Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (25/01/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia Γ l'insieme di livello di $g(x,y,z) = (xz^2 - y,\, 2z - \log(y-x))$ che contiene il punto $A(1,2,0)$.

(a) Mostrare che Γ è una varietà regolare all'intorno di A (di che dimensione?), e determinarne una parametrizzazione locale e lo spazio tangente affine in A.

(b) Dire rispetto a quale coordinata il punto A è stazionario in Γ, determinandone la natura.

(c) Quali insiemi di livello di g sono varietà regolari? Di che dimensione? E quelli di g_1? E di g_2?

2. (a) Dire se $f(x,y) = \frac{x}{x-y}$ è integrabile sugli insiemi $A = \{(x,y) : 0 < 2y < x \leq 1\}$, $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2,\, x > 0,\, y > 0\}$ o $C = \{x \geq 1,\, -\frac{1}{x^2} < y \leq 0\}$, se sì calcolando l'integrale.

(b) La *cicloide* è la curva piana disegnata da una matita fissata sul bordo di un disco che, partendo con la matita in $(0,0)$, rotola senza strisciare per un giro sull'asse x. Descriverla parametricamente (il raggio del disco sia R), e calcolare area e baricentro della zona tra essa e l'asse x.

3. Si consideri il cono avente vertice a quota $2h$ sull'asse z e base il quarto di ellisse nel primo quadrante del piano (x,y) di semiassi a e b, e sia D il solido ottenuto troncando il cono a quota h. Siano poi L la porzione di superficie esterna di D non piana, e B quella sul piano (y,z).

(a) Calcolare il volume di D.

(b) Verificare la formula di Stokes per B e per il campo $F = (z - x, y, 0)$.

(c) Calcolare il flusso di F uscente da L col teorema di Gauss; e, se possibile, anche direttamente.

(d) Impostare il calcolo dell'area di L, e terminarlo nel caso in cui $a = b$.

4. Si abbia l'equazione differenziale $y'' = (y')^2 - 2y$ nella funzione incognita scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo, lo sono anche $\varphi(-t)$ (oppure $-\varphi(-t)$) sull'intervallo opposto? Se ciò fosse vero, le soluzioni definite in $t = 0$ sarebbero necessariamente (dis)pari?

(b) Determinare la soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$.

5. (a) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ tutte le funzioni $(x(t), y(t))$ a valori complessi tali che $(\dot{x}, \dot{y}) = (ix + \alpha - y,\, x - (2-i)y)$, specificando quali di esse tendono a $(0,0)$ per $t \to +\infty$.

(b) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & -(2-i) & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ calcolare tutte le soluzioni del sistema $\dot{X} = AX$ e la matrice esponenziale e^A (converrà usare quanto ottenuto in (a)).

Analisi Matematica III – Esame Scritto (25/01/2016) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y,z) = (xz^2 - y,\ 2z - \log(y-x))$ è definita nell'insieme $\{(x,y,z) : y > x\}$, con matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 & -1 & 2xz \\ \frac{1}{y-x} & -\frac{1}{y-x} & 2 \end{pmatrix}$ Nel punto $A(1,2,0)$ vale $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ che ha rango massimo 2, in altre parole g è sommersiva in A: ne segue che l'insieme di livello Γ, descritto dal sistema $\begin{cases} xz^2 - y = -2 \\ 2z - \log(y-x) = 0 \end{cases}$, è una curva regolare all'intorno di A (dimensione $3-2=1$), con retta tangente affine data da $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero dal sistema $\begin{cases} y = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$. Per la parametrizzazione locale, per il Dini all'intorno di A si può esplicitare $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \dot x(0) \\ \dot y(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si può anche derivare il sistema di Γ rispetto a z, ottenendo $\begin{cases} \dot x z^2 + 2xz - \dot y = 0 \\ 2 - \frac{\dot y - \dot x}{y-x} = 0 \end{cases}$ che per $z=0$ dà $\begin{cases} 0 + 0 - \dot y(0) = 0 \\ 2 - \frac{\dot y(0) - \dot x(0)}{2-1} = 0 \end{cases}$ ovvero di nuovo $\begin{cases} \dot x(0) = -2 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases}$. Per uso futuro, derivando ancora si ha $\begin{cases} \ddot x z^2 + 4\dot x z + 2x - \ddot y = 0 \\ -\frac{(\ddot y - \ddot x)(y-x) - (\dot y - \dot x)^2}{(y-x)^2} = 0 \end{cases}$ che per $z=0$ dà $\begin{cases} \ddot x(0) = -2 \\ \ddot y(0) = 2 \end{cases}$.

(b) La condizione affiché il punto A sia stazionario in Γ rispetto a una certa coordinata si scrive, usando Lagrange, chiedendo che il minore di $\mathsf{J}_g(A)$ relativo alle altre due coordinate sia singolare, e nel nostro caso questo si verifica solo per la coordinata y; più semplicemente, basta usare la parametrizzazione di Γ vicino ad A rispetto a z e ricordare che $\dot y(0) = 0$. Essendo poi —come visto— $\ddot y(0) = 2 > 0$, il punto A è di minimo locale stretto per la coordinata y su Γ, come si può intuire dalla Figura 1. • Per inciso, in questo caso dal sistema di Γ si possono fare i conti ed esplicitare globalmente (x,y) rispetto a z ottenendo $(x(z), y(z)) = (\frac{e^{2z}-2}{z^2-1}, \frac{z^2 e^{2z}-2}{z^2-1})$: e lo studio di $y(z) = \frac{z^2 e^{2z}-2}{z^2-1}$ conferma quanto trovato.

(c) La matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 & -1 & 2xz \\ \frac{1}{y-x} & -\frac{1}{y-x} & 2 \end{pmatrix}$ ha rango < 2 se e solo se $z^2 = 1$ e $\frac{2xz}{y-x} = 2$, ovvero $z = \mp 1$ e $xz = y - x$: se $z = 1$ si ricava $x = y - x$ da cui $y = 2x$, mentre se $z = -1$ si ricava $-x = y - x$ da cui $y = 0$. I punti critici sono perciò quelli del tipo $(u, 2u, 1)$ con $u > 0$ (nei quali g vale $(-u, 2 - \log u)$) e quelli del tipo $(v, 0, -1)$ con $v < 0$ (nei quali g vale $(v, -2 - \log|v|)$): pertanto tutte le curve di livello di g sono regolari tranne eventualmente quelle del tipo $g(x,y,z) = (\alpha, 2 - \log|\alpha|)$ con $\alpha < 0$ nel punto $(-\alpha, -2\alpha, 1)$, e quelle del tipo $g(x,y,z) = (\alpha, -2 - \log|\alpha|)$ con $\alpha < 0$ nel punto $(\alpha, 0, -1)$. • Invece le superfici di livello di $g_1 = xz^2 - y$ e di $g_2 = 2z - \log(y-x)$ sono tutte regolari, perché sono dei grafici (rispettivamente $g_1(x,y,z) = c$ corrisponde a $y = xz^2 - c$, e $g_2(x,y,z) = d$ a $z = \frac{1}{2}(\log(y-x) + d)$).

2. (a) (Figura 2.a) La funzione $f(x,y) = \frac{x}{x-y}$ è definita al di fuori della bisettrice $x = y$, si annulla sull'asse y e ha segno descritto nella figura (positivo in giallo, negativo in grigio); quando (x,y) tende a un punto della bisettrice diverso da $(0,0)$ la funzione tende a ∞, mentre in $(0,0)$ e in ∞_2 non ha limite (sull'asse y è nulla, e vicino alla bisettrice diverge). • Il triangolo $A = \{(x,y) : 0 < 2y < x \le 1\}$, di estremi $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1, \frac{1}{2})$, è contenuto in una zona in cui $f > 0$, dunque per Tonelli e Fubini basta provare a calcolare un integrale iterato: per x-fili si ha $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{x}{x-y}\, dy = \int_0^1 x(-\log(x-y)]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}}\, dx = \int_0^1 x(-\log(\frac{1}{2}x) + \log x)\, dx = \int_0^1 x(-\log\frac{1}{2} - \log x + \log x)\, dx = \log 2 \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\log 2$, dunque f è integrabile su A con $\int_A \frac{x}{x-y}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\log 2$. • Il semidisco $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ giace in zona in cui f non è di segno costante: esaminiamo allora gli integrali di f sulle zone di B su cui $f > 0$ o $f < 0$, e vediamo cosa essi danno. Iniziamo ad esempio da $B_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2,\ 0 < y < x\}$, su cui $f > 0$: passando in coordinate polari e calcolando un integrale iterato si ha $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^R \frac{r\cos\theta}{r(\cos\theta - \sin\theta)} r\, dr = \frac{1}{2}R^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R \frac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\, d\theta$ che però diverge a $+\infty$ (notiamo che $\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})} \sim^* \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$). In modo analogo si nota che su $B_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2,\ y > x > 0\}$, su cui $f < 0$, un integrale iterato diverge a $-\infty$. Pertanto f non è integrabile su B. • La zona illimitata $C = \{x \ge 1,\ -\frac{1}{x^2} < y \le 0\}$ è anch'essa contenuta in una zona in cui $f > 0$, dunque anche in questo caso proviamo a calcolare un integrale iterato: per x-fili si ha $\int_1^{+\infty} dx \int_{-\frac{1}{x^2}}^0 \frac{x}{x-y}\, dy = \int_1^{+\infty} x(-\log(x-y)]_{y=-\frac{1}{x^2}}^{y=0}\, dx = \int_1^{+\infty} x(-\log x + \log(x + \frac{1}{x^2}))\, dx = \int_1^{+\infty} x\log(1 + \frac{1}{x^3})\, dx$, che senz'altro converge (notiamo che $x\log(1 + \frac{1}{x^3}) \sim_{+\infty} x\frac{1}{x^3} = x^{-2}$, che è integrabile a $+\infty$). Procedendo col calcolo, integrando per parti si ha $\int x\log(1 + \frac{1}{x^3})\, dx = \frac{1}{2}x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{-\frac{3}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^3}}\, dx = \frac{1}{2}x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) + \frac{3}{2}\int \frac{x}{x^3+1}\, dx = \frac{1}{2}x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) + \frac{1}{2}\int(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1})\, dx = \frac{1}{2}\big(x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) + \int(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))^2 + 1)} - \frac{1}{x+1})\, dx\big) = \frac{1}{2}\big(x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) + \int(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \sqrt{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))^2 + 1} - \frac{1}{x+1})\, dx\big) = \frac{1}{2}\big(x^2\log(1 + \frac{1}{x^3}) + \log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))\big)$, dunque il nostro integrale (generalizzato) vale $\frac{1}{2}(0 + 0 + \frac{\pi}{2}\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(\log 2 + \log\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$.

(b) (Figura 2.b) Se t descrive l'angolo di rotazione del disco che rotola senza strisciare, formato dal raggio centro-matita rispetto alla direzione verticale, dopo una rotazione di angolo t l'ascissa del centro del disco ha ascissa Rt e la matita (ovvero il punto della cicloide) ha coordinate $(x(t), y(t)) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t)) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$. Usando allora la formula di Green, l'area della zona C delimitata da cicloide e asse x sarà $\int_C dx\, dy = -\oint_{\partial C} y\, dx = +\int_0^{2\pi} R(1 - \cos t)\, R(1 - \cos t)\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = R^2(t - 2\sin t + \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t)]_0^{2\pi} = 3\pi R^2$. Per simmetria si avrà poi $x_G = \pi$, mentre, sempre usando la formula di Green, si avrà $y_G = \frac{1}{3\pi R^2}\int_C y\, dx\, dy = -\frac{1}{3\pi R^2}\oint_{\partial C} \frac{1}{2}y^2\, dx = +\frac{1}{6\pi R^2}\int_0^{2\pi} R^2(1 - \cos t)^2\, R(1 - \cos t)\, dt = \frac{1}{6\pi}R\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3\, dt = \frac{1}{6\pi}R\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t -$

$\cos^3 t)\,dt = (\frac{1}{6\pi}R(t - 3\sin t + \frac{3}{2}(t + \sin t\cos t) - \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t]_0^{2\pi} = \frac{5}{6}R$.

3. (a) (Figura 4) Per $0 \leq z \leq h$ la z-fetta di D è il quarto di ellisse di semiassi $(1 - \frac{z}{2h})a$ e $(1 - \frac{z}{2h})b$, che ha area $\frac{1}{4}\,\pi(1 - \frac{z}{2h})^2 ab$: ne segue che il volume di D è $\int_0^h \frac{1}{4}\pi(1 - \frac{z}{2h})^2 ab\,dz = -\frac{1}{6}\pi abh((1 - \frac{z}{2h})^3]_0^h = -\frac{1}{6}\pi abh(\frac{1}{8} - 1) = \frac{7\pi}{48}abh$. • Alternativamente, ricordando che la base si può parametrizzare come $(sa\cos\psi,\ sb\sin\psi)$ con $0 \leq s \leq 1$ e $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, una parametrizzazione di D è data da $\gamma(s, \psi, z) = (x, y, z) = (s(1 - \frac{z}{2h})a\cos\psi,\ s(1 - \frac{z}{2h})b\sin\psi,\ z)$ con $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq h$. La matrice jacobiana $\begin{pmatrix} a(1 - \frac{z}{2h})\cos\psi & -sa(1 - \frac{z}{2h})\sin\psi & -s\frac{a}{h}\cos\psi \\ b(1 - \frac{z}{2h})\sin\psi & sb(1 - \frac{z}{2h})\cos\psi & -s\frac{b}{h}\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $s(1 - \frac{z}{2h})^2 ab$, dunque il volume si ritrova come $\int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 s(1 - \frac{z}{2h})^2 ab\,ds = \frac{\pi}{2}ab\,(\frac{1}{2}s^2]_0^1\,(-\frac{2}{3}h(1 - \frac{z}{2h})^3]_0^h = \frac{7\pi}{48}abh$.

(b) La porzione B di superficie esterna di D sul piano (y, z) è il trapezio rettangolo di estremi $(0, 0, 0)$, $(0, 0, h)$, $(0, \frac{1}{2}b, h)$ e $(0, b, 0)$. Il rotore di $F = (z - x, y, 0)$ è $\nabla \times F = (0, 1, 0)$, parallelo a B: dunque il flusso $\Phi_B(\nabla \times F)$ è nullo. D'altra parte il campo F sul piano (y, z) diventa $(z, y, 0)$, e integrandolo lungo i quattro lati del trapezio B (in senso antiorario rispetto alla normale uscente da D partendo dall'origine; notare che il lato obliquo è parametrizzato da $(0, y, 2h(1 - \frac{y}{b}))$ con $\frac{1}{2}b \leq y \leq b$) si ottiene $\oint_{\partial B} F \cdot dx = \int_0^h (z, 0, 0) \cdot (0, 0, 1)\,dz + \int_0^{\frac{1}{2}b}(h, y, 0) \cdot (0, 1, 0)\,dy + \int_{\frac{1}{2}b}^b (2h(1 - \frac{y}{b}), y, 0) \cdot (0, 1, -2)\,dy - \int_0^b (0, y, 0) \cdot (0, 1, 0)\,dy = 0 + \int_0^{\frac{1}{2}b} y\,dy + \int_{\frac{1}{2}b}^b y\,dy - \int_0^b y\,dy = 0$. Questo prova la formula di Stokes per F e B.

(c) Poiché il campo F ha divergenza nulla, il teorema di Gauss dice che il flusso totale di F uscente dalla superficie esterna ∂D è nullo. D'altra parte, F è un campo orizzontale (l'ultima componente è nulla) e dunque i suoi flussi attraverso le porzioni orizzontali (basi sopra e sotto) di ∂D sono nulli; e sul piano (x, z) esso è parallelo all'asse x (le ultime due componenti sono nulle) e dunque è nullo anche il suo flusso attraverso la porzione di ∂D su tale piano. In sostanza, Gauss dice che il flusso di F uscente da L è l'opposto del flusso di F uscente da B, che è di facile calcolo: $\int_B (z, y, 0) \cdot (-1, 0, 0)\,dy\,dz = -\int_B z\,dy\,dz = -\int_0^h dz \int_0^{b(1 - \frac{z}{2h})} z\,dy = -b\int_0^h z(1 - \frac{z}{2h})\,dz = -b(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h}]_0^h = -\frac{1}{3}bh^2$. Pertanto il flusso di F uscente da L vale $\frac{1}{3}bh^2$. • Col conto diretto, L si può parametrizzare usando la parametrizzazione γ di D bloccata su $s = 1$, ovvero $((1 - \frac{z}{2h})a\cos\psi,\ (1 - \frac{z}{2h})b\sin\psi,\ z)$ con $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq h$, e il flusso di F uscente da L viene $+\int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} z - (1 - \frac{z}{2h})a\cos\psi & -(1 - \frac{z}{2h})a\sin\psi & -\frac{1}{2h}a\cos\psi \\ (1 - \frac{z}{2h})b\sin\psi & (1 - \frac{z}{2h})b\cos\psi & -\frac{1}{2h}b\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\psi = b\int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z(1 - \frac{z}{2h})\cos\psi - (1 - \frac{z}{2h})^2 a\cos 2\psi)\,dz = b\int_0^h (1 - \frac{z}{2h})(z\sin\psi - \frac{1}{2}a(1 - \frac{z}{2h})\sin 2\psi]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}}\,dz = b\int_0^h z(1 - \frac{z}{2h})\,dz$, che come prima dà $\frac{1}{3}bh^2$.

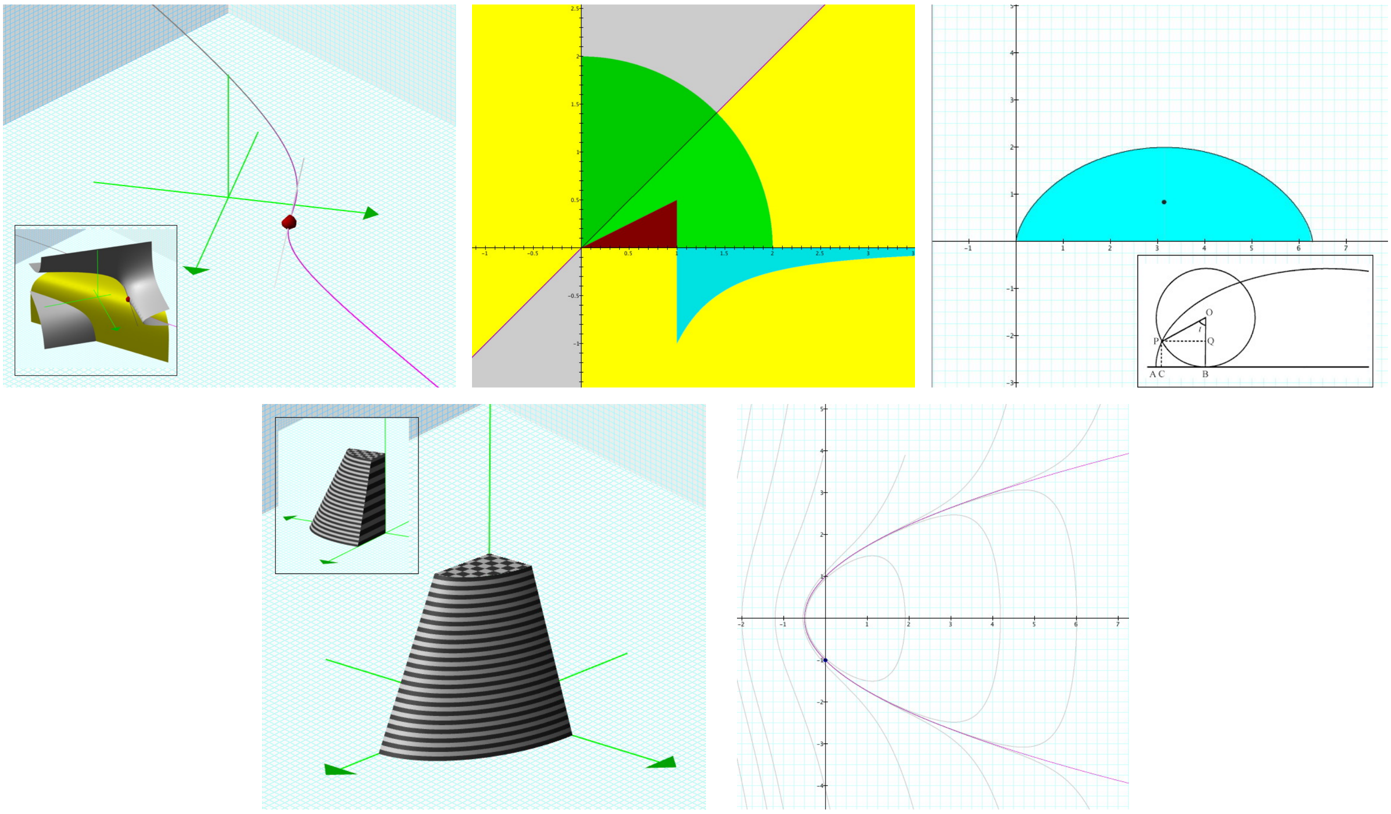
(d) La parametrizzazione di L dà a conti fatti un elemento d'area $d\sigma = (1 - \frac{z}{2h})\sqrt{\frac{a^2b^2}{4h^2} + a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}\ d\psi\,dz$, e l'area di L ne risulta $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, h]} d\sigma$. • Nel caso $a = b$ l'integrale diventa $\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, h]} (1 - \frac{z}{2h})\sqrt{\frac{a^4}{4h^2} + a^2}\ d\psi\,dz$, e il suo calcolo dà $a\sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}} \int_0^h dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{z}{2h})\,d\psi = \frac{\pi}{2}a\sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}} \int_0^h (1 - \frac{z}{2h})\,dz = \frac{\pi}{2}a\sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}(z - \frac{z^2}{4h}]_0^h = \frac{3\pi}{8}ah\sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ (risultato che — lo si verifichi — coincide con quello che otterremmo con la geometria elementare del cono circolare).

4. (a) Come sappiamo, l'equazione scalare del secondo ordine $y'' = (y')^2 - 2y$ è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano $(y, p) = (y, y')$ (il piano delle fasi) dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = p^2 - 2y \end{cases}$. La funzione $f(y, p) = (p, p^2 - 2y)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (e con esse anche l'unicità globale), mentre essendoci crescita quadratica (non sublineare) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante $y \equiv \alpha$ deve soddisfare $0 = 0 - 2\alpha$, dunque l'unica soluzione costante è $y \equiv 0$. Se poi $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I, posto $\psi(t) := \varphi(-t)$ per $t \in -I$ si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$, perciò $\psi''(t) = \varphi''(-t) = (-\varphi'(-t))^2 - 2\varphi(-t) = (\psi'(-t))^2 - 2\psi(-t)$, dunque anche $\varphi(-t)$ è soluzione su $-I$; un'analoga verifica per $\chi(t) = -\varphi(-t)$ invece non funziona. Ciò implica che le soluzioni definite in $t = 0$ sono pari? No, perché se $\varphi(t)$ è una tale soluzione, posto $\psi(t) = \varphi(-t)$ abbiamo che $\varphi(0) = \psi(0)$ ma ciò non implica che sia $\varphi = \psi$ (ovvero che φ sia pari) perché siamo in un caso del secondo ordine, e per fornire un dato iniziale in $t = 0$ non basta fornire il solo valore della funzione ma serve anche quello della sua derivata. Ad esempio la soluzione del punto (b) è definita all'intorno di $t = 0$ (in realtà il suo dominio sarà su tutto $\mathbb{R}$) ma, come vedremo tra poco, non è affatto pari.

(b) (Figura 5) L'equazione totale associata al sistema del primo ordine è $\omega = (p^2 - 2y)\,dy - p\,dp = 0$. La forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial(p^2-2y)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y} = 2p \neq 0$), ma poiché $\frac{1}{-p}(\frac{\partial(p^2-2y)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}) = -2$ non dipende da p si ha che e^{-2y} è un fattore integrante per ω. In effetti, se $F(y, p)$ deve soddisfare $\frac{\partial F}{\partial y} = (p^2 - 2y)e^{-2y}$ e $\frac{\partial F}{\partial p} = -pe^{-2y}$, dalla seconda abbiamo che $F = -\frac{1}{2}p^2e^{-2y} + \phi(y)$ per una certa funzione ϕ, così dalla prima si ricava $\frac{\partial F}{\partial y} = pe^{-2y} + \phi'(y) = (p^2 - 2y)e^{-2y}$, ovvero $\phi'(y) = -2ye^{-2y}$, da cui integrando si trova $\phi(y) = (y + \frac{1}{2})e^{-2y}$. Le curve integrali nel piano delle fasi (mostrate in Figura 5) sono date perciò da $F(x, y) = (-\frac{1}{2}p^2 + y + \frac{1}{2})e^{-2y} = k$ con $k \in \mathbb{R}$, ovvero $p^2 = 2y + 1 + k\,e^{2y}$ con $k \in \mathbb{R}$. • Imponendo la condizione iniziale $(y(0), p(0)) = (0, -1)$ si ottiene $k = 0$, ovvero l'equazione del primo ordine $(y')^2 = 2y + 1$, che ricordando che $y'(0) = -1 < 0$ dà $y' = -\sqrt{2y + 1}$. Separando le variabili si ricava $\frac{1}{\sqrt{2y+1}}\,dy = -dt$, che integrando porge $\sqrt{2y + 1} = h - t$, e ricordando anche che $y(0) = 0$ ciò dà $h = 1$. Si ha perciò $\sqrt{2y + 1} = 1 - t$ (definita per $t < 1$, intorno di $t = 0$), da cui $y(t) = \frac{1}{2}((1 - t)^2 - 1) = \frac{1}{2}t^2 - t$, soluzione che ha senso su tutto $\mathbb{R}$.

5. (a) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ tutte le funzioni $(x(t), y(t))$ a valori complessi tali che $(\dot{x}, \dot{y}) = (ix + \alpha - y,\, x - (2-i)y)$ significa risolvere il sistema differenziale lineare $\dot{Y} = MY + b$ ove $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -(2-i) \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha $\det(\lambda \mathbf{1} - M) = \begin{vmatrix} \lambda - i & 1 \\ -1 & \lambda + (2-i) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2(1-i)\lambda - 2i = (\lambda + (1-i))^2$, dunque M ha $-1+i$ come autovalore doppio. Dalla teoria sappiamo allora che $N = M - (-1+i)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $N^2 = \mathbf{0}$) e che $e^{tM} = e^{(-1+i)t}(1 + tN) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{(-1+i)t} & -t\,e^{(-1+i)t} \\ t\,e^{(-1+i)t} & (1-t)e^{(-1+i)t} \end{pmatrix}$: le soluzioni del caso omogeneo ($\alpha = 0$) sono allora $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{(-1+i)t} & -t\,e^{(-1+i)t} \\ t\,e^{(-1+i)t} & (1-t)e^{(-1+i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ al variare di $u, v \in \mathbb{C}$. Una soluzione particolare per il caso non omogeneo ($\alpha \neq 0$) sarà una costante $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ da determinare imponendo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -M^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2i \\ i \end{pmatrix} \alpha$. Pertanto le soluzioni cercate sono $\begin{cases} x = (u + (u-v)t)e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2}(1+2i)\alpha \\ y = (v + (u-v)t)e^{(-1+i)t} + \frac{1}{2} i\alpha \end{cases}$ al variare di $u, v \in \mathbb{C}$: e, poiché $\lim_{t \to +\infty} e^{(-1+i)t} = 0$ (ricordare che $e^{(-1+i)t} = e^{-t}(\cos t + i \sin t)$), le soluzioni che per $t \to +\infty$ tendono a 0 sono tutte e sole quelle del caso omogeneo, in cui $\alpha = 0$.

(b) Le prime due equazioni del sistema omogeneo $\dot{X} = AX$ sono esattamente quelle del punto (a) nel caso omogeneo $\alpha = 0$, e come visto questo dà $\begin{cases} x = (u + (u-v)t)e^{(-1+i)t} \\ y = (v + (u-v)t)e^{(-1+i)t} \end{cases}$ al variare di $u, v \in \mathbb{C}$. La terza equazione è invece $\dot{z} = x - y - z$, che inserendo quanto appena detto su x e y dà $\dot{z} + z = (u-v)e^{(-1+i)t}$, lineare del primo ordine, che si integra facilmente dando $z = e^{-t}(w + \int e^t (u-v) e^{(-1+i)t}\, dt) = e^{-t}(w + (u-v)\int e^{it}\, dt) = e^{-t}(w - i(u-v)e^{it}) = w\, e^{-t} - i(u-v)e^{(-1+i)t}$ anche al variare di un ulteriore $w \in \mathbb{C}$. Dunque le soluzioni del sistema $\dot{X} = AX$ sono $\begin{cases} x = (u + (u-v)t)e^{(-1+i)t} \\ y = (v + (u-v)t)e^{(-1+i)t} \\ z = w\, e^{-t} - i(u-v)e^{(-1+i)t} \end{cases}$ al variare di $u, v \in \mathbb{C}$. A questo punto, per scrivere la matrice esponenziale e^{tA} basta che scriviamo in ciascuna delle tre colonne la soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che per $t = 0$ diventa la corrispondente colonna della matrice identica: nella prima colonna ciò fa scegliere $u = 1$, $v = 0$ e $w = i$, nella seconda $u = 0$, $v = 1$ e $w = -i$, e nella terza $u = v = 0$ e $w = 1$, ottenendo così $e^{tA} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{(-1+i)t} & -t\,e^{(-1+i)t} & 0 \\ t\,e^{(-1+i)t} & (1-t)e^{(-1+i)t} & 0 \\ i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) & -i(e^{-t} - e^{(-1+i)t}) & e^{-t} \end{pmatrix}$. Infine, per avere e^A basta porre $t = 1$.



1. Ex. 1. **2.** Ex. 2.a. **3** Ex. 2.b. **4.** Ex. 3. **5.** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (15/02/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome ____ Matr. ___________ - _____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia M l'insieme di livello di $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + e^{x-y+2z}$ contenente il punto $A(1,-1,-1)$.

(a) Mostrare che M è una varietà regolare all'intorno di A (di che dimensione?), e che è compatta. Determinarne una parametrizzazione locale e lo spazio tangente affine in A.

(b) Dire per quali α, β il punto A è stazionario per $f(x,y,z) = x + \alpha y + \beta z$ in M, determinandone la natura (estremante locale o sella). Se si tratta di un estremante locale, è anche assoluto?

(c) Quali insiemi di livello di g sono varietà regolari? Di che dimensione? Sono varietà compatte?

2. Sia C la zona del primo quadrante del piano compresa tra gli assi e la curva polare $\rho = 2 + \cos 2\theta$.

(a) Disegnare C, calcolarne l'area e il volume del solido ottenuto ruotando C attorno all'asse x.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{x}{x^2+y^2}$ è integrabile su C, se sì calcolando l'integrale.

3. Si consideri l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,;\, x,y,z \geq 0\,;\, x+z \leq R\}$, ove $R > 0$.

(a) Dato $0 \leq \alpha \leq R$ calcolare volume e area esterna della "fetta di sfera" $D_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq \alpha\}$, e usare i risultati per calcolare il volume di E e l'area della porzione sferica T della superficie esterna ∂E.

(b) Determinare il baricentro della porzione U di ∂E sul piano $x = 0$, direttamente e con Green.

(c) Parametrizzare e calcolare l'area della porzione piana e obliqua S di ∂E, e verificare la formula di Stokes per essa e il campo $F = (z, 0, -x)$.

(d) Esprimere una parametrizzazione di T, e usarla per ricalcolarne l'area.

4. Si abbia l'equazione differenziale $y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$ nella funzione incognita scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Soluzioni che si annullano? Simmetrie, invarianze temporali nell'integrale generale?

(b) Determinare un integrale primo per l'equazione, e la soluzione tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$.

5. Determinare le curve differenziabili $(x(t),\, y(t),\, z(t))$ in $\mathbb{R}^3$ tali che per ogni t valga $(\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}) = (2e^t + z - y,\, x + y - z,\, x + y + 1)$, in particolare quella che all'istante iniziale passa per l'origine.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (15/02/2016) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + e^{x-y+2z}$ è definita ovunque, con gradiente (posto $u = e^{x-y+2z}$ per comodità) $\nabla g(x,y,z) = (2x+u,\, 4y-u,\, 2z+2u)$. Nel punto $A(1,-1,-1)$ vale $\nabla g(A) = (3,-5,0)$, il che mostra che g è sommersiva in A: ne segue che l'insieme di livello M, descritto dall'equazione cartesiana $g(x,y,z) = g(A)$ ovvero $x^2 + 2y^2 + z^2 + e^{x-y+2z} = 5$, è una superficie regolare all'intorno di A (dimensione $3-1=2$), che è anche compatta: per mostrarlo basta notare che, oltre che chiusa (insieme di livello di funzione continua), è anche limitata perché se $(x,y,z) \in M$ allora $x^2+y^2+z^2 \le x^2+2y^2+z^2+e^{x-y+2z} = 5$, ovvero M è contenuta nella palla centrata nell'origine di raggio $\sqrt{5}$. Per la parametrizzazione locale, per il Dini all'intorno di A si può esplicitare ad esempio $x(y,z)$ con $x(-1,-1) = 1$ e $(\dot{x}_y(-1,-1), \dot{x}_z(-1,-1)) = (\frac{5}{3}, 0)$. Per uso futuro ricaviamo anche le derivate seconde: derivando rispetto a y e z i due membri dell'identità $g(x(y,z),y,z) \equiv 5$ otteniamo $2x\dot{x}_y + 4y + (\dot{x}_y - 1)u = 0$ e $2x\dot{x}_z + 2z + (\dot{x}_z + 2)u = 0$ (da cui, calcolando in $(-1,-1)$, si ha $2\dot{x}_y(-1,-1) - 4 + \dot{x}_y(-1,-1) - 1 = 0$ e $2\dot{x}_z(-1,-1) - 2 + \dot{x}_z(-1,-1) + 2 = 0$ che danno ancora $(\dot{x}_y(-1,-1), \dot{x}_z(-1,-1)) = (\frac{5}{3}, 0)$), e derivando ancora rispetto a y e z si ottiene $2(\dot{x}_y)^2 + 2x\ddot{x}_{yy} + 4 + (\ddot{x}_{yy} + (\dot{x}_y - 1)^2)u = 0$, $2\dot{x}_y\dot{x}_z + 2x\ddot{x}_{yz} + (\ddot{x}_{yz} + (\dot{x}_y - 1)(\dot{x}_z + 2))u = 0$ e $2(\dot{x}_z)^2 + 2x\ddot{x}_{zz} + 2 + (\ddot{x}_{zz} + (\dot{x}_z + 2)^2)u = 0$ da cui, calcolando in $(-1,-1)$, si ha $\ddot{x}_{yy}(-1,-1) = -10$, $\dot{x}_{yz}(-1,-1) = -\frac{4}{9}$ e $\ddot{x}_{zz}(-1,-1) = -2$, ovvero $\mathsf{H}_x(A) = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -2 \end{pmatrix}$. Infine, lo spazio tangente affine in A è dato da $\nabla g(A) \cdot (x-1, y-(-1), z-(-1)) = 0$, cioè $3x - 5y = 8$; ciò si desume anche dalla parametrizzazione $x(y,z) = x(-1,-1) + \nabla x(-1,-1) \cdot (y-(-1), z-(-1))$, cioè $x = 1 + (\frac{5}{3}, 0) \cdot (y+1, z+1)$ che ridà $3x - 5y = 8$.

(b) La condizione che il punto A sia stazionario per $f(x,y,z) = x + \alpha y + \beta z$ in M si scrive, usando Lagrange, chiedendo che $\nabla g(A) = (3,-5,0)$ sia proporzionale a $\nabla f(A) = (1,\alpha,\beta)$: ciò dà $\alpha = -\frac{5}{3}$ e $\beta = 0$. Consideriamo poi la funzione composta $F(y,z) := f(x(y,z),y,z) = x(y,z) - \frac{5}{3}y$: si ha $\nabla F(y,z) = (\dot{x}_y - \frac{5}{3}, \dot{x}_z)$ (da cui $\nabla F(-1,-1) = (0,0)$, come atteso) e $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z)$, da cui $\mathsf{H}_F(-1,-1) = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -2 \end{pmatrix}$, una matrice definita negativa (infatti $-10 < 0$ e $\det = 20 - \frac{16}{81} > 0$): questo mostra che A è un punto di massimo locale stretto per f in M, come si può intuire dalla Figura 1. • Per dire se A sia un estremante (per quanto visto, punto di massimo) assoluto per f su M, bisognerebbe cercare tutti i punti stazionari di f su M (tra i quali già sappiamo c'è A): se questi punti, che devono essere almeno due (infatti f non è costante su M compatta, dunque ci devono essere almeno due estremanti assoluti) fossero esattamente due, dunque A e un altro, potremmo concludere che questi due punti sarebbero quelli di massimo e minimo assoluto. Tuttavia in questo caso la ricerca di tali punti non è purtroppo agevole: il sistema è $\begin{cases} \text{rango}\begin{pmatrix} 2x+u & 4y-u & 2z+2u \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ x^2+2y^2+z^2+u = 5 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} u = -z \\ z = 5x + 6y \\ x^2 + 2y^2 + z^2 - z = 5 \end{cases}$, di non elementare soluzione. (Tra parentesi: l'elaboratore grafico, visibile in Figura 1, fa capire con chiarezza che in effetti A è il punto di massimo assoluto di f su M, e che vi sono esattamente due punti stazionari.)

(c) Imponendo che $\nabla g(x,y,z)$ si annulli si ottiene $u = -2x = 4y = -z$, dunque le soluzioni sono i punti del tipo $(-2\alpha, \alpha, -4\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $4\alpha = e^{-11\alpha}$: da un semplice confronto grafico si vede che, in realtà, di tali α ne esiste uno solo $\alpha_0 \sim 0{,}09$, che dà luogo all'unico punto di minimo assoluto della funzione (il valore è $g(-2\alpha_0, \alpha_0, -4\alpha_0) = 22\alpha_0^2 + e^{-11\alpha_0} = 22\alpha_0^2 - 4\alpha_0 \sim 0,54$.). Ne segue che tutti gli insiemi di livello $g(x,y,z) = k$ (con $k > 22\alpha_0^2 - 4\alpha_0$) sono superfici regolari e compatte (per lo stesso argomento visto prima per M); mentre quello con $k = 22\alpha_0^2 - 4\alpha_0$ si riduce al solo punto di minimo assoluto.

2. (a) (Figura 2) L'area di C, zona del primo quadrante del piano compresa tra gli assi e la curva polare $\rho = 2 + \cos 2\theta$, posto $\eta = 2\theta$ è data da $\int_C dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2+\cos 2\theta} \rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos 2\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (2+\cos\eta)^2\,d\eta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (4 + 4\cos\eta + \cos^2\eta)\,d\eta = (\eta + \sin\eta + \frac{1}{8}(\eta + \sin\eta\cos\eta)]_0^{\pi} = \frac{9}{8}\pi$. • Per Guldino, il volume del solido ottenuto ruotando C attorno all'asse x è dato da $2\pi\int_C y\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2+\cos 2\theta} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos 2\theta)^3 \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta + 1)^3 \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi\int_0^1 (2t^2+1)^3\,dt = \frac{2}{3}\pi\int_0^1 (8t^6 + 12t^4 + 6t^2 + 1)\,dt = \frac{2}{3}\pi(\frac{8}{7}t^7 + \frac{12}{5}t^5 + 2t^3 + t]_0^1 = \frac{458}{105}\pi \sim 13{,}7$.

(b) La zona C è compatta, ma le due funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{x}{x^2+y^2}$ non sono limitate su essa; tuttavia, essendo positive su C, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. • L'integrale $\int_C \frac{1}{x}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è, passando in coordinate polari $(x,y) = \phi(\rho,\theta)$, l'integrale $\int_{\phi^{-1}(C)} \frac{1}{\rho\cos\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\phi^{-1}(C)} \frac{1}{\cos\theta}\,d\rho\,d\theta$; l'integrale iterato diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2+\cos 2\theta} \frac{1}{\cos\theta}\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+\cos 2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$, che però diverge in $\frac{\pi}{2}$ (la funzione integranda è $\sim^*_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}$). • Procediamo analogamente per $\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$: si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2+\cos 2\theta} \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos 2\theta)\cos\theta\,d\theta$, stavolta evidentemente convergente, che vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_0^1 (3 - 2\tau^2)\,d\tau = (3\tau - \frac{2}{3}\tau^3]_0^1 = \frac{7}{3}$.

3. (a) (Figura 3) Iniziamo con la fetta di sfera $D_\alpha = \{(x,y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge \alpha\}$. Per $0 \le z \le \alpha$ la z-fetta è il disco di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$, dunque il volume di D_α è $\int_\alpha^R (R^2 - z^2)\pi\,dz = \pi(R^2 z - \frac{1}{3}z^3]_\alpha^R = \frac{1}{3}\pi(R-\alpha)(2R^2 - \alpha R - \alpha^2)$; quanto all'area, la superficie esterna sferica di D_α si può parametrizzare tramite $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \varphi \le \arccos\frac{\alpha}{R}$, dunque l'area risulta $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{\alpha}{R}} R^2\sin\varphi\,d\varphi = 2\pi R^2(-\cos\varphi]_0^{\arccos\frac{\alpha}{R}} = 2\pi R^2(1 - \frac{\alpha}{R})$. • L'insieme $E = \{(x,y.z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x,y,z \ge 0,\ x+z \le R\}$ può essere visto come un ottavo di sfera cui è stata asportata la metà di una fetta D_α con $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ (l'angolo di semiapertura è $\arccos\frac{\alpha}{R} = \frac{\pi}{4}$, da cui $\frac{\alpha}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Pertanto, ricordando che volume e area esterna della sfera intera sono $\frac{4}{3}\pi R^3$ e $4\pi R^2$, il volume di E e l'area della porzione sferica T della superficie esterna ∂E si calcolano rispettivamente dalle differenze $\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\pi(R-\frac{\sqrt{2}}{2}R)(2R^2-\frac{\sqrt{2}}{2}R^2-\frac{1}{2}R^2) = \frac{1}{6}\pi R^3(1-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{5\sqrt{2}-4}{24}\pi R^3$ e $\frac{1}{8}4\pi R^2 - \frac{1}{2}2\pi R^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi R^2$.

(b) La porzione U di ∂E sul piano $x=0$ è un quarto di disco, di area $\frac{1}{4}\pi R^2$. Per il baricentro G di U, che per ragioni di simmetria avrà $x_G = 0$ e $y_G = z_G$, va calcolato l'integrale $\int_U y\,dy\,dz$: il calcolo diretto, con le coordinate polari $(y,z) = (\rho\cos\eta, \rho\sin\eta)$, dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\eta \int_0^R \rho\cos\eta\,\rho\,d\rho = (\sin\eta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,(\frac{1}{3}\rho^3]_0^R = \frac{1}{3}R^3$; il calcolo con la formula di Green (che dice che $\oint_{\partial U}(f,g)\cdot(y,z) = \int_U(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z})\,dy\,dz$, e qui sceglieremo $(f,g) = (0,\frac{1}{2}y^2)$) dà $\int_U y\,dy\,dz = \oint_{\partial U}(0,\frac{1}{2}y^2)\cdot(y,z) = 0+0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}R^2\cos^2\eta\,R\cos\eta\,d\eta = \frac{1}{2}R^3(\sin\eta - \frac{1}{3}\sin^3\eta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}R^3$, come già trovato. Si ha dunque $y_G = \frac{1}{\text{Area}\,U}\int_U y\,dy\,dz = \frac{4}{3\pi}R$, perciò il baricentro è il punto $G(0,\frac{4}{3\pi}R,\frac{4}{3\pi}R)$.

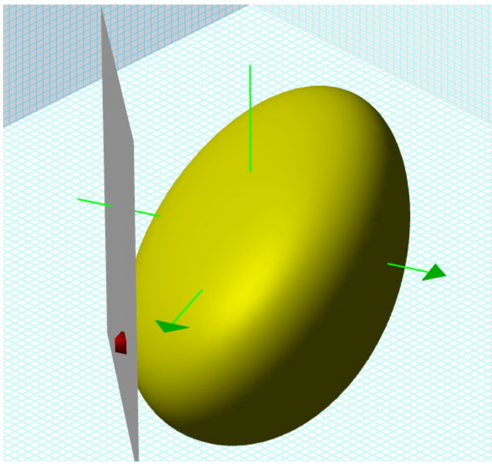
(c) L'intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ col piano $x+z=R$ dà un disco di raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}R$, del quale S è la metà: pertanto l'area di S risulta $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}R)^2\pi = \frac{1}{4}\pi R^2$. Queste sono semplici considerazioni geometriche, ma ovviamente si arriva allo stesso risultato anche per via analitica, determinando la proiezione ellittica del detto disco sul piano orizzontale (che ci sarà utile tra breve come parametrizzazione per la verifica della formula di Stokes). In effetti, dal sistema tra le due equazioni ricaviamo $2x^2-2Rx+y^2=0$ che, opportunamente manipolata, diventa $2(x-\frac{1}{2}R)^2+y^2 = \frac{1}{2}R^2$, ovvero $\frac{(x-\frac{1}{2}R)^2}{(\frac{1}{2}R)^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}}R)^2} = 1$, un'ellisse del piano (x,y) con centro in $(\frac{1}{2}R,0)$ e semiassi $a=\frac{1}{2}R$ e $b=\frac{1}{\sqrt{2}}R$, dunque di area $\pi ab = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi R^2$: pertanto, per la legge del coseno, l'area di S risulta $\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$. • Il rotore di $F=(z,0,-x)$ è $\nabla\times F = (0,-2,0)$, parallelo a S e dunque con flusso nullo. D'altra parte, il bordo di S ha il tratto curvilineo che si parametrizza con l'ellisse di base e ricordando che $z=R-x$, ovvero $(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R\cos\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}R\sin\psi, \frac{1}{2}R-\frac{1}{2}R\cos\psi)$ con $0\le\psi\le\pi$, e il tratto rettilineo (sempre ricordando $z=R-x$) tramite $(x,0,R-x)$ con $0\le x\le R$: pertanto $\oint F\cdot dx = \int_0^\pi(\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}R\cos\psi, 0, -(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R\cos\psi))\cdot(-\frac{1}{2}R\sin\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}R\cos\psi, \frac{1}{2}R\sin\psi))\,d\psi + \int_0^R(R-x,0,-x)\cdot(1,0,-1)\,dx = \frac{1}{4}R^2\int_0^\pi(-2\sin\psi)\,d\psi + \int_0^R R\,dx = \frac{1}{4}R^2(2\cos\psi]_0^\pi + R^2 = \frac{1}{4}R^2(-2-2]_0^\pi + R^2 = 0$. Ciò verifica la formula di Stokes.

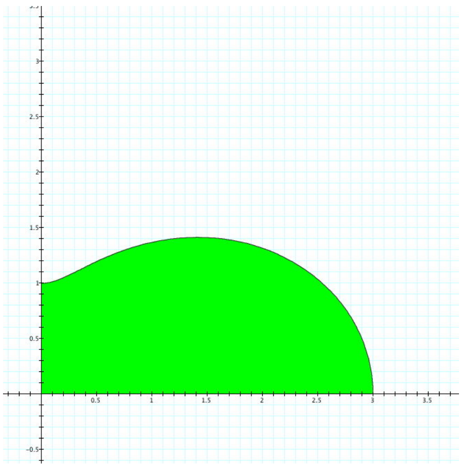
(d) Per T usiamo ancora la parametrizzazione sferica $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ in cui stavolta s'intende $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$: ma bisogna anche inserire l'informazione che deve essere $x+z\le R$, ovvero $R\cos\theta\sin\varphi + R\cos\varphi \le R$, ovvero $\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\le 1$ che, posto $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, dà $t(t-\cos\theta)\ge 0$, risolta per $t>\cos\theta$. Detto φ_0 l'angolo in $[0,\frac{\pi}{2}]$ in cui $t=\cos\theta$, la disequazione $t>\cos\theta$ è risolta per $\varphi_0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$; notiamo che $\cos\varphi_0 = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}$ e $\sin\varphi_0 = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$. Ricapitolando, T è parametrizzata da $(R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $\varphi_0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, e l'area di T ne risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\varphi\,d\varphi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\varphi]_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$ che, posto $\tau=\operatorname{tg}\theta$ (da cui $\theta=\operatorname{arctg}\tau$ e $d\theta=\frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau$) e ricordato che $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$ e $\sin\theta = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$, diventa $R^2\int_0^{+\infty}\frac{\tau^2}{(\tau^2+1)(\tau^2+2)}\,d\tau = R^2\int_0^{+\infty}(\frac{2}{\tau^2+2}-\frac{1}{\tau^2+1})\,d\tau = R^2(\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\tau) - \operatorname{arctg}\tau]_0^{+\infty} = R^2((\sqrt{2}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})-0) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi R^2$, già calcolata prima.

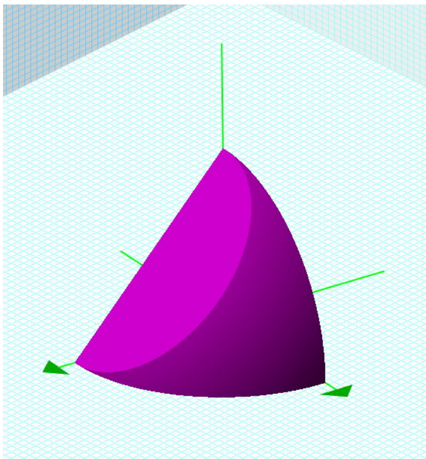
4. (a) Le soluzioni dell'equazione differenziale $y^3y'' = 4(y^4-1)$ non potranno mai annullarsi: in effetti, se per qualche t_0 fosse $y(t_0)=0$ si avrebbe $0=-4$, assurdo. Dunque l'equazione è equivalente alla sua forma normale $y'' = 4(y-y^{-3})$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y,p)=(y,y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4(y-y^{-3}) \end{cases}$. La funzione $f(y,p) = (p, 4(y-y^{-3}))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi meno l'asse y, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0,y_0,y_0') con $y_0\ne 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y,p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante $y\equiv\alpha$ deve soddisfare $0=4(\alpha-\alpha^{-3})$, dunque le soluzioni costanti sono $y\equiv\mp 1$. Poiché l'equazione è autonoma c'è invarianza delle soluzioni per traslazioni temporali; inoltre, se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I è immediato verificare che $-\varphi(t)$ (definita su I) e $\varphi(-t)$ (definita su $-I$) lo sono pure: dunque l'integrale generale è una famiglia invariante per traslazioni temporali, simmetrica rispetto al segno e pari.

(b) Come sappiamo, le equazioni scalari del 2o ordine della forma $y''=h(y)$ ammettono l'integrale dell'energia $\frac{1}{2}|y'|^2 + V(y)$, ove $V(y) = -\int h(y)\,dy$ è l'energia potenziale: nel nostro caso $V(y) = -\int 4(y-y^{-3})\,dy = -2(y^2+y^{-2})$. Le traiettorie delle soluzioni giaceranno perciò su una delle curve di livello $\frac{1}{2}|y'|^2 - 2(y^2+y^{-2}) = k$, e nel nostro caso in cui $y(0)=2$ e $y'(0)=-3$ ricaviamo $\frac{9}{2}-2(4+\frac{1}{4}) = k$, ovvero $k=-4$. Abbiamo così $|y'|^2 = 4(y^2+y^{-2}-2) = (2(y-y^{-1}))^2$, da cui (visti i dati iniziali) ricaviamo $y' = -2(y-y^{-1}) = -2\frac{y^2-1}{y}$. Separando si ottiene $\frac{2y}{y^2-1}\,dy = -4\,dt$, da cui integrando $\log(y^2-1) = -4t+h$, e da $y(0)=2$ ricaviamo $h=\log 3$: perciò $\log\frac{y^2-1}{3} = -4t$, da cui finalmente $y(t) = \sqrt{1+3e^{-4t}}$.

5. Il problema proposto equivale a quello di risolvere il sistema differenziale lineare non omogeneo $\begin{cases} \dot{x} = -y+z+2e^t \\ \dot{y} = x+y-z \\ \dot{z} = x+y+1 \end{cases}$, ovvero $\dot{X} = AX + b(t)$ con $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice A ha autovalori semplici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\overline{\lambda_2} = -i$ con autovettori rispettivamente $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ e $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$: pertanto un sistema fondamentale è dato da $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} (-1+i)e^{it} \\ 2\,e^{it} \\ (1-i)e^{it} \end{pmatrix}$ e $\overline{\varphi_2}(t)$, e una risolvente reale (costruita con $\operatorname{Re}\varphi_2(t)$ e $\operatorname{Im}\varphi_2(t)$ al posto di $\varphi_2(t)$ e $\overline{\varphi_2}(t)$) è $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \\ 0 & 2\cos t & 2\sin t \\ e^t & \cos t + \sin t & -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$. • Per la parte non omogenea, conviene separare le parti per $b_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $b_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per b_1 cerchiamo una soluzione costante (a, b, c) che dovrà soddisfare $(c - b,\ a + b - c,\ a + b + 1) = (0, 0, 0)$, il che dà $(a, b, c) = (0, -1, -1)$. Per b_2, che è un caso risonante (infatti $\lambda_1 = 1$) cerchiamo una soluzione $((at + a')\, e^t, (bt + b')\, e^t, (ct + c')\, e^t)$ che dovrà soddisfare $(at + (a + a'),\ bt + (b + b'),\ ct + (c + c')) = ((-b + c)t + (-b' + c' + 2),\ (a + b - c)t + (a' + b' - c'), (a + b)t + (a' + b'))$, ovvero $(a, a + a', b, b + b', c, c + c') = (-b + c, -b' + c' + 2, a + b - c, a' + b' - c', a + b, a' + b')$, il che dà $(a, a', b, b', c, c') = (1, a', 0, 1, 1, a')$ con a' arbitrario, e sceglieremo ad esempio $a' = 0$. Pertanto le soluzioni reali sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \\ 0 & 2\cos t & 2\sin t \\ e^t & \cos t + \sin t & -\cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x(t) = (A + t)e^t - (B - C)\cos t - (B + C)\sin t \\ y(t) = e^t + 2B\cos t + 2C\sin t \\ z(t) = (A + t)e^t + (B - C)\cos t + (B + C)\sin t \end{cases}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{R}$. Chiedendo infine che $(x(0),\ y(0),\ z(0)) = (0, 0, 0)$ si ha $(A - B + C,\ 1 + 2B, A + B - C) = (0, 0, 0)$, che dà $(A, B, C) = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$: pertanto la curva cercata è $(x(t),\ y(t),\ z(t)) = (te^t + \sin t,\ e^t - \cos t - \sin t,\ te^t - \sin t)$.







1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3.** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (18/07/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano sia X la parabola dei punti equidistanti dalla retta $2x-y=0$ e dal punto $(-2,1)$.

(a) Determinare una forma cartesiana per X, e una parametrizzazione locale nel suo punto $A(-1,3)$. Calcolare poi in due modi lo spazio tangente affine a X in A.

(b) Calcolare eventuali estremanti per $f(x,y)=x-3y$ su X, spiegando graficamente i risultati.

2. Nel piano cartesiano sia $A=\{(x,y): x\geq 0,\, y\geq 0,\, x^2+y^2\leq 4R^2,\, 2x+y\geq 2R\}$ (ove $R>0$).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{x}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale. (Facoltativo: più in generale discutere l'integrabilità su A di y^α e x^α al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.)

3. Nello spazio cartesiano tridimensionale si disegni nel piano verticale (x,z) la figura A dell'Ex. 2, e sia E il solido ottenuto ruotando A di un quarto di giro in senso antiorario attorno all'asse z.

(a) Calcolare il volume di E in due modi (con Guldino e per z-fette), e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z (pensando che E sia un corpo materiale omogeneo di densità costante μ).

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F=(0,z,0)$.

(c) Verificare la formula di Stokes per il campo F e la porzione sferica S di ∂E.

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases}\dot{x}=2y-x\\ \dot{y}=y(1-2x+2y)\end{cases}$ nell'incognita $(x(t),y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0),y(0))=(-1,-1)$, e quella con $(x(0),y(0))=(0,0)$.

5. (a) Determinare tutte le funzioni $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tali che $iy'''+y=2\sin t$.

(b) Descrivere il sistema del I ordine equivalente all'equazione data, ed esibirne una risolvente.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (18/07/2016) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'equidistanza di un punto (x, y) dalla retta $2x - y = 0$ (direttrice) e dal punto $(-2, 1)$ (fuoco) si scrive come $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}|2x - y|$, che elevata al quadrato dà la forma cartesiana $g(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 20x - 10y + 25 = 0$. Il gradiente è $\nabla g = (2x + 4y + 20,\ 4x + 8y - 10)$; in $A(-1, 3)$ si ha allora $\nabla g(A) = (30, 10) = 10(3, 1)$, ed essendo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial x}(A) = 30 \neq 0$, da $g(x, y) = 0$ si può esplicitare localmente $x(y)$ con $x(3) = -1$ e $x'(3) = -\frac{1}{3}$ (in realtà da $g(x, y) = 0$ si ricava facilmente $x(y) = 5\sqrt{2y + 3} - 2(y + 5)$). Lo spazio tangente affine a X in A si calcola come $\nabla g(A) \cdot (x + 1, y - 3) = 0$ oppure come $x = -1 - \frac{1}{3}(y - 3)$, dando in entrambi i casi la retta $3x + y = 0$.

(b) Il metodo di Lagrange dice che rango$\begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla f \end{pmatrix} < 2$, ovvero det$\begin{pmatrix} 2(x + 2y + 10) & 2(2x + 4y - 5) \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $x + 2y = -5$, che messo in sistema con $g(x, y) = 0$ dà l'unico punto stazionario $P(-3, -1)$ per f su X. Si ha $\nabla g(P) = (10, -30) = 10(1, -3)$, ed essendo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial x}(P) = 10 \neq 0$, da $g(x, y) = 0$ si può esplicitare localmente $x(y)$ con $x(-1) = -3$ e $x'(-1) = 3$; ma per capire il carattere del punto stazionario P ci servirà anche $x''(-1)$. Derivando $g(x(y), y) \equiv 0$ rispetto y si ottiene $2xx' + 4x'y + 4x + 8y + 20x' - 10 = 0$ (da cui per $y = -1$ si ha $-6x'(-1) - 4x'(-1) - 12 - 8 + 20x'(-1) - 10 = 0$, ovvero $x'(-1) = 3$ come già noto); derivando ancora si ha $2(x')^2 + 2xx'' + 4x''y + 4x' + 4x' + 8 + 20x'' = 0$ (da cui per $y = -1$ si ha $18 - 6x''(-1) - 4x''(-1) + 24 + 8 + 20x''(-1) = 0$, ovvero $x''(-1) = -5$). Posto allora $F(y) = f(x(y), y) = x(y) - 3y$ si ha $F'(y) = x'(y) - 3$ (da cui $F'(-1) = 0$, come atteso), e $F''(y) = x''(y)$ (da cui $F''(-1) = -5 < 0$). Questo ci dice che P è un punto di massimo per f, come d'altra parte appare evidente dall'esame grafico in Figura 1 (addirittura un punto di massimo assoluto stretto).

2. (a) (Figura 2) La figura piana $A = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4R^2,\ 2x + y \geq 2R\}$ è la differenza tra un quarto di cerchio di raggio $2R$ e un triangolo rettangolo di cateti R e $2R$, dunque ha area $(\pi - 1)R^2$. Integrando poi ad esempio per y-fili si ha $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} x\,dx = \int_0^{2R} (\frac{1}{2}x^2]_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{2R}(4R^2 - y^2 - (R - \frac{1}{2}y)^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2R}(3R^2 + y - \frac{5}{4}y^2)\,dy = (3R^2y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{5}{12}y^3]_0^{2R} = \frac{7}{3}R^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2R} y\,dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx = \int_0^{2R} y(\sqrt{4R^2 - y^2} - (R - \frac{1}{2}y))\,dy = (-\frac{1}{3}(4R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}Ry^2 + \frac{1}{6}y^3]_0^{2R} = (-2R^3 + \frac{4}{3}R^3) - (-\frac{8}{3}R^3) = 2R^3$, da cui il baricentro risulta $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area}\,A}(\int_A x\,dx\,dy,\ \int_A y\,dx\,dy) = (\frac{7}{3(\pi-1)}R,\ \frac{2}{\pi-1}R)$.

(b) Per quanto possibile ragioniamo da subito per nel caso di y^α e x^α con esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ qualsiasi.
L'insieme A è compatto, e se $\alpha \geq 0$ le funzioni x^α e y^α sono continue su A e dunque integrabili su A. Invece nel caso $\alpha < 0$ esse non sono limitate su A; tuttavia, essendo positive su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. • L'integrale $\int_A y^\alpha\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{2R} y^\alpha\,dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx = \int_0^{2R} y^\alpha(\sqrt{4R^2 - y^2} - (R - \frac{1}{2}y))\,dy$: l'unico eventuale problema di integrabilità si ha per $y \sim 0$, dove la funzione integranda è $\sim_0 R\,y^\alpha \sim_0^* y^\alpha$, dunque la condizione è $\alpha > -1$. In particolare, la funzione $\frac{1}{y} = y^{-1}$ non è integrabile su A. • L'integrale $\int_A x^\alpha\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} x^\alpha\,dx$, e in questo caso è necessario distinguere il caso $\alpha = -1$ dagli altri. Nel caso $\alpha = -1$ si ha $\int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{2R} (\log x]_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dy = \int_0^{2R} \log \frac{2\sqrt{4R^2-y^2}}{2R-y}\,dy$; visto che l'unico eventuale problema di integrabilità si ha per $y \sim 2R$ converrà porre $\eta = 2R - y$, ottenendo $\int_0^{2R} \log \frac{2\sqrt{4R\eta-\eta^2}}{\eta}\,d\eta = \int_0^{2R}(\log(2\sqrt{4R\eta - \eta^2}) - \log\eta)\,d\eta = \int_0^{2R}(\log 2 + \frac{1}{2}\log((4R - \eta)\eta) - \log\eta)\,d\eta = \int_0^{2R}(\log 2 + \frac{1}{2}\log(4R - \eta) - \frac{1}{2}\log\eta)\,d\eta = (\eta\log 2 - \frac{1}{2}(4R - \eta)(\log(4R - \eta) - 1) - \frac{1}{2}\eta(\log\eta - 1)]_0^{2R} = (2R\log 2 - 2R(\log(2R) - 1)) - (-2R(\log(4R) - 1)) = 4R\log 2$, finito. Nel caso generale si ha invece $\int_0^{2R} dy \int_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}(x^{\alpha+1}]_{R-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}((4R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} - (R - \frac{1}{2}y)^{\alpha+1})\,dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2R}((4R\eta - \eta^2)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} - (\frac{1}{2}\eta)^{\alpha+1})\,d\eta$: se $\alpha + 1 > 0$ (ovvero se $\alpha > -1$) la funzione integranda è infinitesima in $\eta \sim 0$ e dunque è integrabile, mentre se $\alpha + 1 < 0$ (ovvero se $\alpha < -1$) essa è $\sim_0 -(\frac{1}{2}\eta)^{\alpha+1} \sim_0^* \eta^{\alpha+1}$, da cui la condizione $\alpha + 1 > -1$, ovvero $\alpha > -2$. Concludendo, la funzione x^α è integrabile su A se e solo se $\alpha > -2$.

3. (a) (Figura 2) Per il volume di E, ricordando quanto ottenuto nell'Ex. 2 la formula di Guldino dà $\frac{\pi}{2} \cdot x_G \cdot \text{Area}\,A = \frac{7}{6}\pi R^3$. Altrimenti, per $z \in [0, 2R]$ la z-fetta di E è il quarto di corona circolare di raggi $\sqrt{4 - z^2}$ e $R - \frac{1}{2}z$ che ha area $\frac{1}{4}\pi(4 - z^2 - (R - \frac{1}{2}z)^2) = \frac{1}{4}\pi(3R^2 + z - \frac{5}{4}z^2)$, che integrata tra 0 e $2R$ dà nuovamente $\frac{7}{6}\pi R^3$. • Il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z è dato da $\mu\int_E (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, che in coordinate cilindriche diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_A r^2\,r\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\mu\int_0^{2R} dz \int_{R-\frac{1}{2}z}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r^3\,dr = \frac{\pi}{8}\mu\int_0^{2R}((4R^2 - z^2)^2 - (R - \frac{1}{2}z)^4)\,dz = \frac{\pi}{8}\mu\int_0^{2R}(\frac{15}{16}z^4 + \frac{1}{2}Rz^3 - \frac{19}{2}R^2z^2 + 2R^3z + 15R^4)\,dz = \frac{\pi}{8}\mu(\frac{3}{16}z^5 + \frac{1}{8}Rz^4 - \frac{19}{6}R^2z^3 + R^3z^2 + 15R^4z]_0^{2R} = \frac{25\pi}{12}\mu R^5$ (si ricordi che la densità μ è espressa in kg/m^3, dunque il risultato — espresso in kg$\cdot$m^2 — è dimensionalmente corretto).

(b) Il campo $F = (0, z, 0)$ ha divergenza nulla, dunque per il teorema di Gauss il flusso totale uscente dalla superficie esterna ∂E è nullo. D'altra parte F è un campo parallelo all'asse y, e dunque i suoi flussi attraverso la base di E e la faccia di E sul piano (y, z) sono pure nulli. Restano da calcolare i flussi di F attraverso A, la faccia sferica S e la faccia conica posteriore C. • La normale uscente da E su A è $-e_2 = (0,-1,0)$, dunque il flusso di F uscente da A è $\int_A F(x,0,z)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -2R^3$. • La faccia conica posteriore C si parametrizza in coordinate cilindriche (r,θ) come $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2(R-r))$ con $0 \le r \le R$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (la normale associata è quella entrante in E), dunque il flusso di F uscente da C si calcola come $-\int_0^R dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2(R-r) & \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} d\theta = -4\int_0^R dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(R-r)\sin\theta\,d\theta = -4(\frac{1}{2}Rr^2 - \frac{1}{3}r^3]_0^R\,(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}R^3$. • Infine, la faccia sferica S si lascia parametrizzare in coordinate sferiche (θ,φ) come $(2R\cos\theta\sin\varphi,\ 2R\sin\theta\sin\varphi,\ 2R\cos\varphi)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (anche in questo caso la normale associata è quella entrante in E), dunque il flusso di F uscente da S è $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -2R\sin\theta\sin\varphi & 2R\cos\theta\cos\varphi \\ 2R\cos\varphi & 2R\cos\theta\sin\varphi & 2R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2R\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = 8R^3(-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,(\frac{1}{3}\sin^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}R^3$. Come si vede, la somma dei flussi uscenti da E attraverso A, C e S è nulla, e ciò verifica il teorema il Gauss.

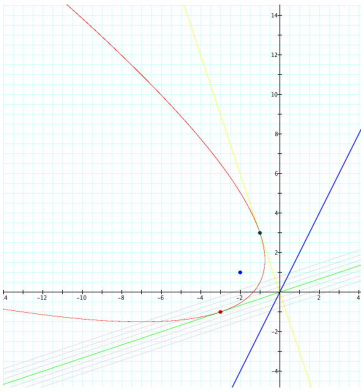
(c) Il campo $F = (0,z,0)$ ha rotore $\nabla\times F = (-1,0,0)$, e il flusso di quest'ultimo attraverso S (scegliendo ancora come in precedenza come positiva la normale uscente da E) è dato da $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} -1 & -2R\sin\theta\sin\varphi & 2R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & 2R\cos\theta\sin\varphi & 2R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2R\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = -4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = -4R^2(\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,(\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi R^2$. • Il verso di percorrenza del bordo ∂S associato alla scelta fatta di normale positiva per S è quello antiorario. Poiché come detto F è parallelo all'asse y e nullo sul piano orizzontale, l'unico contributo alla circuitazione di F lungo ∂S è quello lungo l'arco di circonferenza sul piano $x=0$, parametrizzato (negativamente) da $(0, 2R\sin\varphi, 2R\cos\varphi)$ con $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$: abbiamo così $\oint_{+\partial S} F\cdot d\ell = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0,2R\cos\varphi,0)\cdot(0,2R\cos\varphi,-2R\sin\varphi)\,d\varphi = -4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = -4R^2(\frac{1}{2}(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi R^2$, come già trovato in precedenza. Ciò verifica la formula di Stokes.

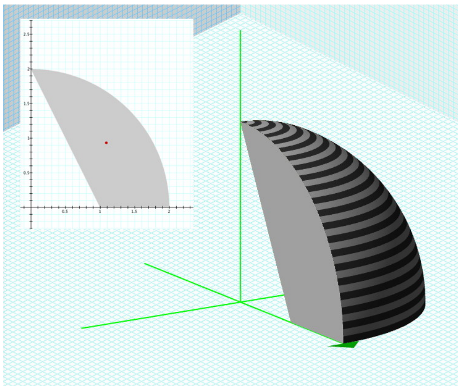
4. (a) (Figura 3) Il sistema $\begin{cases} \dot x = a(x,y) = 2y - x \\ \dot y = y(1-2x+2y) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare in y (attenzione: ricordare che i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$!). Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a = b = 0$, che dà i due punti $O(0,0)$ e $A(1,\frac{1}{2})$. • Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma $b\,dx - a\,dy = y(1-2x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): ma così non è perché $\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x} = -2x+4y \ne 0$. Tuttavia, osservato che $\frac{1}{-a}(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}) = -2$ non dipende da y possiamo concludere che $e^{\int(-2)\,dx} = e^{-2x}$ è un fattore integrante, da cui una primitiva $F(x,y)$ della forma esatta $y(1-2x+2y)e^{-2x}\,dx + (x-2y)e^{-2x}\,dy$ sarà l'integrale primo desiderato: da $\frac{\partial F}{\partial y} = (x-2y)e^{-2x}$ si ottiene $F(x,y) = (xy-y^2)e^{-2x} + \varphi(x)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial x} = y(1-2x+2y)e^{-2x} + \varphi'(x) = y(1-2x+2y)e^{-2x}$ abbiamo $\varphi'(x) = 0$, perciò $\varphi(x)$ può essere scelta nulla. Si ha così $F(x,y) = (xy-y^2)e^{-2x} = y(x-y)e^{-2x}$, e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x,y) = k$ per $k\in\mathbb{R}$, cioè $y(x-y) = ke^{2x}$. Per $k=0$ si ottiene $y(x-y)=0$, ovvero l'unione dell'asse x con la bisettrice $y=x$ (che dà luogo a cinque traiettorie, ovvero l'equilibrio O e le quattro semirette restanti). Invece per $k\ne 0$ si ottengono i grafici $y = \frac{1}{2}(x\pm\sqrt{x^2-4ke^{2x}})$, che se $k\le 0$ sono definiti per ogni x; invece se $k > \frac{1}{4}e^{-2}$ le funzioni x^2 e $4ke^{2x}$ si intersecano in un solo punto $x_k < 0$ e dunque il dominio è $]-\infty, x_k]$, mentre per $0 < k \le \frac{1}{4}e^{-2}$ si intersecano in tre punti $x_k < 0$ e $x'_k, x''_k > 0$, e il dominio risulta $]-\infty,x_k]\cup[x'_k,x''_k]$. Il verso di percorrenza di queste traiettorie è facilmente osservabile da $\dot x = 2y - x$, ovvero sarà quello delle x decrescenti (risp. crescenti) nella zona $y \lesseqgtr \frac{1}{2}x$.

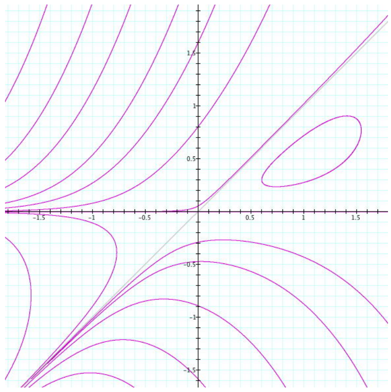
(b) La soluzione con $(x(0),y(0)) = (-1,-1)$ ha come traiettoria la semiretta $y = x$ con $x < 0$: inserendo questa informazione nel sistema differenziale si ottiene $\dot x = x$ e $\dot y = y$, che tenuto conto della condizione iniziale dà $(x(t),y(t)) = (-e^t,-e^t)$. • Invece il dato iniziale $(x(0),y(0)) = (0,0)$ è un equilibrio, dunque in esso si ha la soluzione costante $(x(t),y(t)) \equiv (0,0)$.

5. (a) Dividendo per i si ottiene $y''' - iy = -2i\sin t$. L'equazione caratteristica $\lambda^3 - i = 0$ ha radici $\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\beta = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ e $-i$, dunque una sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea è dato da $\varphi_1(t) = e^{-it}$, $\varphi_2(t) = e^{\alpha t}$ e $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$. • Si ha $b(t) = -2i\sin t = e^{-it} - e^{it}$, dunque una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde\varphi(t) = ute^{-it} + ve^{it}$: derivando si ha $\tilde\varphi'(t) = u(1-it)e^{-it} + ive^{it}$, $\tilde\varphi''(t) = u(-2i-t)e^{-it} - ve^{it}$ e $\tilde\varphi'''(t) = u(-3+it)e^{-it} - ive^{it}$, e perciò la condizione $\tilde\varphi'''(t) - i\tilde\varphi(t) = e^{-it} - e^{it}$ dà $u(-3+it)e^{-it} - ive^{it} - i(ute^{-it} + ve^{it}) = -3ue^{-it} - 2ive^{it} = e^{-it} - e^{it}$, da cui $(u,v) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}i)$. • La soluzione generale è allora $y(t) = A\,e^{-it} + B\,e^{\alpha t} + C\,e^{\beta t} - \frac{1}{3}te^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it}$ per $A,B,C\in\mathbb{C}$.

(b) Posto $Z = (z_1,z_2,z_3) = (y,y',y'')$ il sistema del I ordine equivalente all'equazione data è $\dot Z = AZ + B$, ove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\sin t \end{pmatrix}$; e una risolvente è data da $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) & \varphi'_3(t) \\ \varphi''_1(t) & \varphi''_2(t) & \varphi''_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it} & e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ -i\,e^{-it} & \alpha\,e^{\alpha t} & \beta\,e^{\beta t} \\ -e^{-it} & \alpha^2\,e^{\alpha t} & \beta^2\,e^{\beta t} \end{pmatrix}$.







1. Ex. 1. **2.** Exx. 2-3. **3.** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (29/08/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g(x,y,z) = \log(x+y-z) - x^2 + 2y^2 - 3z^2$.

(a) Quali insiemi di livello di g sono superfici regolari? Detta M la superficie di livello contenente il punto $A(0,1,0)$, mostrare che è possibile esprimere M, all'intorno di A, come grafico di una funzione $z = \varphi(x,y)$. Calcolare poi in due modi il piano tangente a M in A.

(b) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il punto A è stazionario in M per la funzione $f(x,y,z) = xy + \alpha y^2 - z$, determinandone la natura (estremante locale o sella).

2. Sia A la porzione del primo quadrante del piano racchiusa dalla curva $\rho(\theta) = 1+\cos\theta$ (cardioide).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale.

3. Nello spazio cartesiano si consideri il solido $E = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

(a) Calcolare volume e area totale della superficie esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo vettoriale $F = (1,-1,0)$.

(c) Calcolare l'area della base orizzontale di E usando la formula di Green nel piano (x,y).

4. Si abbia l'equazione differenziale $y^4 y'' = 3 + \alpha y'$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$) nella funzione incognita $y(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Soluzioni che si annullano? Simmetrie, invarianze temporali nell'integrale generale?

(b) Posto $\alpha = 0$ trovare un integrale primo e la soluzione con $y(0) = -1$ e $y'(0) = -\sqrt{2}$.

5. Determinare le curve $(x(t), y(t))$ del piano cartesiano che soddisfano $(\dot{x}, \dot{y}) = (t-2y-1,\ x-2y)$, in particolare quella che per $t = 0$ passa per l'origine.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (29/08/2016) – Soluzioni.

1. (a) La funzione $g(x,y,z) = \log(x+y-z) - x^2 + 2y^2 - 3z^2$ è definita nel semispazio $z < x+y$. Posto per comodità $u = \frac{1}{x+y-z}$, il gradiente $\nabla g(x,y,z) = (u-2x,\, u+4y,\, -u-6z)$ si annulla quando $u = 2x = -4y = -6z$: in particolare $y = -\frac{1}{2}x$ e $z = -\frac{1}{3}x$, e così da $u = 2x$ si ricava $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$, e dunque il punto $P(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}})$ (l'altra soluzione, opposta a P è spuria perché è fuori dal dominio di g). Possiamo concludere che tutte le superfici di livello di g sono superfici regolari tranne quella di livello $g(P) = -\log 2 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 5 - \frac{1}{2} \sim -0{,}9$ nel punto P. In particolare la superficie di livello M contenente il punto $A(0,1,0)$ (data perciò da $g(x,y,z) = g(A) = 2$) è regolare; si ha $\nabla g(A) = (\frac{\partial g}{\partial x}(A), \frac{\partial g}{\partial y}(A), \frac{\partial g}{\partial z}(A)) = (1,\,5,\,-1)$, ed essendo $\frac{\partial g}{\partial z}(A) = -1 \neq 0$, grazie a Dini si può effettivamente esprimere M all'intorno di A come grafico di una funzione $z = \varphi(x,y)$, con $\varphi(0,1) = z(0,1) = 0$ e $\nabla\varphi(0,1) = (\dot z_x(0,1), \dot z_y(0,1)) = (1,5)$. Per uso futuro ricaviamo anche le derivate seconde: derivando rispetto a x e y i due membri dell'identità $g(x,y,z(x,y)) \equiv 2$ otteniamo $(1-\dot z_x)u - 2x - 6z\dot z_x = 0$ e $(1-\dot z_y)u + 4y - 6z\dot z_y = 0$ (da cui, calcolando in $(0,1)$, si ha $(1 - \dot z_{x(0,1)}) = 0$ e $(1-\dot z_{y(0,1)}) + 4 = 0$ che danno ancora $(\dot z_{x(0,1)}, \dot z_{y(0,1)}) = (1,5)$), e derivando ancora rispetto a x e y si ottiene $(-\ddot z_{xx}u - (1-\dot z_x)^2)u^2 - 2 - 6(\dot z_x)^2 - 6z\ddot z_{xx} = 0$, $(-\ddot z_{xy}u - (1-\dot z_x)(1-\dot z_y))u^2 - 6\dot z_x\dot z_y - 6z\ddot z_{xy} = 0$ e $(-\ddot z_{yy}u - (1-\dot z_y)^2)u^2 + 4 - 6(\dot z_y)^2 - 6z\ddot z_{yy} = 0$ da cui, calcolando in $(0,1)$, si ha $-\ddot z_{xx(0,1)} - 2 - 6 = 0$, $(-\ddot z_{xy(0,1)}) - 30 = 0$ e $(-\ddot z_{yy(0,1)} - 16) + 4 - 150 = 0$, ovvero $\mathsf{H}_z(0,1) = \begin{pmatrix} \ddot z_{xx}(0,1) & \ddot z_{xy}(0,1) \\ \ddot z_{xy}(0,1) & \ddot z_{yy}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -30 \\ -30 & -162 \end{pmatrix}$. Infine, lo spazio tangente affine a M in A è dato da $\nabla g(A)\cdot(x-0, y-1, z-0) = (1,5,-1)\cdot(x, y-1, z) = 0$, cioè $x + 5y - z = 5$; ciò si desume anche dalla forma grafico $z(x,y) = z(0,1) + \nabla z(0,1)\cdot(x-0, y-1)$, cioè $z = 0 + (1,5)\cdot(x, y-1)$ che ridà $z = x + 5y - 5$.

(b) La condizione che il punto A sia stazionario in M per $f(x,y,z) = xy + \alpha y^2 - z$ si scrive, usando Lagrange, chiedendo che $\nabla g(A) = (1,5,-1)$ sia proporzionale a $\nabla f(A) = (1, 2\alpha, -1)$: ciò dà $\alpha = \frac{5}{2}$. Consideriamo poi la funzione composta $F(y,z) := f(x,y,z(x,y)) = xy + \frac{5}{2}y^2 - z(x,y)$: si ha $\nabla F(x,y) = (y - \dot z_x,\, x + 5y - \dot z_y)$ (da cui $\nabla F(0,1) = (0,0)$, come atteso) e $\mathsf{H}_F(x,y) = \begin{pmatrix} -\ddot z_{xx} & 1-\ddot z_{xy} \\ 1-\ddot z_{xy} & 5-\ddot z_{yy} \end{pmatrix}$, da cui $\mathsf{H}_F(0,1) = \begin{pmatrix} 8 & 31 \\ 31 & 167 \end{pmatrix}$, una matrice definita positiva (infatti $8 > 0$ e $\det > 0$): questo mostra che A è un punto di minimo locale stretto per f in M.

2. (a) (Figura 1) La figura piana A racchiusa nel 1o quadrante dalla curva polare $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ ha area data da $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}[\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})) - \frac{1}{2}(0) = \frac{3\pi}{8} + 1$. Vale poi[(1)] $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,(1+\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}[\sin\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 3\sin\theta - \sin^3\theta + \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{16} + 1$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,(1+\cos\theta)^3\,d\theta = [\frac{1}{12}(1+\cos\theta)^4]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4}$, da cui $x_G = \frac{5\pi+16}{2(3\pi+8)} \sim 0{,}9$ e $y_G = \frac{10}{3\pi+8} \sim 0{,}6$.

(b) L'insieme A è compatto, ma le funzioni $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ non sono limitate su A; tuttavia, essendo positive su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede. • L'integrale $\int_A \frac{x}{y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato (già in variabili polari) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\,d\theta$; tuttavia, poiché $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta} \sim^*_{0^+} \frac{1}{\theta}$, la funzione non è integrabile su A. • L'integrale $\int_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\frac{1}{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$, che dopo la semplificazione per ρ è l'integrale di una funzione continua su $[0, \frac{\pi}{2}]$ e dunque converge. Per il calcolo converrà porre $\psi = \theta + \frac{\pi}{4}$, ottenendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\cos(\psi-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin\psi}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\psi+\sin\psi)}{\sqrt{2}\sin\psi}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+\cos\psi+\sin\psi}{\sin\psi}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi} + \operatorname{cotg}\psi + 1)\,d\theta = \frac{1}{2}[\sqrt{2}\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \log\sin\psi + \psi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)$ (ricordando che $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ e dunque $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$).

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E per (x,y)-fili, tenendo presente che la base B è la differenza tra il triangolo rettangolo $B' = \{(x,y) : x,y \geq 0,\, x+y \leq 4\}$ e il quarto di cerchio $B'' = \{(x,y) : x,y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq 1\}$: risulta allora $\mathrm{Vol}\,E = \int_{B'}(4-x-y)\,dx\,dy - \int_{B''}(4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1(4-\rho(\cos\theta+\sin\theta))\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^4(4-x)^2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)]_{\rho=0}^{\rho=1}\,d\theta = -\frac{1}{6}[(4-x)^3]_0^4 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2 - \frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta))\,d\theta = \frac{32}{3} - [2\theta - \frac{1}{3}(\sin\theta - \cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{34}{3} - \pi$. • Per considerazioni di geometria elementare, la già descritta base B ha area $8 - \frac{\pi}{4}$; e ciascuna delle facce laterali T_x e T_y, triangoli rettangoli isosceli di lato $4-1=3$ paralleli rispettivamente all'asse x e y, ha area $\frac{9}{2}$. La faccia cilindrica posteriore C, parametrizzata da $(\cos\theta, \sin\theta, z)$ (elemento d'area 1) con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq 4 - \cos\theta - \sin\theta$, ha area $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{4-\cos\theta-\sin\theta} 1\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4 - \cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = [4\theta - \sin\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2\pi - 1) - (1) = 2(\pi - 1)$. Infine, l'area della faccia anteriore obliqua S si può ricavare da quella di B con la legge del coseno: poiché il vettore normale $(1,1,1) = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ forma con l'asse z un angolo di coseno $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'area di S vale $\sqrt{3}(8 - \frac{\pi}{4})$. L'area totale di E è perciò $(8 - \frac{\pi}{4}) + 2\cdot\frac{9}{2} + 2(\pi - 1) + \sqrt{3}(8 - \frac{\pi}{4}) = 15 + 8\sqrt{3} + \frac{(7-\sqrt{3})\pi}{4}$.

[(1)] Ricordiamo che $\int\cos^3\theta\,d\theta = \int\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + k$ e che $\int\cos^4\theta\,d\theta = \int\cos\theta\cdot\cos^3\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta - \int\sin\theta\cdot 3(-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta + 3\int(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) - 3\int\cos^4\theta\,d\theta$, da cui $\int\cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta))$.

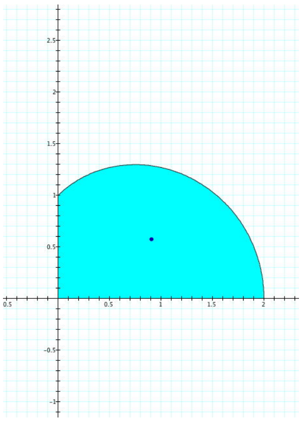
(b) Il campo costante $F=(1,-1,0)$ ha divergenza nulla, dunque per il teorema di Gauss il flusso totale uscente dalla superficie esterna ∂E è nullo. D'altra parte F è un campo orizzontale, dunque il suo flusso attraverso la base B è nullo; i flussi uscenti da T_x e T_y sono rispettivamente $\int_{T_x}(1,-1,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = \mathrm{Area}\,T_x = \frac{9}{2}$ e $\int_{T_y}(1,-1,0)\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz = -\,\mathrm{Area}\,T_y = -\frac{9}{2}$; il flusso uscente da C, parametrizzata come detto prima (normale associata uscente) è $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4-\cos\theta-\sin\theta} \det\begin{pmatrix} 1 & -\sin\theta & 0 \\ -1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta-\sin\theta)(4-\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos\theta-\sin\theta)-\cos 2\theta)\,d\theta = [4(\sin\theta+\cos\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$; e il flusso uscente da S, parametrizzata da $(x,y,4-x-y)$ con $(x,y)\in B$ (normale associata entrante) è $-\int_B \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx\,dy = 0$ (in effetti il campo è parallelo a S). Il flusso totale uscente dalla superficie esterna ∂E è dunque $0+\frac{9}{2}+(-\frac{9}{2})+0+0=0$, e ciò conferma il teorema di Gauss.

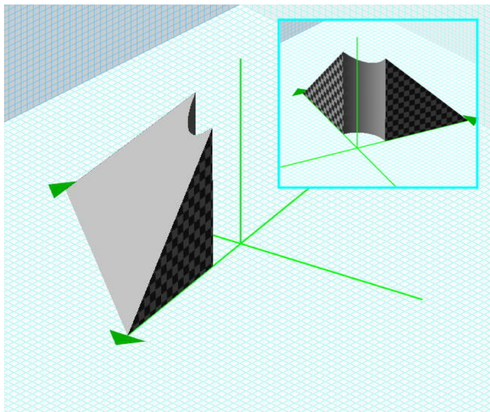
(c) Per calcolare l'area della base B usando la formula di Green ci basta ad esempio considerare la circuitazione del campo $(0,x)$ lungo ∂B orientato in senso antiorario, ovvero (partendo dal punto $(1,0)$): $\int_1^4 (0,x)\cdot(1,0)\,dx - \int_0^4 (0,x)\cdot(1,-1)\,dx - \int_1^4 (0,0)\cdot(0,1)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,\cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta = 0 + \int_0^4 x\,dx - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = [\frac{1}{2}x^2]_0^4 - [\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8-\frac{\pi}{4}$, come già calcolato in precedenza con metodi di geometria elementare.

4. (a) L'equazione differenziale $y^4 y'' = 3+\alpha y'$ è autonoma, dunque c'è invarianza delle soluzioni per traslazioni temporali. Se fosse $y(0)=0$ si avrebbe $0=3+\alpha y'(0)$, da cui $y'(0)=-\frac{3}{\alpha}$: ovvero, se in un certo istante una soluzione si annulla deve ivi avere una prescritta pendenza. Posta invece in forma normale dove la soluzione non si annulla, l'equazione diventa $y''=(3+\alpha y')y^{-4}$, a sua volta equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y,p)=(y,y')$ dato da $\begin{cases} y'=p \\ p'=(3+\alpha p)y^{-4} \end{cases}$. La funzione $f(y,p)=(p,(3+\alpha p)y^{-4})$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi meno l'asse y, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0,y_0,y_0') con $y_0\neq 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y,p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che però non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante dovrebbe soddisfare $0=3$, assurdo: dunque non ve ne sono. Infine, se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I è facile verificare che né l'opposta $-\varphi(t)$, né $\varphi(-t)$ e $-\varphi(-t)$ le loro opposte lo sono: dunque l'integrale generale è una famiglia senza evidenti simmetrie.

(b) Posto $\alpha=0$ si ottiene $y^4 y''=3$, ovvero un'equazione scalare della forma $y''=h(y)=3y^{-4}$ che come noto ammette l'integrale dell'energia $\frac{1}{2}|y'|^2+V(y)$, ove $V(y)=-\int h(y)\,dy = y^{-3}$ è l'energia potenziale. Le traiettorie delle soluzioni giaceranno perciò su una delle curve di livello $\frac{1}{2}|y'|^2+y^{-3}=k$, e nel nostro caso in cui $y(0)=-1$ e $y'(0)=-\sqrt{2}$ ricaviamo $1-1=k$, ovvero $k=0$. Abbiamo così $\frac{1}{2}|y'|^2=-y^{-3}$, da cui (visti i dati iniziali) ricaviamo $y'=-\sqrt{2}|y|^{-\frac{3}{2}}$. Separando si ha $|y|^{\frac{3}{2}}\,dy=-\sqrt{2}\,dt$, da cui integrando $-\frac{2}{5}|y|^{\frac{5}{2}}=-\sqrt{2}\,t+h$, e da $y(0)=-1$ ricaviamo $h=-\frac{2}{5}$: perciò $-\frac{2}{5}|y|^{\frac{5}{2}}=-\sqrt{2}\,t-\frac{2}{5}$, cioè $|y|^{\frac{5}{2}}=1+\frac{5\sqrt{2}}{2}t$, da cui $y(t)=-(1+\frac{5\sqrt{2}}{2}t)^{\frac{2}{5}}$ definita finché $1+\frac{5\sqrt{2}}{2}t>0$, cioè per $t>-\frac{\sqrt{2}}{5}$.

5. La condizione $(\dot x,\dot y)=(t-2y-1,\, x-2y)$, posto $Y(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $b(t)=\begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si scrive in forma matriciale come $\dot Y = AY+b$. La matrice A ha due autovalori coniugati $-1\pm i$. Un autovettore relativo a $-1+i$ risulta essere $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui la soluzione $\varphi(t)=\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$: sappiamo allora che una base reale di soluzioni dell'omogenea è data da $\mathrm{Re}\,\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t-\sin t) \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Im}\,\varphi(t)=\begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t+\sin t) \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$. Una soluzione particolare del sistema completo sarà del tipo $\widetilde{Y}(t)=\begin{pmatrix} ut+v \\ u't+v' \end{pmatrix}$, e imponendo che lo sia si ottiene $\widetilde{Y}(t)=\begin{pmatrix} t+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}t-1 \end{pmatrix}$. La soluzione generale è pertanto del tipo $Y(t)=a\,\mathrm{Re}\,\varphi(t)+b\,\mathrm{Im}\,\varphi(t)+\widetilde{Y}(t)=\begin{pmatrix} ((a+b)\cos t+(b-a)\sin t)\,e^{-t}+t+\frac{3}{2} \\ (a\cos t+b\sin t)\,e^{-t}+\frac{1}{2}t-1 \end{pmatrix}$ per $a,b\in\mathbb{R}$; e la condizione iniziale dà $a+b+\frac{3}{2}=a-1=0$, da cui $a=1$ e $b=-\frac{5}{2}$.





1. Ex. 2. **3.** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (13/09/2016)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2015/16

Cognome-Nome ________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2z^2 + 3xy - y + 2z,\ x + y - z)$.

(a) Mostrare quali insiemi di livello di g sono curve regolari. Detta Γ quella che contiene il punto $A(0, -1, 0)$, determinarne una parametrizzazione locale e lo spazio tangente affine in A.

(b) Dire se Γ ha punti estremali per quota. Si può dire se siano di estremo assoluto?

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2a,\ 0 \le y \le 4a - x,\ x^2 + y^2 \ge 4a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e trovarne il baricentro.

(b) Dire se una tra le funzioni x^3 e $\frac{1}{y}$ è integrabile su A, se sì calcolando l'integrale.

3. Nello spazio cartesiano tridimensionale si disegni nel piano verticale (x, z) la figura A dell'Ex. 2, e sia E il solido ottenuto ruotando A di un quarto di giro in senso antiorario attorno all'asse z.

(a) Calcolare il volume di E, e il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z (pensando che E sia un corpo materiale omogeneo di densità costante μ).

(b) Verificare la formula di Stokes per il campo $F = (z, 0, 0)$ e la porzione conica C di ∂E.

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza, unicità, simmetria delle soluzioni? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$, e quella con $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

5. Determinare, al variare di $\alpha \ge 0$, tutte le soluzioni reali $y(t)$ dell'equazione $y''' = \sin 2t - e^t + 8\alpha^3 y$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (13/09/2016) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana della funzione $g(x,y,z) = (x^2+y^2-2z^2+3xy-y+2z,\ x+y-z)$ è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3y & 2y+3x-1 & -4z+2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; il rango è < 2 se e solo se $2x+3y = 2y+3x-1 = 4z-2$, ovvero se e solo se $x-y=1$ e $3x+2y-4z+1=0$, ovvero se e solo se $y=x-1$ e $z=\frac{1}{4}(5x-1)$: si tratta dunque della retta dei punti $P_\alpha(\alpha, \alpha-1, \frac{1}{4}(5\alpha-1))$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Le curve di livello che non contengono nessuno di questi punti sono regolari: in particolare, poiché il punto $A(0,-1,0)$ non appare tra essi, la curva Γ (data da $g(x,y,z) = g(A) = (2,-1)$) è regolare all'intorno di A. Vale $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: poiché il minore relativo a (y,z) è nonsingolare, da $g(x,y,z) = (2,-1)$ si può esplicitare localmente $\binom{y(x)}{z(x)}$ con $\binom{y(0)}{z(0)} = \binom{-1}{0}$ e $\binom{y'(0)}{z'(0)} = -\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\binom{-3}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\binom{-3}{1} = \binom{-1}{0}$. Questo dà anche la parametrizzazione locale $(x, y(x), z(x))$, e lo spazio tangente affine risulta $\binom{y}{z} = \binom{-1}{0} + \binom{-1}{0}x = \binom{-1-x}{0}$.

(b) La ricerca di punti di Γ estremali per quota equivale a quella di estremi per $f(x,y,z) = z$ vincolati su Γ, che per Lagrange significa imporre che il minore di $\mathsf{J}_g(x,y,z)$ relativo a (x,y) sia singolare (ovvero $2x+3y = 2y+3x-1$, ovvero $y = x-1$) assieme alla condizione di appartenenza a Γ, ovvero $g(x,y,z) = (2,-1)$: si tratta di un facile sistema, che dà come soluzioni i punti $A(0,-1,0)$ (già noto) e $B(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$. Per capire la natura di questi punti ci serve lo sviluppo della funzione $z(x)$ attorno ad essi. Derivando l'identità $g(x,y(x),z(x)) = (2,-1)$ si ottiene $(2x+2yy'-4zz'+3y+3xy'-y'+2z',\ 1+y'-z') = (0,0)$, che calcolata per $x=0$ (con $(y(0),z(0)) = (-1,0)$) dà $(-2y'-3-y'+2z',\ 1+y'-z') = (0,0)$ da cui $(y'(0), z'(0)) = (-1,0)$ (come già noto), mentre calcolata per $x = -\frac{2}{3}$ (con $(y(-\frac{2}{3}), z(-\frac{2}{3})) = (-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$) dà $(-\frac{4}{3} - \frac{10}{3}y' + \frac{16}{3}z' - 5 - 2y' - y' + 2z',\ 1+y'-z') = (0,0)$, ovvero $(-\frac{19}{3}y' + \frac{22}{3}z' - \frac{19}{3},\ y'-z'+1) = (0,0)$, da cui $(y'(-\frac{2}{3}), z'(-\frac{2}{3})) = (-1,0)$. Derivando nuovamente si ottiene $(2+2(y')^2+2yy''-4(z')^2-4zz''+3y'+3y'+3xy''-y''+2z'',\ y''-z'') = (0,0)$, che calcolata per $x=0$ dà $(2+2-2y''-6-y''+2z'',\ y''-z'') = (0,0)$, ovvero $(-3y''+2z''-2,\ y''-z'') = (0,0)$ da cui $(y''(0), z''(0)) = (-2,-2)$, mentre calcolata per $x = -\frac{2}{3}$ dà $(2 - \frac{10}{3}y'' + \frac{16}{3}z'' - 6 - 2y'' - y'' + 2z'',\ y''-z'') = (0,0)$, ovvero $(-\frac{19}{3}y'' + \frac{22}{3}z'' - 4,\ y''-z'') = (0,0)$ da cui $(y''(-\frac{2}{3}), z''(-\frac{2}{3})) = (4,4)$. Insomma, poiché $z'(0) = z'(-\frac{2}{3}) = 0$ (come previsto), $z''(0) < 0$ e $z''(-\frac{2}{3}) > 0$ possiamo concludere che A e B sono punti di quota rispettivamente massima e minima locale stretta per la curva Γ. • In realtà è facile provare che la curva Γ è un'ellisse: infatti da $g_2(x,y) = -1$ si ricava $z = x+y+1$, che sostituito in $g_1(x,y) = 2$ dà $x^2-xy+y^2+2x+3y+2 = 0$, equazione di un'ellisse nel piano orizzontale (si noti che il discriminante della parte quadratica è negativo) che costituisce la proiezione di Γ dal piano inclinato $z = x+y+1$. Poiché un'ellisse è una curva compatta, per Weierstrass possiamo allora concludere che A e B sono i punti di quota massima e minima assolute di Γ, come si vede chiaramente nella Figura 1.

2. (a) (Figura 2) La figura piana $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2a,\ 0 \le y \le 4a-x,\ x^2+y^2 \ge 4a^2\}$ è la differenza tra un trapezio rettangolo e un quarto di cerchio, dunque la sua area si calcola facilmente come $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(4a+2a) - \frac{1}{4}(2a)^2\pi = (6-\pi)a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} x\,dx \int_{\sqrt{4a^2-x^2}}^{4a-x} dy = \int_0^{2a} x(4a-x-\sqrt{4a^2-x^2})\,dx = [2ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(4a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{2a} = (8a^3 - \frac{8}{3}a^3) - (\frac{8}{3}a^3) = \frac{8}{3}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{4a^2-x^2}}^{4a-x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}((4a-x)^2 - (4a^2-x^2))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(12a^2 - 8ax + 2x^2)\,dx = \frac{1}{2}[12a^2x - 4ax^2 + \frac{2}{3}x^3]_0^{2a} = \frac{1}{2}[24a^3 - 16a^3 + \frac{16}{3}a^3] - (0) = \frac{20}{3}a^3$, dunque il baricentro di A ha coordinate $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area } A}(\int_A x\,dx\,dy,\ \int_A y\,dx\,dy) = (\frac{8}{3(6-\pi)}a,\ \frac{20}{3(6-\pi)}a)$.

(b) L'insieme A è compatto e la funzione x^3 è continua su di esso, dunque integrabile. Per il calcolo converrà ragionare per differenza tra trapezio e cerchio (in questo caso siamo certi della convergenza di entrambi gli integrali), ottenendo[(1)] $\int_A x^3\,dx\,dy = \int_0^{2a} x^3\,dx \int_0^{4a-x} dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho^3\cos^3\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{2a} x^3(4a-x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta \int_0^{2a}\rho^4\,d\rho = [ax^4 - \frac{1}{5}x^5]_0^{2a} - \frac{32}{5}a^5[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{48}{5}a^5 - \frac{64}{15}a^5 = \frac{16}{3}a^5$. • La funzione $\frac{1}{y}$ non è limitata su A; tuttavia, essendo positiva su A, per Tonelli e Fubini basterà calcolare un integrale iterato (naturalmente qui non si può ragionare per differenza come prima, perché non si è certi della convergenza di ciascuno dei due integrali) e osservare cosa succede. L'integrale $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy$ è finito se e solo se lo è l'integrale iterato $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{4a^2-x^2}}^{4a-x} \frac{1}{y}\,dy = \int_0^{2a}(\log(4a-x) - \log\sqrt{4a^2-x^2})\,dx = \int_0^{2a}(\log(4a-x) - \frac{1}{2}\log(2a-x) - \frac{1}{2}\log(2a+x))\,dx$: l'unico eventuale problema si ha per il secondo addendo quando $x \sim 2a$, ma sappiamo che il logaritmo è integrabile in 0 e dunque anche questo integrale converge. Terminando il conto si ha $[-(4a-x)(\log(4a-x)-1) + \frac{1}{2}(2a-x)(\log(2a-x)-1) - \frac{1}{2}(2a+x)(\log(2a+x)-1)]_0^{2a} = 2a\log 2$.

3. (a) (Figura 2) Per il volume di E, ricordando quanto trovato nell'Ex. 2 la formula di Guldino dà $\frac{\pi}{2}\cdot x_G\cdot \text{Area } A = \frac{4}{3}\pi a^3$; oppure con la geometria elementare (cono più cilindro meno semisfera) si ritrova $\frac{1}{4}(\frac{1}{3}(2a)^2\pi(2a) + (2a)^2\pi(2a) - \frac{2}{3}\pi(2a)^3) = \frac{1}{4}(\frac{8}{3}\pi a^3 + 8\pi a^3 - \frac{16}{3}\pi a^3) = \frac{4}{3}\pi a^3$ • Il momento d'inerzia di E rispetto all'asse z è $\mu\int_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, che in coordinate cilindriche diventa $\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_A r^2\,r\,dr\,dz = \frac{\pi}{2}\mu\int_A r^3\,dr\,dz$; l'integrale è già stato calcolato nell'Ex. 2 e perciò si ottiene $\frac{\pi}{2}\mu\cdot\frac{16}{3}a^5 = \frac{8\pi}{3}\mu a^5$ (la densità μ è in kg/m^3, dunque il risultato — in kg$\cdot$m^2 — è dimensionalmente corretto).

(b) Il campo $F = (z,0,0)$ ha rotore $\nabla\times F = (0,1,0)$; parametrizzando C come $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 4a-\rho)$ con $0 \le \rho \le 2a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente da E), il flusso di $\nabla\times F$ attraverso C risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 1 & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2a}\rho\,d\rho = 2a^2$. • Il verso di percorrenza del bordo ∂C associato alla scelta fatta di normale per C è

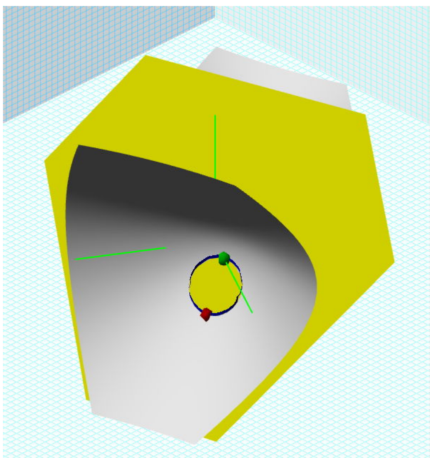
(1) Ricordiamo che $\int\cos^3\theta\,d\theta = \int\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + k$.

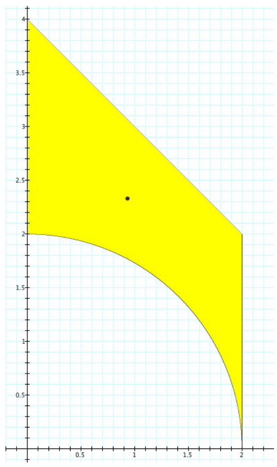
quello antiorario, e partendo dal punto $(0,0,4a)$ la circuitazione ne risulta $\int_0^{2a}(4a-x,0,0)\cdot(1,0,-1)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a,0,0)\cdot(-2a\sin\theta,2a\cos\theta,0)\,d\theta-\int_0^{2a}(4a-y,0,0)\cdot(0,1,-1)\,dy=\int_0^{2a}(4a-x)\,dx-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-0=[4ax-\frac{1}{2}x^2]_0^{2a}-4a^2=2a^2$, come già trovato in precedenza. Ciò verifica la formula di Stokes.

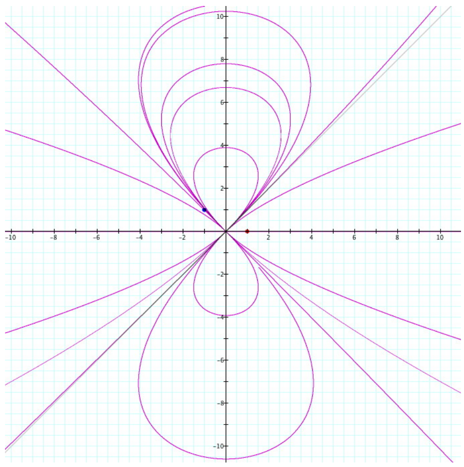
4. (a) (Figura 3) Il sistema $\begin{cases}\dot x = a(x,y) = 3x^2-y^2\\ \dot y = 2xy\end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare in y (attenzione: ricordare che i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$). Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a=b=0$, che dà la sola origine $O(0,0)$. • Per un integrale primo del sistema, possiamo notare che il sistema è omogeneo di grado 2 e risolverlo ponendo $y=xz$. Altrimenti, equivalentemente, col metodo generale vediamo se la forma $b\,dx-a\,dy=2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): ma così non è perché $\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial(-a)}{\partial x}=8x\neq 0$. Tuttavia, osservato che per $y\neq 0$ si ha che $-\frac{1}{b}(\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial(-a)}{\partial x})=-\frac{4}{y}$ non dipende da x (mentre se $y(t_0)=0$ allora anche $\dot y(t_0)=0$, ovvero una soluzione con dato iniziale sull'asse x non si muove mai da lì, ovvero l'asse x è curva integrale) possiamo concludere che $e^{\int(-\frac{4}{y})\,dy}=y^{-4}$ è un fattore integrante, da cui una primitiva $F(x,y)$ della forma esatta $\frac{2x}{y^3}\,dx+(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4})\,dy$ sarà l'integrale primo desiderato: da $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$ si ottiene $F(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4})$ abbiamo $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$, perciò $\varphi(y)=-\frac{1}{y}$. Si ha così $F(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}$, e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x,y)=k$ per $k\in\mathbb{R}$, cioè $x^2-y^2=ky^3$; notiamo che per $k=0$ si ottengono le bisettrici $y=\pm x$, mentre l'asse x si riottiene quando $k\to\infty$. Il verso di percorrenza di queste traiettorie è facilmente osservabile da $\dot y=2xy$, ovvero sarà quello delle y crescenti (risp. decrescenti) nel I e III (risp. nel II e IV) quadrante.

(b) La soluzione con $(x(0),y(0))=(-1,1)$ ha come traiettoria la semiretta $y=-x$ con $x<0$: inserendo l'informazione nel sistema differenziale si ottiene $\dot x=2x^2$ e $\dot y=-2y^2$, che con la condizione iniziale dà $(x(t),y(t))=(-\frac{1}{1+2t},\frac{1}{1+2t})$ (definita per $t>-\frac{1}{2}$). • Invece il dato iniziale $(x(0),y(0))=(1,0)$ ha come traiettoria il semiasse $x>0$, pertanto $y(t)\equiv 0$; si ha allora $\dot x=3x^2$, che tenuto conto della condizione iniziale dà $(x(t),y(t))=(\frac{1}{1-3t},0)$ (definita per $t<\frac{1}{3}$).

5. Le radici caratteristiche di $y'''=\sin 2t-e^t+8\alpha^3y$, ovvero $y'''-8\alpha^3y=\sin 2t-e^t$, sono le radici cubiche del numero reale α^3. Converrà allora distinguere alcuni casi. • Se $\alpha=0$ l'equazione $y'''=\sin 2t-e^t$ può essere integrata direttamente, dando prima $y''=-\frac{1}{2}\cos 2t-e^t+a$, poi $y'=-\frac{1}{4}\sin 2t-e^t+at+b$ e infine $y=\frac{1}{8}\cos 2t-e^t+\frac{1}{2}at^2+bt+c$ al variare di $a,b,c\in\mathbb{R}$. • Se $\alpha>0$ le radici di $8\alpha^3$ sono 2α e $\alpha(-1\pm\sqrt{3}\,i)$, dunque una base reale di soluzioni per l'omogenea è data da $\{e^{2\alpha t},\ e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{3}\alpha t),\ e^{-\alpha t}\sin(\sqrt{3}\alpha t)\}$. Poiché $2i$ non è radice caratteristica una soluzione particolare per $b_1(t)=\sin 2t$ sarà del tipo $\tilde y_1(t)=u\cos 2t+v\sin 2t$, e imponendolo si ha $(u,v)=(\frac{1}{8(\alpha^6+1)},-\frac{\alpha^3}{8(\alpha^6+1)})$. Quanto a $b_2(t)=-e^t$, se $\alpha\neq\frac{1}{2}$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde y_2(t)=ue^t$, e imponendolo si ha $u=\frac{1}{8\alpha^3-1}$; mentre se $\alpha=\frac{1}{2}$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde y_2(t)=ute^t$, e imponendolo si ha $u=-\frac{1}{3}$. Dunque se $\alpha>0$ ma $\alpha\neq\frac{1}{2}$ la soluzione generale reale sarà del tipo $y(t)=a\,e^{2\alpha t}+b\,e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{3}\alpha t)+c\,e^{-\alpha t}\sin(\sqrt{3}\alpha t)+\frac{1}{8(\alpha^6+1)}(\cos 2t-\alpha^3\sin 2t)+\frac{1}{8\alpha^3-1}\,e^t$ per $a,b,c\in\mathbb{R}$, mentre se $\alpha=\frac{1}{2}$ sarà del tipo $y(t)=a\,e^t+b\,e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+c\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{65}(8\cos 2t-\sin 2t)-\frac{1}{3}\,t\,e^t$ per $a,b,c\in\mathbb{R}$.







1. Ex. 1. **2.** Exx. 2-3.