiamo che per $t \in]-\infty, 1[$ si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) \leq 0$: ne deduciamo che vale $F(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, e $F(x) > 0$ se e solo se $x < 0$. Ora, per $t < 0$ si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$, che si integra subito ottenendo $e^{-\frac{t}{2}}$: dunque se $x < 0$ si ricava la forma finita $F(x) = (e^{-\frac{t}{2}}]_0^x = e^{-\frac{x}{2}} - 1$, che si studia e disegna facilmente (è un esponenziale strettamente decrescente e abbassato di 1, dunque il limite per $x \to -\infty$ è $+\infty$). Possiamo perciò concentrarci sul caso $0 < x < 1$, in cui si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}$ che non ha primitiva elementare: derivando si ottiene $F'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}$, sempre negativa, perciò F è strettamente decrescente anche per $0 < x < 1$. Notiamo poi che $F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1) = -\frac{1}{2}$ e $F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}) = -\frac{1}{2}$ sono uguali tra loro, e dunque, come atteso, $F(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto il suo dominio. Manca ancora il limite notevole per $x \to 1^-$, che coincide con l'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}\, dt$: essendo la funzione integranda negativa e dell'ordine di $\frac{1}{t-1}$, esso vale $-\infty$.

2. (a) L'equazione $2xy' + y = \log(x+1)$ è lineare del primo ordine, definita per $x > -1$; visto che vengono richieste le soluzioni per $x > 0$, possiamo portarla in forma normale dividendo per x, ottenendo $y' + p(x)\, y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{2x}$ e $q(x) = \frac{\log(x+1)}{2x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \frac{1}{2}\log x = \log\sqrt{x}$; posto $u = \sqrt{x}$, si ha poi $\int e^{P(X)} q(x)\, dx = \int \sqrt{x}\frac{\log(x+1)}{2x}\, dx = \int \log(u^2+1)\, du = u\log(u^2+1) - \int u\frac{2u}{u^2+1}\, du = u\log(u^2+1) - 2u + 2\operatorname{arctg} u = \sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, dunque l'integrale generale per $x > 0$ è $y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + k) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + k\frac{1}{\sqrt{x}}$ con $k \in \mathbb{C}$. Di queste funzioni, la sola prolungabile per continuità in $x = 0$ è quella con $k = 0$, ovvero $y_0(x) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ con valore $y_0(0) = 0$; in realtà, essendo $y_0(x) = 1 + x + o_0(x) - 2 + 2\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o_0(x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x + o_0(x)$ si ha anche prolungabilità come classe $\mathcal{C}^1$, con $y_0'(0) = \frac{1}{3}$; ed essendo $2 \cdot 0 \cdot y_0'(0) + y_0(0) = \log(0+1) = 0$ si tratta effettivamente di una soluzione su tutto $[0, +\infty[$. • L'equazione $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti;

scritta $y'' + 2y' + 3y = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = 3e^{-x}$ e $b_2(x) = x + 4$, si trovano rapidamente le soluzioni $y(x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}) + \frac{1}{9}(3x+10)$ con $A, B \in \mathbb{C}$, nessuna delle quali appare tra le precedenti.

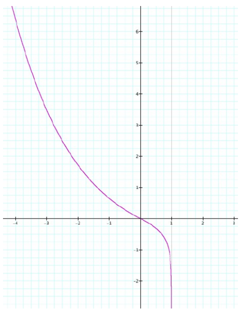
(b) (Figura 2) L'equazione differenziale $(x+1)e^x\, y' - y^2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili. Da $(x+1)e^x\, y' = y^2$ si ricava subito che un'eventuale soluzione $\mathcal{C}^1$ definita in $x = -1$ deve ivi annullarsi; per $x \neq -1$ si ricava invece $y' = \frac{y^2\, e^{-x}}{x+1}$, dunque le soluzioni crescono per $x > -1$ e decrescono prima. Per quanto riguarda poi le soluzioni $\mathcal{C}^2$, derivando ambo i membri rispetto x si trova $y'' = \frac{(2yy'e^{-x} - y^2e^{-x})(x+1) - y^2e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{y^2e^{-x}}{(x+1)^2}(2ye^{-x} - x - 2)$, dunque tali soluzioni sono convesse sopra il grafico della funzione $y = \frac{1}{2}(x+2)e^x$ e concave sotto. Se $\varphi(x)$ è soluzione per $x > 0$, con calcoli del tipo già visto più volte risulta che ne' $\varphi(-x)$ ne' $-\varphi(-x)$ sono soluzioni per $x < 0$, dunque non vi sono simmetrie evidenti. Passiamo ora al calcolo della soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(0) = \alpha \geq 0$: se $\alpha = 0$ si ha la soluzione nulla $y_0(x) \equiv 0$, altrimenti separando le variabili e integrando si ottiene $\int_\alpha^y \frac{1}{\eta^2}\, d\eta = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt$, ovvero $-\frac{1}{y} + \frac{1}{\alpha} = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt$, da cui $y_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt}$. Ora, della funzione $\varphi(x) := \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt$ non si può dare un'espressione elementare, ma si possono tuttavia dire alcune cose: essa è definita in $]-1, +\infty[$, si annulla in $x = 0$, è strettamente crescente (la sua derivata è $\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} > 0$), soddisfa $\lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = \int_0^{-1} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt =: \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ (un disegno del grafico di $\frac{e^{-x}}{x+1}$ mostra che $\ell \sim 0{,}6$): ne ricaviamo che se $0 < \alpha \leq \frac{1}{\ell}$ la funzione $y_\alpha(x)$ è definita in $]-1, +\infty[$, mentre se $\alpha > \frac{1}{\ell}$ (ovvero se $\frac{1}{\alpha} < \ell$) essa è definita in un intervallo $]-1, x_\alpha[$, intorno di $x = 0$, ove $x_\alpha > 0$ è il punto tale che $\int_0^{x_\alpha} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt = \frac{1}{\alpha}$. I limiti notevoli di $y_\alpha(x)$ sono allora $\lim_{x\to-1^+} y_\alpha(x) = 0^+$ (infatti il denominatore tende a $+\infty$), mentre se $0 < \alpha < \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha\ell}$, se $\alpha = \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = +\infty$, e se $\alpha > \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to x_\alpha^-} y_\alpha(x) = +\infty$.

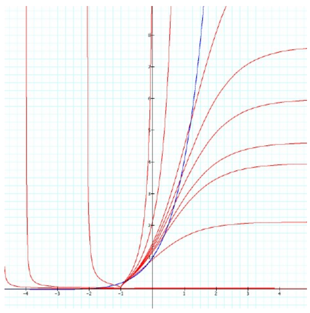
3. (a) (Figura 3) La curva $\mathcal{A}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = 6\cos 2\theta$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ è un petalo di *rodonea* (dal greco *rhodon*, "rosa"), parametrizzabile nel modo consueto con $\gamma : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta) = (6\cos 2\theta\cos\theta, 6\cos 2\theta\sin\theta)$. Il punto di $\mathcal{A}$ dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$ è $\gamma(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$; derivando si ha $\gamma'(\theta) = 6(-2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta, -2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$, da cui $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}(7, \sqrt{3})$, perciò la retta tangente cercata ha forma parametrica $\{(x, y) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) + t(7, \sqrt{3}) : t \in \mathbb{R}\}$ e cartesiana $\sqrt{3}\,x - 7y + 6 = 0$. Infine, l'elemento d'arco è $d\sigma = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta = 6\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\, d\theta$, perciò $\int_\gamma (x - 2y)\, d\sigma = 36\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta(\cos\theta - 2\sin\theta)\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\, d\theta$.

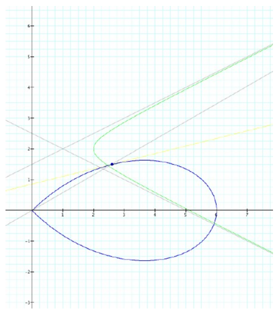
(b) (Figura 3) Nel riferimento traslato $(X, Y) = (x-1, y-2)$ l'equazione dell'iperbole $\mathcal{B}$ sarà del tipo $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ con $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{X^2}{a^2} - \frac{4Y^2}{a^2} = 1$; e il passaggio per il punto $(X, Y) = (1, 0)$ dà $a = 1$. Si ottiene pertanto il luogo $X^2 - 4Y^2 = 1$ da cui, rimettendo le coordinate (x, y), si ottiene $(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 1$, ovvero $f(x, y) = (x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 1 = 0$. Trattandosi del ramo destro, da $f(x, y) = 0$ conviene esplicitare $x(y)$ tenendo il segno più, ottenendo $x(y) = 1 + \sqrt{4(y-2)^2 + 1}$, da cui la parametrizzazione $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\chi(y) = (x(y), y)$. Ricordando che le funzioni iperboliche $(\cosh t, \sinh t)$ parametrizzano il ramo destro dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$, traslando ed adattando alla situazione presente si ha una parametrizzazione alternativa di $\mathcal{B}$ data da $\widetilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $\widetilde{\chi}(t) = (1 + \cosh t, 2 + \frac{1}{2}\sinh t)$ (si noti infatti che $(f \circ \widetilde{\chi})(t) \equiv 0$ per ogni t); e il cambio di parametro è $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato da $y = \alpha(t) = 2 + \frac{1}{2}\sinh t$. Infine, usando la parametrizzazione χ, la lunghezza del tratto di $\mathcal{B}$ contenuto nella striscia $0 \leq y \leq 3$ è data da $L = \int_0^3 \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy$, e il baricentro geometrico è il punto $(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}) = \left(\frac{1}{L}\int_0^3 x(y)\sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy,\ \frac{1}{L}\int_0^3 y\sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy\right)$.

4. (a) (Figura 4) Il dominio di $\frac{\mathrm{arctg}(|x|+y)}{x^2+y^2+2x}$ si ottiene rimuovendo dal piano $\mathbb{R}^2$ il luogo $x^2 + y^2 + 2x = 0$, ovvero la circonferenza C di centro $(-1, 0)$ e raggio 1; in tale dominio f è continua, si annulla sul grafico $\Gamma = \{y = -|x|\}$ ed ha segno dato dal quoziente tra i segni del numeratore (positivo sopra Γ e negativo sotto) e del denominatore (positivo fuori dalla circonferenza e negativo dentro). I limiti notevoli sono nei punti di C e in ∞_2. In un qualsiasi punto di C diverso da $O(0, 0)$ e da $A(-1, -1)$ (le due intersezioni con Γ) il limite è $\pm\infty$, col segno che dipende dal fatto che si tenda al punto da una zona in cui f è $\gtrless 0$; invece nei punti O e A il limite non esiste, perché tendendovi lungo Γ la funzione è nulla ma in ogni loro intorno vi sono punti di C diversi da loro, in cui –come visto– f diverge. Quanto a ∞_2, si noti che il numeratore è limitato mentre al denominatore c'è essenzialmente il quadrato della distanza di (x, y) dal centro $(-1, 0)$, perciò è probabile che il limite valga 0: per vederlo con precisione, preso un qualsiasi $r > 1$, al di fuori della circonferenza di centro $(-1, 0)$ e raggio r si ha $|f(x, y)| = \frac{|\mathrm{arctg}(|x|+y)|}{|(x-1)^2+y^2-1|} \leq \frac{\pi/2}{r^2-1}$, dunque quando $r \to +\infty$ si può concludere per confronto. Infine, il segmento $I = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$ è connesso per archi e compatto, ed è tutto contenuto nel dominio di f che è continua: dunque possiamo già dire che anche l'immagine $f(I)$ è connessa per archi e compatta, perciò non potrà che essere un intervallo compatto $[a,b]$. Quanto al calcolo, per definizione si ha $f(I) = \{f(x, 1-x) : 0 \le x \le 1\} = \{\frac{\mathrm{arctg}(|x|+1-x)}{x^2+(1-x)^2+2x} : 0 \le x \le 1\} = \{\frac{\pi/4}{2x^2+1} : 0 \le x \le 1\} = [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ (si noti che $u(x) := \frac{\pi/4}{2x^2+1}$ è continua e decrescente in $[0,1]$, dunque $u([0,1]) = [u(1), u(0)]$).

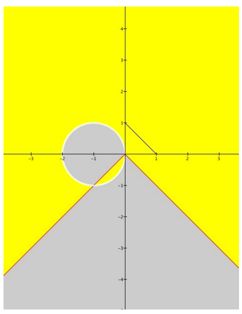
(b) (Figura 5) • L'insieme $L_1 = \{(x,y) : (x+2)^2 + 1 \le |y+1|\,,\ |y| \le 3\}$ è l'intersezione tra le parti interne (chiuse) delle parabole $y = (x+2)^2$ e $y = -(x+2)^2 - 2$ con la striscia orizzontale chiusa $0 \le y \le 3$, dunque è un compatto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con due componenti connesse. Pur essendo L_1 compatto, f non vi assume estremi assoluti: infatti Weierstrass non si può applicare perché L_1 non è contenuto nel dominio di f, e poi esso contiene dei punti di C nei quali f diverge a $\pm\infty$. • L'insieme $\{(x,y) : y = \log(x-1)\,,\ y \ge -2\}$ è il tratto del grafico $y = \log x$ che sta sopra la retta orizzontale $y = -2$ (compreso il punto di intersezione $Q(1+e^{-2}, -2)$): si tratta di un arco chiuso e illimitato di $\mathbb{R}^2$, tutto contenuto nel dominio di f. Non essendo L_2 compatto, non possiamo affermare che f vi assume estremi assoluti usando Weierstrass: tuttavia in questo caso, in cui $\lim_{\infty_2} f(x,y) = 0$ e l'insieme in questione è chiuso, si può dimostrare che è comunque vero usando il seguente ragionamento standard. Notiamo intanto che L_2 contiene dei punti in cui $f > 0$ (ad esempio il punto $P(2,0)$) e altri in cui $f < 0$ (ad esempio l'estremo $Q(1+e^{-2}, -2)$); preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \max\{f(P), |f(Q|\}$, per definizione di limite sappiamo che esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che se $\|(x,y)\| > M_\varepsilon$ allora $|f(x,y)| < \varepsilon$; ma allora, detta B_ε la palla chiusa di centro O e raggio M_ε, gli eventuali estremi di f su L_2 devono coincidere con gli eventuali estremi di f su $L_2 \cap B_\varepsilon$ (perché fuori da B_ε si ha $|f| < \varepsilon$, e, come visto con P e Q, in $L_2 \cap B_\varepsilon$ la funzione assume valori superiori a ε e inferiori a $-\varepsilon$), e questi ultimi esistono per Weierstrass perché $L_2 \cap B_\varepsilon$ è un compatto tutto contenuto nel dominio di f, che è continua. • L'insieme $L_3 = \{(x,y) : 2\sin(x^2+y^2) > 1\,,\ |x| > 3\}$ può essere scritto anche come $L_3 = \bigcup_{k \ge 0} \{(x,y) : \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x^2 + y^2 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\} \cap \{|x| > 3\}$: si tratta di una famiglia infinita di corone circolari aperte centrate in O delle quali si prendono però i soli punti con ascissa > 3, aperto complementare della striscia verticale chiusa $-3 \le x \le 3$. Dunque L_3 è un aperto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con infinite componenti connesse, interamente contenuto nel dominio di f: però, non trattandosi di un chiuso di $\mathbb{R}^2$, non possiamo applicare il ragionamento fatto per L_2 e allo stato attuale delle nostre conoscenze non siamo in grado di dire se f ammetta o no estremi assoluti su di esso (dopo la seconda parte del corso lo saremo).

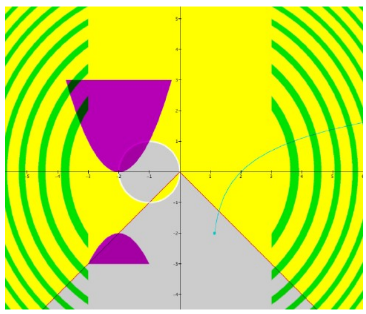






1. La funzione integrale $F(x)$ di (1.b). **2.** Alcune soluzioni $y_\alpha(x)$ di (2.b) (in rosso); la curva di cambio concavità (in blu). **3.** Le curve di (3.a-b).





4. Zeri (rosso), segno di f (> 0 in giallo, < 0 in grigio) e il segmento I di (4.a). **5.** Gli insiemi L_1 (viola), L_2 (azzurro) e L_3 (verde) di (4.b).

Prova scritta - Seconda prova parziale (18/06/2009)

1. [S] Data $f_\alpha(x) = \dfrac{\log(x^{\alpha+2}+1)}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}$, studiarne l'integrabilità in $]0,+\infty[$ e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

2. (a) [S] Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'\sqrt{x+1} = \cos^2(3y)$ tale che $y(0) = \frac{5\pi}{12}$.

(b) [S] Trovare le soluzioni reali di $y'' - y = 2e^{-x} - x + \sqrt{e^x+1}$ col grafico passante per l'origine.

3. Sia $f(x,y) = (2x-y^2)\ \text{arctg}(x+y)$.

(a) [S, P] Trovare dominio, zeri, segno, limiti notevoli di f.

(b) [S, P] Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta poi X quella passante per $A(2,-1)$, calcolare in due modi diversi la retta affine tangente a X in A.

(c) [S, P] Disegnare $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2-x \le y \le 0\,,\ x \le 0\} \cup \{(u, 1-u) : -2 \le u \le 3\}$ e descriverne le proprietà topologiche; dire poi se f ha estremi assoluti su T e, se sì, calcolarli.

4. Si consideri la funzione $g(x,y,z) = (2x-y+2z-2)\,e^{2xy-z^2}$.

(a) [S, P] Dire quali delle superfici di livello di g sono regolari. Detta S quella passante per $A(0,-1,0)$, calcolare in due modi il piano affine tangente a S in A.

(b) [P] Sia ℓ la curva ottenuta intersecando S col piano $x+y+z+1=0$: dimostrare che ℓ è regolare ovunque, ed esprimerla come curva parametrica fino al primo ordine attorno A.

(c) [P] Dimostrare che ℓ è compatta, e impostare il problema della ricerca dei suoi punti estremi rispetto a ciascuna delle tre coordinate.

Soluzioni.

1. L'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{\log(x^{\alpha+2}+1)}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}$ in $]0,+\infty[$ va esaminata in 0^+, $1\mp$ e $+\infty$. • In 0^+, se $\alpha+2>0$ (cioè se $\alpha>-2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} \frac{x^{\alpha+2}}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = x|\log x|^{\alpha-1}$, infinitesimo; se $\alpha+2=0$ (cioè se $\alpha=-2$) si ha $f_{-2}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinitesimo; infine, se $\alpha+2<0$ (cioè se $\alpha<-2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} \frac{\log(x^{\alpha+2})}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} \sim^*_{0^+} \frac{\log x}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = -x^{-(\alpha+1)}|\log x|^{\alpha}$, ancora una volta infinitesimo perché $-(\alpha+1)>0$. Pertanto in 0^+ la funzione è sempre integrabile. • In 1 si ha $f_\alpha(x) \sim^*_1 \frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}}$, dunque la condizione è $1-\alpha<1$, ovvero $\alpha>0$. • In $+\infty$ si ragiona in modo simile a 0^+: se $\alpha+2<0$ (cioè se $\alpha<-2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = x|\log x|^{\alpha-1}$, infinito; se $\alpha+2=0$ (cioè se $\alpha=-2$) si ha $f_{-2}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinito;

infine, se $\alpha+2>0$ (cioè se $\alpha>-2$) si ha $f_\alpha(x)\sim_{+\infty}\frac{\log(x^{\alpha+2})}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}\sim^*_{+\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}=-x^{-(\alpha+1)}|\log x|^\alpha$, da cui la condizione $-(\alpha+1)<-1$ (ovvero $\alpha>0$) oppure $-(\alpha+1)=-1$ e $\alpha<-1$ (no). Pertanto in $+\infty$ la funzione è integrabile se e solo se $\alpha>0$. • Da quanto detto, l'integrale $\int_0^{+\infty}f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha>0$; in particolare per $\alpha=1$ diventa $\int_0^{+\infty}\frac{\log(x^3+1)}{x^2}\,dx$. Una primitiva è $F_1(x)=(-\frac{1}{x})\log(x^3+1)-\int(-\frac{1}{x})\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx=-\frac{1}{x}\log(x^3+1)+\int(\frac{x+1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1})\,dx=-\frac{1}{x}\log(x^3+1)-\log(x+1)+\int\frac{\frac12(2x-1)+\frac32}{x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{x}\log(x^3+1)-\log(x+1)+\frac12\log(x^2-x+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac12))=-\frac{1}{x}\log(x^3+1)+\log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}+\sqrt3\,\mathrm{arctg}(\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac12))$, dunque, essendo $\lim_{x\to0^+}F_1(x)=-\frac{\pi\sqrt3}{6}$ e $\lim_{x\to+\infty}F_1(x)=\frac{\pi\sqrt3}{2}$, il nostro integrale vale $\frac{\pi\sqrt3}{2}-(-\frac{\pi\sqrt3}{6})=\frac{2\pi\sqrt3}{3}$.

2. (a) L'equazione $y'\sqrt{x+1}=\cos^2(3y)$ è a variabili separabili; separando e integrando si ottiene $\frac13\,\mathrm{tg}\,3y=2\sqrt{x+1}+k$, e imponendo che $y(0)=\frac{5\pi}{12}$ si ha $\frac13=2+k$, ovvero $k=-\frac53$. Dunque $\mathrm{tg}\,3y=6\sqrt{x+1}-5$, da cui $3y=\mathrm{arctg}(6\sqrt{x+1}-5)+h\pi$ per un opportuno $h\in\mathbb{Z}$: imponendo nuovamente che $y(0)=\frac{5\pi}{12}$ si ha $\frac{5\pi}{4}=\mathrm{arctg}\,1+h\pi$, da cui $h=1$, e perciò $y(x)=\frac13(\mathrm{arctg}(6\sqrt{x+1}-5)+\pi)$, definita per $x>-1$.

(b) L'equazione $y''-y=2e^{-x}-x+\sqrt{e^x+1}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Un sistema fondamentale di soluzioni (dell'omogenea associata) è $\{e^{-x},\,e^x\}$; usando il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare relativa a $b_1(x)=2e^{-x}$ risulta $\tilde y_1(x)=-xe^{-x}$ mentre una relativa a $b_2(x)=-x$ è $\tilde y_2(x)=x$. Per quanto riguarda $b_3(x)=\sqrt{e^x+1}$ bisogna ricorrere al metodo della variazione delle costanti arbitrarie: il determinante wronskiano di $\{e^{-x},\,e^x\}$ vale 2, dunque $\tilde y_3(x)=\gamma_1(x)e^{-x}+\gamma_2(x)e^x$ con $\gamma_1(x)=-\int\frac12 e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$ e $\gamma_2(x)=\int\frac12 e^{-x}\sqrt{e^x+1}\,dx$ (si ricava $\gamma_1(x)=-\frac13(e^x+1)\sqrt{e^x+1}$ e $\gamma_2(x)=\frac14(2e^{-x}\sqrt{e^x+1}+2\log(\sqrt{e^x+1}+1)-x)$). Lo spazio delle soluzioni reali è perciò $y(x)=(A-x+\gamma_1(x))e^{-x}+(B+\gamma_2(x))e^x+x$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$, e la condizione richiesta diventa $(A+\gamma_1(0))+(B+\gamma_2(0))=0$, dunque $A+B=-\gamma_1(0)-\gamma_2(0)$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x,y)=(2x-y^2)\,\mathrm{arctg}(x+y)$ è tutto il piano; la funzione si annulla sulla parabola $x=\frac12y^2$ e sulla bisettrice $y=-x$, che si intersecano in $O(0,0)$ e in $P(2,-2)$; il fattore $2x-y^2$ è >0 dentro la parabola e <0 fuori, il fattore $\mathrm{arctg}(x+y)$ è >0 sopra la bisettrice e <0 sotto, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è evidentemente $\mathcal{C}^\infty$, dunque l'unico limite notevole è in ∞_2, e non esiste: per vederlo, basta notare che su $x+y=0$ la funzione è nulla, mentre su $x+y=1$ essa vale $f(x,1-x)=-\frac{\pi}{4}(x^2-4x+1)$, e dunque tende a $-\infty$ quando x tende a $\pm\infty$.

(b) Cerchiamo per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ le curve di livello $X_\alpha:=\{(x,y):f(x,y)=\alpha\}$ contengono punti singolari. Si ha $\nabla f=(2\,\mathrm{arctg}(x+y)+\frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2},\ -2y\,\mathrm{arctg}(x+y)+\frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2})$, dunque $\nabla f=(0,0)$ quando $\frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2}=-2\,\mathrm{arctg}(x+y)=2y\,\mathrm{arctg}(x+y)$, da cui si ricava $(y+1)\,\mathrm{arctg}(x+y)=0$. Se $\mathrm{arctg}(x+y)=0$, ovvero se $y=-x$, si ottiene $2x-(-x)^2=0$ ovvero gli attesi punti di intersezione O e P della curva X_0. Se invece $y=-1$ si ricava $\frac{2x-1}{1+(x-1)^2}=-2\,\mathrm{arctg}(x-1)$, e un facile confronto grafico evidenzia una soluzione $x_0\sim0{,}7$, da cui un ulteriore punto singolare $B(x_0,-1)$. Dunque le uniche curve X_α che contengono punti singolari sono quella con $\alpha=0$ (in O e A) e quella con $\alpha=(2x_0-1)\,\mathrm{arctg}(x_0-1)=(2x_0-1)(-\frac12\frac{2x_0-1}{1+(x_0-1)^2})\sim-0{,}1$ (in B). In particolare la curva X contenente $A(2,-1)$ (si tratta di $X=X_{\frac{3\pi}{4}}$) è regolare, e ha dunque senso cercarne la retta affine tangente in A, che è $\nabla f(2,-1)\cdot(x-2,y-(-1))=(\frac{\pi+3}{2},\,\frac{\pi+3}{2})\cdot(x-2,y+1)=0$, ovvero $x+y-1=0$; in alternativa, da $f(x,y)=\frac{3\pi}{4}$ si può esplicitare ad esempio $x(y)=2+(-\frac{(\pi+3)/2}{(\pi+3)/2})(y-(-1))+o_{-1}(y-(-1))=2-(y+1)+o_{-1}(y+1)$, e lo sviluppo al primo ordine $x=2-(y+1)$ ridà la retta precedente.

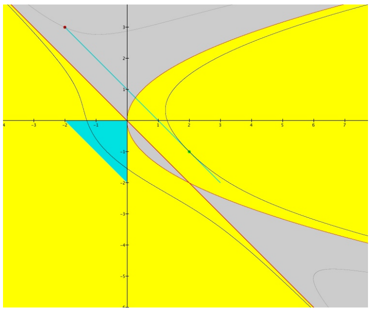
(c) (Figura 1) L'insieme T, ottenuto dall'unione disgiunta di un triangolo chiuso e pieno e di un segmento chiuso e limitato, è un compatto sconnesso, con due componenti connesse; essendo f continua, gli estremi assoluti di f su T esistono in base a Weierstrass. Per il calcolo, decomponiamo T nei punti interni del triangolo $T_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-2-x<y<0\,,\ x<0\}$ (aperto, dunque varietà di dimensione 2); nei quattro segmenti senza estremi $T_1=\{(x,y):y=0\,,\ -2<x<0\}$, $T_2=\{(x,y):x=0\,,\ -2<y<0\}$, $T_3=\{(x,y):y=-2-x\,,\ -2<x<0\}$ e $T_4=\{(u,1-u):-2<u<3\}$ (varietà di dimensione 1); e nei cinque punti $O(0,0)$, $P_1(-2,0)$, $P_2(0,-2)$, $P_3(-2,3)$ e $P_4(3,-2)$ (varietà di dimensione 0). Cerchiamo ora i punti stazionari di f su ciascuna di queste componenti. In T_0 non cade nessuno dei tre punti stazionari A, B e O trovati nel punto precedente, dunque niente. I quattro segmenti T_1, T_2, T_3 e T_4 sono tutti parametrizzabili globalmente in modo ovvio: su T_1 si ha $F_1(x):=f(x,0)=2x\,\mathrm{arctg}\,x$ con $-2<x<0$, e la derivata $F_1'(x)=2(\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{x^2+1})$ si annulla solo per $x=0$, come un facile confronto grafico mostra subito, quindi niente; identico discorso vale per T_2, dove si ha $F_2(y):=f(0,y)=-y^2\,\mathrm{arctg}\,y$ con $-2<y<0$, quindi niente; su T_3 vale $F_3(x):=f(x,-2-x)=(x^2+2x+4)\,\mathrm{arctg}\,2$ con $-2<x<0$, e poiché $F_3'(x)=2(x+1)\,\mathrm{arctg}\,2$ si annulla in $x=-1$ otteniamo un nuovo punto $P_5(-1,-1)$; su T_4 vale

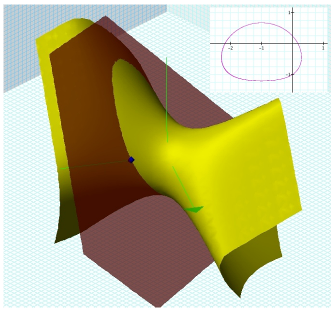
$F_4(x) := f(x, 1-x) = \frac{\pi}{4}(x^2 - 4x + 1)$ con $-2 < x < 3$, e poiché $F_4'(x) = \frac{\pi}{2}(x-2)$ si annulla in $x = 2$ riotteniamo il punto $A(2, -1)$. Ricapitolando, gli estremi assoluti di f su T possono essere assunti solo nei sette punti $O(0,0)$, $P_1(-2, 0)$, $P_2(0, -2)$, $P_3(-2, 3)$, $P_4(3, -2)$, $P_5(-1, -1)$ e $A(2, -1)$: essendo $f(0) = 0$, $f(P_1) = f(P_2) = 4 \operatorname{arctg} 2$, $f(P_3) = -\frac{13\pi}{4}$, $f(P_4) = \frac{\pi}{2}$, $f(P_5) = 3 \operatorname{arctg} 2$ e $f(A) = \frac{3\pi}{4}$, ne ricaviamo che il minimo assoluto di f su T è $-\frac{13\pi}{4}$ (assunto in P_3) e il massimo è $4 \operatorname{arctg} 2 \sim 4{,}4$ (assunto in P_1 e P_2).

4. (a) (Figura 2) Vediamo quali delle superfici di livello $S_\alpha = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = (2x - y + 2z - 2)e^{2xy - z^2} = \alpha\}$ sono regolari. Il gradiente $\nabla g = (2e^{2xy-z^2}(1 + y(2x - y + 2z - 2)),\ e^{2xy-z^2}(-1 + 2x(2x - y + 2z - 2)),\ 2e^{2xy-z^2}(1 - z(2x - y + 2z - 2)))$ si annulla quando $2x - y + 2z - 2 = -\frac{1}{y} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{z}$: ciò dà $y = -2x$ e $z = 2x$, da cui $2x - (-2x) + 2(2x) - 2 = \frac{1}{2x}$, ovvero $16x^2 - 4x - 1 = 0$, che dà $x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{8}$, da cui i due punti $P_1(\frac{1+\sqrt{5}}{8}, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4})$ e $P_2(\frac{1-\sqrt{5}}{8}, -\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4})$. Dunque le superfici di livello sono regolari tranne quelle con P_1 e P_2, e solo in quei punti. Quella per $A(0, -1, 0)$ è $S = S_{-1}$, e il piano tangente è $\nabla g(A) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) = (4, -1, 2) \cdot (x, y + 1, z) = 0$, ovvero $4x - y + 2z - 1 = 0$; alternativamente, da $g(x, y, z) = -1$ si può ad esempio esplicitare $y(x, z) = -1 + (-\frac{4}{-1})x + (-\frac{2}{-1})z + \cdots = -1 + 4x + 2z + \cdots$, e lo sviluppo al 1o ordine ridà il piano trovato.

(b) Posto $h(x, y, z) = x + y + z + 1$, la curva ℓ è definita da $(g, h) = (-1, 0)$; lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix}$ ha rango < 2 quando i due gradienti sono paralleli, cioè (posto per brevità $U := 2x - y + 2z - 2$) quando $2(1 + yU) = -1 + 2xU = 2(1 - zU)$: da $1 + yU = 1 - zU$ si ricava $(y + z)U = 0$, ma poiché la curva ℓ è definita da $g = -1$ (dunque in particolare $U \neq 0$) dovrà essere $z = -y$, che posto in $2(1 + yU) = -1 + 2xU$, ovvero $2(x - y)U = 3$, dà $2(x - y)(2x - 3y - 2) = 3$. Ci chiediamo ora se ℓ (definita da $x + y + z + 1 = 0$ e $(2x - y + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$) possieda qualche punto tale che $z = -y$ e $2(x - y)(2x - 3y - 2) = 3$: confrontando $z = -y$ con $z = -1 - x - y$ si ottiene $x = -1$, dunque da $2(x - y)(2x - 3y - 2) = 3$ si ricava $2(-1 - y)(-3y - 4) = 3$, da cui $6y^2 + 14y + 5 = 0$, da cui $y = \frac{-7 \mp \sqrt{19}}{6}$. Si ottengono perciò le due terne $(x, y, z) = (-1, \frac{-7\mp\sqrt{19}}{6}, \frac{7\pm\sqrt{19}}{6})$, ma nessuna delle due soddisfa l'ultima equazione di ℓ, ovvero $(2x - y + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$. Perciò ℓ è una curva regolare, e il punto A evidentemente vi appartiene: poiché lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(A) \\ \nabla g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha tutti e tre i minori di ordine 2 nonsingolari, all'intorno di A da $(g, h) = (-1, 0)$ si possono esplicitare a scelta due delle tre variabili in funzione della terza: ad esempio, esplicitando x e y in funzione di z (da cui la parametrizzazione $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$), al primo ordine si ha $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)(z - 0) + \begin{pmatrix} o_0(z) \\ o_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}z + o_0(z) \\ -1 - \frac{2}{5}z + o_0(z) \end{pmatrix}$.

(c) Sia ℓ' la proiezione di ℓ sul piano orizzontale: visto che z dipende in modo continuo (addirittura lineare) da x e y, ci basta far vedere che ℓ' è limitata. Sostituendo $z = -1 - x - y$ in $(2x - y + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$ si ottiene $(3y + 4)e^{-x^2-y^2-2x-2y-1} = 1$, equazione di definizione di ℓ' nel piano (x, y). Ora, è piuttosto chiaro che la funzione $\Phi(x, y)$ al I membro ha limite 0 quando (x, y) tende a ∞_2 (usando le coordinate polari (r, ψ) traslate in $(-1, -1)$, quando $r > 1$ si ha $|\Phi(x, y)| = |3(y + 1) + 1|\, e^{1-(x+1)^2-(y+1)^2} = |3r \sin\psi + 1| e^{1-r^2} \leq 4re^{1-r^2}$, infinitesima quando $r \to +\infty$), dunque per definizione di limite le sue curve di livello $\neq 0$ sono tutte limitate, ovvero compatte, e tra queste ℓ'. Pertanto ℓ è una curva regolare compatta, e per Weierstrass esistono su di essa gli estremi assoluti di qualsiasi funzione continua $f(x, y, z)$; ad esempio, quando prendiamo $f(x, y, z) = x$ si troveranno i punti estremi di ℓ rispetto alla coordinata x, e per Lagrange saranno dati dal sistema in tre equazioni delle quali la prima è $\det(\nabla x, \nabla h, \nabla g) = 0$ (ovvero $\partial_z g - \partial_y g = 0$), e le altre due sono i vincoli $x + y + z + 1 = 0$ e $g(x, y, z) = -1$.





1. Ex. 3: la curva S (blu) passante per A; l'insieme T (triangolo più segmento, azzurro); la curva di livello per il punto di minimo P_3 per f su T (grigio). **2.** Ex. 4: la superficie $g(x, y, z) = -1$ (gialla) passa per A (blu); il piano (rosso) definisce ℓ; in alto a destra, la proiezione ℓ'.

Prova scritta (13/07/2009)

1. Studiare l'integrabilità generalizzata di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{2\alpha}\ \operatorname{arctg}(x^{\alpha-1}-1)}{\big|\,1-|\log x|\,\big|^\alpha}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$.

2. Sono date le equazioni differenziali (i) $2\arcsin(x-yy') = x^2$, (ii) $y'' - \cos x = x - \alpha y$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Studiare la crescenza delle soluzioni di (i); mostrare che, se $\varphi(x)$ è soluzione, lo è pure $-\varphi(x)$.

(b) Cercare, tra le soluzioni di (i) e le soluzioni di (ii), quelle per cui $y(0) = -2$.

3. Sia $f(x,y) = \dfrac{x+2y+1}{\sqrt{xy+1}}$.

(a) Trovare dominio, zeri, segno e limiti notevoli di f; descrivere le curve di livello di f.

(b) Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta X quella passante per $A(0,2)$, calcolare in due modi diversi la retta affine tangente a X in A. Preso poi un tratto di X attorno A sufficientemente piccolo, scrivere una formula che ne calcoli la lunghezza.

(c) Disegnare $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x-y| \le 2,\ |y-1| \le 3\}$, spiegare perché f ha estremi assoluti su $\mathcal{P}$, e calcolarli.

4. Sia $g(x,y,z) = (g_1,g_2,g_3)(x,y,z) = (\,\log(y-z)\,,\ z^2-2x\,,\ x+y\,)$.

(a) Dire quali superfici di livello di $h(x,y,z) = y - x^2\,g_1(x,y,z)$ sono regolari; parametrizzare quella per $A(0,3,0)$ al suo intorno, e calcolarne in due modi il piano tangente affine.

(b) Quali curve di livello di (g_1,g_2) sono regolari? Detta Y quella passante per A, determinarne eventuali estremi locali per la direzione x.

(c) Dire all'intorno di quali punti del suo dominio la funzione g è diffeomorfismo locale; dedurne che g non è diffeomorfismo globale, cercando se possibile un argomento più diretto per mostrare quest'ultima cosa. Infine, scrivere lo sviluppo al primo ordine dell'inversa locale di g in A, cercando poi di calcolarla esplicitamente.

Soluzioni.

1. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^{2\alpha}\ \operatorname{arctg}(x^{\alpha-1}-1)}{|\,1-|\log x|\,|^\alpha}$ è definita per $x>0$ con $x \ne \frac{1}{e}$ e $x \ne e$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $\frac{1}{e}^{\mp}$, $e^{\mp}$ e $+\infty$. Notiamo fin da subito che per $\alpha = 1$ la funzione è identicamente nulla, dunque banalmente integrabile; nel seguito supporremo che $\alpha \neq 1$. • In 0^+, per ogni $\alpha \neq 1$ si ha $\operatorname{arctg}(x^{\alpha-1}-1) \sim_0^* 1$, e dunque $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{2\alpha}|\log x|^{-\alpha}$: ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\beta > -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $\alpha > -\frac{1}{2}$. • Vediamo ora in $e^\mp$. Essendo $1 - \log x \sim_e^* (x-e)$ (basta calcolare il limite del rapporto), si ha $f_\alpha(x) \sim_e^* (x-e)^{-\alpha}$, da cui la condizione $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$. Lo stesso ragionamento vale per $\frac{1}{e}$. • In $+\infty$ tutto è simile a 0: anche qui per ogni $\alpha \neq 1$ si ha $\operatorname{arctg}(x^{\alpha-1}-1) \sim_0^* 1$, e dunque $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{2\alpha}|\log x|^{-\alpha}$. Ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $\alpha < -\frac{1}{2}$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}-1)\,dx$ converge (il valore costante 1 del denominatore è ovviamente estendibile anche al punto singolare $\frac{1}{e} \in]0,1[$), e avrà valore positivo. Ponendo $\frac{1}{x}-1 = t$ (ovvero $x = \frac{1}{t+1}$, da cui $dx = -\frac{1}{(t+1)^2}\,dt$) si ottiene $\int \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}-1)\,dx = -\int \frac{\operatorname{arctg} t}{(t+1)^2}\,dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{t+1} - \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{t+1} - \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1})\,dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{t+1} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$, e pertanto $\int_0^1 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}-1)\,dx = (\frac{\operatorname{arctg} t}{t+1} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t]_{+\infty}^0 = (0) - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

2. (a) L'equazione $2\arcsin(x - yy') = x^2$ equivale a $x - yy' = \sin\frac{x^2}{2}$, ovvero $yy' = x - \sin\frac{x^2}{2}$, con la condizione $|\frac{x^2}{2}| \leq \frac{\pi}{2}$, cioè $|x| \leq \sqrt{\pi}$. Se una soluzione $y(x)$ si annullasse in un certo x_0 si avrebbe necessariamente $x_0 = \sin\frac{x_0^2}{2}$, il che accade se e solo se $x_0 = 0$ (un confronto grafico tra le funzioni x e $\sin\frac{x^2}{2}$ mostra abbastanza chiaramente che $x \geq \sin\frac{x^2}{2}$ se e solo se $x \geq 0$, con uguaglianza solamente in $x = 0$). Altrove si ricava $y' = \frac{x-\sin\frac{x^2}{2}}{y}$, dunque le soluzioni di (i) sono strettamente crescenti nel 1o e 3o quadrante e decrescenti nel 2o e 4o; per $x = 0$ si ottiene $y(0)\,y'(0) = 0$ e dunque, se $y(0) \neq 0$, il punto $x = 0$ sarà stazionario per la soluzione, e più precisamente di minimo/massimo assoluto se $y(0) \gtrless 0$. Infine, sia $\varphi(x)$ una soluzione di (i): posta $\psi(x) := -\varphi(x)$, essendo $\psi'(x) = -\varphi'(x)$ si ricava che $2\arcsin(x - \psi(x)\,\psi'(x)) = 2\arcsin(x - (-\varphi(x))(-\varphi'(x))) = 2\arcsin(x - \varphi(x)\,\varphi'(x)) = x^2$, in altre parole anche $\psi(x)$ è soluzione di (i).

(b) (i) Separando le variabili e integrando tra 0 e x con la condizione $y(0) = -2$ si ha $\int_{-2}^{y(x)} \eta\,d\eta = \int_0^x (t - \sin(\frac{t^2}{2}))\,dt$, ovvero $\frac{y^2}{2} - 2 = \frac{x^2}{2} - \int_0^x \sin(\frac{t^2}{2})\,dt$; ricavando $y(x)$ si ottiene l'unica soluzione $y(x) = -\sqrt{4 + x^2 - 2\int_0^x \sin(\frac{t^2}{2})\,dt}$.
(ii) Da $y'' - \cos x = x - \alpha y$ si ricava $y'' + \alpha y = x + \cos x$, che è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. • Se $\alpha > 0$ l'omogenea ha soluzioni del tipo $y(x) = A\cos(\sqrt{\alpha}\,x) + B\sin(\sqrt{\alpha}\,x)$. Una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ è $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{\alpha}x$; quanto a $b_2(x) = \cos x$, se $\alpha \neq 1$ si ha $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{\alpha-1}\cos x$, mentre se $\alpha = 1$ si ha $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2}x\sin x$. L'integrale generale per $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ è dunque $y(x) = A\cos(\sqrt{\alpha}\,x) + B\sin(\sqrt{\alpha}\,x) + \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha-1}\cos x$, e imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $A + \frac{1}{\alpha-1} = -2$, ovvero $A = -\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$; nel caso particolare $\alpha = 1$ si ha $y(x) = A\cos x + (B + \frac{1}{2}x)\sin x + x$, e imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $A = -2$. • Se $\alpha = 0$ l'equazione $y'' = x + \cos x$ si integra direttamente, dando prima $y' = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + U$ e poi $y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + Ux + V$, e imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $-2 = -1 + V$, ovvero $V = -1$. • Se infine $\alpha < 0$ l'omogenea ha soluzioni del tipo $y(x) = A\,e^{\sqrt{-\alpha}\,x} + B\,e^{-\sqrt{-\alpha}\,x}$. Una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ è, come prima, $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{\alpha}x$; e, sempre come prima, una per $b_2(x) = \cos x$ è $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{\alpha-1}\cos x$. L'integrale generale per $\alpha < 0$ è dunque $y(x) = A\,e^{\sqrt{-\alpha}\,x} + B\,e^{-\sqrt{-\alpha}\,x} + \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha-1}\cos x$, e imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $A + B + \frac{1}{\alpha-1} = -2$, ovvero $A + B = -\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x,y) = \frac{x+2y+1}{\sqrt{xy+1}}$ è dato da $xy + 1 > 0$ (i punti compresi tra i rami –esclusi– dell'iperbole equilatera I d'equazione $xy = -1$); la funzione si annulla sui punti del dominio che stanno sulla retta r data da $x + 2y + 1 = 0$, ed è positiva sopra. I limiti notevoli di f sono nei punti di I e in ∞_2. Nei punti di I diversi da $P(-2, \frac{1}{2})$ e $Q(1,-1)$ (che sono le intersezioni tra I e r) il limite è $+\infty$ (se sopra r) o $-\infty$ (se sotto), mentre in P e Q il limite non esiste (tendendovi lungo r la funzione è nulla, mentre al loro intorno vi sono altri punti di I in cui f diverge a $\mp\infty$); quanto poi a ∞_2, limite non esiste (lungo l'asse x la funzione tende a $\mp\infty$ e sulla bisettrice $y = x$ la funzione vale $f(x,x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ e dunque tende a ∓ 3). Passiamo ora alle curve di livello $X_\alpha = \{(x,y) : f(x,y) = \alpha\}$. Iniziamo notando che se $\alpha \gtrless 0$ la curva deve stare sopra/sotto la retta r, mentre se $\alpha = 0$ è proprio r (anzi, per meglio dire, il tratto di r che sta nel dominio). Da $f(x,y) = \alpha$ si ricava poi (tenendo presente quanto detto prima sulla posizione relativa a r) che $(x + 2y + 1)^2 = \alpha^2(xy + 1)$, ovvero $x^2 + (4 - \alpha^2)xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 - \alpha^2 = 0$: questa è l'equazione di una conica, più precisamente di un'ellisse quando $\Delta = (4 - \alpha^2)^2 - 16 = \alpha^2(\alpha^2 - 8) < 0$ (cioè per $|\alpha| < 2\sqrt{2}$), una parabola quando $\Delta = 0$ (cioè —a parte il caso degenere $\alpha = 0$ in cui si trova r— per $|\alpha| = 2\sqrt{2}$) e un'iperbole quando $\Delta > 0$ (cioè per $|\alpha| > 2\sqrt{2}$). In realtà tutte le coniche con queste equazioni cartesiane passano per i punti P e Q (infatti l'equazione è identicamente soddisfatta in essi per ogni α), e X_α è la parte di loro che sta sopra/sotto la retta r, a seconda che sia $\alpha \gtrless 0$.

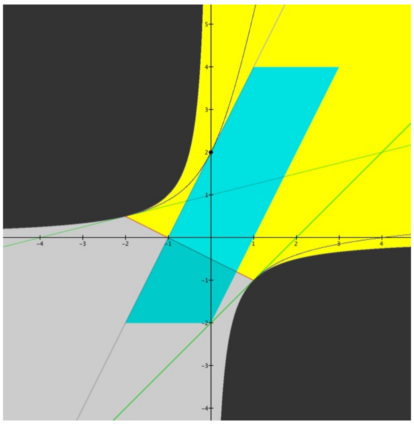
(b) (Figura 1) Il gradiente $\nabla f = (\frac{xy+2-2y^2-y}{2(xy+1)^{3/2}}, \frac{2xy+4-x^2-x}{2(xy+1)^{3/2}})$ si annulla quando $xy + 2 - 2y^2 - y = 2(xy + 2) - x^2 - x = 0$. Confrontando le due espressioni si ottiene $2(xy + 2) = 4y^2 + 2y = x^2 + x$; la seconda uguaglianza dà $x - 2y = -(x^2 - 4y^2)$, da cui $x - 2y = -(x + 2y)(x - 2y)$, ovvero $(x - 2y)(x + 2y + 1) = 0$, da cui $x = 2y$ oppure $x = -2y - 1$, e mettendo queste relazioni in $xy + 2 = 2y^2 + y$, nel primo caso si trova il punto $R(4, 2)$ (accettabile perché nel dominio), mentre nel secondo rispuntano i due punti P e Q (no). Pertanto tutte le curve di livello di f sono regolari tranne quella che contiene R, ovvero X_3: in realtà X_3 è una conica degenere (la sua equazione $x^2 - 5xy + 4y^2 + 2x + 4y - 8 = 0$ si spezza in $(x - 4y + 4)(x - y - 2) = 0$, dunque si tratta di un'iperbole degenerata nell'unione delle due rette $x - 4y + 4 = 0$ e $x - y - 2 = 0$, il punto d'intersezione delle quali è —guarda caso— il punto R). In particolare $X = X_5$ è regolare nel suo punto $A(0, 2)$, ed essendo $\nabla f(A) = (-4, 2)$, ricaviamo subito la retta affine tangente con $(-4, 2) \cdot (x - 0, y - 2) = 0$, ovvero $2x - y + 2 = 0$; alternativamente, per Dini, all'intorno di A da $f(x, y) = 5$ possiamo esplicitare $y(x) = 2 + (-\frac{-4}{2})(x - 0) + o_0(x - 0)$, e lo sviluppo al 1o ordine ridà la retta trovata. Con questa parametrizzazione di X, valida per $|x| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (ovvero $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = (x, y(x))$) possiamo rispondere anche all'ultima domanda: la lunghezza del tratto di X parametrizzato da questa γ sarà $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$. In questo caso possiamo scrivere esplicitamente chi è $y(x)$: da $x^2 - 21xy + 4y^2 + 2x + 4y - 24 = 0$ si ricava $y(x) = \frac{1}{8}(21x - 4 + 5\sqrt{17x^2 - 8x + 16})$, che è una funzione con dominio $\mathbb{R}$, ovvero questa $y(x)$ parametrizza in realtà tutto il ramo dell'iperbole X che passa per A, dunque possiamo usarla per calcolare la lunghezza di un qualsiasi tratto limitato di tale ramo.

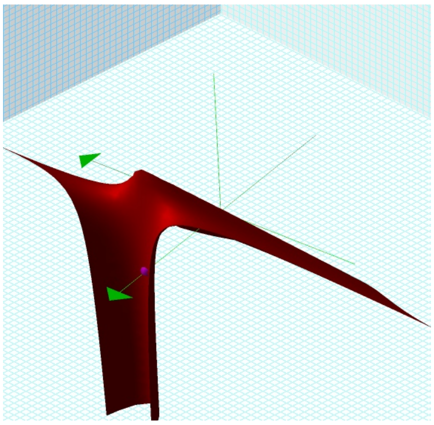
(c) (Figura 1) L'insieme $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| \le 2,\ |y - 1| \le 3\}$ è il parallelogramma (chiuso e pieno) di vertici $B(-2, -2)$, $C(1, 4)$, $D(3, 4)$ e $E(0, -2)$: si tratta di un compatto interamente contenuto nel dominio di f, che è continua, e dunque f ha estremi assoluti su $\mathcal{P}$ in base a Weierstrass. Per il calcolo degli estremi di f su $\mathcal{P}$ decomponiamo quest'ultimo nell'unione disgiunta dei suoi punti interni (aperto di $\mathbb{R}^2$), dei suoi quattro lati senza vertici (quattro curve regolari) e dei suoi quattro vertici. Per quanto riguarda i punti interni, l'unico punto stazionario di f è come visto $R(4, 2)$, che però non sta in $\mathcal{P}$. Sul lato BC si ha $f(x, 2x + 2) = \frac{5(x+1)}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$ con $-2 < x < 1$, ed essendo $f(x, 2x + 2)' = -\frac{5x}{(2x^2+2x+1)^{3/2}} = 0$ per $x = 0$, ritroviamo il noto punto $A(0, 2)$. Sul lato CD si ha $f(x, 4) = \frac{x+9}{\sqrt{4x+1}}$ con $1 < x < 3$, e vale $f(x, 4)' = \frac{2x-17}{(4x+1)^{3/2}} = 0$ per $x = \frac{17}{2}$ (non accettabile). Sul lato DE si ha $f(x, 2x - 2) = \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$ con $0 < x < 3$, la cui derivata $f(x, 2x - 2)' = \frac{x+2}{(2x^2-2x+1)^{3/2}}$ si annulla in $x = -2$ (non accettabile). Sul lato EB si ha $f(x, -2) = \frac{x-3}{\sqrt{1-2x}}$ con $-2 < x < 0$, e vale $f(x, -2)' = -\frac{x+2}{(1-2x)^{3/2}} = 0$ nell'estremo $x = -2$ (non accettabile). La questione degli estremi di f su $\mathcal{P}$ si gioca pertanto tra i punti A, B, C, D e E: essendo $f(A) = 5$, $f(B) = -\sqrt{5} \sim 2{,}2$, $f(C) = 2\sqrt{5} \sim 4{,}5$, $f(D) = \frac{12}{\sqrt{13}} \sim 3{,}3$ e $f(E) = -3$, ne ricaviamo che il massimo assoluto di f su $\mathcal{P}$ è 5 (assunto in A) e il minimo assoluto è -3 (assunto in E).

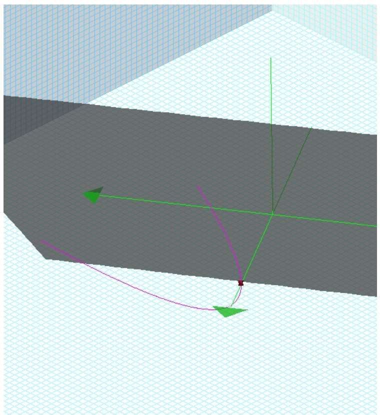
4. (a) (Figura 2) Il gradiente di $h(x, y, z) = y - x^2 \log(y - z)$ è $\nabla h = (-2x \log(y - z)\,,\ 1 - \frac{x^2}{y-z}\,,\ \frac{x^2}{y-z})$, e non si annulla mai: dunque tutte le superfici di livello di h sono regolari. Quella passante per $A(0, 3, 0)$ è di livello $h(A) = 3$; essendo $\nabla h(A) = (0, 1, 0)$, per Dini da $h(x, y, z) = 3$ si può esplicitare localmente $y(x, z)$, con $y(0, 0) = 3$ e $\nabla y(0, 0) = (0, 0)$, da cui $y(x, z) = 3 + o(\sqrt{x^2 + z^2})$, e il piano tangente affine è $y = 3$, come si nota in figura. Alternativamente, da $\nabla h(A) \cdot (x - 0, y - 3, z - 0) = 0$ si riottiene lo stesso risultato.

(b) (Figura 3) Lo jacobiano di (g_1, g_2), ovvero $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix}$, ha sempre rango 2: dunque tutte le curve di livello sono regolari. Quella passante per A è $Y = \{(x, y, z) : (g_1, g_2) = (\log 3, 0)\}$: usando il metodo di Lagrange, si tratta di risolvere il sistema dato dal vincolo e da $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 0$, cioè $\begin{cases} \frac{2z}{y-z} = 0 \\ \log(y - z) = \log 3 \\ z^2 - 2x = 0 \end{cases}$, la cui unica soluzione è il già noto punto $A(0, 3, 0)$. Per determinarne la natura bisogna prima parametrizzare Y attorno A, e lo jacobiano di (g_1, g_2) in A, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ci dice che si può esplicitare localmente $(x(z), y(z))$ con $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ci serviranno però anche le derivate seconde, pertanto partiamo dal sistema che definisce Y, ovvero $\begin{cases} y - z = 3 \\ z^2 - 2x = 0 \end{cases}$: derivando due volte rispetto z si ottiene $\begin{cases} y' - 1 = 0 \\ 2z - 2x' = 0 \end{cases}$ (da cui nuovamente $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) e $\begin{cases} y'' = 0 \\ 2 - 2x'' = 0 \end{cases}$, da cui $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Componendo la coordinata x (ovvero la funzione $f(x, y, z) = x$) con la parametrizzazione $(x(z), y(z), z)$ si ottiene semplicemente $F(z) := f(x(z), y(z), z) = x(z)$, dunque le derivate di F sono le stesse di x. Ne ricaviamo che il punto A è di minimo locale per la direzione x su Y, come la figura mostra chiaramente.

(c) Si ha $\det \mathsf{J}_g(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y-z} & -\frac{1}{y-z} \\ -2 & 0 & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2(z+1)}{y-z}$, dunque g è diffeomorfismo locale in tutti i punti del suo dominio tranne quelli con $z=-1$. Ciò mostra *a fortiori* che g non è diffeomorfismo globale. Volendo procedere, per quest'ultima cosa, con un argomento più diretto, proviamo a vedere se ad esempio g non sia iniettiva: ponendo $g(x_1,y_1,z_1) = g(x_2,y_2,z_2)$ si ottiene $\begin{cases} y_1 - z_1 = y_2 - z_2 \\ z_1^2 - 2x_1 = z_2^2 - 2x_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \\ 2(x_1 - x_2) = -(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) \\ x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2) \end{cases}$; posto $u := x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2) = -(z_1 - z_2)$, se $u = 0$ le equazioni sono tutte soddisfatte (ma questo è il caso dell'uguaglianza), mentre se fosse $u \neq 0$ dalla seconda si otterrebbe $z_1 + z_2 = -2$. Pertanto due punti (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) tali che $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2) = -(z_1 - z_2)$ e che $z_1 + z_2 = -2$ avranno la stessa immagine tramite g, e di punti simili nel dominio se ne trovano facilmente, ad esempio il nostro $A(0,3,0)$ e $A'(2,1,-2)$. Dunque g non è iniettiva, e ancora una volta *a fortiori* non è diffeomorfismo globale. • Si ha $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; la funzione ℓ, inversa locale di g all'intorno di A, sarà definita in un intorno di $g(A) = B(\log 3, 0, 3)$, si avrà ovviamente $\ell(B) = A$ e, come sappiamo, varrà $\mathsf{J}_\ell(B) = \mathsf{J}_g(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$: pertanto, dette (u,v,w) le variabili del codominio di g (dunque del dominio di ℓ), lo sviluppo richiesto è $\ell(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \log 3 \\ v - 0 \\ w - 3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2}v + \cdots \\ 3 + \frac{1}{2}v + (w-3) + \cdots \\ 0 - 3(u - \log 3) + \frac{1}{2}v + (w-3) + \cdots \end{pmatrix}$. Infine, proviamo a invertire $(u,v,w) = g(x,y,z) = (\log(y-z)\,,\, z^2 - 2x\,,\, x+y)$ tenendo presente di trovarci nei paraggi di $A(0,3,0)$: mettendo $x = \frac{1}{2}(z^2 - v)$ e $y = z + e^u$ in $x + y = w$ si ottiene $z^2 + 2z + (2e^u - v - 2w) = 0$, da cui $z = -1 + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$ (essendo $z_A = 0$, la soluzione col meno è spuria), e perciò $x = \frac{1}{2}(z^2 - v) = 1 - 4e^u + \frac{3}{2}v + 4w - \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$ e $y = z + e^u = -1 + e^u + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}$. L'espressione esplicita dell'inversa locale ℓ è perciò $\ell(u,v,w) = (1 - 4e^u + \frac{3}{2}v + 4w - \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}\,,\, -1 + e^u + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w}\,,\, -1 + \sqrt{1 - 8e^u + 4v + 8w})$.







1. Esercizio 3: si notino la curva X per A (l'iperbole blu) e la curva di livello degenere (verde). **2.** La superficie di livello di h per A dell'esercizio 4(a) (il punto è porpora). **3.** La curva Y dell'esercizio 4(b) è in porpora, il suo punto A è rosso. Il piano grigio è quello che delimita il dominio di g.

Prova scritta (08/09/2009)

1. Studiare in $]0,\pi[$ l'integrabilità gen. di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^\alpha\ |x-1|^{1-\alpha}\ \sin^{2-\alpha}(x)}{(1-\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^\pi f_1(x)\,dx$.

2. Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $\alpha y'' - (\alpha^3 + 1)y' + \alpha^2 y = x - e^x$ che hanno un punto stazionario in $x = 0$.

3. Sia $f(x,y) = e^{x-2y} - x - y^2$.

(a) Dire quali curve di livello di f sono regolari; considerata quella passante per $A(-1,-1)$, calcolarne in due modi diversi la retta affine tangente in tale punto.

(b) f ha estremi locali/globali in $\mathbb{R}^2$? E su $\mathrm{P} = \{(x,y) : 0 \le y - x \le 2\,,\ -2 \le y \le 0\}$?

(c) Trovare eventuali estremità locali in direzione verticale per la curva di livello 1.

4. Sia $g(x,y,z) = \sqrt{y^2 - 2xz} - xyz$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari; parametrizzare quella per $A(0,1,-1)$ al suo intorno, e calcolarne in due modi il piano tangente affine.

(b) Dal sistema $\begin{cases} g(x,y,z) = 1 \\ x^2 = \log(z-y) \end{cases}$ si vorrebbero esplicitare, vicino alla soluzione $B(0,-1,0)$, due variabili in funzione della rimanente. Dire in quali modi ciò è possibile e, scelto uno di questi, calcolare lo sviluppo fino al II ordine di tali funzioni implicite.

(c) Il sistema del punto precedente definisce anche una curva ℓ in $\mathbb{R}^3$. Con quanto trovato prima, è possibile calcolare la retta tangente affine a ℓ in B in due modi diversi?

Soluzioni.

1. In $]0,\pi[$ la funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha\ |x-1|^{1-\alpha}\ \sin^{2-\alpha}(x)}{(1-\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}$ è definita e continua tranne che eventualmente per $x = 1$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $1^\mp$ e π^-. • In 0^+ si ha $\sin x \sim_{0^+} x$ e $1-\cos x \sim^*_{0^+} x^2$, dunque $f_\alpha(x) \sim^*_0 \frac{x^\alpha x^{2-\alpha}}{x^{2\frac{\alpha}{2}}} = x^{2-\alpha}$, da cui la condizione $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$. • In $1^\mp$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_1 |x-1|^{1-\alpha}$, da cui la condizione $1-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. • In π^- si ha $\sin x \sim_{\pi^-} (\pi - x)$ (basta fare il limite del rapporto), dunque $f_\alpha(x) \sim^*_{\pi^-} (\pi-x)^{2-\alpha}$, da cui ancora la condizione $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^\pi f_1(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$ converge, e avrà valore positivo. Integrando per parti e ricordando che $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (positivo in $]0,\pi[$) si ha $\int \frac{x\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = x\,2\sqrt{1-\cos x} - \int 2\sqrt{1-\cos x}\,dx = 2x\sqrt{1-\cos x} - 2\sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2}\,dx = 2x\sqrt{1-\cos x} + 4\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + k$, per cui il nostro integrale vale $(2x\sqrt{1-\cos x} + 4\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}]_0^\pi = (2\sqrt{2}\,\pi + 0) - (0 + 4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(\pi - 2) \sim 3{,}2$.

2. L'equazione $\alpha y'' - (\alpha^3+1)y' + \alpha^2 y = x - e^x$ si riduce, nel caso $\alpha = 0$, a $y' = -x + e^x$, da cui $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + e^x + k$, e notando che $y'(0) = 1 \neq 0$ non si ha nessuna soluzione che soddisfa la condizione di stazionarietà richiesta; invece se $\alpha \neq 0$, cosa che supporremo nel seguito, essa è del secondo ordine a coefficienti costanti. Le radici caratteristiche sono α^2 e $\frac{1}{\alpha}$, che coincidono se e solo se $\alpha = 1$. Poichè le radici sono entrambe non nulle, una soluzione particolare relativa a $b_1(x) = x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax + b$, e si trova $(a, b) = (\frac{1}{\alpha^2}, \frac{\alpha^3+1}{\alpha^4})$. Per quanto riguarda invece $b_2(x) = -e^x$, vanno distinti i casi $\alpha = 1$ (in cui 1 è radice caratteristica doppia), $\alpha = -1$ (in cui 1 è radice caratteristica semplice) e $\alpha \neq \mp 1$ (in cui non lo è); nel primo caso una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ax^2 e^x$, e si trova $a = -\frac{1}{3}$; nel secondo una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = axe^x$, e si trova $a = \frac{1}{2}$; nel terzo sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = ae^x$, e si trova $a = \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}$. Pertanto se $\alpha = 1$ le soluzioni dell'equazione completa saranno $y(x) = (A + Bx - \frac{1}{3}x^2)e^x + x + 2$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A + B + 1 = 0$; se $\alpha = -1$ saranno $y(x) = (A + \frac{1}{2}x)e^x + Be^{-x} + x$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A - B + \frac{3}{2} = 0$; mentre se $\alpha \neq \mp 1$ saranno $y(x) = Ae^{\alpha^2 x} + B\, e^{\frac{1}{\alpha}x} + \frac{\alpha^2 x + \alpha^3 + 1}{\alpha^4} + \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}e^x$, sempre con $A, B \in \mathbb{C}$, e la stazionarietà in $x = 0$ equivale a $y'(0) = A\alpha^2 + B\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = 0$.

3. (a) (Figura 1) Denotiamo le curve di livello della funzione $f(x, y) = e^{x-2y} - x - y^2$ tramite $\mathsf{X}_\alpha = \{(x, y) : f(x, y) = \alpha\}$. Il gradiente $\nabla f = (e^{x-2y} - 1,\ -2(e^{x-2y} + y))$ si annulla quando $e^{x-2y} = 1$ e $e^{x-2y} + y = 0$: questo accade solo nel punto $B(-2, -1)$, per il quale passa la curva X_2. Questa è dunque l'unica curva a contenere un possibile punto singolare; tutte le altre curve sono regolari, e tra queste X_e, che passa per $A(-1, -1)$. La retta affine tangente in A è data da $\nabla f(A) \cdot (x - (-1),\ y - (-1)) = 0$, ovvero $(e - 1, -2(e - 1)) \cdot (x + 1, y + 1) = 0$, ovvero $x - 2y - 1 = 0$. Alternativamente, da $f(x, y) = e$ si può esplicitare ad esempio $x(y)$ all'intorno di A, con $x(y) = -1 + (-\frac{-2(e-1)}{e-1})(y - (-1)) + o_{-1}(y - (-1)) = -1 + 2(y + 1) + o_{-1}(y + 1)$, e lo sviluppo al primo termine ridà la retta trovata.

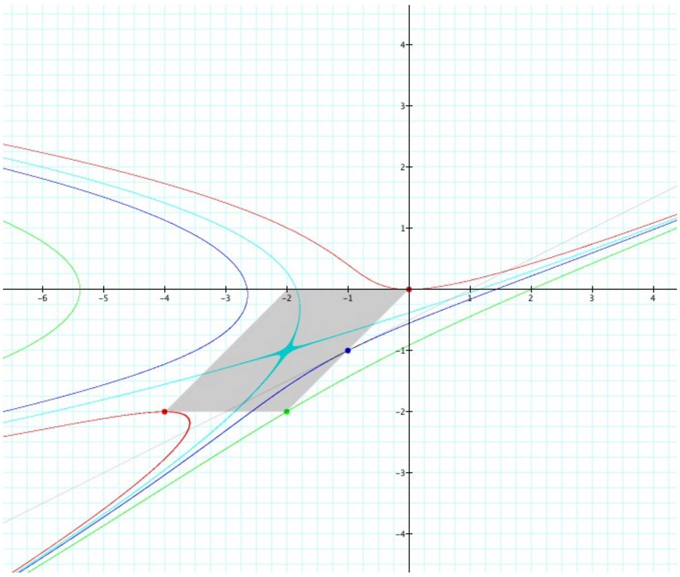
(b) (Figura 1) Eventuali estremi locali/globali di f in $\mathbb{R}^2$ devono essere in particolare stazionari e, come visto, l'unico è $B(-2, -1)$; tuttavia è immediato verificare che l'hessiano di f in B è indefinito, dunque si tratta di una sella. • Il parallelogramma $\mathrm{P} = \{(x, y) : 0 \leq y - x \leq 2\,,\ -2 \leq y \leq 0\}$ è compatto, dunque f vi assume di certo estremi assoluti, per la cui ricerca separiamo P in componenti che siano varietà. Nei punti interni di P l'unico punto stazionario è B, che però, come visto, è una sella. Sul lato $y = 0$ con $-2 < x < 0$ si ha $\varphi(x) := f(x, 0) = e^x - x$, ma $\varphi'(x) = e^x - 1$ non si annulla in tale intervallo, dunque niente. Sul lato $y = x$ con $-2 < x < 0$ si ha $\psi(x) := f(x, x) = e^{-x} - x - x^2$: vale $\psi'(x) = -e^{-x} - 1 - 2x = 0$ quando $e^{-x} = -2x - 1$, ma ciò non accade mai (basta fare un confronto grafico). Sul lato $y = -2$ con $-4 < x < -2$ si ha $\eta(x) := f(x, -2) = e^{x+4} - x - 4$, ma $\eta'(x) = e^{x+4} - 1 = 0$ non si annulla in tale intervallo, dunque ancora niente. Sul lato $y = x + 2$ con $-4 < x < -2$ si ha $\xi(x) := f(x, x + 2) = e^{-x-4} - x - (x + 2)^2$: vale $\xi'(x) = -e^{-x-4} - 1 - 2(x + 2) = 0$ quando $e^{-x-4} = -2x - 5$, e ciò accade in un unico punto $a \in]-3, -2[$: si trova dunque un punto $C(a, a + 2)$, con $f(C) = e^{-a-4} - a - (a + 2)^2 = -2a - 5 - a - (a + 2)^2 = -a^2 - 7a - 9 \sim 2{,}5$. Infine, nei quattro vertici $D(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $E(-2, -2)$ e $F(-4, -2)$ si ha $f(D) = e^{-2} + 2 \sim 2{,}1$, $f(O) = 1$, $f(E) = e^2 - 2 \sim 5{,}4$ e $f(F) = 1$. Concludiamo che il massimo assoluto per f su P è $e^2 - 2$ (assunto in E) e il minimo è 1 (assunto in O e F).

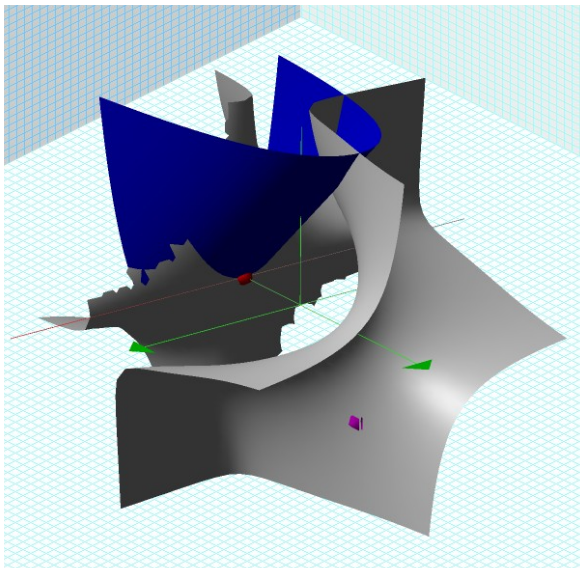
(c) (Figura 1) Il problema di trovare eventuali estremità locali in direzione verticale su X_1 equivale a quello di trovare estremi locali di $h(x, y) = y$ su X_1. Il metodo di Lagrange dà il sistema $\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 0 \\ f(x, y) = 1 \end{cases}$, che ha soluzioni $O(0, 0)$ e $F(-4, -2)$. Per determinarne la natura, converrà esplicitare direttamente $y(x)$ (che è già la funzione h) dall'equazione $f(x, y) = 1$ all'intorno di ciascuno dei due punti. Derivando due volte l'identità $e^{x-2y} - x - y^2 = 1$ (ove si intende $y(x)$) si ottiene $(1 - 2y')e^{x-2y} - 1 - 2y'y = 0$ e $(-2y'' + (1 - 2y')^2)e^{x-2y} - 2(y')^2 - 2yy'' = 0$: calcolando in $x = 0$ (con $y(0) = 0$) si ottiene $y'(0) = 0$ e $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$; calcolando invece in $x = -4$ (con $y(-4) = -2$) si ottiene $y'(-4) = 0$ e $y''(-4) = -\frac{1}{2} < 0$. Ne ricaviamo che, come testimonia la figura, i punti O e F sono rispettivamente di minimo e massimo per la direzione verticale su X_1.

4. (a) (Figura 2) Denotiamo con Y_α la superficie di livello α della funzione $g(x, y, z) = \sqrt{y^2 - 2xz} - xyz$. Il gradiente di g (calcolato dove $y^2 - 2xz > 0$) è $\nabla g = (-\frac{z}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz,\ \frac{y}{\sqrt{y^2-2xz}} - xz,\ -\frac{x}{\sqrt{y^2-2xz}} - xy)$. Per individuare i possibili punti singolari bisogna vedere dove tale gradiente si annulla, ovvero risolvere il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$. Da $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ si ricava $z = 0$ oppure $\sqrt{y^2 - 2xz} = -\frac{1}{y}$; la prima eventualità non può verificarsi (da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si avrebbe $y \neq 0$ e $\frac{y}{|y|} = \operatorname{sign} y = 0$, assurdo), mentre nella seconda da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ottiene $-y^2 - xz = 0$, cioè $xz = -y^2$, che rimessa dentro $\sqrt{y^2 - 2xz} = -\frac{1}{y}$ dà $\sqrt{3y^2} = -\frac{1}{y}$, ovvero $y^2 = -\frac{\operatorname{sign} y}{\sqrt{3}}$, da cui l'unica soluzione $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; resta poi $xz = -y^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pertanto i possibili punti singolari sono quelli della curva parametrica $\{(u, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{u\sqrt{3}}) : u \in \mathbb{R},\, u \neq 0\}$, che giacciono tutti su $\mathsf{Y}_{\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}}$. Tutte le altri superfici di livello di g sono regolari, e tra queste anche Y_1 che contiene $A(0,1,-1)$: il piano affine tangente a Y_1 in A è dato da $\nabla g(0,1,-1)\cdot(x-0, y-1, z-(-1)) = 0$, ovvero $(2,1,0)\cdot(x, y-1, z+1) = 0$, ovvero $2x+y-1=0$. Dalla forma del gradiente notiamo che all'intorno di A dall'equazione $g(x,y,z)=1$ si possono esplicitare a scelta $x(y,z)$ oppure $y(x,z)$: ad esempio, scegliendo la seconda, si ha $y(x,z) = 1 + (-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1})(x-0, z+1) + \cdots = 1 - 2x + \cdots$, e lo sviluppo al primo ordine ridà il piano tangente trovato in precedenza.

(b) Lo jacobiano di $(g, x^2 - \log(z-y))$, ovvero $\begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz & \frac{y}{\sqrt{y^2-2xz}} - xz & -\frac{x}{\sqrt{y^2-2xz}} - xy \\ 2x & \frac{1}{z-y} & -\frac{1}{z-y} \end{pmatrix}$, nel punto $B(0,-1,0)$ diventa $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: pertanto, in base al teorema del Dini, l'unico modo per esplicitare due variabili in funzione della rimanente è di ricavare y e z in funzione di x; si avrà $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. È tuttavia richiesto lo sviluppo fino al II ordine, dunque conviene partire dall'identità data dal sistema $\begin{cases} g(x, y(x), z(x)) \equiv 1 \\ x^2 \equiv \log(z(x) - y(x)) \end{cases}$: derivando una volta si ottiene $\begin{cases} \frac{yy'-z-xz'}{\sqrt{y^2-2xz}} - yz - xy'z - xyz' \equiv 0 \\ 2x - \frac{z'-y'}{z-y} \equiv 0 \end{cases}$ (da cui, posto $x=0$ con $(y(0), z(0)) = (-1,0)$, si ritrova $(y'(0), z'(0)) = (0,0)$), e derivando nuovamente si ottiene $\begin{cases} \frac{1}{y^2-2xz}(((y')^2 + yy'' - 2z' - xz'')\sqrt{y^2-2xz} - \frac{(yy'-z-xz')^2}{\sqrt{y^2-2xz}}) - 2y'z - 2yz' - xy''z - 2xy'z' - xyz'' \equiv 0 \\ 2 - \frac{(z''-y'')(z-y)-(z'-y')^2}{(z-y)^2} \equiv 0 \end{cases}$ da cui, posto $x=0$ con $(y(0), z(0)) = (-1,0)$ e $(y'(0), z'(0)) = (0,0)$, si ottiene $(y''(0), z''(0)) = (0,2)$. Dunque lo sviluppo al II ordine cercato è $(y(x), z(x)) = (-1 + o_0(x^2),\, x^2 + o_0(x^2))$.

(c) (Figura 2) Quanto fatto nel punto (b) è del tutto analogo allo studio della curva ℓ: vicino al suo punto B essa è interpretabile come grafico della sola variabile x, e la retta tangente affine è data sia come sviluppo al primo ordine di $(y(x), z(x))$, sia come $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-1) \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In entrambi i casi risulta la retta $\begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$, parallela all'asse x.





1. Esercizio 3: le curve X_1, X_2, X_e e X_{e^2-2} sono rispettivamente in rosso, azzurro, blu e verde. **2.** Esercizio 4: la superficie Y_1 (in grigio) contiene entrambi i punti A (porpora) e B (rosso); è anche visibile la retta tangente affine in B alla curva ℓ (intersezione tra le due superfici grigia e blu).

Prova scritta (17/09/2009)

1. Studiare in $]0,+\infty[$ l'integrabilità gen. di $f_\alpha(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha}{(x+2)^{\alpha+1}}$, e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

2. Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni $y(x)$ delle equazioni (i) $x^2y' + \alpha(y+1)^2 \log x = 0$, (ii) $x^2y' + (x-1)y = e^{\alpha x}$ tali che $y(1) = 0$, e determinarne i limiti in 0^+ e in $+\infty$.

3. Si consideri nel piano la curva polare ℓ data da $\rho(\theta) = 3 + 2\sin\theta$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(a) Disegnare ℓ, parametrizzarla opportunamente e calcolarne la retta tangente nel punto A con $\theta = 0$. Scrivere in modo corretto l'integrale che dà la lunghezza di ℓ.

(b) Determinare[(47)] un polinomio $p(x, y)$ che definisca cartesianamente ℓ. Da $p(x, y) = 0$ esplicitare, all'intorno di A, una delle coordinate rispetto all'altra, e scriverne lo sviluppo fino al I ordine. Usare quanto trovato per ricalcolare in due modi la retta tangente a ℓ in A.

(c) Dimostrare che ℓ è compatta, e calcolarne i punti estremi rispetto alle coordinate x e y. Come andrebbe impostato lo stesso problema usando la forma cartesiana $p(x, y) = 0$?

4. Sia $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (\operatorname{arctg}(xyz) + x - yz\,,\ xz - y^2)$.

(a) Dire quali superfici di livello $\mathsf{S}_\alpha = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = \alpha\}$ sono regolari. Mostrare che S_1, all'intorno del suo punto $A(1, 0, -1)$, è esprimibile in un solo modo come grafico, e calcolarne in due modi il piano tangente affine. (Facoltativo: visti i risultati, si può indagare se per caso A sia un punto estremo per S_1 rispetto a una delle coordinate?)

(b) Sia Y la curva di livello di g passante per A. Mostrare che Y è regolare in A, e calcolarne la retta tangente affine in due modi.

(c) Mostrare che A è estremante locale (minimo, massimo?) per la coordinata z su Y.

Soluzioni.

1. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha}{(x+2)^{\alpha+1}}$ è definita per $x > 0$ tranne che eventualmente in $x = 1$: dunque l'integrabilità va vista in 0^+, $1^\mp$ e $+\infty$. • In 0^+ si ha $f_\alpha(x) \sim_0^* x^{1-\alpha}\,|\log x|^\alpha$: ricordando che $x^\beta|\log x|^\gamma$ è integrabile in 0^+ se e solo se $\beta > -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $1 - \alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. • Essendo $\log x \sim_1 x - 1$ si ricava $f_\alpha(x) \sim_1^* |x-1|^\alpha$, da cui la condizione $\alpha > -1$. • In $+\infty$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty}$

(47) Moltiplicare per ρ ambo i membri di $\rho = 3 + 2\sin\theta$, e ricordare i legami tra le coordinate polari e cartesiane.

$\frac{x^{1-\alpha}\,\log^\alpha(x)}{x^{\alpha+1}} = x^{-2\alpha}\,|\log x|^\alpha$: ricordando che $x^\beta |\log x|^\gamma$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < -1$ per ogni γ, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$, si ha la condizione $-2\alpha < -1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. • Da quanto detto prima, l'integrale proposto $\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\log x|}{(x+2)^2}\,dx$ converge, e avrà ovviamente valore positivo. Iniziamo calcolando una primitiva di $\frac{\log x}{(x+2)^2}$: integrando per parti si ha $\int \frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx = (-\frac{1}{x+2})\log x - \int(-\frac{1}{x+2})\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2})\,dx = -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log(x+2) + k = \frac{1}{2}(\frac{x}{x+2}\log x - \log(x+2)) + k$ (o anche $= -\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log\frac{x}{x+2} + k$, altra espressione utile per il calcolo). Tenendo poi presente che $|\log x| = \mp \log x$ a seconda che $x \lessgtr 1$, si ha che $\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|}{(x+2)^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+2)^2}\,dx = (-\frac{1}{2}(\frac{x}{x+2}\log x - \log(x+2))]_0^1 + (-\frac{1}{x+2}\log x + \frac{1}{2}\log\frac{x}{x+2}]_1^{+\infty} = (\frac{1}{2}\log 3) - (\frac{1}{2}\log 2) + (0) - (-\frac{1}{2}\log 3) = \log 3 - \frac{1}{2}\log 2 \sim 0{,}75$.

2. (i) L'equazione $x^2y' + \alpha(y+1)^2\log x = 0$ è del primo ordine a variabili separabili; separando si ha $-\frac{1}{(y+1)^2}\,dy = \alpha\frac{\log x}{x^2}\,dx$ da cui integrando si trova $\frac{1}{y+1} = -\alpha\frac{1}{x}(\log x + 1) + k$; imponendo che $y(1) = 0$ si ha $k = \alpha + 1$, da cui $\frac{1}{y+1} = -\alpha\frac{1}{x}(\log x + 1) + (\alpha+1) = \frac{(\alpha+1)x - \alpha(\log x + 1)}{x}$, da cui $y(x) = \frac{x}{(\alpha+1)x - \alpha(\log x+1)} - 1$. Si ha $\lim_{0^+} y(x) = -1$ per ogni α; d'altra parte, se $\alpha \neq -1$ vale $\lim_{+\infty} y(x) = \frac{1}{\alpha+1} - 1 = -\frac{\alpha}{\alpha+1}$, mentre se $\alpha = -1$ si ha $\lim_{+\infty} y(x) = +\infty$. • (ii) L'equazione $x^2y' + (x-1)y = e^{\alpha x}$ è lineare del primo ordine, e per $x > 0$ essa viene messa nella forma canonica $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \frac{x-1}{x^2}$ e $q(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x^2}$; si ha $\int p(x)\,dx = \log x + \frac{1}{x}$, perciò la soluzione con $y(1) = 0$ ha forma integrale $y(x) = e^{-\log x - \frac{1}{x}} \int_1^x e^{\log t + \frac{1}{t}} \frac{e^{\alpha t}}{t^2}\,dt = \frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}\int_1^x \frac{e^{\alpha t + \frac{1}{t}}}{t}\,dt$. In 0^+ si ha $\frac{e^{\alpha t + \frac{1}{t}}}{t} > \frac{1}{t}$, dunque l'integrale $\int_1^x \frac{e^{\alpha t+\frac{1}{t}}}{t}\,dt$ tende a $-\infty$ e il limite $\lim_{0^+} y(x)$ è in forma $\frac{\infty}{\infty}$: con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{0^+} y(x) = \lim_{0^+} \frac{\frac{e^{\alpha x + \frac{1}{x}}}{x}}{e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})} = \lim_{0^+} \frac{e^{\alpha x + \frac{1}{x}}}{(x-1)e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{0^+} \frac{e^{\alpha x}}{x-1} = -1$. Per quanto riguarda $+\infty$, se $\alpha < 0$ l'integrale converge e dunque $\lim_{+\infty} y(x) = 0^+$; se invece $\alpha \geq 0$ l'integrale chiaramente diverge e dunque siamo in forma $\frac{\infty}{\infty}$: con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{+\infty} y(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x-1}$, che vale 0 se $\alpha = 0$ e vale $+\infty$ se $\alpha > 0$.

3. (a) (Figura 1) La parametrizzazione naturale della curva polare ℓ data da $\rho(\theta) = 3 + 2\sin\theta$ è data da $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(\theta) = ((3 + 2\sin\theta)\cos\theta,\ (3 + 2\sin\theta)\sin\theta)$; un vettore tangente è $\gamma'(\theta) = (2 - 3\sin\theta - 4\sin^2\theta,\ (4\sin\theta + 3)\cos\theta)$, dunque la retta tangente nel punto con $\theta = 0$ è data da $\{\gamma(0) + t\,\gamma'(0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(3,0) + t\,(2,3) : t \in \mathbb{R}\} = \{(3 + 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$; eliminando il parametro t si ottiene $3x - 2y - 9 = 0$. Infine l'elemento d'arco è $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta = \sqrt{13 + 12\sin\theta}\,d\theta$, da cui la lunghezza $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{13 + 12\sin\theta}\,d\theta$.

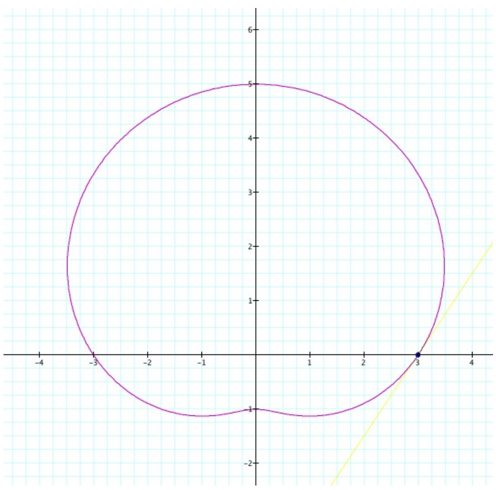
(b) Moltiplicando ambo i membri di $\rho = 3 + 2\sin\theta$ per ρ si ottiene $\rho^2 = 3\rho + 2\rho\sin\theta$, ovvero $x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} + 2y$, che equivale a $9(x^2+y^2) = (x^2+y^2-2y)^2$, ovvero $p(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^2y - 4y^3 - 9x^2 - 5y^2 = 0$; si calcola $\nabla p(x,y) = (4x^3 + 4xy^2 - 8xy - 18x,\ 4x^2y + 4y^3 - 4x^2 - 12y^2 - 10y)$, ed essendo $\nabla p(3,0) = 18(3,-2)$ si può esplicitare una a scelta delle due coordinate rispetto all'altra: ad esempio, si può scrivere $y = 0 + (-\frac{3}{-2})(x-3) + o_3(x-3) = \frac{3}{2}(x-3) + o_3(x-3)$. La retta tangente precedente si ritrova come $\nabla p(3,0)\cdot(x-3, y-0) = 0$, o come lo sviluppo al primo ordine di $y(x)$.

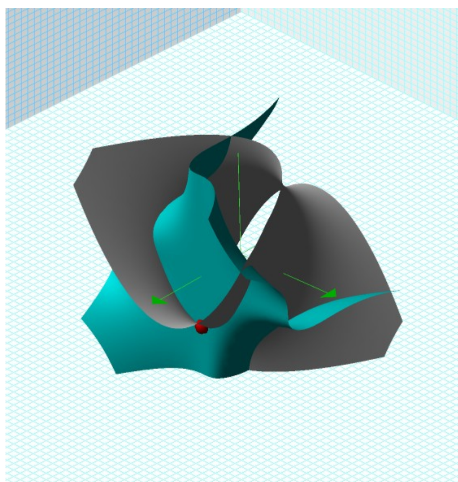
(c) (Figura 1) Il modo più rapido per mostrare che ℓ è una curva compatta è notare che essa è immagine di un compatto (l'intervallo $[-\pi, \pi]$) tramite una funzione continua (la parametrizzazione γ); alternativamente, ℓ è chiusa perché definita dall'equazione $p(x,y) = 0$, e limitata perché $\rho = 3 + 2\sin\theta \leq 5$. Cerchiamone i punti estremi rispetto alla coordinata x: usando γ si tratta di trovare gli estremi di $x(\gamma) = (3 + 2\sin\theta)\cos\theta$. La derivata $x'(\gamma) = 2 - 3\sin\theta - 4\sin^2\theta$ si annulla quando $\sin\theta = \frac{\sqrt{41}-3}{8}$: detto $\theta_0 = \arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{8}$, si trovano i punti estremi $\gamma(\theta_0)$ e $\gamma(\pi - \theta_0)$. Per la coordinata y, la derivata $y'(\theta) = \cos\theta(4\sin\theta + 3)$ si annulla per $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$, $-\arcsin\frac{3}{4}$, $\arcsin\frac{3}{4} - \pi$, da cui i quattro punti previsti dal disegno. Usando la forma cartesiana $p(x,y) = 0$, si tratterebbe di usare il metodo di Lagrange e poi di determinare la natura dei punti usando una carta locale. Ad esempio, per gli estremi secondo y si ottiene il sistema $\partial_x p(x,y) = p(x,y) = 0$, che tra la varie soluzioni dà $P(0,-1)$: da $\nabla p(P) = (0,-6)$ si nota che da $p(x,y) = 0$ si può esplicitare $y(x)$, e i conti (derivando due volte l'identità $p(x, y(x)) \equiv 0$ con $y(0) - 1$) dànno $y(x) = -1 - x^2 + o_0(x^2)$, che mostra che P è un punto di massimo locale per la coordinata y su ℓ.

4. (a) (Figura 2) Il gradiente di $g_1(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz) + x - yz$ è $\nabla g_1 = (\frac{yz}{1+x^2y^2z^2} + 1,\ \frac{xz}{1+x^2y^2z^2} - z,\ \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} - y)$; vediamo quali sono i possibili punti singolari delle superfici di livello S_α di g_1 annullando tale gradiente. Da $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$ si ricava che $z = 0$ oppure $1 + x^2y^2z^2 = x$; la prima eventualità è impossibile (da $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$ si otterrebbe $1 = 0$), e nella seconda da $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$ si avrebbe $yz = -x$, da cui $1 + x^2(-x)^2 = x$, ovvero $x^4 + 1 = x$, ma questa equazione non ha soluzioni reali (basta un rapido confronto grafico). Dunque tutte le superfici S_α sono regolari; in particolare lo è S_1 all'intorno del suo punto $A(1,0,-1)$. Essendo $\nabla g_1(A) = (1,0,0)$, l'unico modo per esprimere S_1 come grafico attorno A è di esplicitare $x(y,z)$ da $g_1(x,y,z) = 1$, con $x(0,-1) = 1$ e $(\dot{x}_y(0,-1), \dot{x}_z(0,-1)) = (0,0)$. Il piano tangente cercato è dunque $x = 1$, che si trova anche come $\nabla g_1(A) \cdot (x-1, y-0, z-(-1)) = 0$. Quanto all'ultima domanda, visto che il piano tangente a S_1 in A è parallelo al piano (y,z), tale punto potrebbe essere un estremo locale per la coordinata x: si tratta allora di vedere la natura del punto stazionario $(y_A, z_A) = (0,-1)$ per la funzione implicita $x(y,z)$. Il primo tentativo è quello di determinare l'hessiano di $x(y,z)$ in $(0,-1)$, ma una doppia derivazione dell'identità $g_1(x(y,z),y,z) \equiv 1$ rispetto a y e z ci dice solo che esso è identicamente nullo (guardando la figura, questo non è una sorpresa: infatti S_1 è "notevolmente piatta" vicino al punto A), e pertanto ciò non fornisce alcuna informazione sulla natura di A. Bisogna allora andare più in dettaglio, ma come fare? Per sondare il problema, possiamo provare a restringerci a una curva, ad esempio studiamo come si comporta la coordinata x sui punti di S_1 a quota $z = -1$, con particolare riguardo a ciò che accade vicino a A: è chiaro che ciò equivale a studiare, nel piano (x,y), la natura del punto $A'(1,0)$ per la funzione x sulla curva definita da $\operatorname{arctg}(xy(-1)) + x - y(-1) = 1$, ovvero $\varphi(x,y) := x + y - \operatorname{arctg} xy = 1$. Essendo $\nabla\varphi(A') = (1,0)$, da $\varphi(x,y) = 1$ esplicitiamo $x(y)$ e vediamone lo sviluppo in $y = 0$ (con $x(0) = 1$), aspettandoci naturalmente che le prime due derivate siano nulle: in effetti, derivando tre volte (con notevole pazienza) l'identità $\varphi(x(y),y) \equiv 1$ e calcolando in $y = 0$ si trova $x'(0) = x''(0) = 0$ e $x'''(0) = -2$, da cui $x(y) = 1 - \frac{1}{3}y^3 + o_0(y^3)$. Siamo stati fortunati: infatti abbiamo scoperto che A' è una sella per la funzione x sulla curva dei punti di S_1 a quota $z = -1$, e ciò implica che A è una sella per la coordinata x su S_1.

(b) (Figura 2) La matrice jacobiana di g in A è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango massimo 2: dunque Y (la curva di livello di g passante per A) è regolare in A, e la retta tangente affine è data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x = 1 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$ All'intorno di A si può parametrizzare Y solo esplicitando x e z in funzione di y, con $\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui lo sviluppo $\begin{cases} x = 1 + o_0(y^2) \\ z = -1 + o_0(y^2) \end{cases}$: la parte fino al primo ordine, ovvero $\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$, ridà la retta tangente affine a Y in A (si tratta di una retta parallela all'asse y) e ovviamente coincide con quanto già trovato in precedenza.

(c) (Figura 2) Si tratta solo di studiare la funzione implicita $z(y)$ del punto precedente, cercando di capire la natura del suo punto stazionario $y = 0$: in altre parole, ci serve lo sviluppo di $z(y)$ fino al secondo ordine. Derivando l'identità $g(x(y),y,z(y)) \equiv (1,-1)$ rispetto alla variabile y si ottiene $\begin{cases} \frac{x'yz + xz + xyz'}{1 + x^2y^2z^2} + x' - z - yz' = 0 \\ x'z + xz' - 2y = 0 \end{cases}$ (da cui, calcolando in $y = 0$, si riottiene $x'(0) = z'(0) = 0$); derivando nuovamente, e calcolando di nuovo in $y = 0$, si trova poi $(x''(0), z''(0)) = (0,2)$. Ne ricaviamo che $z(y) = -1 + y^2 + o_0(y^2)$, il che ci dice (e la figura lo conferma) che A è un punto di minimo locale per la coordinata z su Y.





1. Ex. 3: la curva polare ℓ e il punto A. **2.** Ex. 4: il punto A (rosso), la superficie S_1 (azzurra), la curva Y (intersezione tra le superfici).