

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (07/02/2012)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2011/12

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

- (a) Determinare raggio e insieme di convergenza delle serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n z^{3n}}{(n-1)!}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(iz+2)^{2n-1}}{2^n}$, calcolandone poi la somma.

(b) Risolvere le equazioni $(1+i)^z = 2i$ e $z^{2i} = 1+i$ (per la determinazione principale).
2. Si consideri la funzione $f_\alpha(x, y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$; e si ponga $f = f_1$.

(a) Studiare dominio, zeri, segno, limiti interessanti, curve di livello di f .

(b) Sia D_R il semidisco di centro $(0, 0)$ e raggio $R > 0$ contenuto nel semipiano $x > 0$: dire per quali R e quali α si ha che $f_\alpha \in L^1(D_R)$, calcolando per essi il valore di $\int_{D_R} f_\alpha(x, y) dx dy$.

(c) Detto T il triangolo pieno di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, -1)$, spiegare perché (usando (b)) si può già affermare che $f \in L^1(T)$, e calcolare $\int_T f(x, y) dx dy$.
3. In \mathbb{R}^3 sia E l'unione della porzione E_1 della sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ che giace nell'ottante con $x, z > 0$ e $y < 0$; e della porzione E_2 del cono di vertice $(0, R, 0)$ e base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $y = 0$ che giace nell'ottante con $x, y, z > 0$.

(a) Disegnare E e trovarne volume e baricentro geometrico.

(b) Verificare la formula di Stokes classica per il campo vettoriale $F(x, y, z) = (0, 0, xy)$ e la porzione di forma sferica S della superficie ∂E .

(c) Dire cosa afferma il teorema di Gauss per E e per il campo $G = (0, z - 2y, 0)$, e verificarne direttamente la validità.
4. Si consideri l'equazione scalare del 2o ordine $y'' = \alpha t + |y|^\beta \sin 2y$ nell'incognita $y(t)$, ove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Discutere a priori esistenza e unicità locali della soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (y_0, y'_0)$, al variare di y_0, y'_0, α, β . Vi sono soluzioni costanti?

(b) Posto $\alpha = \beta = 0$, dare informazioni sul dominio delle soluzioni massimali. Determinare poi un integrale primo. (Facoltativo: dare anche un'idea delle traiettorie nello spazio delle fasi.)

(c) Sempre nel caso $\alpha = \beta = 0$, risolvere il problema di Cauchy con $(y_0, y'_0) = (\frac{3\pi}{2}, \sqrt{2})$.
5. È dato il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y - e^t \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x + 2y \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato, in particolare quelle con $x(0) = y(0)$.

(b) Posto $\alpha = 0$ determinare la soluzione del sistema completo tale che $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

1. (a) • Posto $w = -z^3$, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n z^{3n}}{(n-1)!}$ diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n w^n$ con $a_n = \frac{n}{(n-1)!}$. Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n!} \frac{(n-1)!}{n} = \frac{n+1}{n^2}$ tende a 0, il raggio di convergenza della serie è $+\infty$ (per w ; e tale resta naturalmente anche per z). Dunque la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Quanto alla somma, si ha $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nw^n}{(n-1)!} = w \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nw^{n-1}}{(n-1)!} = w \frac{d}{dw} (\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^n}{(n-1)!}) = w \frac{d}{dw} (w \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n-1}}{(n-1)!}) = w \frac{d}{dw} (w \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}) = w \frac{d}{dw} (w(e^w - 1)) = w((w+1)e^w - 1)$, poi basta risostituire $w = -z^3$ per ottenere $z^3(1 + (z^3 - 1)e^{-z^3})$. • La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(iz+2)^{2n-1}}{2^n}$ è nulla quando $z = 2i$; invece per $z \neq 2i$ essa diventa $\frac{1}{iz+2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(iz+2)^{2n}}{2^n} = \frac{1}{iz+2} \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ con $q = \frac{(iz+2)^2}{2}$, serie geometrica che come noto converge se e solo se e solo se $|q| = \frac{|iz+2|^2}{2} < 1$, ovvero (raccogliendo i) se e solo se $|z - 2i| < \sqrt{2}$ (si tratta di una serie di potenze centrata in $z_0 = 2i$ anziché in 0). In tale insieme di convergenza, la somma sarà poi $\frac{1}{iz+2} \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{iz+2} (\frac{1}{1-q} - 1) = \frac{1}{iz+2} \frac{q}{1-q} = \frac{iz+2}{2-(iz+2)^2}$.
- (b) Indichiamo con \log il logaritmo principale. • La determinazione principale di $(1+i)^z$ è $\exp(z \log(1+i)) = \exp(z(\frac{1}{2} \log 2 + i\frac{\pi}{4}))$, e sarà uguale a $2i = \exp(\log 2 + i\frac{\pi}{2})$ se e solo se $z(\frac{1}{2} \log 2 + i\frac{\pi}{4}) = \log 2 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, ovvero se e solo se $z = 2 + k \frac{8\pi i}{2 \log 2 + i\pi}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Tra questi valori figura anche la soluzione $z = 2$, facilmente riconoscibile a priori. • La determinazione principale di z^{2i} è $\exp(2i \log z) = \exp(2i(\log |z| + i \arg z)) = \exp(-2 \arg z + 2i \log |z|)$, e sarà uguale a $1+i = \exp(\frac{1}{2} \log 2 + i\frac{\pi}{4})$ se e solo se $-2 \arg z + 2i \log |z| = \frac{1}{2} \log 2 + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$, ovvero se e solo se $\arg z = -\frac{1}{4} \log 2 \sim -0,2$ (valore ammissibile, perché in $]-\pi, \pi]$) e $\log |z| = \frac{\pi}{8} + k\pi$, cioè $|z| = e^{\frac{\pi}{8} + k\pi}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$: si tratta di soluzioni aventi tutte lo stesso argomento.
2. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ è il piano \mathbb{R}^2 privato dell'origine $O(0,0)$. Gli zeri di f sono i punti della bisettrice $y = x$; la funzione è positiva sotto di essa e negativa sopra. Tendendo a O lungo la bisettrice la funzione resta nulla, mentre tendendovi lungo gli assi essa diverge a $\mp\infty$: ne concludiamo che il limite di f in O non esiste. Quanto al limite in ∞_2 , passando in coordinate polari si ha $f(r, \theta) = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{r}$, dunque $|f(r, \theta)| < \frac{2}{r}$ tende a 0 per $r \rightarrow +\infty$ uniformemente in θ : pertanto il limite di f in ∞_2 esiste e vale 0. Parlando infine delle curve di livello $f(x, y) = k$, per $k = 0$ si trova la bisettrice $y = x$, mentre per $k \neq 0$ si ha la circonferenza di centro $(\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k})$ passante per O (i centri di tutte queste circonferenze corrono sull'altra bisettrice $y = -x$).
- (b) Nel semidisco D_R di centro $(0,0)$ e raggio $R > 0$ contenuto nel semipiano $x > 0$ la funzione $f_\alpha(x, y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ cambia segno e non è limitata; per vedere se il suo integrale su D_R avrà senso converrà allora esaminare separatamente gli integrali dove f_α ha segno costante, ovvero su $D_R^+ = \{(x, y) \in D_R : x \geq y\}$ (su cui $f_\alpha \geq 0$); su essi, per Tonelli e Fubini, il conto dell'integrale multiplo (con risultato finito o infinito) può essere comunque effettuato come integrale iterato. Passando in coordinate polari si ha $\int_{D_R^+} f_\alpha(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^R \frac{r(\cos \theta - \sin \theta)}{r^{2\alpha}} r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \int_0^R r^{2(1-\alpha)} dr$, che converge se e solo se $2(1-\alpha) > -1$ ovvero $\alpha < \frac{3}{2}$ e vale $(\sin \theta + \cos \theta) \frac{\pi}{4} \frac{1}{3-2\alpha} r^{3-2\alpha} \Big|_0^R = \frac{\sqrt{2}+1}{3-2\alpha} R^{3-2\alpha} > 0$. In modo analogo si calcola (sempre per $\alpha < \frac{3}{2}$) che $\int_{D_R^-} f_\alpha(x, y) dx dy = (\sin \theta + \cos \theta) \frac{\pi}{4} \frac{1}{3-2\alpha} r^{3-2\alpha} \Big|_0^R = -\frac{\sqrt{2}-1}{3-2\alpha} R^{3-2\alpha} < 0$: possiamo dunque dire che $f_\alpha \in L^1(D_R)$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$, con $\int_{D_R} f_\alpha(x, y) dx dy = \int_{D_R^+} f_\alpha(x, y) dx dy + \int_{D_R^-} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{2}{3-2\alpha} R^{3-2\alpha} > 0$.
- (c) Il triangolo pieno di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,-1)$ si trova nella zona in cui $f > 0$, ed è contenuto in $D_{\sqrt{2}}^+$: poiché (come visto in (b)) si ha $f \in L^1(D_{\sqrt{2}}^+)$ e T è un sottoinsieme misurabile di $D_{\sqrt{2}}^+$, ne deduciamo che $f \in L^1(T)$. L'integrale, che sarà dunque finito e > 0 , vale $\int_T f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^0 \frac{x-y}{x^2+y^2} dy = \int_0^1 (\arctg \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)) \Big|_{y=-x}^{y=0} dx = \int_0^1 ((-\frac{1}{2} \log(x^2)) - (\arctg(-1) - \frac{1}{2} \log(2x^2))) dx = \int_0^1 (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2$.
3. (a) (Figura 2) Il solido $E = \{(x, y, z) : -\sqrt{R^2 - x^2 - z^2} \leq y \leq R - \sqrt{x^2 + z^2}, x \geq 0, z \geq 0\}$ è quello compreso tra l'ottavo di superficie sferica S dato da $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $x > 0, y < 0$ e $z > 0$ e il settore di superficie conica S' di vertice $(0, R, 0)$ e base la circonferenza $x^2 + z^2 = R^2$ nel piano $y = 0$ tale che $x > 0, y > 0$ e $z > 0$; altre porzioni significative di ∂E sono quella S'' sul piano orizzontale $z = 0$ e quella S''' sul piano $x = 0$ (nella Figura 2 quest'ultima è stata rimossa per permettere di osservare E all'interno). La parte sferica E_1 di E è parametrizzabile in coordinate sferiche nel modo consueto $(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$ con $0 \leq r \leq R, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ e $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, mentre la parte conica E_2 lo è in coordinate cilindriche riferite all'asse y come $(x, y, z) = (\rho \sin \psi, y, \rho \cos \psi)$ con $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq y \leq R - \rho$ e $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$: ne discende che $\text{Vol}(E) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R d\rho \int_0^{R-\rho} \rho dy = \frac{\pi}{2} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3} r^3) \Big|_0^R + \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2} R \rho^2 - \frac{1}{3} \rho^3) \Big|_0^{R-\rho} = \frac{\pi}{6} R^3 + \frac{\pi}{12} R^3 = \frac{\pi}{4} R^3$ (naturalmente il calcolo poteva essere fatto anche con le note formule della geometria elementare). Quanto al baricentro, considerazioni di simmetria ci dicono che $z_G = x_G$; per il resto si ricava che $x_G \text{Vol}(E) = \int_{E_1} x dx dy dz + \int_{E_2} x dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \cos \theta \sin \varphi r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R d\rho \int_0^{R-\rho} \rho \sin \psi \rho dy$ e $y_G \text{Vol}(E) = \int_{E_1} y dx dy dz + \int_{E_2} y dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \sin \theta \sin \varphi r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R d\rho \int_0^{R-\rho} y \rho dy$, e dopo i

calcoli si ricava $x_G = z_G = \frac{3\pi+4}{12\pi}R$ e $y_G = -\frac{1}{6}R$.

- (b) La formula di Stokes classica per il campo $F(x, y, z) = (0, 0, xy)$ e la porzione di superficie sferica S dice che il flusso uscente da S del rotore $\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = (x, -y, 0)$ deve uguagliare la circuitazione di F lungo il bordo ∂S : vediamo con i conti che è vero. • La superficie S è parametrizzata come i punti di E_1 in cui $r = R$, ovvero $(x, y, z) = \phi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ e $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$: il flusso uscente da S di $\nabla \times F$ è dato dunque (controllare con le dita che il segno è corretto per uscire da S) da $\Phi_S(\nabla \times F) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & -R \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos 2\theta \sin^3 \varphi d\varphi = R^3 (\frac{1}{2} \sin 2\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ (risultato preventivabile: le linee del campo $\nabla \times F = (x, -y, 0)$ sono rami di iperboli orizzontali $xy = k$, che entrano e escono da S da punti simmetrici rispetto alla bisettrice, rispetto alla quale il campo stesso è simmetrico). • D'altra parte il campo F è nullo sui piani $x = 0$ e $y = 0$, ed è ortogonale al piano orizzontale $z = 0$: pertanto anche la circuitazione $\oint_{\partial S} F \cdot d\ell$ è nulla. La formula di Stokes classica è verificata.

- (c) Per il corpo tridimensionale E e il campo $G = (0, z - 2y, 0)$, il teorema di Gauss afferma che $\int_E \nabla \cdot G = \Phi_{\partial E}(G)$: verifichiamolo con i calcoli. • Vale $\nabla \cdot G = -2$, dunque $\int_E \nabla \cdot G = -2 \int_E dx dy dz = -2 \text{Vol}(E) = -\frac{\pi}{2} R^3$. • Il campo G è nullo sui piani $x = 0$ e $z = 0$, dunque $\Phi_{S'}(G) = \Phi_{S''}(G) = 0$. Per S , la parametrizzazione sferica $(x, y, z) = \phi(\theta, \varphi)$ inverte l'orientazione come ∂E dunque

$$\begin{aligned} \Phi_S(G) &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} R \cos \varphi & 0 & -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \varphi - 2R \sin \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & R \sin \theta \cos \varphi \\ & & -R \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= -R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 \theta \sin^3 \varphi - \sin \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi) d\varphi = -\frac{1}{3} R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4 \sin^2 \theta - \sin \theta) d\theta = -\frac{\pi+1}{3} R^3. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece S' , la parametrizzazione sferica $(x, y, z) = \eta(\rho, \psi) = (\rho \sin \psi, R - \rho, \rho \cos \psi)$ ove $0 \leq \rho \leq R$ e $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ preserva l'orientazione come ∂E (con ρ e ψ in quest'ordine), dunque $\Phi_{S'}(G) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R \det \begin{pmatrix} \rho \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ \rho \cos \psi - 2(R - \rho) & -1 & \rho \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\rho \sin \psi \end{pmatrix} d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R (2R - (2 + \cos \psi)\rho) \rho d\rho = -\frac{1}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \psi) d\psi = -\frac{1}{3} (\frac{\pi}{2} - 1) R^3$. Ricaviamo pertanto $\Phi_{\partial E}(G) = -\frac{\pi+1}{3} R^3 - \frac{1}{3} (\frac{\pi}{2} - 1) R^3 = -\frac{\pi}{2} R^3$, il che effettivamente conferma il teorema di Gauss.

4. (a) L'equazione scalare del secondo ordine $y'' = \alpha t + |y|^\beta \sin 2y$ corrisponde, posto $p = y'$, al sistema del primo ordine $\begin{cases} y' = p \\ p' = \alpha t + |y|^\beta \sin 2y \end{cases}$. Se $y_0 \neq 0$ la funzione $f(y, p) = (p, \alpha t + |y|^\beta \sin 2y)$ è sempre di classe C^1 all'intorno del dato iniziale $(y, p) = (y_0, y'_0)$, dunque esistenza e unicità locali della soluzione sono garantite. Se invece $y_0 = 0$ il problema di Cauchy avrà senso per $\beta \geq 0$, e all'intorno del dato iniziale $(y, p) = (0, y'_0)$ la funzione $f(y, p)$ resta C^1 per $\beta = 0$ o per $\beta > 1$, mentre per $\beta = 1$ essa è perlomeno lipschitziana, assicurando perciò anche in tutti questi casi esistenza e unicità locali della soluzione; invece il caso $0 < \beta < 1$, in cui si perde la lipschitzianità in $(0, y'_0)$, è quello già noto che darà origine assai probabilmente a fenomeni di non unicità. • Un'eventuale soluzione costante $y \equiv k$ dovrebbe soddisfare $0 = \alpha t + |k|^\beta \sin 2k$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il che evidentemente accade solo quando $\alpha = 0$ se e solo se k è un multiplo intero di $\frac{\pi}{2}$.
- (b) (Figura 3) Per $\alpha = \beta = 0$ si ottiene l'equazione autonoma $y'' = \sin 2y$: basta notare che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y} = (0, 2 \cos 2y)$ e $\frac{\partial f}{\partial p} = (1, 0)$ sono definite e limitate per ogni (y, p) per concludere che le soluzioni massimali saranno definite su tutto \mathbb{R} (notiamo che alla stessa conclusione si sarebbe arrivati anche ponendo solo $\beta = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: infatti le derivate parziali sarebbero state comunque limitate su ogni compatto in t). Come sappiamo, nel caso di equazioni autonome scalari del tipo $y'' = g(y)$ un integrale primo è dato subito dall'integrale dell'energia $E(y, p) = \frac{1}{2} p^2 - \int g(y) dy$, dunque nel nostro caso otteniamo $E(y, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \cos 2y$: nello spazio delle fasi (y, p) le traiettorie delle soluzioni sono dunque le componenti connesse delle curve di livello $E(y, p) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Tali curve (vedi Figura 3) chiaramente sono non vuote se e solo se $k \geq -\frac{1}{2}$; per $k = -\frac{1}{2}$ danno luogo agli equilibri (già notate come soluzioni costanti) del tipo $(y, p) = ((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$; per $|k| < \frac{1}{2}$ si hanno traiettorie compatte (da $p^2 = k - \cos 2y$ si ricava infatti che p è limitata e che $|y| < \frac{1}{2} \arccos k + h\pi$ per qualche $h \in \mathbb{Z}$; in Figura 3 sono le curve verdi); per $k = \frac{1}{2}$ si ha $p = \mp \sqrt{2} \sin y$, tratti di grafici delimitati dai restanti equilibri del tipo $(y, p) = (k\pi, 0)$ (in Figura 3 sono le curve grigie, e quella rossa); infine, per $k > \frac{1}{2}$ le traiettorie sono limitate solo nella velocità p e illimitate in y (in Figura 3 sono le curve azzurre).
- (c) (Figura 3) La soluzione del problema di Cauchy con $(y_0, y'_0) = (\frac{3\pi}{2}, \sqrt{2})$ avrà energia $E(y_0, y'_0) = \frac{1}{2}$ (sarà dunque una separatrice), e nello spazio delle fasi starà sulla traiettoria $(y')^2 + \cos 2y = 1$, da cui (vista la condizione iniziale) si ricava l'equazione del primo ordine $y' = -\sqrt{2} \sin y$, a variabili separabili. Separando le variabili e integrando si ottiene dunque $\int_{3\pi/2}^{y(t)} \frac{1}{\sin \eta} d\eta = -\int_0^t \sqrt{2} d\tau$, ovvero $(\log |\tg \frac{\eta}{2}|)_{3\pi/2}^y = -t\sqrt{2}$, da cui $\tg \frac{y}{2} = -e^{-t\sqrt{2}}$, che infine (tenuto conto della condizione iniziale) dà $y(t) = 2\pi - 2 \arctg(e^{-t\sqrt{2}})$. La traiettoria percorsa da questa soluzione nello spazio delle fasi è quella segnata in rosso nella Figura 3.

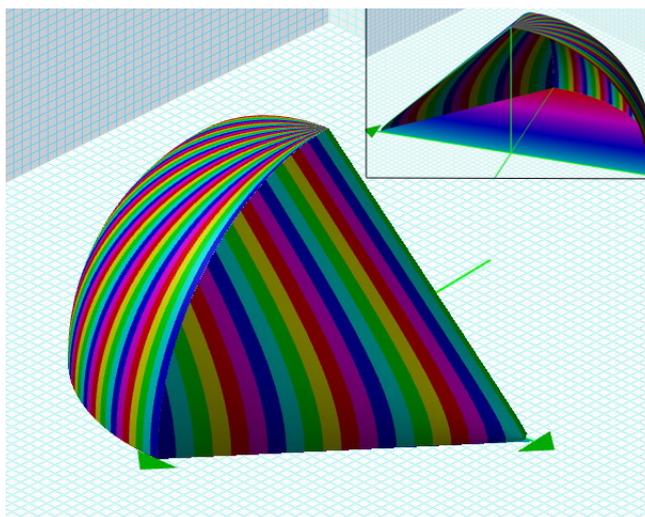
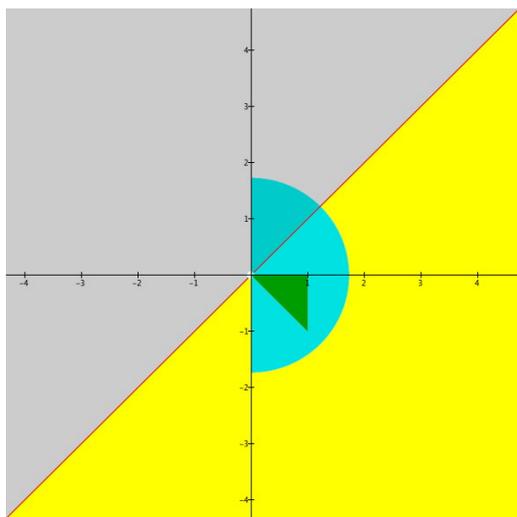
La dinamica del pendolo. È importante osservare che l'equazione $y'' = \sin 2y$ è del tipo di quella che descrive la dinamica del pendolo semplice, ovvero $x'' = -a \sin x$ con $a > 0$ (posto $x = 2y + \pi$ si ha $x'' = -2 \sin x$).

Quando interpretate nella dinamica del pendolo, le traiettorie compatte in (y, p) corrispondono alle oscillazioni periodiche attorno a un equilibrio stabile, che a causa della bassa energia non raggiungono l'equilibrio instabile; le traiettorie illimitate in y sono i moti a energia sufficientemente elevata da raggiungere e superare l'equilibrio instabile e continuare così a girare intorno; e le traiettorie separatrici (nel nostro quadro con $k = \frac{1}{2}$, come nel caso studiato in (c)) corrispondono ai moti che tendono asintoticamente all'equilibrio instabile.

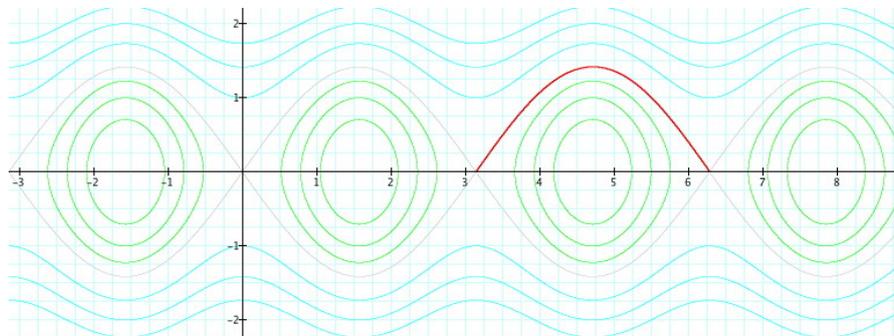
5. Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y - e^t \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x + 2y \end{cases}$, posto $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha - 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ si scrive $\dot{Y} = AY + b$.

(a) Gli autovalori di A risultano $\alpha + 1$ e 1 . • Per $\alpha = 0$ essi coincidono nell'unico autovalore 1 , doppio: in tal caso sappiamo che $N = A - \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è nilpotente, da cui $e^{tA} = e^t(\mathbf{1}_2 + tN) = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}$ che è già una risolvante del sistema omogeneo. La soluzione generale del sistema omogeneo è pertanto del tipo $Y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ al variare di $a, b \in \mathbb{C}$; poiché inoltre vale $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, la condizione $x(0) = y(0)$ equivale a $a = b$, e ciò dà le soluzioni della forma $Y(t) = a \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ al variare di $a \in \mathbb{C}$. • Per $\alpha \neq 0$ i due autovalori sono distinti; un autovettore relativo a $\alpha + 1$ risulta essere $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mentre uno relativo a 1 risulta essere $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$, dal che si ottiene la risolvante $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{(\alpha+1)t} \\ (1-\alpha)e^t & e^{(\alpha+1)t} \end{pmatrix}$. Dato allora $a \in \mathbb{C}$, la soluzione con $x(0) = y(0) = a$ è data da $\Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{(\alpha+1)t} \\ (1-\alpha)e^t & e^{(\alpha+1)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} \\ e^{(\alpha+1)t} \end{pmatrix}$.

(b) Come visto, nel caso $\alpha = 0$ la risolvante del sistema omogeneo associato è la matrice esponenziale e^{tA} vista sopra; per determinare la soluzione del sistema completo tale che $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, la cosa più semplice è ricordare che essa è data da $e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) d\tau$, che dà $\begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (1+\tau)e^{-\tau} & -\tau e^{-\tau} \\ \tau e^{-\tau} & (1-\tau)e^{-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -\tau - 1 \\ -\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 - t \\ -\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}t^2 - t)e^t \\ (\frac{1}{2}t^2)e^t \end{pmatrix}$.



1. Ex. 2. 2. Ex. 3.



3. Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (20/02/2012)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2011/12

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

- (a) Calcolare raggio e insieme di convergenza delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)z^{2n+1}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (2-i^n)(2z-i)^n$, calcolandone poi la somma.

(b) Discutere le soluzioni in \mathbb{C} di $\operatorname{Re}(\sin z) > \alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Nel piano cartesiano sia A la figura compresa tra la spirale $r = 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ e l'asse x .

(a) Calcolare l'area di A in due modi, sia direttamente che usando la formula di Green.

(b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione xy^α è in $L^1(A)$? Calcolare poi l'integrale $\int_A xy^\alpha dx dy$ per $\alpha = 0$.

(c) Determinare il baricentro di A , e il volume del solido di rotazione di A attorno all'asse x .
- Nel piano (x, z) di \mathbb{R}^3 si consideri la figura $T = \{(x, z) : \frac{1}{2}R \leq x \leq R, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq R^2\}$, ove $R > 0$; detta T' l'analoga figura nel piano (y, z) , sia E il solido di \mathbb{R}^3 ottenuto dall'unione di tutti i segmenti congiungenti coppie di punti corrispondenti di T e T' .

(a) Disegnare E , parametrizzarlo opportunamente e calcolarne il volume. Verificare poi il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, y, -1)$.

(b) Calcolare l'area della porzione curva S di ∂E nell'ottante $x, y, z > 0$, e verificare la formula di Stokes per S e per il campo $G = (0, x, -2)$.
- Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y + 1 \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri, un integrale primo e le traiettorie; descrivere se possibile queste ultime, col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $x(0) = y(0) = -1$, e quella con $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$.
- È data l'equazione differenziale $y''' - y'' + 2y = 4 - 5e^{-t}$ nell'incognita $y(t)$.

(a) Dire a priori ciò che è possibile riguardo esistenza e unicità delle soluzioni, e se due soluzioni diverse potrebbero o no avere grafici tangenti in un punto. Determinare poi tutte le soluzioni del sistema, in particolare quelle che per $t = 0$ assumono un minimo locale.

(b) Scrivere il sistema del primo ordine associato, e calcolare la matrice esponenziale dei coefficienti della parte omogenea del sistema.

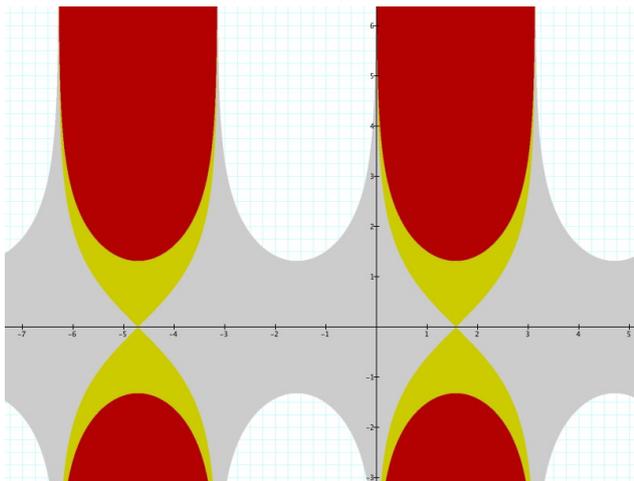
1. (a) • Posto $w = z^2$ si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)w^n$. Poiché $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+4}{n+3}$ tende a 1, il raggio di convergenza in w è 1, dunque tale resta anche per z : trattandosi di serie geometrica, l'insieme di convergenza (assoluta) è il disco aperto $|z| < 1$. La somma per $z = 0$ è 0; per $z \neq 0$ diventa $z \sum_{n=3}^{+\infty} n w^{n-3} = \frac{z}{w^2} \sum_{n=3}^{+\infty} n w^{n-1} = \frac{1}{z^3} \frac{d}{dw} (\sum_{n=3}^{+\infty} w^n) = \frac{1}{z^3} \frac{d}{dw} (\frac{1}{1-w} - 1 - w - w^2) = \frac{1}{z^3} (\frac{1}{(1-w)^2} - 1 - 2w) = \frac{1}{z^3} \frac{3w^2 - 2w^3}{(1-w)^2} = \frac{z(3-2z^2)}{(1-z^2)^2}$, che ovviamente ricomprende il caso $z = 0$. • Posto $w = z - \frac{i}{2}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (2 - i^n)(2z - i)^n$ diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} (2 - i^n)2^n w^n$: poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = 2 \sqrt[n]{|2 - i^n|}$ tende a 2 (si noti che $|2 - i^n|$ vale 1, $\sqrt{5}$ o 3 a seconda di n , dunque $\sqrt[n]{|2 - i^n|}$ tende a 1), il raggio di convergenza in w attorno a 0 (ovvero, di z attorno a $\frac{i}{2}$) è $\frac{1}{2}$. Anche in questo caso, trattandosi di serie geometrica l'insieme di convergenza (assoluta) è il disco aperto. Per la somma conviene scrivere la serie come somma delle due serie (ciascuna col medesimo insieme di convergenza) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(2z - i)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (i(2z - i))^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2z - i)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + 2iz)^n = 2 \frac{1}{1 - (2z - i)} - \frac{1}{1 - (1 + 2iz)} = \frac{2(2-i)z - 1 + i}{2z(1+i-2z)}$, espressione valida nel disco aperto $|z - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$.
- (b) (Figura 1) Vale $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; pertanto, scritto in forma algebrica $z = x + iy$ si ottiene $\operatorname{Re}(\sin z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} e^{iz} - \operatorname{Im} e^{-iz}) = \frac{1}{2} (e^{-y} \sin x - e^y \sin(-x)) = \cosh y \sin x$. Il luogo nel piano di Gauss che corrisponde a $\operatorname{Re}(\sin z) > \alpha$ è dato dunque da $\sin x > \frac{\alpha}{\cosh y}$, simmetrico rispetto all'asse reale: se $\alpha < 1$ vi sono soluzioni per ogni parte immaginaria y (naturalmente anche quelle, già note, del caso reale $y = 0$), mentre per $\alpha \geq 1$ ve ne sono solo quando $\cosh y > \alpha$, ovvero $|y| > \operatorname{sech} \cosh \alpha = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$.
2. (a) (Figura 2) Ricordando la formula dell'area di figure piane in coordinate polari, l'area di A risulta $\frac{1}{2} \int_0^\pi (2\theta)^2 d\theta = \frac{2\pi^3}{3} \sim 20,7$. L'area si può trovare anche usando la formula di Green, come $\oint_{\partial A} x dy = \int_0^\pi (2\theta \cos \theta) d(2\theta \sin \theta) = 4 \int_0^\pi (\theta \cos \theta)(\sin \theta + \theta \cos \theta) d\theta = 2 \int_0^\pi (\theta \sin 2\theta + \theta^2 (1 + \cos 2\theta)) d\theta$ che, integrando per parti, alla fine ridà $\frac{2}{3}\pi^3$.
- (b) Se $\alpha \geq 0$ la funzione xy^α è continua su tutto \mathbb{R}^2 e dunque, essendo A misurabile e limitato (potremmo dire compatto, se consideriamo anche il bordo incluso) di certo appartiene a $L^1(A)$. Se invece $\alpha < 0$ la funzione non è definita sull'asse x ed è illimitata tendendo ad esso; notiamo inoltre che essa non ha segno costante su A , dunque va posta particolare attenzione perché gli integrali iterati non coincidono necessariamente con l'integrale doppio cercato $\int_A xy^\alpha dx dy$. Come primo passo, è opportuno portare l'integrale doppio in coordinate polari, ovvero $\int_{\{(r,\theta): 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\theta\}} r \cos \theta (r \sin \theta)^\alpha r dr d\theta = \int_{\{(r,\theta): 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\theta\}} r^{\alpha+2} \cos \theta \sin^\alpha \theta d\theta dr$: per Tonelli quest'ultimo converge se (e solo se) converge l'integrale iterato $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\theta} r^{\alpha+2} |\cos \theta| \sin^\alpha \theta dr$. La prima integrazione in r dà risultato finito se e solo se $\alpha + 2 > -1$, ovvero $\alpha > -3$, dando $\frac{1}{\alpha+3} \int_0^\pi (2\theta)^{\alpha+3} |\cos \theta| \sin^\alpha \theta d\theta$: poiché la funzione integranda è $\sim_{0^+} \theta^{\alpha+3} \theta^\alpha = \theta^{2\alpha+3}$ ed è $\sim_{\pi^-} (\pi - \theta)^\alpha$, le condizioni di convergenza di quest'ultimo integrale in 0^+ e in π^- sono rispettivamente $2\alpha + 3 > -1$ (cioè $\alpha > -2$) e $\alpha > -1$. Ricapitolando, la funzione xy^α è in $L^1(A)$ se e solo se $\alpha > -1$. • Per $\alpha = 0$ si ottiene dunque $\int_A x dx dy = \frac{1}{3} \int_0^\pi (2\theta)^3 \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi \theta^3 \cos \theta d\theta$, che a conti fatti (integrando più volte per parti) dovrebbe dare $-8(\pi^2 - 4)$.
- (c) Usando i conti precedenti si ha $x_G = \frac{1}{\operatorname{Area}(A)} \int_A x dx dy = -\frac{12(\pi^2 - 4)}{\pi^3} \sim -2,3$. Per l'altra coordinata serve l'integrale simile $\int_A y dx dy = \frac{1}{3} \int_0^\pi (2\theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi \theta^3 \sin \theta d\theta$, che a conti fatti dovrebbe dare $\frac{8\pi(\pi^2 - 6)}{3}$, da cui $y_G = \frac{1}{\operatorname{Area}(A)} \int_A y dx dy = \frac{4(\pi^2 - 6)}{\pi^2} \sim 1,7$. Infine, per Guldino, il volume del solido di rotazione di A attorno all'asse x risulta $2\pi \int_A y dx dy = 2\pi \cdot \operatorname{Area}(A) \cdot y_G = \frac{16\pi^2(\pi^2 - 6)}{3}$.
3. (a) (Figura 3) La parametrizzazione più naturale di E discende dalla descrizione fatta nel testo: il punto $(u, 0, v) \in T$ è congiunto con il segmento al punto $(0, u, v) \in T'$, pertanto il punto generico di E è dato da $(x, y, z) = \phi(u, v, t) = ((1-t)u, tu, v)$ con $(u, v, t) \in T \times [0, 1]$. Lo jacobiano $J_\phi(u, v, t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & -u \\ t & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante $-u$, e ne segue che $\operatorname{Vol}(E) = \int_E dx dy dz = \int_0^1 dt \int_T u du dv = \int_{\frac{1}{2}R}^R u du \int_0^{\sqrt{R^2 - u^2}} dv = \int_{\frac{1}{2}R}^R u \sqrt{R^2 - u^2} du = (-\frac{1}{3}(R^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}) \Big|_{\frac{1}{2}R}^R = \frac{\sqrt{3}}{8} R^3$. Il volume si può calcolare agevolmente anche per z -fette: l'area della z -sezione di E (per $0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R$) è $\frac{1}{2}((\sqrt{R^2 - z^2})^2 - (\frac{R}{2})^2) = \frac{3R^2 - 4z^2}{8}$, e si ritrova $\operatorname{Vol}(E) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{3R^2 - 4z^2}{8} dz = \frac{1}{8}(3R^2 z - \frac{4}{3}z^3) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \frac{\sqrt{3}}{8} R^3$. • Il campo $F = (x, y, -1)$ ha divergenza $\nabla \cdot F = 2$, dunque $\int_E \nabla \cdot F dx dy dz = 2 \operatorname{Vol}(E) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^3$. Si tratta ora di calcolare il flusso uscente totale da ∂E , direttamente per ogni porzione. Il campo è parallelo a T e a T' , dunque attraverso esse il flusso è nullo. Il flusso attraverso la base orizzontale B sul piano (x, y) è $\Phi_B(F) = \int_B (x, y, -1) \cdot (0, 0, -1) d\sigma = \int_B d\sigma = \operatorname{Area}(B) = \frac{3}{8}R^2$. La parete verticale posteriore D è parametrizzata ponendo $u = \frac{1}{2}R$, dunque $(x, y, z) = (\frac{1}{2}R(1-t), \frac{1}{2}Rt, v)$ con $(v, t) \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}R] \times [0, 1]$, dunque $\Phi_D(F) = \int_{[0, \frac{\sqrt{3}}{2}R] \times [0, 1]} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R(1-t) & 0 & -\frac{1}{2}R \\ \frac{1}{2}Rt & 0 & \frac{1}{2}R \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} du dt = -\int_{[0, \frac{\sqrt{3}}{2}R] \times [0, 1]} \frac{1}{4}R^2 du dt = -\frac{\sqrt{3}}{8}R^3$. Infine, la superficie curva S si può parametrizzare ponendo $(u, v) = (R \cos \psi, R \sin \psi)$ con $\psi \in [0, \frac{\pi}{3}]$, pertanto $(x, y, z) = (R(1-t) \cos \psi, Rt \cos \psi, R \sin \psi)$, da cui otteniamo il flusso uscente (si noti il

segno) $\Phi_S(F) = -\int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} \det \begin{pmatrix} R(1-t)\cos\psi & -R(1-t)\sin\psi & -R\cos\psi \\ R t \cos\psi & -R t \sin\psi & R\cos\psi \\ -1 & R\cos\psi & 0 \end{pmatrix} d\psi dt = \int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} (R^3 \cos^3\psi - R^2 \sin\psi \cos\psi) d\psi dt = (R^3(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi) - \frac{1}{4}R^2 \cos 2\psi)_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}R^3 - \frac{3}{8}R^2$. La somma dei quattro flussi uscenti ridà dunque $\frac{\sqrt{3}}{4}R^3$, e questo verifica il teorema di Gauss.

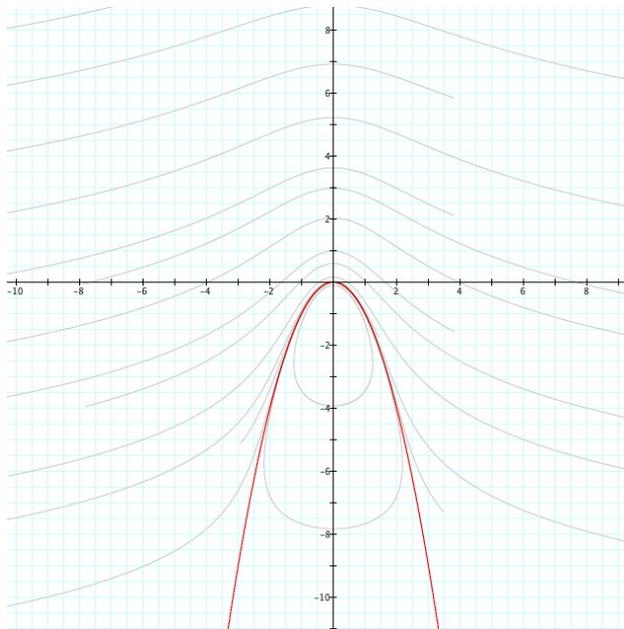
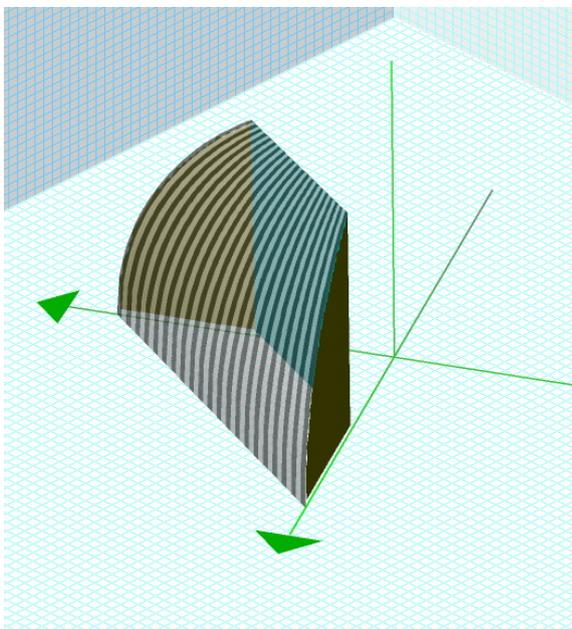
- (b) Usando la parametrizzazione di S trovata nel punto precedente si ha $d\sigma = R^2 \cos\psi \sqrt{1 + \cos^2\psi} d\psi dt$, pertanto $\text{Area}(S) = \int_S d\sigma = R^2 \int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} \cos\psi \sqrt{1 + \cos^2\psi} d\psi dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\psi \sqrt{2 - \sin^2\psi} d\psi$, che posto $\tau = \sin\psi$ diventa $R^2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{2 - \tau^2} d\tau = \frac{1}{2}R^2(\tau\sqrt{2 - \tau^2} + 2 \arcsin \frac{\tau}{\sqrt{2}})_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = (\frac{\sqrt{15}}{8} + \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4})R^2$. • Per la formula di Stokes dobbiamo verificare che $\Phi_S(\nabla \times G) = \oint_{\partial S} G \cdot dx$. Essendo $\nabla \times G = (0, 0, 1)$, e ricordando che la parametrizzazione $(x, y, z) = \phi(\psi, t)$ di S inverte l'orientazione come ∂E (con ψ e t in quest'ordine) si ha $\Phi_S(\nabla \times G) = -\int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} \det \begin{pmatrix} 0 & -R(1-t)\sin\psi & -R\cos\psi \\ 0 & -R t \sin\psi & R\cos\psi \\ 1 & R\cos\psi & 0 \end{pmatrix} d\psi dt = R^2 \int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} \sin\psi \cos\psi d\psi dt = R^2 \int_0^1 dt \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\psi \cos\psi d\psi = R^2(-\frac{1}{4}\cos 2\psi)_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{8}R^2$. D'altra parte, parametrizzando i tratti verticali di ∂S con l'angolo ψ e quelli orizzontali con t , e percorrendo ∂S in verso antiorario (come bordo di S , per l'appunto) partendo dal punto in basso sul piano (x, z) si ha $\oint_{\partial S} G \cdot dx = R^2 \int_0^1 (1-t) dt - \frac{1}{4}R^2 \int_0^1 (1-t) dt = \frac{3}{4}R^2(t - \frac{1}{2}t^2)_0^1 = \frac{3}{8}R^2$, come già trovato.

4. (a) (Figura 4) Circa le soluzioni del sistema $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y + 1 \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ si può affermare a priori l'esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione C^1 ; nulla si può affermare riguardo esistenza globale, perché il teorema di esistenza globale non è applicabile visto che la crescita non è sublineare in x (attenzione: ricordare che i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su \mathbb{R} !). Gli equilibri sono dati da $x^2 + y + 1 = -2x = 0$, ovvero il solo $(0, -1)$. L'equazione totale associata è $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$ con $p(x, y) = 2x$ e $q(x, y) = x^2 + y + 1$; essendo $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = -2x \neq 0$ la forma non è esatta; tuttavia, poiché $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = 1$ non dipende da x , un fattore integrante è $e^{\int 1 dy} = e^y$, e in effetti la forma $e^y \omega$ è esatta con primitiva $F(x, y) = (x^2 + y)e^y$, l'integrale primo cercato. Le traiettorie del sistema sono pertanto (oltre all'equilibrio $(0, -1)$, traiettoria dell'unica soluzione costante) le curve di livello $F(x, y) = (x^2 + y)e^y = k$, simmetriche rispetto all'asse y : tra esse, per $k = 0$ si nota la parabola $y = -x^2$. Poiché $x^2 = k e^{-y} - y$ il secondo membro deve essere ≥ 0 : confrontando tra loro i grafici di y e $k e^{-y}$ ciò mostra che queste curve sono non vuote se e solo se $k \geq -\frac{1}{e}$ (non a caso, il valore $-\frac{1}{e}$ è quello assunto nell'equilibrio), che per $-\frac{1}{e} \leq k < 0$ necessariamente y è limitata (dunque anche x , dando pertanto luogo a traiettorie limitate che saranno, per la "fuga dai compatti", definite per ogni $t \in \mathbb{R}$), e che per $k \geq 0$ la y sarà limitata solo superiormente e dunque la x sarà illimitata. Esempi di traiettorie sono visibili nella Figura 4. Il verso di percorrenza si può dedurre facilmente da $\dot{y} = -2x$: nel semipiano $x < 0$ (risp. $x > 0$) le traiettorie sono percorse nel verso delle y crescenti (risp. decrescenti).
- (b) La soluzione con $x(0) = y(0) = -1$ percorre la traiettoria con $k = 0$, ovvero la parabola $y = -x^2$: si ha perciò $\dot{x} = x^2 + y + 1 = 1$, da cui $x(t) = t + x(0) = t - 1$. Sostituendo in $\dot{y} = -2x$ si ottiene dunque $\dot{y} = -2(t - 1)$, da cui $y(t) = -t^2 + 2t + y(0) = -t^2 + 2t - 1 = -(t - 1)^2$. Ricapitolando, la soluzione del sistema con $x(0) = y(0) = -1$ è $(x(t), y(t)) = (t - 1, -(t - 1)^2)$. • Invece la soluzione con $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$, l'unico equilibrio del sistema, è la costante $(x(t), y(t)) \equiv (0, -1)$.
5. (a) L'equazione differenziale scalare $y''' - y'' + 2y = 4 - 5e^{-t}$ è lineare del terzo ordine: lo spazio delle sue soluzioni sarà il traslato di un sottospazio di dimensione 3 dello spazio vettoriale delle funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} di classe C^3 , con esistenza e unicità globale su tutto \mathbb{R} una volta fornito un dato di Cauchy $(y(t_0), y'(t_0), y''(t_0))$. Questo dice anche che due soluzioni diverse possono certamente avere grafici tangenti in un punto, perché ciò significa avere in comune solo i primi due dati $(y(t_0), y'(t_0))$, non necessariamente il terzo (la curvatura $y''(t_0)$). • L'equazione caratteristica $t^3 - t^2 + 2 = 0$ ha soluzioni $-1, 1 + i$ e $1 - i$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y(t) = a e^{-t} + (b \cos t + c \sin t) e^t$ al variare di $a, b, c \in \mathbb{C}$. Una soluzione particolare per il termine di non omogeneità 4 è ovviamente la costante $\tilde{y}_1(t) \equiv 2$; una per $-5e^{-t}$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(t) = k t e^{-t}$ per qualche $k \in \mathbb{R}$, e i conti danno $k = -1$; dunque tutte le soluzioni dell'equazione data sono $y(t) = (a - t) e^{-t} + (b \cos t + c \sin t) e^t + 2$ al variare di $a, b, c \in \mathbb{C}$. • Cerchiamo ora quali di queste soluzioni assumono un minimo locale per $t = 0$. Si ha $y'(t) = (t - a - 1) e^{-t} + e^t((b + c) \cos t + (c - b) \sin t) + 2$, dunque deve essere $y'(0) = -a - 1 + b + c = 0$, da cui $c = a - b + 1$. Si ha poi $y''(t) = (2 + a - t) e^{-t} + e^t(2c \cos t - 2b \sin t)$, dunque se $y''(0) = 2 + a + 2c = 3a - 2b + 4 > 0$ si ha certo un minimo locale stretto mentre se $y''(0) < 0$ no (in tal caso si avrà un massimo locale stretto); rimane l'incertezza nel caso $y''(0) = 0$, ovvero $b = \frac{3}{2}a + 2$ da cui $c = -\frac{1}{2}a - 1$. A tal proposito si calcola ancora $y'''(t) = (t - a - 3) e^{-t} + e^t((2c - 2b) \cos t + (-2b - 2c) \sin t)$, da cui $y'''(0) = -a - 3 + 2c - 2b = -5a - 9$: se $a \neq -\frac{9}{5}$ non si ha un estremo locale ma solo un flesso orizzontale, e resta l'ultima incertezza per $a = -\frac{9}{5}$, da cui $b = -\frac{7}{10}$ e $c = -\frac{1}{10}$, e un ulteriore calcolo mostra che in questo caso $y^{(4)}(0) = 5 > 0$, dunque si ha effettivamente un minimo locale. Ricapitolando, le soluzioni che per $t = 0$ assumono un minimo locale sono tutte e sole quelle tali che $c = a - b + 1$ e $3a - 2b + 4 > 0$, e anche quella con $(a, b, c) = (-\frac{9}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{1}{10})$.

(b) Posto $(y_1, y_2, y_3) = (y, y', y'')$, il sistema del primo ordine associato è $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -2y_1 + y_3 + 4 - 5e^{-t} \end{cases}$. La matrice dei coefficienti della parte omogenea del sistema è dunque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ora, sappiamo che una risolvete del sistema omogeneo è la matrice wronskiana $W(t)$ della base $\{e^{-t}, e^t \cos t, e^t \sin t\}$ trovata prima, perciò $e^{tA} = W(t)W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^{-t} & e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) \\ e^{-t} & -2e^t \sin t & 2e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Se interessa proprio la matrice esponenziale e^A , basta porre $t = 1$.



1. Ex. (1.b): soluzioni per $\alpha = -2$ in grigio; tra esse quelle per $\alpha = 1$ in giallo; tra esse quelle per $\alpha = 2$ in rosso. 2. Ex. 2 (il baricentro in evidenza).



3. Ex. 3 (la superficie curva S è resa trasparente per vedere dentro E). 4. Ex. 4 (in evidenza la traiettoria parabolica della soluzione non costante di (4.c)).