Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (24/01/2017)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2016/17

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (2xy - 3z^2 + yz + x^2,\, x + y + z)$.

(a) Detta Γ la curva di livello passante per il punto $P(1, 0, -1)$, mostrare che Γ è regolare all'intorno di P e determinarne ivi una parametrizzazione locale e la retta tangente affine. In generale, quali curve di livello di g sono regolari?

(b) Determinare i punti stazionari su Γ di $f(x, y, z) = 4z - y$ e la loro natura.

(c) Provare che Γ è una curva compatta in $\mathbb{R}^3$, indicando gli estremi assoluti di f su essa.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \le y \le x\,,\ 2r(x - y) \le x^2 + y^2 \le 4r^2\}$ (ove $r > 0$).

(a) Disegnare A, descriverlo polarmente e calcolarne, con opportuni integrali, area e baricentro.

(b) Calcolare (se finito) $\displaystyle\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$. In generale, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $(x^2 + y^2)^\alpha \in L^1(A)$?

3. Nello spazio cartesiano si disegni A dell'Ex. 2 nel piano (x, z), e siano E il solido nel primo ottante ottenuto ruotando A di un quarto di giro attorno l'asse z, e S la parte sferica della superficie di E.

(a) Calcolare il volume di E e l'area totale della sua superficie.

(b) Per il campo $F = (0, z, -y)$ calcolare $\displaystyle\oint_{\partial S} F \cdot ds$ sia con la formula di Stokes che direttamente.

(c) Verificare il teorema di Gauss per il corpo E e il campo F.

4. Si abbia l'equazione differenziale $y' \sin t = \sqrt{y^2 + 2}$ nella funzione incognita scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni, e sulla loro crescenza? Vi sono soluzioni costanti? Soluzioni su tutto $\mathbb{R}$? Se $y(t)$ è soluzione su un intervallo, lo saranno anche $y(-t)$ oppure $-y(-t)$ sull'intervallo opposto?

(b) Determinare tutte le soluzioni su $]0, \pi[$, in particolare quella tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5. Si abbiano le curve $(x(t), y(t))$ tali che $(\dot{x}, \dot{y}) = ((\alpha - 1)x + y,\, (\alpha + 1)x - y + \frac{e^{-t}}{e^t+2})$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Determinare tutte le curve per $\alpha = 0$, in particolare quella che per $t = 0$ passa per l'origine.

(b) Calcolare e^{A_α}, ove A_α è la matrice dei coefficienti della parte omogenea del sistema per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (24/01/2017) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y,z) = (2xy - 3z^2 + yz + x^2,\, x + y + z)$ ha matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+y) & 2x+z & y-6z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; g non è sommersiva nei punti in cui lo jacobiano ha rango < 2, e questo accade quando $2(x+y) = 2x+z = y-6z$, ovvero quando $z = 2y$ e $2x = -13y$, ovvero in tutti e soli i punti del tipo $P_\alpha = (13\alpha, -2\alpha, -4\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ (retta per l'origine): dunque la curva di livello $g(P_\alpha) = (43\alpha^2, 7\alpha)$ è singolare nel suo solo punto P_α, regolare in tutti gli altri. Il nostro punto $P(1,0,-1)$ non è tra quelli del tipo P_α, dunque la sua curva di livello $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = (-2,0)\}$ è regolare: lo jacobiano in P è $\mathsf{J}_g(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e la retta tangente affine è data da $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero dal sistema $\begin{cases} 2x+y+6z+4=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Per la parametrizzazione locale, per il Dini all'intorno di A si può esplicitare $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} x(-1) \\ y(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \dot{x}(-1) \\ \dot{y}(-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si può anche derivare il sistema di Γ $\begin{cases} 2xy - 3z^2 + yz + x^2 = 0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ rispetto a z, ottenendo $\begin{cases} 2\dot{x}y + 2x\dot{y} - 6z + \dot{y}z + y + 2x\dot{x} = 0 \\ \dot{x} + \dot{y} + 1 = 0 \end{cases}$ che per $z = -1$ dà $\begin{cases} 0 + 2\dot{y}(0) + 6 - \dot{y}(0) + 0 + 2\dot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) + \dot{y}(0) + 1 = 0 \end{cases}$ ovvero di nuovo $\begin{cases} \dot{x}(0) = -5 \\ \dot{y}(0) = 4 \end{cases}$. Per uso futuro, derivando ancora si ha $\begin{cases} 2\ddot{x}y + 4\dot{x}\dot{y} + 2x\ddot{y} - 6 + \ddot{y}z + \dot{y} + \dot{y} + 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} = 0 \\ \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \end{cases}$ che per $z = -1$ dà $\begin{cases} \ddot{x}(0) = 28 \\ \ddot{y}(0) = -28 \end{cases}$.

(b) La condizione di Lagrange si traduce nel fatto che la matrice 3×3 le cui prime due righe sono quelle di $\mathsf{J}_g(x,y,z)$ e la terza il gradiente $\nabla f = (0,-1,4)$ abbia determinante nullo, e a conti fatti questo dà l'equazione $2x + 9y + 2z = 0$ che, messa in sistema con le due che definiscono Γ dà come soluzioni i due punti opposti $P(1,0,-1)$ e $Q(-1,0,1)$. Per vedere il carattere di P basta comporre f con la parametrizzazione di Γ attorno P, ottenendo $F(z) := f(x(z), y(z), z) = 4z - y(z)$: si ha $F'(z) = 4 - y'(z)$ e dunque $F'(-1) = 4 - y'(-1) = 4 - 4 = 0$ come previsto, ed essendo $F''(z) = -y''(z)$ si ha $F''(-1) = -y''(-1) = 28 > 0$, il che ci dice che P è punto di minimo locale stretto per f su Γ, con $f(P) = -4$. Considerazioni simili mostrano che Q è punto di massimo locale stretto per f su Γ, con $f(Q) = 4$.

(c) Sostituendo $z = -x - y$ in $2xy - 3z^2 + yz + x^2 = -2$ si ottiene $2x^2 + 5xy + 4y^2 = 2$: dunque la proiezione di Γ sul piano orizzontale (x,y) è un'ellisse (si noti che $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$) centrata nell'origine (mancano i termini di primo grado) ma ruotata rispetto agli assi coordinati: questo mostra che x e y sono limitati, e tale sarà di conseguenza anche $z = -x - y$. Dunque la curva Γ, chiusa perché insieme di livello di una funzione continua, è anche compatta, e per Weierstrass la funzione continua f dovrà assumere su Γ degli estremi assoluti che pe quanto visto in (b) saranno necessariamente i valori -4 e 4 assunti rispettivamente nei punti P e Q.

2. (a) (Figura 2) Il disegno di $A = \{(x,y) : 0 \le y \le x\,,\ 2r(x-y) \le x^2 + y^2 \le 4r^2\}$ evidenzia che la bisettrice $y = x$ è tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 2r(x-y)$ nell'origine: sostituendo le coordinate polari $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ nelle disequazioni che definiscono A si ottiene la sua espressione in coordinate polari $A' = \{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 2r(\cos\theta - \sin\theta) \le \rho \le 2r\}$. Usando la formula per il calcolo dell'area in coordinate polari si ottiene $\operatorname{Area} A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((2r)^2 - (2r(\cos\theta - \sin\theta))^2)\,d\theta = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - (\cos\theta - \sin\theta)^2)\,d\theta = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\,d\theta = r^2[-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = r^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2r(\cos\theta - \sin\theta)}^{2r} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,[\frac{1}{3}\rho^3]_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r}\,d\theta = \frac{8}{3}r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,(1 - (\cos\theta - \sin\theta)^3)\,d\theta = \frac{8}{3}r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta + \cos\theta\sin^3\theta - 3\cos^2\theta\sin^2\theta + 3\cos^3\theta\sin\theta - \cos^4\theta)\,d\theta =$ [posto $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ nel terzo termine] $\frac{8}{3}r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta + \cos\theta\sin^3\theta - 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta\sin\theta + 2\cos^4\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}r^3[\sin\theta + \frac{1}{4}\sin^4\theta - 3\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) - \frac{3}{4}\cos^4\theta + 2\frac{1}{4}(\cos^3\theta\sin\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3}r^3[(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}))) - (-\frac{3}{4})] = \frac{1}{6}r^3(8\sqrt{2} + 1 - 3(\pi + 2) - 3 + 2 + 12) = \frac{1}{6}r^3(8\sqrt{2} - 3\pi - 6 + 12) = (1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2})r^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\operatorname{Area} A}\int_A x\,dx\,dy = (1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2})r$; calcoli simili danno $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = (1 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2})r^3$, da cui $y_G = \frac{1}{\operatorname{Area} A}\int_A y\,dx\,dy = (1 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2})r$.

(b) Passando in coordinate polari, $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è integrabile su A se e solo se la funzione $\rho^{-1}\,\rho = 1$ è integrabile su A', il che è evidentemente vero (risulta l'area di A' nel piano (ρ,θ)): il valore dell'integrale è dunque tale area, che è $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - (\cos\theta - \sin\theta))\,d\theta \int_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r} d\rho = 2r\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - (\cos\theta - \sin\theta))\,d\theta = 2r[\theta - \sin\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(1 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4})r$. • Analogamente $(x^2+y^2)^\alpha$ è integrabile su A se e solo se la funzione $\rho^{2\alpha}\,\rho = \rho^{2\alpha+1}$ è integrabile su A'; e, poiché la funzione è positiva, per Tonelli e Fubini basterà calcolare l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r} \rho^{2\alpha+1}\,d\rho$ e vedere cosa accade. Se $\alpha = -1$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r} \rho^{-1}\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2r - \log(2r(\cos\theta - \sin\theta)))\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{2r}{2r(\cos\theta-\sin\theta)}\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$, integrale che converge nell'unico punto in cui è generalizzato (ovvero $\theta = \frac{\pi}{4}$) perché sappiamo che $\log t$ è integrabile in $t = 0$. Se invece $\alpha \ne -1$ si ottiene $\frac{1}{2(\alpha+1)}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\rho^{2(\alpha+1)}]_{2r(\cos\theta-\sin\theta)}^{2r}\,d\theta = \frac{(2r)^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - (\cos\theta - \sin\theta)^{2(\alpha+1)})\,d\theta$, integrale che, essendo $\cos\theta - \sin\theta \sim^*_{\frac{\pi}{4}^-} \frac{\pi}{4} - \theta$, per poter convergere in $\theta = \frac{\pi}{4}$ richiede che $2(\alpha+1) > -1$, ovvero che $\alpha > -\frac{3}{2}$. Ricapitolando, l'integrale $\int_A (x^2+y^2)^\alpha\,dx\,dy$ converge per $\alpha > -\frac{3}{2}$.

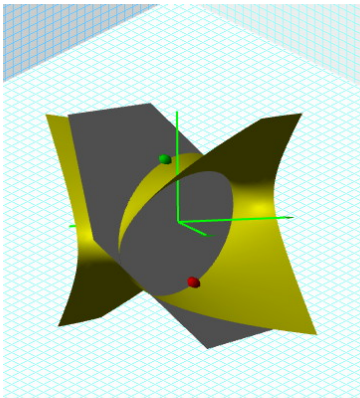
3. (a) (Figura 3) Dopo aver risolto l'Ex. 2, con Guldino si calcola comodamente $\operatorname{Vol} E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2})r^3$. • La porzione sferica S della superficie esterna si parametrizza tramite $(2r\cos\theta\sin\varphi, 2r\sin\theta\sin\varphi, 2r\cos\varphi)$ nelle coordinate sferiche (θ,φ) con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ con elemento d'area $d\sigma = (2r)^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$, dunque ha

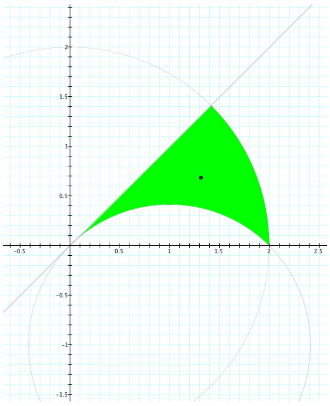
area $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4r^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} 4r^2[-\cos\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\,\pi r^2$. La porzione conica superiore C si parametrizza in coordinate cilindriche (ρ, θ) tramite $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$ ove $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \rho \le \sqrt{2}\,r$; l'elemento d'area è $\sqrt{2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$, da cui l'area risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\,r} \sqrt{2}\,\rho\, d\rho = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}[\frac{1}{2}\rho^2]_0^{\sqrt{2}\,r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^2$ (che in effetti è il quarto di cono della geometria elementare). Per la porzione toroidale inferiore T, iniziamo col parametrizzare la circonferenza $x^2 + z^2 = 2(x - z)$ nel piano (x, z) tramite $(x, z) = (r + \sqrt{2}\,r\sin\alpha, -r + \sqrt{2}\,r\cos\alpha)$, usando l'angolo α formato con la verticale (a noi interessa il tratto $-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$): allora T è parametrizzata da $((r+\sqrt{2}\,r\sin\alpha)\cos\theta, (r+\sqrt{2}\,r\sin\alpha)\sin\theta, -r+\sqrt{2}\,r\cos\alpha)$ con $-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; l'elemento d'area risulta $d\sigma = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}\sin\alpha)\, r^2\, d\alpha\, d\theta$, dunque l'area è $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}(1+\sqrt{2}\sin\alpha)\, r^2\, d\alpha = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} r^2[\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 r^2$ (a questo valore si arrivava più agevolmente con Guldino: T è creato dalla rotazione del quarto di circonferenza nel piano (x, z), la cui lunghezza è $\frac{1}{4}(2\pi\sqrt{2}\,r)$ e il cui baricentro ha ascissa r). L'area totale della superficie esterna di E è la somma del doppio dell'area di A con le aree di S, C e T , e risulta $(2 + \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{4})\, r^2$.
(b) Osserviamo che $F = (0, z, -y)$ è il consueto campo piano circolare: è parallelo al piano (y, z), e le sue linee di campo in un certo piano $x = k$ sono le circonferenze centrate nel punto $(k, 0, 0)$ percorse in senso orario. • Il rotore è $\nabla \times F = (-2, 0, 0)$, e usando per S la parametrizzazione sferica già vista sopra si ha $\oint_{\partial S} F \cdot ds = \Phi_S(\nabla \times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} -2 & -2r\sin\theta\sin\varphi & 2r\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & 2r\cos\theta\sin\varphi & 2r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2r\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^2\varphi\, d\varphi = 8r^2[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\, [\frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = (\pi + 2)r^2$. • L'orientazione associata del bordo ∂S è quella oraria (guardando S di fronte): percorriamo ∂S dal punto $(2r, 0, 0)$ in senso orario. Il primo tratto ∂S_1 è l'arco di circonferenza sul piano $y = 0$ percorso all'insù, ma per $y = 0$ il campo $F = (0, z, 0)$ è parallelo all'asse y e dunque ortogonale a ∂S_1, da cui $\int_{\partial S_1} F \cdot ds = 0$. Il secondo ∂S_2 è l'arco di circonferenza sul piano $z = \sqrt{2}\,r$ (dunque $\varphi \equiv \frac{\pi}{4}$) percorso verso destra; ∂S_2 è parametrizzato da $(\sqrt{2}\,r\cos\theta, \sqrt{2}\,r\sin\theta, \sqrt{2}\,r)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, dunque $\int_{\partial S_2} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \sqrt{2}\,r, -\sqrt{2}\,r\sin\theta) \cdot (-\sqrt{2}\,r\sin\theta, \sqrt{2}\,r\cos\theta, 0)\, d\theta = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 2r^2$. Il terzo ∂S_3 è l'arco di circonferenza sul piano $x = 0$ (dunque $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$) percorso all'ingiù; ∂S_3 è parametrizzato da $(0, 2r\sin\varphi, 2r\cos\varphi)$ con $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, dunque $\int_{\partial S_3} F \cdot ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (0, 2r\cos\varphi, -2r\sin\varphi) \cdot (0, 2r\cos\varphi, -2r\sin\varphi)\, d\theta = 4r^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi r^2$. Infine, il quarto ∂S_4 è l'arco di circonferenza sul piano $z = 0$ (dunque $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$) percorso verso sinistra; ma per $z = 0$ il campo $F = (0, 0, -2y)$ è parallelo all'asse z e dunque ortogonale a ∂S_4, da cui $\int_{\partial S_4} F \cdot ds = 0$. Sommando i quattro contributi si ha dunque $\oint_{\partial S} F \cdot ds = 0 + 2r^2 + \pi r^2 + 0 = (\pi + 2)r^2$, come già calcolato in precedenza.
(c) Il campo F ha divergenza nulla, dunque per Gauss tale deve essere anche il flusso totale di F uscente dalla superficie esterna ∂E: calcoliamolo su ciascuno dei cinque pezzi che la compongono. In realtà si vede facilmente che il flusso di$F$ è nullo attraverso la porzione di ∂E sul piano $x = 0$ (infatti F è parallelo a tale piano) e attraverso a porzione sferica S (infatti, per come è fatto, F è sempre tangente a S). Il flusso attraverso A (la porzione di ∂E sul piano $y = 0$) è $\int_A (0, z, 0) \cdot (0, -1, 0)\, dx\, dz = -\int_A z\, dx\, dz = -(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2})r^3$ (calcolo già effettuato nell'Ex. 2). I flussi uscenti dalle porzioni conica C e toroidale T, usando le parametrizzazioni viste prima (normali associate entranti), sono rispettivamente $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\,r} \det \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta & 1 & 0 \end{pmatrix} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\,r} 2\rho^2 \sin\theta\, d\rho = 2[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\, [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{\sqrt{2}\,r} = -\frac{4\sqrt{2}}{3} r^3$ e $\Phi_T(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \det \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\,r\cos\alpha\cos\theta & -(r + \sqrt{2}\,r\sin\alpha)\sin\theta \\ -r + \sqrt{2}\,r\cos\alpha & \sqrt{2}\,r\cos\alpha\sin\theta & (r + \sqrt{2}\,r\sin\alpha)\cos\theta \\ -(r + \sqrt{2}\,r\sin\alpha)\sin\theta & -\sqrt{2}\,r\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} d\alpha = \sqrt{2}\,r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{2}\sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)\, d\alpha = \sqrt{2}\,r^3[\sin\alpha - \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2\alpha)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,r^3\,\frac{\sqrt{2}}{4}(\pi + 2) = \frac{1}{2}(\pi + 2)r^3$. E, in effetti, sommando il flusso di F uscente su ciascuna delle porzioni di ∂E si riottiene zero, come previsto.

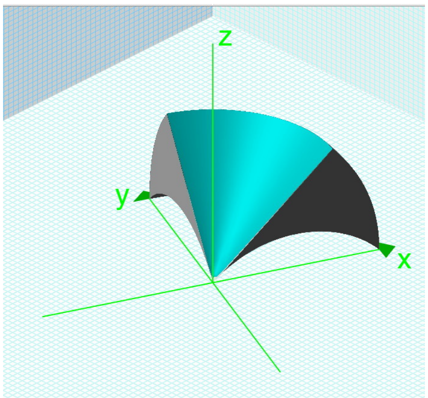
4. (a) (Figura 4) Le soluzioni dell'equazione $y' \sin t = \sqrt{y^2 + 2}$ non possono essere definite per $t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$: infatti in tali punti si avrebbe $0 = \sqrt{y(k\pi)^2 + 2} \ge \sqrt{2}$, assurdo. Ciò esclude a priori la possibilità di soluzioni su tutto $\mathbb{R}$ (in particolare di soluzioni costanti) e mostra che l'equazione è equivalente alla sua forma normale $y' = f(t, y) = \frac{\sqrt{y^2+2}}{\sin t}$, da cui si deduce che le soluzioni sono strettamente (de)crescenti sugli intervalli $]k\pi, (k + 1)\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$ (dis)pari. Poiché f è di classe $\mathcal{C}^1$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) per dati del tipo (t_0, y_0) con $t_0 \ne k\pi$; inoltre, poiché $|\frac{\partial f}{\partial y}| = |\frac{y}{\sqrt{y^2+2}\,\sin t}| = \frac{|y|}{\sqrt{y^2+2}} \frac{1}{|\sin t|} \le \frac{1}{|\sin t|}$ (infatti $|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{y^2 + 2}$) e dunque è limitata su ogni compatto di ciascun intervallo $]k\pi, (k + 1)\pi[$ in t, è assicurata anche l'esistenza globale delle soluzioni massimali su ogni intervallo $]k\pi, (k + 1)\pi[$. Infine, se $y(t)$ è soluzione su un intervallo I, detta $z(t) := y(-t)$ (sull'intervallo opposto $-I$) si ha $z'(t)\sin t = -y'(-t)\sin t = y'(-t)\sin(-t) = \sqrt{y(-t)^2 + 2} = \sqrt{z(t)^2 + 2}$ e dunque anche $z(t)$ è soluzione: in altre parole la famiglia delle soluzioni è simmetrica rispetto all'asse y.
(b) (Figura 4) Separando le variabili si ottiene $\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\, dy = \frac{1}{\sin t}\, dt$: poiché $\int \frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}}y)^2+1}}\, dy = \operatorname{settsinh}(\frac{1}{\sqrt{2}}y) = \log(\frac{1}{\sqrt{2}}y + \sqrt{\frac{1}{2}y^2 + 1})$ e $\int \frac{1}{\sin t}\, dt =$ (posto $\tau = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, ovvero $t = 2\operatorname{arctg}\tau$) $\int \frac{1+\tau^2}{2\tau} \frac{2}{1+\tau^2}\, d\tau = \int \frac{1}{\tau}\, d\tau = \log(\operatorname{tg}\frac{t}{2})$ si ottiene $\log(\frac{1}{\sqrt{2}}y + \sqrt{\frac{1}{2}y^2 + 1}) = \log(\operatorname{tg}\frac{t}{2}) + k$, ovvero (esponenziando e poi moltiplicando per $\sqrt{2}$ ambo i membri) $y + \sqrt{y^2 + 2} = h\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ con $h > 0$; perciò $\sqrt{y^2 + 2} = h\operatorname{tg}\frac{t}{2} - y$, che sotto la condizione necessaria $y \le h\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ equivale a $y^2 + 2 = h^2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} + y^2 - 2h\,y\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, ovvero a $y(t) = \frac{h^2\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2}{2h\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$ con $h > 0$ (si noti che per $t \in]0, \pi[$ e $h > 0$ vale

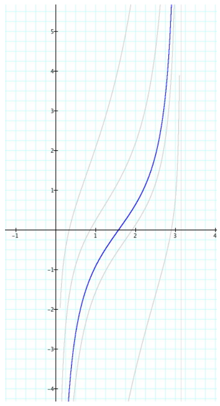
$y(t) \le \frac{h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{2\,h \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} h \operatorname{tg} \frac{t}{2} < h \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, dunque la suddetta condizione necessaria è soddisfatta). In particolare, imponendo che $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ si ottiene $0 = \frac{h^2-2}{2\,h}$ ovvero $h = \sqrt{2}$, dunque la soluzione cercata è $y(t) = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 2}{2\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \sqrt{2}\, \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = -\sqrt{2} \operatorname{cotg} t$.

5. Il sistema piano $(\dot{x}, \dot{y}) = ((\alpha-1)x+y,\, (\alpha+1)x-y+\frac{e^{-t}}{e^t+2})$ è lineare a coefficienti costanti, non omogeneo, e in forma matriciale può essere scritto come $\dot{Y} = A_\alpha Y + b(t)$ ove $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 \\ \alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-t}}{e^t+2} \end{pmatrix}$. (a) Per $\alpha = 0$ il sistema diventa $(\dot{x}, \dot{y}) = (-x+y,\, x-y+\frac{e^{-t}}{e^t+2})$. La matrice $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori 0 e -2, con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: una risolvente è dunque $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}$. Per il metodo di variazione delle costanti una soluzione particolare sarà del tipo $\Phi(t)\, c(t)$ con $c'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-t}}{e^t+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{e^t}{e^t+2} \\ \frac{e^{-t}}{e^t+2} \end{pmatrix}$, che integrata dà $c(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\log(e^t+2) \\ \frac{1}{8}(\log(e^t+2) - t - 2e^{-t}) \end{pmatrix}$. La soluzione generale è dunque $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + c(t))$ al variare di $a, b \in \mathbb{C}$; e imponendo la condizione iniziale si ricava $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -c(0) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4\log 3 \\ 2 - \log 3 \end{pmatrix}$.
(b) La matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 \\ \alpha+1 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori α e -2, con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -(\alpha+1) \end{pmatrix}$: dunque se $\alpha \ne -2$ una risolvente sarà $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & e^{-2t} \\ e^{\alpha t} & -(\alpha+1)e^{-2t} \end{pmatrix}$, e perciò la matrice esponenziale risulta $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & e^{-2t} \\ e^{\alpha t} & -(\alpha+1)e^{-2t} \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha+2} \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+2} \begin{pmatrix} (\alpha+1)e^{\alpha t} + e^{-2t} & e^{\alpha t} - e^{-2t} \\ (\alpha+1)(e^{\alpha t} - e^{-2t}) & e^{\alpha t} + (\alpha+1)e^{-2t} \end{pmatrix}$ (si noti che per $t = 0$ si ottiene la matrice identica). Se invece $\alpha = -2$ la matrice $N = A_{-2} - (-2)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è nilpotente, e dunque, essendo $A_{-2} = (-2)\mathbf{1} + N$, si ricava $e^{t\,A_{-2}} = e^{-2t}(\mathbf{1} + tN) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-2t} & t\,e^{-2t} \\ -t\,e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} \end{pmatrix}$. Infine, per avere e^A basterà porre $t = 1$.









1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3.** Ex. 3. **4.** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (13/02/2017)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2016/17

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia S la superficie ellissoidale di centro $(2,-1,0)$ e semiassi $\sqrt{2}$, 2 e 2 lungo le direzioni coordinate.

(a) Esprimere S in forma cartesiana e parametrica attorno al suo punto $P(1,0,-1)$, e calcolare in due modi lo spazio tangente affine in tal punto.

(b) Detta D la regione dei punti contenuti all'interno o su S e tali che $2x-y \geq 4$, spiegare perché D è compatta e determinare gli estremi assoluti su D della funzione $f(x,y,z) = 2x - y + z$.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \min(y, y^{-1})\}$.

(a) Per $a > 1$ calcolare area e momento d'inerzia di $A \cap \{y \leq a\}$ rispetto alla retta $x = y$.[(1)]

(b) Calcolare (se finiti) gli integrali su A di $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{y-1}$. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha x^α, $y^\alpha \in L^1(A)$?

3. Nello spazio cartesiano si disegni $E = \{(x,y,z) :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq 3r-2x-y\}$.

(a) Calcolare il volume di E e l'area totale della superficie esterna ∂E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (2x,\, 0,\, y - z)$.

(c) Verificare la formula di Green per F e la porzione di ∂E nel piano $y = 0$.

4. Si abbia l'equazione differenziale $y^3 y'' = 2 - \alpha y'$ nella funzione incognita scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Ve ne sono di rettilinee? Vi sono simmetrie, invarianze temporali? Soluzioni diverse possono coincidere in un punto?

(b) Nel caso $\alpha = 0$ determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

5. Determinare tutte le soluzioni $y(t)$ con $t > 0$ dell'equazione lineare $2t^2y'' - ty' + y = \sqrt{t}$, sapendo che due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata sono del tipo $y(t) = t^\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

[(1)] Si assuma che la densità superficiale di massa sia una costante $\mu > 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (13/02/2017) – Soluzioni.

1. (a) La superficie ellissoidale S di centro (x_0, y_0, z_0) e semiassi a, b e c lungo le direzioni coordinate ha equazione cartesiana globale $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$, dunque nel nostro caso abbiamo $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$, ovvero $g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 5 = 0$. Si ha $\nabla g = (4x-8,\ 2y+2,\ 2z)$ da cui, nel punto $P(1,0,-1)$, $\nabla g(P) = (-4,2,-2) = -2(2,-1,1)$, dunque per Dini si può esplicitare una qualsiasi delle tre coordinate rispetto alle altre due: ad esempio $z(x,y)$ con $z(1,0) = -1$ e $\nabla z = (\frac{\partial z}{\partial x}(1,0), \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)) = (-\frac{2}{1}, -\frac{-1}{1}) = (-2,1)$, e qui si può anche ricavare esplicitamente $z(x,y) = -\sqrt{8x - 2y - 2x^2 - y^2 - 5}$. Il piano tangente affine si può esprimere o tramite $\nabla g(P) \cdot (x-1, y-0, z-(-1)) = 0$ oppure tramite $z = -1 + (-2,1) \cdot (x-1, y-0)$, dando in entrambi i casi $2x - y + z = 1$.

(b) (Figura 1) La regione D dei punti contenuti all'interno o su S e tali che $h(x,y,z) = 2x - y - 4 \geq 0$ è compatta perché chiusa (definita dalle disequazioni larghe $g(x,y,z) \leq 0$ e $h(x,y,z) \geq 0$) e limitata (già lo era l'ellissoide racchiuso da S); dunque per Weierstrass la funzione continua $f(x,y,z) = 2x - y + z$ ammetterà estremi assoluti su D, e per determinarli cerchiamo i punti stazionari di f su ciascuna delle varietà componenti in cui possiamo decomporre D, ovvero D_0 (punti interni), D_1' (la porzione di S con $h(x,y,z) > 0$), D_1'' (la porzione del piano $h(x,y,z) = 0$ con $g(x,y,z) < 0$) e D_2 (l'ellisse data dall'intersezione tra S e piano, ovvero dal sistema $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$). • Poiché $\nabla f = (2,-1,1) \neq (0,0,0)$ non vi sono punti stazionari di f in D_0. • Per D_1', con Lagrange la condizione da imporre è che il rango della matrice $\begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-8 & 2y+2 & 2z \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sia < 2, ovvero che $-4x + 8 - 4y - 4 = 2y + 2 + 2z = 0$, ovvero che $y = 1 - x$ e $z = -y - 1 = x - 2$ che sostituite in $g(x,y,z) = 0$ danno $2x^2 + (1-x)^2 + (x-2)^2 - 8x + 2(1-x) + 5 = 0$, ovvero $x^2 - 4x + 3 = 0$ con soluzioni $P(1,0,-1)$ e $Q(3,-2,1)$ delle quali l'unica accettabile per la condizione $h(x,y,z) > 0$ è Q. • Per D_1'', sempre per Lagrange la condizione da imporre è che il rango della matrice $\begin{pmatrix} \nabla h \\ \nabla f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sia < 2, il che è impossibile (la matrice è costante di rango 2): dunque non vi sono punti stazionari di f in D_1''. Alternativamente, parametrizzando D_1'' con $(x, 2x-4, z)$ si ha $F(x,z) := f(x, 2x-4, z) = z + 4$, e vale $\nabla F = (0,1) \neq (0,0)$. • Infine, per D_2 per Lagrange la condizione da imporre è che $\det \begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla h \\ \nabla f \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4x-8 & 2y+2 & 2z \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $x + y = 1$, che messa in sistema con $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ dà i due punti stazionari $L^{\pm}(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{33}}{3})$. • Da quanto visto, la questione degli estremi assoluti di f su D si gioca tra Q, L^+ e L^-: essendo $f(Q) = 9$, $f(L^+) = 4 + \frac{\sqrt{33}}{3} \sim 5{,}9$ e $f(L^-) = 4 - \frac{\sqrt{33}}{3} \sim 2{,}1$, il massimo assoluto di f su D è 9 (assunto in Q) e il minimo è $4 - \frac{\sqrt{33}}{3}$ (assunto in L^-).

2. (a) (Figura 2) L'area di $A_a := A \cap \{y \leq a\}$ (ove $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \min(y, y^{-1})\}$ e $a \geq 1$) è data, integrando per y-fili, da $\int_0^1 dy \int_0^y dx + \int_1^a dy \int_0^{\frac{1}{y}} dx = \frac{1}{2} + \log a$. • La distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta $ax + by + c = 0$ è data dalla nota formula $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, pertanto il momento d'inerzia di A_a rispetto alla retta $x = y$ risulta $\int_{A_a} \mu(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}})^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\mu\big(\int_{A_a} (x-y)^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\mu \int_0^1 dy \int_0^y (x-y)^2\, dx + \int_1^a dy \int_0^{\frac{1}{y}} (x-y)^2\, dx\big) = \frac{1}{2}\mu\big(\int_0^1 [\frac{1}{3}(x-y)^3]_{x=0}^{x=y}\, dy + \int_1^a [\frac{1}{3}(x-y)^3]_{x=0}^{x=\frac{1}{y}}\, dy\big) = \frac{1}{6}\mu\big(\int_0^1 y^3\, dy + \int_1^a ((\frac{1}{y} - y)^3 - (-y)^3)\, dy\big) = \frac{1}{6}\mu([\frac{1}{4}y^4]_0^1 + [-\frac{1}{2}y^{-2} - 3\log y + \frac{3}{2}y^2]_1^a) = \frac{1}{6}\mu(\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4} - 3\log a - \frac{1}{2}a^{-2})$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono positive su A, dunque per Tonelli e Fubini basta provare a calcolare un integrale iterato: procedendo stavolta per x-fili si ha $\int_0^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\, dy = \int_0^1 \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - x)\, dx$ che diverge a $+\infty$ (la funzione integranda è $\sim_{0^+} x^{-2}$), mentre $\int_0^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{y}\, dy = \int_0^1 (\log\frac{1}{x} - \log x)\, dx = -2\int_0^1 \log x\, dx = -2[x(\log x - 1)]_0^1 = -2((-1) - (0)) = 2$. Invece $\frac{1}{y-1}$ cambia segno su A: proviamo allora a valutarne un integrale iterato su una porzione misurabile di A dove $\frac{1}{y-1}$ ha segno costante, ad esempio sul triangolo $\{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ ove è < 0: lì per y-fili si ha $\int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{y-1}\, dx = \int_0^1 \frac{y}{y-1}\, dy = -\infty$ (la funzione integranda è $\sim_{1^-} \frac{1}{y-1}$), e pertanto $\frac{1}{y-1}$ non è integrabile su A (ricordiamo che se una funzione è integrabile su un insieme misurabile lo deve essere anche su ogni suo sottoinsieme misurabile). • Le funzioni x^α e y^α sono positive su A, dunque per Tonelli e Fubini basta provare a calcolare un integrale iterato. Per x-fili si ha $\int_0^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} x^\alpha\, dy = \int_0^1 x^\alpha(\frac{1}{x} - x)\, dx = \int_0^1 (x^{\alpha-1} - x^{\alpha+1})\, dx$: la funzione integranda è $\sim_{0^+} x^{\alpha-1}$, dunque la condizione d'integrabilità è $\alpha - 1 > -1$ ovvero $\alpha > 0$, e in tal caso l'integrale vale $[\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}]_0^1 = \frac{2}{\alpha(\alpha+2)}$. E sempre per x-fili si ha $\int_0^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} y^\alpha\, dy$: il caso $\alpha = -1$ l'abbiamo già esaminato, mentre se $\alpha \neq -1$ si ha $\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 (x^{-\alpha-1} - x^{\alpha+1})\, dx$. Confrontando gli esponenti si ha $\alpha + 1 > -\alpha - 1$ se e solo se $\alpha > -1$: ricordando che in 0^+ si ha $x^\beta = o(x^\gamma)$ se e solo se $\beta > \gamma$, la funzione integranda per $\alpha > -1$ è $\sim_{0^+} x^{-\alpha-1}$ (e dunque la condizione d'integrabilità è $-\alpha - 1 > -1$ ovvero $\alpha < 0$) mentre per $\alpha < -1$ è $\sim_{0^+} -x^{\alpha+1}$ (e dunque la condizione d'integrabilità è $\alpha + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -2$). Pertanto $y^\alpha \in L^1(A)$ se e solo se $-2 < \alpha < 0$, e in tal caso l'integrale vale 2 quando $\alpha = -1$, e negli altri casi vale $\frac{1}{\alpha+1}[-\frac{1}{\alpha}x^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}((-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+2}) - (0)) = -\frac{2}{\alpha(\alpha+2)}$ (che è > 0 quando $-2 < \alpha < 0$, e vale 2 per $\alpha = -1$).

3. (a) (Figura 3) Per la superficie esterna del solido $E = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq 3r - 2x - y\}$ indichiamo con A' e A'' le porzioni rispettivamente sui piani $y = 0$ e $x = 0$, con B la base sul piano orizzontale, con C la porzione cilindrica e con D la porzione piana obliqua superiore. • Calcoliamo il volume di E in due modi, per (x,y)-fili e per x-fette. Per (x,y)-fili esso è $\mathrm{Vol}(E) = \int_B (3r - 2x - y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r (3r - 2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{3}{2}r\rho^2 -$

$\frac{1}{3}(2\cos\theta+\sin\theta)\rho^3]_0^r\,d\theta = r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}(2\cos\theta+\sin\theta))\,d\theta = r^3[\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{3}(2\sin\theta-\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^3((\frac{3\pi}{4}-\frac{2}{3})-(\frac{1}{3})) = (\frac{3\pi}{4}-1)r^3$. Alternativamente, per un fissato $0\le x\le r$ la x-fetta è un trapezio rettangolo di basi $3r-2x$ e $3r-2x-\sqrt{r^2-x^2}$ e altezza $\sqrt{r^2-x^2}$, dunque di area $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}((3r-2x)+(3r-2x-\sqrt{r^2-x^2})) = \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}(6r-4x-\sqrt{r^2-x^2})$, e perciò risulta $\mathrm{Vol}(E) = \int_0^r \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}(6r-4x-\sqrt{r^2-x^2})\,dx =$ [posto $x=r\cos\theta$, da cui $dx=-r\sin\theta\,d\theta$] $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta(6r-4r\cos\theta-r\sin\theta)\,r\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(6\sin^2\theta-4\cos\theta\sin^2\theta-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}r^3[3(\theta-\sin\theta\cos\theta)-\frac{4}{3}\sin^3\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}r^3((3(\frac{\pi}{2})-\frac{4}{3})-(1-\frac{1}{3})) = (\frac{3\pi}{4}-1)r^3$, come già trovato. • A' e A'' sono trapezi rettangoli di aree rispettivamente $\frac{1}{2}r(3r+r)=2r^2$ e $\frac{1}{2}r(3r+2r)=\frac{5}{2}r^2$, mentre B è un quarto di cerchio di area $\frac{1}{4}\pi r^2$. La porzione C è parametrizzata da (θ,z) tramite $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ e $0\le z\le 3r-2r\cos\theta-r\sin\theta$; l'elemento d'area risulta $d\sigma = r\,d\theta\,dz$, e dunque $\mathrm{Area}(C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3r-2r\cos\theta-r\sin\theta} r\,dz = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3-2\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta = r^2[3\theta-2\sin\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2((\frac{3\pi}{2}-2)-(1)) = 3(\frac{\pi}{2}-1)\,r^2$. Infine, notando che l'angolo tra la normale $(2,1,1)$ al piano $z=3-2x-y$ e la normale $(0,0,1)$ al piano orizzontale ha coseno $\frac{(2,1,1)\cdot(0,0,1)}{\|(2,1,1)\|\,\|(0,0,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, per la legge del coseno si ha $\mathrm{Area}(D) = \sqrt{6}\,\mathrm{Area}(B) = \frac{\sqrt{6}}{4}\pi\,r^2$. L'area totale della superficie esterna di E è dunque $2r^2+\frac{5}{2}r^2+\frac{1}{4}\pi\,r^2+3(\frac{\pi}{2}-1)\,r^2+\frac{\sqrt{6}}{4}\pi\,r^2 = (\frac{3}{2}+\frac{(7+\sqrt{6})\pi}{4})\,r^2$.

(b) Poiché il campo $F=(2x,\,0,\,y-z)$ ha divergenza $\nabla\cdot F\equiv 1$, il teorema di Gauss dice che il flusso totale $\Phi_{\partial E}(F)$ di F uscente dalla superficie esterna ∂E è pari al già calcolato volume $\mathrm{Vol}(E) = (\frac{3\pi}{4}-1)r^3$. D'altra parte il campo F è ovunque parallelo al piano (x,z), e sul piano (y,z) (dato da $x=0$) è parallelo all'asse z: questo ci dice che $\Phi_{A'}(F) = \Phi_{A''}(F) = 0$. Per la base B si ha $\Phi_B(F) = \int_B (2x,\,0,\,y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy = -\int_B y\,dx\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^r \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = -\frac{1}{3}r^3$. Per la porzione cilindrica C e la porzione piana obliqua D usiamo le parametrizzazioni descritte in precedenza, ottenendo rispettivamente $\Phi_C(F) = +\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3r-2r\cos\theta-r\sin\theta}\det\begin{pmatrix} 2r\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ 0 & r\cos\theta & 0\\ r\sin\theta-z & 0 & 1\end{pmatrix}dz = 2r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3-2\cos\theta-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta = r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(6\cos^2\theta-4\cos\theta(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta = r^3[3(\theta+\sin\theta\cos\theta)-4\sin\theta+\frac{4}{3}\sin^3\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^3((\frac{3\pi}{2}-4+\frac{4}{3})-(\frac{2}{3})) = (\frac{3\pi}{2}-\frac{10}{3})r^3$ e $\Phi_D(F) = +\int_B\det\begin{pmatrix} 2x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ y-(3r-2x-y) & -2 & -1\end{pmatrix}dx\,dy = \int_B(6x+2y-3r)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^r(6\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-3r)\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\rho^3\cos\theta+\frac{2}{3}\rho^3\sin\theta-\frac{3}{2}r\rho^2]_0^r\,d\theta = r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+\frac{2}{3}\sin\theta-\frac{3}{2})\,d\theta = r^3[2\sin\theta-\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{3}{2}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^3((2-\frac{3\pi}{4})-(-\frac{2}{3})) = (\frac{8}{3}-\frac{3\pi}{4})r^3$. Si ottiene dunque $\Phi_{\partial E}(F) = 0+0+(-\frac{1}{3}r^3)+(\frac{3\pi}{2}-\frac{10}{3})r^3+(\frac{8}{3}-\frac{3\pi}{4})r^3 = (\frac{3\pi}{4}-1)r^3$, come già visto in precedenza.

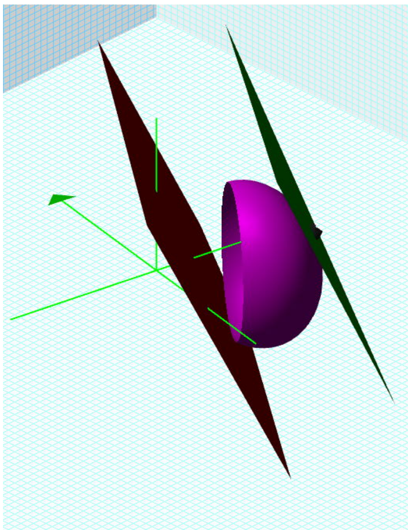
(c) Sul piano $y=0$ il campo F è identificabile col campo piano $(f,g)=(2x,\,-z)$, e la formula di Green afferma che $\int_{A'}(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z})\,dx\,dz = \oint_{+\partial A'}(f,g)\cdot(dx,dz)$ (ove $+\partial A'$ indica l'orientazione in senso antiorario nel piano (x,z)): poiché nel nostro caso $\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\equiv 0$ e dunque il primo membro è nullo, non ci resta che mostrare che lo è anche il secondo. Partendo dal punto $(x,z)=(r,0)$ e parametrizzando i quattro lati del trapezio nel modo più naturale (ovvero le due basi con la z e l'altezza e lato obliquo con la x) otteniamo $\oint_{+\partial A'}(f\,dx+g\,dz) = \int_0^r(2r,\,-z)\cdot(0,1)\,dz+\int_r^0(2x,\,-(3r-2x))\cdot(1,-2)\,dx+\int_{3r}^0(0,\,-z)\cdot(0,1)\,dz+\int_0^r(2x,\,0)\cdot(1,0)\,dx = -\int_0^r z\,dz-\int_0^r(6r-2x)\,dx+\int_0^{3r}z\,dz+\int_0^r 2x\,dx = -[\frac{1}{2}z^2]_0^r-[6rx-x^2]_0^r+[\frac{1}{2}z^2]_0^{3r}+[x^2]_0^r = -\frac{1}{2}r^2-(6r^2-r^2)+\frac{9}{2}r^2+r^2 = 0$, come si voleva.

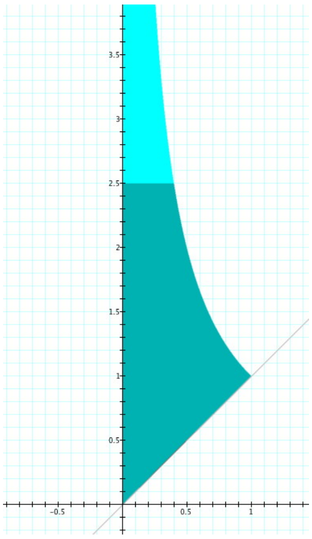
4. (a) L'equazione $y^3y''=2-\alpha y'$ non è in forma normale; se una sua soluzione $y(t)$ si annulla in un punto t_0, si deve avere $0=2-\alpha\,y'(t_0)$, e dunque se $\alpha\ne 0$ la pendenza in t_0 sarà $y'(t_0)=\frac{2}{\alpha}$. Dove invece le soluzioni non si annullano l'equazione è equivalente alla sua forma normale $y''=y^{-3}(2-\alpha y')$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y,p)=(y,y')$ dato da $\begin{cases} y'=p\\ p'=y^{-3}(2-\alpha p)\end{cases}$. La funzione $f(y,p)=(p,y^{-3}(2-\alpha p))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il piano delle fasi meno l'asse y, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0,y_0,y_0') con $y_0\ne 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y,p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Ad esempio, cerchiamo le eventuali soluzioni rettilinee (della forma $y(t)=at+b$): per esse dovrà aversi $0=2-\alpha a$, dunque se $\alpha\ne 0$ tutte le funzioni del tipo $y(t)=\frac{2}{\alpha}t+b$ sono soluzioni al variare di $b\in\mathbb{R}$, in particolare non vi sono soluzioni costanti. L'invarianza temporale dello spazio delle soluzioni è assicurata dal fatto che l'equazione differenziale è autonoma; si può poi controllare che non vi sono particolari simmetrie tranne nel caso di $\alpha=0$, in cui se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo allora lo è anche $\varphi(-t)$ sull'intervallo opposto. Infine, per le soluzioni diverse che coincidono in un punto: se in tale punto non si annullano, per l'esistenza e unicità discussa in precedenza devono avere in tale punto pendenze diverse.

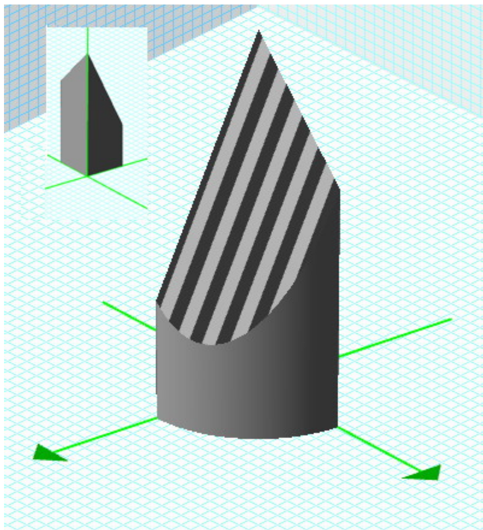
(b) Come sappiamo, le equazioni scalari del 2o ordine della forma $y''=h(y)$ ammettono l'integrale dell'energia $\frac{1}{2}|y'|^2+V(y)$, ove $V(y)=-\int h(y)\,dy$ è l'energia potenziale: nel nostro caso $y''=2y^{-3}$ sarà allora $V(y)=-\int 2y^{-3}\,dy=y^{-2}$. Le traiettorie delle soluzioni giaceranno perciò su una delle curve di livello $\frac{1}{2}|y'|^2+y^{-2}=k$, e nel nostro caso in cui $y(0)=1$ e $y'(0)=-1$ ricaviamo $\frac{1}{2}+1=k$, ovvero $k=\frac{3}{2}$. Abbiamo così $|y'|^2+2y^{-2}=3$, ovvero $|y'|^2=\frac{3y^2-2}{y^2}$, da cui (visti i dati iniziali) ricaviamo $y'=-\frac{\sqrt{3y^2-2}}{y}$. Separando si ottiene $y(3y^2-2)^{-\frac{1}{2}}\,dy=-\,dt$, da cui integrando $\frac{1}{3}\sqrt{3y^2-2}=-t+h$, e da $y(0)=1$ ricaviamo $h=\frac{1}{3}$: perciò $\sqrt{3y^2-2}=1-3t$, da cui $3y^2=(1-3t)^2+2=1-6t+9t^2+2=3(1-2t+3t^2)$ e dunque finalmente $y(t)=\sqrt{1-2t+3t^2}$.

5. Imponendo a $y(t)=t^\alpha$ di risolvere $2t^2y''-ty'+y=0$ si ottiene $2t^2\,\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}-t\,\alpha\,t^{\alpha-1}+t^\alpha=0$, ovvero $(2\alpha(\alpha-1)-\alpha+1)t^\alpha=0$, che dovendo essere soddisfatta per ogni $t>0$ impone $2\alpha(\alpha-1)-\alpha+1=0$, ovvero

$2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$, con soluzioni $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$. Pertanto un sistema fondamentale di soluzioni è costituito da $\varphi_1(t) = \sqrt{t}$ e $\varphi_2(t) = t$, con matrice wronskiana $W(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & 1 \end{pmatrix}$ definita per $t > 0$ e con determinante $\frac{1}{2}\sqrt{t}$. Per il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare per l'equazione completa $2t^2y'' - ty' + y = \sqrt{t}$ — che scriveremo in forma monica come $y'' - \frac{1}{2t}y' + \frac{1}{2t^2}y = \frac{1}{2t\sqrt{t}}$ — sarà del tipo $\tilde{\varphi}(t) = c_1(t)\sqrt{t} + c_2(t)\,t$ con $c_1'(t) = -\frac{t}{\frac{1}{2}\sqrt{t}}\frac{1}{2t\sqrt{t}} = -\frac{1}{t}$ e $c_2'(t) = +\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}\sqrt{t}}\frac{1}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{t\sqrt{t}}$, da cui $c_1(t) = -\log t$ e $c_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{t}}$. Ne ricaviamo che $\tilde{\varphi}(t) = -\sqrt{t}\log t - \frac{2}{\sqrt{t}}\,t = -(2 + \log t)\sqrt{t}$, dunque le soluzioni per $t > 0$ dell'equazione differenziale lineare $2t^2y'' - ty' + y = \sqrt{t}$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = A\sqrt{t} + B\,t - (2 + \log t)\sqrt{t}$, ovvero (raccogliendo $\sqrt{t}$ e riscalando le costanti) $y(t) = (A + B\sqrt{t} - \log t)\sqrt{t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. • In alternativa si poteva notare da subito che l'equazione data è del tipo di Eulero, e questo suggerisce di porre $t = e^u$ (dunque $u = \log t$) e $z(u) = y(t) = y(e^u)$: indicando col punto la derivata rispetto a u si ha $\dot{z} = y'\dot{t} = ty'$ e $\ddot{z} = (ty')^{\cdot} = \dot{t}y' + ty''\dot{t} = ty' + t^2y''$ (da cui $ty' = \dot{z}$ e $t^2y'' = \ddot{z} - ty' = \ddot{z} - \dot{z}$), e perciò l'equazione data diventa $2(\ddot{z} - \dot{z}) - \dot{z} + z = t^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}u}$, ovvero $2\ddot{z} - 3\dot{z} + z = e^{\frac{1}{2}u}$, equazione lineare a cofficienti costanti che si risolve facilmente con i metodi noti dando $z(u) = C\,e^u + D\,e^{\frac{1}{2}u} - u\,e^{\frac{1}{2}u}$ ovvero, risostituendo $u = \log t$, le già trovate soluzioni $y(t) = C\,t + (D - \log t)\sqrt{t} = (C\sqrt{t} + D - \log t)\sqrt{t}$ al variare di $C, D \in \mathbb{C}$.







1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (03/07/2017)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2016/17

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia S la porzione (compreso il bordo) della superficie di paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ che si trova al di sopra del triangolo orizzontale di vertici $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$ e $(0, 4, 0)$.

(a) Parametrizzare S e ∂S vicino al loro punto $P(1, 2, 6)$, e calcolarne gli spazi tangenti affini.

(b) Spiegare perché S è compatta, e calcolare gli estremi assoluti su S di $f(x, y, z) = 2x + 2y - z$.

(c) Esprimere l'area di S con un opportuno integrale.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2r,\ 0 \leq y \leq r,\ x^2 + y^2 \geq r^2\}$ (ove $r > 0$).

(a) Determinare il baricentro di A.

(b) Calcolare (se finito) l'integrale su A di $\frac{1}{x^2}$. Più in generale, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $x^\alpha \in L^1(A)$?

(c) Calcolare il volume e l'area della superficie esterna del solido ottenuto ruotando A di un giro completo attorno alla retta $y = r$.

3. Nello spazio cartesiano sia E la piramide di vertice $(0, 0, 2a)$ e base il triangolo orizzontale di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ e $(0, 2a, 0)$, troncata dalla condizione $z \leq a$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare il volume di E in due modi, con un integrale multiplo e usando il teorema di Gauss.

(b) Verificare la formula di Stokes per la faccia obliqua di ∂E e il campo $F = (a - z, 0, -x)$.

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = x^2(2 - 3y) \\ \dot{y} = 2xy(y - 1) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Se $(x(t), y(t))$ è una soluzione, lo è anche $(-x(t), y(t))$, oppure $(-x(-t), y(-t))$? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$, e quella con $(x(0), y(0)) = (-1, -1)$.

5. Determinare le curve $(x(t), y(t), z(t))$ dello spazio cartesiano tali che $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (e^{-t} + y - z,\ 2x + y + t,\ x - 1 + z)$. Vi sono soluzioni aventi per $t \to +\infty$ limite finito, o una direzione asintotica?

Analisi Matematica III – Esame Scritto (03/07/2017) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Detto $T = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 4\}$ il triangolo orizzontale di base sul piano $z = 0$, la superficie S è parametrizzata globalmente come grafico da $\gamma(x,y) = (x, y, x^2 + y^2 + 1)$ con $(x,t) \in T$. Il tratto Γ di ∂S che contiene $P(1,2,6)$ è dato dalla condizione aggiuntiva $2x + y = 4$, ovvero $y = 4 - 2x$, dunque è parametrizzato come grafico di x da $\psi(x) = \gamma(x, 4-2x) = (x, 4-2x, 5x^2 - 16x + 17)$ con $0 < x < 2$. • Lo spazio tangente affine a S in P è dato parametricamente da $\{P + u\,\frac{\partial\gamma}{\partial x}(1,2) + v\,\frac{\partial\gamma}{\partial y}(1,2) : u, v \in \mathbb{R}\} = \{(1,2,6) + u(1,0,2) + v(0,1,4) : u, v \in \mathbb{R}\} = \{(1+u, 2+v, 6+2u+4v) : u, v \in \mathbb{R}\}$, ovvero il piano $2x + 4y - z - 4 = 0$. • Lo spazio tangente affine a Γ in P è dato parametricamente da $\{P + u\,\psi'(1)\ u \in \mathbb{R}\} = \{(1,2,6) + u(1,-2,-6) : u \in \mathbb{R}\} = \{(1+u, 2(1-u), 6(1-u)) : u \in \mathbb{R}\}$, ovvero la retta definita cartesianamente dal sistema ad esempio tra $2x + 4y - z - 4 = 0$ e $z = 3y$.

(b) S è compatta perché è chiusa (definita dall'equazione $z = x^2+y^2+1$ con le disugliaglianze late di T) e limitata (lo sono x e y per stare in T, dunque lo sarà anche $z = x^2+y^2+1$). Per la ricerca degli estremi assoluti di $f(x,y,z) = 2x + 2y - z$ scomponiamo S nella sua parte S' di superficie senza bordo, nei suo tre tratti di bordo Γ (quello di prima), Γ' e Γ'' (risp. sui piani $x = 0$ e $y = 0$) e nei suoi tre vertici $A(0,0,1)$, $B(0,4,17)$ e $C(2,0,5)$. • Usando il metodo di Lagrange (che in questo caso cerca i punti di S' in cui $\nabla f = (2,2,-1)$ e $\nabla(x^2 + y^2 - z + 1) = (2x, 2y, -1)$ siano paralleli) si trova il solo punto stazionario $D(1,1,3)$. • Per Γ, componendo f con $\psi(x)$ (ove $0 < x < 2$) si ha $F(x) := f(x, 4-2x, 5x^2-16x+17) = 14x - 9 - 5x^2$; da $F'(x) = 14 - 10x = 0$ si ricava $x = \frac{7}{5}$, ovvero il punto stazionario $E(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{32}{5})$ (che appartiene a Γ). • Per Γ', componendo f con $\eta(y) = (0, y, y^2 + 1)$ (ove $0 < y < 4$) si ha $F(y) := f(0, y, y^2 + 1) = 2y - y^2 - 1$; da $F'(y) = 2 - 2y = 0$ si ricava $y = 1$, ovvero il punto stazionario $G(0,1,2)$ (che appartiene a Γ'). • Per Γ'', componendo f con $\xi(x) = (x, 0, x^2 + 1)$ (ove $0 < x < 2$) si ha $F(x) := f(x, 0, x^2 + 1) = 2x - x^2 - 1$; da $F'(x) = 2 - 2x = 0$ si ricava $x = 1$, ovvero il punto stazionario $H(1,0,2)$ (che appartiene a Γ''). • Infine, i punti A, B e C sono da ritenersi stazionari d'ufficio. • Gli estremi assoluti di F su S potranno dunque essere assunti solo nei punti A, B, C, D, E, G e H: essendo $f(A) = -1$, $f(B) = -11$, $f(C) = -1$, $f(D) = 1$, $f(E) = -\frac{6}{5}$ e $f(G) = f(H) = 0$, il massimo assoluto è 1 (assunto in D) e il minimo assoluto è -11 (assunto in B).

(c) L'area di S, grafico della funzione $z(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ sopra T, è data dall'integrale $\int_T \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\, dx\, dy = \int_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$, di non elementare calcolo.[(1)]

2. (a) (Figura 2) Si ha $A = A' \setminus A''$ ove A' è il rettangolo di vertice $(0,0)$ e lati $2r$ e r e A'' il quarto di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio r, dunque l'area è $2r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{8-\pi}{4} r^2$. Si ha poi $\int_A x\, dx\, dy = \int_{A'} x\, dx\, dy - \int_{A''} x\, dx\, dy = \int_0^r dy \int_0^{2r} x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \rho\cos\theta\, \rho\, d\rho = 2r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{5}{3}r^3$ e $\int_A y\, dx\, dy = \int_{A'} y\, dx\, dy - \int_{A''} y\, dx\, dy = \int_0^r y\, dy \int_0^{2r} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \rho\sin\theta\, \rho\, d\rho = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$, da cui il baricentro è $(x_G, y_G) = \frac{1}{\mathrm{Area}(A)}(\int_A x\, dx\, dy, \int_A y\, dx\, dy) = (\frac{20}{3(8-\pi)} r,\ \frac{8}{3(8-\pi)} r)$.

(b) Partiamo direttamente dal caso generale dello studio di $\int_A x^\alpha\, dx\, dy$ (notiamo che ora non possiamo più decomporre additivamente il conto su A' e A'' perché non siamo certi della convergenza dell'integrale sui singoli addendi). Osservando che la funzione è positiva, per Fubini e Tonelli possiamo calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede. Ragionando per y-fili si ha $\int_0^r dy \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{2r} x^\alpha\, dx$. Nel caso $\alpha = -1$, posto $t = r - y$ si ottiene $\int_0^r [\log x]_{\sqrt{r^2-y^2}}^{2r}\, dy = \int_0^r (\log(2r) - \log\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \int_0^r (\log(2r) - \frac{1}{2}\log(2r + t) - \frac{1}{2}\log t)\, dt$ che non ha problemi di convergenza (come noto, il logaritmo è integrabile in senso generalizzato in 0). Invece nel caso $\alpha \neq -1$ si ottiene $\int_0^r [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_{\sqrt{r^2-y^2}}^{2r}\, dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^r ((2r)^{\alpha+1} - (r^2 - y^2)^{\frac{\alpha+1}{2}})\, dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^r ((2r)^{\alpha+1} - (t(2r+t))^{\frac{\alpha+1}{2}})\, dt$ con problemi di convergenza solo in $t \sim 0$ nel secondo addendo che è $\sim_0^* t^{\frac{\alpha+1}{2}}$. La condizione richiesta è pertanto che $\frac{\alpha+1}{2} > -1$, ovvero che $\alpha > -3$. • In particolare per $\alpha = -2$ l'integrale converge, e vale $-\int_0^r (\frac{1}{2r} - \frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}})\, dy = [\arcsin(\frac{1}{r}y) - \frac{1}{2r}y]_0^r = \frac{\pi-1}{2}$.

(c) Per Guldino, il volume del solido ottenuto ruotando A di un giro completo attorno alla retta $y = r$ risulta $2\pi \cdot \mathrm{Area}(A) \cdot (r - y_G) = \frac{\pi(16-3\pi)}{6} r^3$. • Sempre per Guldino, l'area della superficie ottenuta ruotando l'arco di circonferenza (il cui baricentro ha ordinata $\frac{\sqrt{2}}{2}r$) è data da $2\pi \cdot \frac{1}{4}2\pi r \cdot (r - \frac{\sqrt{2}}{2}r) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\pi^2 r^2$, e sommando l'area di base πr^2 e l'area ciclindrica laterale $2\pi r^2$ si ottiene l'area totale esterna desiderata.

3. (a) (Figura 3) La z-fetta di E (con $0 \leq z \leq a$) è il triangolo rettangolo orizzontale di lati $(1 - \frac{1}{2a}z)a = \frac{1}{2}(2a - z)$ e $(1 - \frac{1}{2a}z)2a = 2a - z$, che ha area $\frac{1}{4}(2a - z)^2$: pertanto il volume di E risulta $\int_0^a \frac{1}{4}(2a - z)^2\, dz = \frac{1}{4}[-\frac{1}{3}(2a - z)^3]_0^a = -\frac{1}{12}(a^3 - 8a^3) = \frac{7}{12}a^3$ (risultato che coincide con quello che si troverebbe con le formule della geometria elementare facendo la differenza dei volumi di piramide totale e troncata: risulta infatti $\frac{1}{3}(a^2 \cdot 2a - \frac{1}{4}a^2 \cdot a) = \frac{7}{12}a^3$). • Per il calcolo del volume col teorema di Gauss possiamo scegliere un qualsiasi campo con divergenza pari a 1 e calcolarne il flusso uscente da ∂E: la scelta opportuna è ovviamente quella che per quanto possibile ci fa semplificare il calcolo, e la geometria della situazione ci suggerisce di scegliere il campo verticale $F = (0,0,z)$. In effetti, dette S_x e S_y i trapezi facce verticali di ∂E rispettivamente sui piani $x = 0$ e $y = 0$, B e B' i triangoli basi inferiore e superiore e S il trapezio faccia obliqua, il flusso di F è nullo sia attraverso S_x e S_y (perché F è parallelo ad esse) che attraverso B (perché su

---

(1) Ad esempio in coordinate polari il triangolo T è dato da $2x + y \leq 4$ cioè $\rho \leq \frac{4}{2\cos\theta + \sin\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e l'integrale diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{4}{2\cos\theta+\sin\theta}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{4}{2\cos\theta+\sin\theta}}\, d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1+4(\frac{4}{2\cos\theta+\sin\theta})^2)^{\frac{3}{2}} - 1)\, d\theta = \dots$.

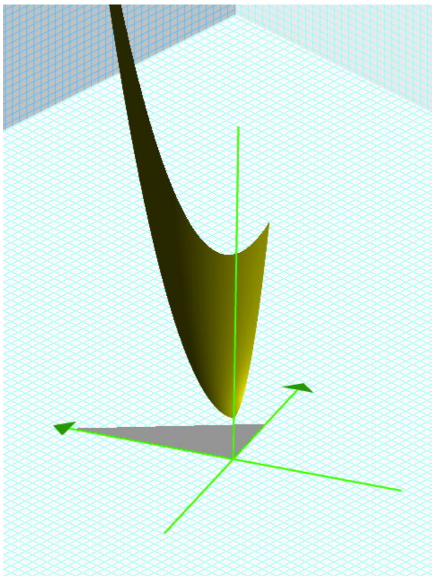
essa F stesso è nullo), mentre attraverso B' ha flusso $\int_{B'}(0,0,a)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = a\cdot \mathrm{Area}(B') = \frac{1}{4}a^3$. Quanto a S, essa fa parte del piano $2x+y+z-2a=0$ e dunque si può parametrizzare ad esempio come grafico $y=2a-2x-z$, ovvero tramite $(x, 2a-2x-z, z)$ con $(x,z)\in S_y$ (normale associata entrante in E), e ne consegue che il flusso uscente di F da S è $-\int_{S_y}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ z & 0 & 1\end{pmatrix} dx\,dz = \int_{S_y} z\,dx\,dz = \int_0^a dz\int_0^{a-\frac{1}{2}z} z\,dx = \int_0^a z(a-\frac{1}{2}z)\,dz = [\frac{1}{2}az^2 - \frac{1}{6}z^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E risulta $\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^3 = \frac{7}{12}a^3$, che coincide col valore del volume trovato in precedenza.

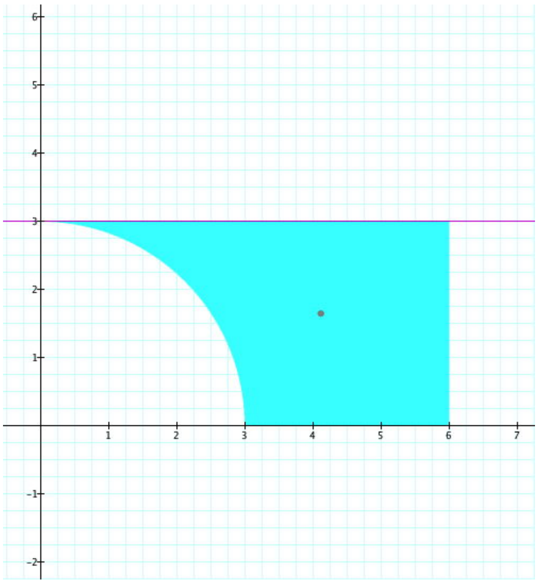
(b) Il campo $F=(a-z,0,-x)$ è irrotazionale, dunque basta verificare che la sua circuitazione lungo ∂S è nulla. Iniziamo a percorrere il circuito ∂S in senso antiorario partendo dal punto $A(a,0,0)$. • Il segmento sul piano orizzontale è $(x, 2(a-x), 0)$ con $0\le x\le a$, dunque l'integrale di linea di F risulta $-\int_0^a (a,0,-x)\cdot(1,-2,0)\,dx = -\int_0^a a\,dx = -a^2$. • Nel piano $x=0$ il campo F è parallelo all'asse x, dunque il suo integrale di linea lungo il segmento su quel piano è nullo. • Nel piano $z=a$ il campo F è parallelo all'asse z, dunque anche l' integrale di linea lungo il segmento su quel piano è nullo. • Il segmento sul piano $y=0$ è $(x,0,2(a-x))$ con $\frac{1}{2}a\le x\le a$, dunque l'integrale di linea di F risulta $+\int_{\frac{1}{2}a}^a (a-2(a-x),0,-x)\cdot(1,0,-2)\,dx = \int_{\frac{1}{2}a}^a (4x-a)\,dx = [2x^2-ax]_{\frac{1}{2}a}^a = a^2$. La circuitazione di F lungo ∂S risulta perciò $-a^2+0+0+a^2=0$, come si voleva.

4. (a) (Figura 4) Il sistema $\begin{cases} \dot x = a(x,y) = x^2(2-3y) \\ \dot y = b(x,y) = 2xy(y-1)\end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare (attenzione: ricordare che i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$!). Una verifica diretta mostra che se $(x(t),y(t))$ è una soluzione lo è anche $(-x(-t),y(-t))$, ma non $(-x(t),y(t))$. • Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a=b=0$, che dà tutti e soli i punti dell'asse y. Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma $b\,dx - a\,dy = 2xy(y-1)\,dx + x^2(3y-2)\,dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): ma così non è perché $\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x} = 4xy-2x-2x(3y-2) = 2x(1-y)\ne 0$. Tuttavia, visto che $-\frac{1}{b}(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}) = \frac{1}{y}$ non dipende da x possiamo concludere che $e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{\log|y|} = |y|$ (si può anche considerare y) è un fattore integrante, da cui una primitiva $F(x,y)$ della forma esatta $2xy^2(y-1)\,dx + x^2y(3y-2)\,dy$ sarà l'integrale primo cercato: da $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2(y-1)$ si ottiene $F(x,y) = x^2y^2(y-1)+\varphi(y)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2(3y^2-2y)+\varphi'(y) = x^2y(3y-2)$ abbiamo $\varphi'(y)=0$ perciò $\varphi(y)$ può essere scelta nulla. Si ha così $F(x,y)=x^2y^2(y-1)$, e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x,y)=k$ per $k\in\mathbb{R}$, cioè $x^2y^2(y-1)=k$. Per $k=0$ si ottiene $x^2y^2(y-1)$, ovvero l'unione dell'asse y (fatto – come detto – di equilibri), dell'asse x e della retta $y=1$, con le ultime due curve divise ciascuno in due traiettorie con $x \gtreqless 0$; invece per $k\ne 0$ si ottengono grafici del tipo $x(y) = \frac{h}{y\sqrt{|y-1|}}$ con $h=\pm\sqrt{|k|}$, con rami che costituiscono singole traiettorie (si noti che non intersecano mai l'asse y degli equilibri). Il verso di percorrenza delle traiettorie orizzontali (ovvero $y=0$ e $y=1$ con $x\gtreqless 0$) è dato dal segno di $\dot x = x^2(2-3y)$, dunque su $y=0$ (risp. su $y=1$) si allontana da (risp. tende a) l'asse y. Per le altre traiettorie, che sono grafici del tipo $x(y)$, è preferibile esaminare il segno di $\dot y = 2xy(y-1)$, dunque sono percorse verso l'alto o il basso a seconda che il 2o membro sia $\gtreqless 0$.

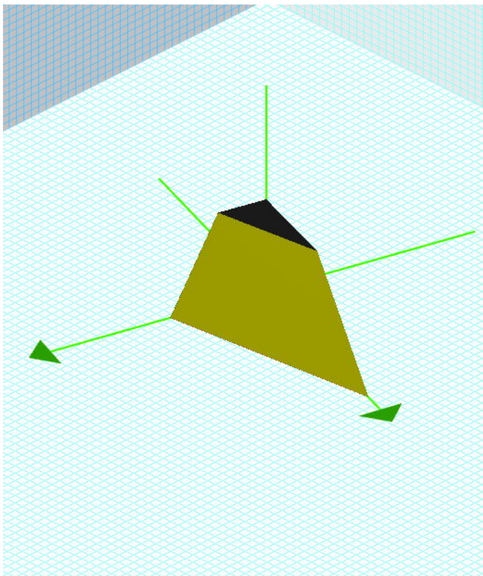
(b) La soluzione con $(x(0),y(0))=(-1,1)$ avrà come traiettoria la semiretta $y=1$ con $x<0$, percorsa tendendo all'asse y: sostituendo $y\equiv 1$ in $\dot x = x^2(2-3y)$ si ottiene $\dot x = -x^2$, equazione a variabili separabili: integrando $-x^{-2}\,dx = dt$ tra $t=0$ e t generico si ottiene $[\frac{1}{x}]_{-1}^{x(t)} = [t]_0^t$, ovvero $\frac{1}{x}-(-1)=t$, da cui $x(t) = -\frac{1}{1-t}$. La soluzione cercata è dunque $(x(t),y(t)) = (-\frac{1}{1-t},\,1)$ (definita per $t<1$). • La soluzione con $(x(0),y(0))=(-1,-1)$ sta sulla curva di livello $x^2y^2(y-1)=-2$, percorsa verso il basso. Si ha $x^2 = \frac{2}{y^2(1-y)}$ e perciò (tenendo conto che $x(0),y(0)<0$) si ha $x = \frac{\sqrt{2}}{y\sqrt{1-y}}$, che messa in $\dot y = 2xy(y-1)$ dà $\dot y = -2\sqrt{2}\,\sqrt{1-y}$, ancora a variabili separabili: integrando $-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\,dy = \sqrt{2}\,dt$ tra $t=0$ e t generico si ha $[\sqrt{1-y}]_{-1}^{y(t)} = [\sqrt{2}\,t]_0^t$, ovvero $\sqrt{1-y}-\sqrt{2} = \sqrt{2}\,t$, da cui $y(t) = -1-4t-2t^2$ e $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{y(t)\sqrt{1-y(t)}} = -\frac{1}{(1+t)(1+4t+2t^2)}$. La soluzione cercata è dunque $(x(t),y(t)) = (-\frac{1}{(1+t)(1+4t+2t^2)},\,-1-4t-2t^2)$ (definita per $t>-1$).

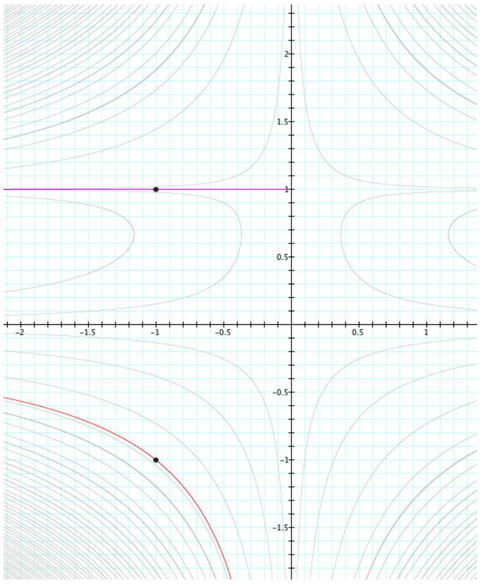
5. Il sistema $(\dot x,\dot y,\dot z) = (e^{-t}+y-z,\ 2x+y+t,\ x-1+z)$ è lineare a coefficienti costanti, non omogeneo, e in forma matriciale può essere scritto come $\dot Y = A_\alpha Y + b(t)$ ove $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e $b(t) = b_1(t)+b_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -1\end{pmatrix}$. La matrice A ha autovalori 1 e $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, con autovettori risp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5}-1 \\ 4 \\ 2\end{pmatrix}$; poiché -1 e 0 non sono autovalori di A, vi saranno soluzioni particolari per $b_1(t)$ e $b_2(t)$ risp. della forma $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix}e^{-t}$ e $\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ ft+g\end{pmatrix}e^{-t}$, e i calcoli dicono che $(u,v,w)=(-1,1,1)$ e $(a,b,c,d,f,g)=(-1,0,1,1,1,2)$. Dunque le curve soluzione sono tutte e sole quelle della forma $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 4 \\ 2\end{pmatrix}e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}t} + C\begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 \\ 4 \\ 2\end{pmatrix}e^{\frac{-\sqrt{5}+1}{2}t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \\ t+2\end{pmatrix}$ al variare di $A,B,C\in\mathbb{R}$. Nessuna di esse ha per $t\to+\infty$ limite finito; tuttavia, quelle con $A=B=0$ hanno come direzione asintotica quella del vettore dei coefficienti di t nell'ultimo addendo, ovvero $(-1,1,1)$.





1. Ex. 1. **2.** Ex. 2.





3 Ex. 3. **4.** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (28/08/2017)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2016/17

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (xyz,\, x - 2y - z)$.

(a) Detto Γ l'insieme di livello di g passante per il punto $P(2, -1, 1)$, mostrare che Γ è una curva regolare all'intorno di P e determinarne ivi una parametrizzazione locale e la retta tangente affine (quest'ultima in due modi). In generale, quali curve di livello di g sono regolari?

(b) Determinare tutti i punti localmente più alti o più bassi di Γ, specificandone la natura.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2r,\ 0 \le ry \le x^2\} \cup \{(x, y) : y \le 0,\ x^2 + y^2 \le 2rx\}$.

(a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro.

(b) Calcolare (se finiti) gli integrali su A di $\frac{y}{x}$ e di $\frac{1}{x^2+y^2}$.

3. Nello spazio cartesiano si disegni A dell'Ex. 2 nel piano (x, z), e sia E il solido ottenuto ruotando A di un quarto di giro attorno l'asse z.

(a) Calcolare il volume di E e l'area totale della sua superficie esterna.

(b) Verificare il teorema di Gauss per il corpo E e il campo $F = (0, 0, 1)$.

4. Si abbia l'equazione differenziale totale $2x\, dx + (x^2 + y + 1)\, dy = 0$.

(a) Determinare gli equilibri e le curve integrali dell'equazione.

(b) Esibire a scelta due sistemi piani autonomi equivalenti all'intorno di $(x(0), y(0)) = (-1, -1)$ associati all'equazione totale, e risolvere per essi il problema di Cauchy con questo dato iniziale.

5. Determinare tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione lineare $y''' + 2y' + 4iy = 5e^{-t} + 4 \sin 2t$, sapendo che una delle radici caratteristiche è $2i$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (28/08/2017) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y,z) = (xyz,\, x-2y-z)$ ha matrice jacobiana $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, che nel punto $P(2,-1,1)$ diventa $\mathsf{J}_g(P) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, di rango massimo 2: questo dice che $\Gamma = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = g(P) = (-2,3)\}$ è una curva regolare all'intorno di P. I minori di $\mathsf{J}_g(P)$ sono nonsingolari tranne il primo, dunque per Dini da $g(x,y,z) = (-2,3)$ possiamo localmente esplicitare $(y(x), z(x))$ oppure $(x(y), z(y))$. Optando ad esempio per $(y(x), z(x))$ (definite in un intorno I di $x = 2$), si avrà $(y(2), z(2)) = (-1,1)$; e derivando $\begin{cases} xyz = -2 \\ x-2y-z = 3 \end{cases}$ rispetto x si ha $\begin{cases} yz + x\dot{y}z + xy\dot{z} = 0 \\ 1 - 2\dot{y} - \dot{z} = 0 \end{cases}$ che per $x = 2$ dà $\begin{cases} -1 + 2\dot{y} - 2\dot{z} = 0 \\ 1 - 2\dot{y} - \dot{z} = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} \dot{y}(2) = \frac{1}{2} \\ \dot{z}(2) = 0 \end{cases}$. Derivando ancora si ha $\begin{cases} (\dot{y}z + y\dot{z}) + (\dot{y}z + x\ddot{y}z + x\dot{y}\dot{z}) + (y\dot{z} + x\dot{y}\dot{z} + xy\ddot{z}) = 0 \\ -2\ddot{y} - \ddot{z} = 0 \end{cases}$ che per $x = 2$ dà $\begin{cases} (\frac{1}{2} + 0) + (\frac{1}{2} + 2\ddot{y} + 0) + (0 + 0 - 2\ddot{z}) = 0 \\ -2\ddot{y} - \ddot{z} = 0 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} 2\ddot{y} - 2\ddot{z} + 1 = 0 \\ 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} \ddot{y}(2) = -\frac{1}{6} \\ \ddot{z}(2) = \frac{1}{3} \end{cases}$. Una parametrizzazione locale di Γ all'intorno di P è dunque $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ data da $\begin{cases} y(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{12}(x-2)^2 + o_2(x-2)^2 \\ z(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 + o_2(x-2)^2 \end{cases}$. La retta tangente affine è data dai termini di γ fino al primo ordine $\begin{cases} y = -1 + \frac{1}{2}(x-2) \\ z = 1 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ z = 1 \end{cases}$, ma si può calcolare anche come $\mathsf{J}_g(P)\begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ z - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} x - 2y + 2z = 6 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$ (che dà luogo alla stessa retta di prima). • La funzione g non è sommersiva nei punti in cui lo jacobiano ha rango < 2, e questo accade quando $xz = -2yz$ e $yz = -xy$, ovvero $(x+2y)z = 0$ e $y(x+z) = 0$: se $z = 0$ si ha $xy = 0$ (ovvero i punti degli assi x e y), mentre se $x = -2y$ si ha $y(z-2y) = 0$, da cui $y = 0$ e così $x = 0$ (i punti dell'asse z) oppure $z = 2y$ (i punti della retta $r = \{\alpha(2,-1,-2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$). Nei punti degli assi la g ha un valore del tipo $(0,a)$ con $a \in \mathbb{R}$, mentre in un punto $(2\alpha, -\alpha, -2\alpha)$ vale $(-4\alpha^3, 6\alpha)$, ovvero un valore del tipo $(-\frac{1}{54}b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$: pertanto gli insiemi di livello non di questo tipo sono curve regolari in ogni loro punto, mentre gli insiemi di livello di questo tipo lo sono tranne che nei punti sugli assi coordinati o sulla retta r.

(b) La domanda può essere evidentemente riformulata chiedendo di determinare gli estremi locali su Γ della funzione $f(x,y,z) = z$. La condizione di Lagrange si traduce nel fatto che la matrice 3×3 le cui prime due righe sono quelle di $\mathsf{J}_g(x,y,z)$ e la terza il gradiente $\nabla f = (0,0,1)$ abbia determinante nullo, e a conti fatti questo dà l'equazione $z(x+2y) = 0$; messa in sistema con le due che definiscono Γ, se $z = 0$ si ottiene $0 = -2$ (assurdo), mentre se $x = -2y$ si ottiene $-2y^2z = -2$ e $-4y - z = -3$, da cui $z = -4y - 3$ e perciò $y^2(4y+3) + 1 = 0$, cioè $4y^3 + 3y^2 + 1 = 0$. Notata l'evidente soluzione $y = -1$, dividendo per $y+1$ si ha $4y^2 - y + 1$, trinomio privo di soluzioni reali. Pertanto l'unico punto stazionario per $f(x,y,z) = z$ su Γ è il già noto punto $P(2,-1,1)$. Componendo f con la parametrizzazione $\gamma(x)$ trovata in (a) si ha $F(x) := f(\gamma(x)) = z(x)$: si ha $F'(x) = \dot{z}(x)$, e dunque $F'(2) = \dot{z}(2) = 0$ come atteso; e da $F''(x) = \ddot{z}(x)$, da cui $F''(2) = \ddot{z}(2) = \frac{1}{3} > 0$, si nota che P è un punto localmente di quota minima per Γ, come appare evidente in figura.

2. (a) (Figura 2) L'area di $A' = \{(x,y) : 0 \le x \le 2r,\, 0 \le ry \le x^2\}$ è data da $\int_0^{2r} \frac{1}{r}x^2\,dx = \frac{8}{3}r^2$; l'area del semidisco $A'' = \{(x,y) : y \le 0,\, x^2 + y^2 \le 2rx\}$ è $\frac{1}{2}\pi r^2$, dunqua l'area di A è $(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\pi)r^2 = \frac{16+3\pi}{6}r^2$. • Si ha $\int_{A'} x\,dx\,dy = \int_0^{2r} dx \int_0^{\frac{1}{r}x^2} x\,dy = \frac{1}{r}\int_0^{2r} x^3\,dx = 4r^3$ e[(1)] $\int_{A''} x\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2r\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}r^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}r^3[\frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta))]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{8}{3}r^3(0 - (-\frac{3\pi}{16})) = \frac{\pi}{2}r^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A x\,dx\,dy = \frac{6}{(16+3\pi)r^2}(4 + \frac{\pi}{2})r^3 = \frac{3(8+\pi)}{16+3\pi}r$. Si ha poi $\int_{A'} y\,dx\,dy = \int_0^{2r} dx \int_0^{\frac{1}{r}x^2} y\,dy = \frac{1}{2r^2}\int_0^{2r} x^4\,dx = \frac{16}{5}r^3$ e $\int_{A''} y\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2r\cos\theta} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}r^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin\theta\cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}r^3[-\frac{1}{4}\cos^4\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{2}{3}r^3$, da cui $y_G = \frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A y\,dx\,dy = \frac{6}{(16+3\pi)r^2}(\frac{16}{5} - \frac{2}{3})r^3 = \frac{76}{5(16+3\pi)}r$.

(b) Il segno di $\frac{y}{x}$ non è costante su tutto A, tuttavia lo è su A' (> 0) e su A'' (< 0), dunque per Tonelli e Fubini calcoliamo un integrale iterato separatamente su A' e A'' e vediamo cosa succede. Su A', procedendo per x-fili si ha $\int_0^{2r} dx \int_0^{\frac{1}{r}x^2} \frac{y}{x}\,dy = \int_0^{2r} \frac{1}{x}[\frac{1}{2}y^2]_0^{\frac{1}{r}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2r} \frac{1}{x}(\frac{1}{r^2}x^4)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2r}(\frac{1}{r^2}x^3)\,dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{4r^2}x^4]_0^{2r} = \frac{1}{2}(4r^2) = 2r^2$ (finito). Su A'' vale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2r\cos\theta} \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\rho\,d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{tg}\theta[\frac{1}{2}\rho^2]_0^{2r\cos\theta}\,d\theta = r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2\theta\,d\theta = r^2[-\frac{1}{2}\cos 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -r^2$ (pure finito). Sarà dunque finito anche $\int_A \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{A'} \frac{y}{x}\,dx\,dy + \int_{A''} \frac{y}{x}\,dx\,dy = 2r^2 + (-r^2) = r^2$. • Il segno di $\frac{1}{x^2+y^2}$ è invece > 0 su tutto A, ma proviamo comunque a calcolarne separatamente gli integrali iterati su A' e A'', iniziando dal secondo che sembra più semplice: si ha $\int_{A''} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2r\cos\theta} \rho^{-2}\,\rho\,d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2r\cos\theta} \frac{1}{\rho}\,d\rho$ che diverge a $+\infty$ (infatti ρ^{-1} non è integrabile in $\rho \sim 0$). Poiché $A'' \subset A$, l'isotonia dell'integrale già ci garantisce che anche $\int_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ diverge a $+\infty$.

3. (a) (Figura 3) Per Guldino, il volume di E è $\frac{\pi}{2} \cdot x_G \cdot \text{Area}\,A = \frac{\pi}{2}\frac{3(8+\pi)}{16+3\pi}r\,\frac{16+3\pi}{6}r^2 = \frac{(8+\pi)\pi}{4}r^3$. • L'arco di parabola Γ nel piano (x,z) è parametrizzabile come $\gamma(x) = (x, \frac{1}{r}x^2)$ con $0 \le x \le 2r$, e la superficie generata nella rotazione è data (sempre per Guldino) da $\frac{\pi}{2}\int_\Gamma x\,ds = \frac{\pi}{2}\int_0^{2r} x\,||\gamma'(x)||\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{2r} x\sqrt{1 + \frac{4}{r^2}x^2}\,dx = \frac{\pi}{2r}\int_0^{2r} x(4x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2r}[\frac{1}{12}(4x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{2r} = \frac{(17^{\frac{3}{2}} - 1)\pi}{24}r^2$. La superficie toroidale generata nella rotazione dall'arco di circonferenza bassa Ξ è

[(1)]Notando che si può descrivere A'' in coordinate polari come $\rho^2 \le 2r\rho\cos\theta$, ovvero $\rho \le 2r\cos\theta$ con $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$); e che vale $\int \cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta))$.

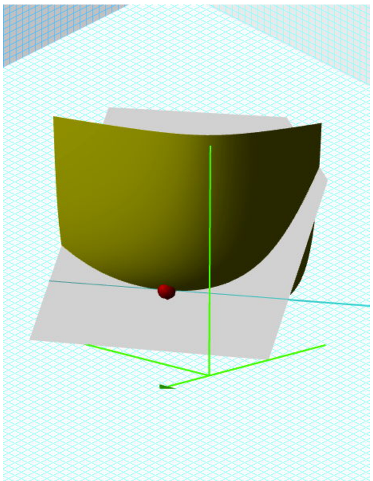
data (ancora per Guldino) da $\frac{\pi}{2} \cdot \ell(\Xi) \cdot r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} 2r\pi \cdot r = \frac{\pi^2}{2} r^2$. Il segmento verticale di altezza $4r$ descrive un quarto di superficie laterale cilindrica, di area $\frac{1}{4} \cdot 2(2r)\pi \cdot 4r = 4\pi r^2$. Infine, le due parti di ∂E sui piani (x,z) e (y,z) hanno area pari a quella di A, ovvero $\frac{16+3\pi}{6} r^2$. L'area totale della superficie esterna di E è la somma di questi cinque contributi.

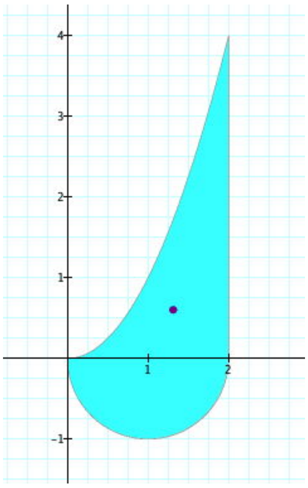
(b) La divergenza di $F = (0,0,1)$ è $\nabla \cdot F = 0$, dunque $\int_E (\nabla \cdot F)\, dx\, dy\, dz = 0$. • Calcoliamo ora il flusso totale di F uscente da E. Il campo F è la costante del versore ascendente verticale, dunque i suoi flussi attraverso le tre porzioni verticali di ∂E sono nulli; restano da considerare le parti di superficie parabolica e toroidale. La superficie parabolica è parametrizzata da $\gamma(x,\theta) = (x\cos\theta, x\sin\theta, \frac{1}{r}x^2)$ con $0 \le x \le 2r$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), dunque il flusso uscente è $\int_0^{2r} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -x\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & x\cos\theta \\ 1 & \frac{2}{r}x & 0 \end{pmatrix} d\theta = \int_0^{2r} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\theta = \frac{\pi}{2} [\frac{1}{2}x^2]_0^{2r} = \pi r^2$. La superficie toroidale è parametrizzabile, usando la coordinata polare α del piano (x,z), come $\gamma(\alpha,\theta) = ((2r\cos\alpha)\cos\alpha\cos\theta, (2r\cos\alpha)\cos\alpha\sin\theta, (2r\cos\alpha)\sin\alpha) = (2r\cos^2\alpha\cos\theta,\, 2r\cos^2\alpha\sin\theta,\, 2r\sin\alpha\cos\alpha)$ con $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le 0$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque il flusso uscente è $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & -2r\sin 2\alpha\cos\theta & -2r\cos^2\alpha\sin\theta \\ 0 & -2r\sin 2\alpha\sin\theta & 2r\cos^2\alpha\cos\theta \\ 1 & 2r\cos 2\alpha & 0 \end{pmatrix} d\theta = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = 4\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin\alpha\cos^3\alpha\, d\alpha = 4\pi r^2 [-\frac{1}{4}\cos^4\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\pi r^2$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque $\pi r^2 - \pi r^2 = 0$, come previsto da Gauss.

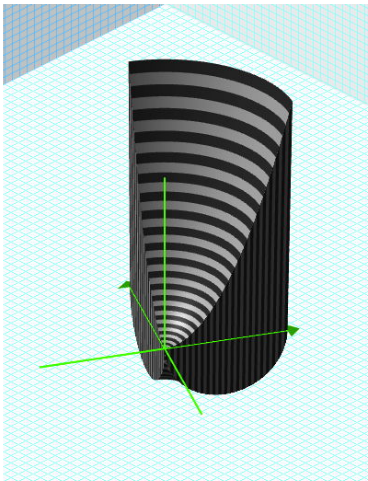
4. (a) La forma $\omega = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy$ con $p(x,y) = 2x$ e $q(x,y) = x^2 + y + 1$ ha un solo equilibrio nel punto $(0,-1)$. Essa non è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \ne \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$; tuttavia, poiché $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = 1$ non dipende da x, sappiamo che $\exp(\int 1\, dy) = e^y$ è un fattore integrante, ovvero $e^y\omega$ è esatta. In effetti, detta $F(x,y)$ una sua primitiva, deve essere $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\, e^y$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2+y+1)\, e^y$: dalla prima ricaviamo $F(x,y) = x^2 e^y + \psi(y)$, e dalla seconda $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 e^y + \psi'(y) = (x^2+y+1)\, e^y$, ovvero $\psi'(y) = (y+1)\, e^y$ che dà $\psi(y) = ye^y$. Le curve integrali dell'equazione sono dunque $F(x,y) = (x^2+y)e^y = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Il punto $(x(0), y(0)) = (-1,-1)$ appartiene alla curva integrale con $k = 0$, ovvero la parabola $y = -x^2$. Ricordiamo poi che due sistemi piani autonomi $\begin{cases} \dot{x} = a'(x,y) \\ \dot{y} = b'(x,y) \end{cases}$ e $\begin{cases} \dot{x} = a''(x,y) \\ \dot{y} = b''(x,y) \end{cases}$ sono equivalenti all'intorno di un punto se vale $(a'', b'') = (\rho a', \rho b')$ ove $\rho(x,y)$ è una funzione continua mai nulla in un intorno del punto stesso. Vediamo tre esempi di tali sistemi associati all'equazione totale data. • Il sistema naturalmente associato all'equazione totale $\omega = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0$ è $\begin{cases} \dot{x} = -q(x,y) = -(x^2+y+1) \\ \dot{y} = p(x,y) = 2x \end{cases}$: posto $y = -x^2$ nella prima si ottiene $\dot{x} = -1$, da cui tenuto presente che $x(0) = -1$ si ottiene $x(t) = -(1+t)$, che messo nella seconda dà $\dot{y}(t) = -2(1+t)$, da cui $y(t) = -(1+t)^2$. • Moltiplicando il sistema per $\rho = x^{-1}$ si ottiene $\begin{cases} \dot{x} = -x^{-1}(x^2+y+1) \\ \dot{y} = 2 \end{cases}$. Da $\dot{y} = 2$ si ottiene $y(t) = -1 + 2t$, mentre da $x^2 = -y$ si ottiene $x = -\sqrt{-y}$, ovvero $x(t) = -\sqrt{1-2t}$. Si noti che tale sistema è definito al di fuori dell'asse y, dunque la soluzione va intesa come definita per $t < \frac{1}{2}$. • Moltiplicando invece per $\rho = \sqrt{|y|}$ si ha $\begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{|y|}(x^2+y+1) \\ \dot{y} = 2x\sqrt{|y|} \end{cases}$. Inserendo $x = -\sqrt{|y|}$ nella seconda si ha $\dot{y} = -2|y| = 2y$, che dà $y(t) = -e^{2t}$ e dunque $x(t) = -e^t$. Si noti che tale sistema acquisisce equilibri nei punti dell'asse x, e coerentemente la soluzione (definita su tutto $\mathbb{R}$) tende asintoticamente all'asse y per $t \to -\infty$.

5. L'equazione caratteristica dell'equazione lineare $y''' + 2y' + 4iy = 5e^{-t} + 4\sin 2t$ è $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda + 4i = 0$; sapendo che una radice è $2i$, dividendo $p(\lambda)$ per $\lambda - 2i$ si ottiene $\lambda^2 + 2i\lambda - 2 = 0$, con radici $\pm 1 - i$. Le soluzioni dell'omogenea sono allora $y(t) = Ae^{2it} + Be^{(1-i)t} + Ce^{(-1-i)t}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$. • Poiché -1 non è radice, una soluzione particolare per il termine $5e^{-t}$ è della forma ae^{-t}: imponendo che lo sia si ha $a(-1-2+4i)e^{-t} = 5e^{-t}$, da cui $a = \frac{5}{-3+4i} = -\frac{3+4i}{5}$. • Si ha $4\sin 2t = 4\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = -2ie^{2it} + 2ie^{-2it}$. Poiché $2i$ è radice caratteristica, una soluzione particolare per il termine $-2ie^{2it}$ sarà del tipo $\tilde{y} = bte^{2it}$: derivando si ha $\tilde{y}' = b(1+2it)e^{2it}$, $\tilde{y}'' = b(4i-4t)e^{2it}$ e $\tilde{y}''' = b(-12-8it)e^{2it}$, dunque imponendo che lo sia si ha $b(-12-8it+2+4it+4it)e^{2it} = -2ie^{2it}$, da cui $b = \frac{1}{5}i$. Invece $-2i$ non è radice, dunque una soluzione particolare per il termine $2ie^{-2it}$ sarà del tipo $\tilde{y} = ce^{-2it}$: derivando si ha $\tilde{y}' = -2ice^{-2it}$, $\tilde{y}'' = -4ce^{-2it}$ e $\tilde{y}''' = 8ice^{-2it}$, dunque imponendo che lo sia si ha $c(8i - 4i + 4i)e^{-2it} = 2ie^{-2it}$, da cui $c = \frac{1}{4}$. • Le soluzioni sono dunque tutte e sole quelle della forma $y(t) = (A + \frac{1}{5}it)e^{2it} + e^{-it}(Be^t + Ce^{-t}) - \frac{3+4i}{5}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2it}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$.







1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (12/09/2017)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2016/17

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2yz} + x - 2y + z$.

(a) Detta S la superficie di livello di g passante per il punto $A(0, 2, -1)$, mostrare che S è regolare all'intorno di A e determinarne ivi una parametrizzazione locale e il piano tangente affine (quest'ultimo in due modi). In generale, quali superfici di livello di g sono regolari?

(b) Determinare i valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali il punto A è stazionario su S per la funzione lineare $f(x, y, z) = 2x + \alpha y + \beta z$, chiarendo la natura (estremo locale o sella) di A.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4r^2\} \cup \{(x, y) : x \geq 0,\ x - 2r \leq y \leq 0\}$.

(a) Disegnare A e calcolarne area e momento d'inerzia rispetto agli assi coordinati.[(1)].

(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale su A di $(x^2 + y^2)^\alpha$, e calcolarlo per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

3. Nello spazio cartesiano siano A' e A'' l'insieme dell'Ex. 2 disegnato risp. nel piano (x, z) e (y, z), e sia E il solido ottenuto unendo a due a due con segmenti i punti corrispondenti di A' e A''.

(a) Calcolare il volume di E e l'area totale della sua superficie esterna.

(b) Verificare la formula di Stokes per campo $F = (y, 0, 0)$ e la porzione S di ∂E nel I ottante.

4. Si abbia l'equazione differenziale $y'(y - t) = 2y$ nella funzione incognita scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni, e sulla loro crescenza e convessità? Vi sono soluzioni costanti, o più in generale lineari? Se $y(t)$ è soluzione su un intervallo di $]0, +\infty[$, lo saranno anche $y(-t)$ oppure $-y(-t)$ sull'intervallo opposto?

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

5. Si consideri il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = (2x - y,\ 3x - 2y)$ nelle funzioni incognite $(x(t), y(t))$.

(a) Determinare un integrale primo e le traiettorie delle soluzioni.

(b) Determinare tutte le soluzioni reali del sistema dato.

(c) Aiutandosi con (b), trovare le soluzioni reali di $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (2x - y - 1,\ 3x - 2y - 1,\ x - y + z)$.

[(1)] Si assuma che la densità superficiale di massa sia una costante $\mu > 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (12/09/2017) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Scrivendo per comodità $R := \sqrt{x^2 - 2yz}$ si ha $\nabla g = (\frac{1}{R}x + 1, -\frac{1}{R}z - 2, -\frac{1}{R}y + 1)$. Nel punto $A(0, 2, -1)$ vale $g(A) = -3$, $R = 2$ e $\nabla g(A) = (1, -\frac{3}{2}, 0) \neq (0, 0, 0)$: pertanto $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = g(A) = -3\}$ è una superficie regolare all'intorno di A, e per Dini da $g(x, y, z) = -3$ si può ad esempio esplicitare $x(y, z)$ (definita in un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di $(y, z) = (2, -1)$) con $x_{(2,-1)} = 0$ e $(\dot{x}_y(2,-1), \dot{x}_z(2,-1)) = -\frac{1}{1}(-\frac{3}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, 0)$, dando uno sviluppo al 1o ordine $x(y, z) = x_{(2,-1)} + \nabla x_{(2,-1)} \cdot (y - 2, z + 1) + \cdots = \frac{3}{2}(y - 2) + \cdots$. La parametrizzazione locale è data da $\gamma : U \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(y, z) = (x(y, z), y, z)$; il piano tangente è dato dallo sviluppo al 1o termine di $x(y, z)$ (ovvero $x = \frac{3}{2}(y - 2)$), o anche da $\nabla g(A) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) = (1, -\frac{3}{2}, 0) \cdot (x, y - 2, z + 1) = 0$, che dà ancora $x - \frac{3}{2}(y - 2) = 0$. Per uso futuro calcoliamo i valori delle derivate seconde di $x(y, z)$. Derivando $g(x, y, z) = -3$ rispetto y e z si ha $\frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z) + \dot{x}_y - 2 = 0$ e $\frac{1}{R}(x\dot{x}_z - y) + \dot{x}_z + 1 = 0$ (da cui posto $(y, z) = (2, -1)$ si ritrova $\dot{x}_y(2,-1) = \frac{3}{2}$ e $\dot{x}_z(2,-1) = 0$); derivando ancora rispetto y e z si ha $\frac{1}{R^2}((\dot{x}_y^2 + x\ddot{x}_{yy})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z)^2) + \ddot{x}_{yy} = 0$ (da cui $\ddot{x}_{yy}(2,-1) = -1$), $\frac{1}{R^2}((\dot{x}_y\dot{x}_z + x\ddot{x}_{yz} - 1)R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_y - z)(x\dot{x}_z - y)) + \ddot{x}_{yz} = 0$ (da cui $\ddot{x}_{yz}(2,-1) = \frac{1}{4}$), e $\frac{1}{R^2}((\dot{x}_z^2 + x\ddot{x}_{zz})R - \frac{1}{R}(x\dot{x}_z - y)^2) + \ddot{x}_{zz} = 0$ (da cui $\ddot{x}_{zz}(2,-1) = \frac{1}{2}$). • Il gradiente $\nabla g = (\frac{1}{R}x + 1, -\frac{1}{R}z - 2, -\frac{1}{R}y + 1)$ si annulla quando $x = -R$, $y = R$ e $z = -2R$: sostituendo allora $y = -x$ e $z = 2x$ in $x = -R$ si ottiene $x = -R = -\sqrt{5x^2}$, che equivale al sistema tra $x \leq 0$ e $x^2 = 5x^2$, ovvero la sola soluzione $x = 0$. L'unico punto in cui ∇g si annulla è perciò $O(0, 0, 0)$, in cui $g(O) = 0$. Ne deduciamo che tutte le superfici di livello di g sono regolari, tranne quella di livello 0 nel suo punto O.

(b) La condizione di Lagrange impone che i gradienti $\nabla g(A) = (1, -\frac{3}{2}, 0)$ e $\nabla f = (2, \alpha, \beta)$ siano proporzionali, e ciò impone $\alpha = -3$ e $\beta = 0$. Componendo $f(x, y, z) = 2x - 3y$ con la parametrizzazione $\gamma(y, z)$ di S all'intorno di A si ha $F(y, z) := f(x(y, z), y, z) = 2x(y, z) - 3y$: da $\nabla F = (2\dot{x}_y - 3, 2\dot{x}_z)$ si ricava come atteso $\nabla F_{(2,-1)} = (2\,\dot{x}_y(2,-1) - 3, 2\,\dot{x}_z(2,-1)) = (0, 0)$, mentre $\mathsf{H}_F(y, z) = 2\,\mathsf{H}_x(y, z) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ è costante e indefinita. Questo ci dice che il punto A è una sella per f su S (come d'altra parte si nota chiaramente nella figura).

2. (a) (Figura 2) L'area di A è data dalla somma di quella del quarto di disco $A_1 = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4r^2\}$ (ovvero $\frac{1}{4}(2r)^2\pi = \pi r^2$) e di quella del triangolo inferiore $A_2 = \{(x, y) : x \geq 0,\ x - 2r \leq y \leq 0\}$ (ovvero $\frac{1}{2}(2r)^2 = 2r^2$), e risulta dunque $(\pi + 2)r^2$. • Il momento d'inerzia di A rispetto all'asse x è dato da $\int_A \mu y^2\,dx\,dy = \mu(\int_{A_1} y^2\,dx\,dy + \int_{A_1'} y^2\,dx\,dy) = \mu(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2r} \rho^2 \sin^2\theta\,\rho\,d\rho + \int_0^{2r} dx \int_{x-2r}^0 y^2\,dy) = \mu(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{2r} \rho^3\,d\rho + \int_0^{2r} dx \int_{x-2r}^0 y^2\,dy) = \mu([\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{4}\rho^4]_0^{2r} - \frac{1}{3}\int_0^{2r}(x - 2r)^3\,dx) = \mu(\pi r^2 - [\frac{1}{12}(x - 2r)^4]_0^{2r}) = \mu(\pi r^4 + \frac{4}{3}r^4) = \mu(\pi + \frac{4}{3})r^4$ (si noti che μ è espresso in kg/m^2, dunque il momento d'inerzia è correttamente espresso in kg $\cdot$ m^2). Il momento d'inerzia di A rispetto all'asse y è dato da $\int_A \mu x^2\,dx\,dy$, e conti analoghi portano allo stesso risultato $\mu(\pi + \frac{4}{3})r^4$: ciò è del tutto sensato osservando la geometria della figura (si veda A come unione materiale disgiunta di A_1 e A_2, e si ricordi che, come ogni integrale, il momento d'inerzia è additivo sulle unioni disgiunte del dominio).

(b) La funzione $(x^2 + y^2)^\alpha$ è positiva su A, dunque per Tonelli e Fubini basta provare a calcolare un integrale iterato e osservare cosa succede; e, vista la struttura di A e della funzione integranda, pare naturale procedere con le coordinate polari. Proviamo inoltre ad esaminare separatamente cosa accade su A_1 e A_2. • Per A_1 la verifica di integrabilità è semplice: si ha $\int_{A_1}(x^2 + y^2)^\alpha\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2r} \rho^{2\alpha}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{2r} \rho^{2\alpha+1}\,d\rho$, che converge per $2\alpha + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -1$, e in tal caso vale $\frac{(2r)^{2(\alpha+1)}\,\pi}{4(\alpha+1)}$ (in particolare per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ottiene πr). • Osservando che il triangolo A_2 è descritto da $x \geq 0$ e $x - 2r \leq y \leq 0$, ovvero $\rho\cos\theta \geq 0$ e $\rho\cos\theta - 2r \leq \rho\sin\theta \leq 0$, ovvero polarmente da $\cos\theta > 0$, $\sin\theta < 0$ e $\rho(\cos\theta - \sin\theta) \leq 2r$ che equivale a $\rho \leq \frac{2r}{\cos\theta - \sin\theta}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$, si ha $\int_{A_2}(x^2 + y^2)^\alpha\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{\frac{2r}{\cos\theta - \sin\theta}} \rho^{2\alpha}\,\rho\,d\rho$, che per convergere in $\rho \sim 0$ richiede da subito anche in questo caso che $2\alpha + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -1$: si ottiene così $\frac{(2r)^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{(\cos\theta - \sin\theta)^{2(\alpha+1)}}\,d\theta$ che non ha più nessun problema di convergenza (il denominatore si annulla in $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, tutti punti ben lontani dal dominio d'integrazione). Possiamo allora già concludere che l'integrale $\int_A(x^2 + y^2)^\alpha\,dx\,dy$ esiste finito se e solo se $\alpha > -1$. • A questo punto non ci resta che calcolare il valore di $\int_{A_2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy$ per completare il conto già fatto per A_1. Per quanto appena visto, questo integrale è pari a $2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}\,d\theta = 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}\,d\theta$, che col cambio di variabile angolare $\psi = \frac{\pi}{4} - \theta$ diventa $2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin\psi}\,d\psi$. La primitiva di $\frac{1}{\sin\psi}$ è un classico calcolo di integrazione indefinita, che con le formule parametriche dà $\log|\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}|$: ricordando poi che $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ e $\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{8} = (\sqrt{2} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + 1$ si ha $\int_{A_2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy = r\sqrt{2}[\log\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = r\sqrt{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2r\sqrt{2}\log(\sqrt{2} + 1)$. Concludiamo così che $\int_A(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy = \int_{A_1} + \int_{A_2} = (\pi + 2\sqrt{2}\log(\sqrt{2} + 1))r$.

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di E in due modi: per z-fette e con una parametrizzazione globale. Nel primo modo, notiamo che per $-2r \leq z \leq 0$ (risp. per $0 \leq z \leq 2r$) la z-fetta di E è il triangolo rettangolo isoscele di cateto $z + 2r$ (risp. $\sqrt{4r^2 - z^2}$), dunque il volume risulta $\int_{-2r}^0 \frac{1}{2}(z + 2r)^2\,dz + \int_0^{2r} \frac{1}{2}(\sqrt{4r^2 - z^2})^2\,dz = \frac{1}{2}([\frac{1}{3}(z + 2r)^3]_{-2r}^0 + [4r^2 z - \frac{1}{3}z^3]_0^{2r}) = \frac{1}{2}(\frac{8}{3}r^3 + \frac{16}{3}r^3) = 4r^3$. Nel secondo modo, la costruzione di E è ottenuta dai segmenti che uniscono punti corrispondenti di A' e A'', ovvero del tipo $(1 - \alpha)(u, 0, v) + \alpha(0, u, v) = ((1 - \alpha)u, \alpha u, v)$ con $\alpha \in [0, 1]$ e $(u, v) \in A$ (vedi Ex. 2): questa è già una parametrizzazione globale $(x, y, z) = \gamma(\alpha, u, v)$ di E, che può essere anche intesa come cambio di variabili in $\mathbb{R}^3$ (nel senso che E è descritto in coordinate (α, u, v) come il prisma $[0,1] \times A$). Ne segue che il volume di E è $\int_E dx\,dy\,dz = \int_{[0,1]\times A} \left|\det \begin{pmatrix} -u & 1-\alpha & 0 \\ u & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| d\alpha\,du\,dv = \int_{[0,1]\times A} u\,d\alpha\,du\,dv = \int_0^1 d\alpha \int_A u\,du\,dv =$ $\int_0^{2r} du \int_{u-2r}^{\sqrt{4r^2-u^2}} u\,dv = \int_0^{2r} u(\sqrt{4r^2-u^2} - (u-2r))\,du = [-\frac{1}{3}(4r^2-u^2)^{\frac{3}{2}} + ru^2 - \frac{1}{3}u^3]_0^{2r} = (4r^3 - \frac{8}{3}r^3) - (-\frac{8}{3}r^3) = 4r^3$, come già calcolato. • La porzione di superficie S nel I ottante è parametrizzata ponendo $(u,v) = (2r\cos\psi, 2r\sin\psi)$, ovvero da $(x,y,z) = \gamma(\alpha,\psi) = 2r((1-\alpha)\cos\psi, \alpha\cos\psi, \sin\psi)$ con $\alpha \in [0,1]$ e $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$; l'elemento d'area si calcola come $4r^2\cos\psi\sqrt{1+\cos^2\psi}\,d\alpha\,d\psi$, dunque l'area vale $4r^2\int_0^1 d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sqrt{1+\cos^2\psi}\,d\psi = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}\cos\psi\,d\psi =$ [posto $t = \sin\psi$] $4r^2\int_0^1 (2-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt =$ [posto $t = \sqrt{2}\sin\tau$] $4r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\tau\,d\tau = 4r^2[\tau + \sin\tau\cos\tau]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\pi+2)r^2$ (curiosamente la stessa area di A dell'Ex. 2). Quanto alla porzione di superficie piramidale nell'ottante sottostante, essa è parametrizzata ponendo $v = u - 2r$, dunque da $(x,y,z) = \gamma(\alpha,u) = ((1-\alpha)u, \alpha u, u-2r)$ con $\alpha \in [0,1]$ e $u \in [0,2r]$; l'elemento d'area si calcola come $\sqrt{3}\,u\,d\alpha\,du$, dunque l'area vale $\int_0^1 d\alpha \int_0^{2r} \sqrt{3}\,u\,du = 2\sqrt{3}\,r^2$. Tenendo presente anche i contributi di A' e A'', entrambi pari all'area di A, l'area totale della superficie esterna di E risulta $(3(\pi+2) + 2\sqrt{3})\,r^2$.

(b) Il rotore del campo $F = (y,0,0)$ è $\nabla \times F = (0,0,-1)$, e il suo flusso attraverso S (parametrizzata come mostrato prima, con normale associata uscente) è dato da $\Phi_S(\nabla \times F) = \int_{[0,1]} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & -2r\cos\psi & -2r(1-\alpha)\sin\psi \\ 0 & 2r\cos\psi & -2r\alpha\sin\psi \\ -1 & 0 & 2r\cos\psi \end{pmatrix} d\psi =$ $-4r^2\int_{[0,1]} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\,d\psi = r^2[\cos 2\pi]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2r^2$. • Coerentemente, per calcolare la circuitazione di F lungo il circuito ∂S percorriamo quest'ultimo in senso antiorario. Il campo F è parallelo all'asse x e nullo sul piano (x,z), dunque l'unico contributo non nullo alla circuitazione viene dall'integrale di linea di F lungo il segmento orizzontale $2r(1-\alpha,\alpha,0)$ con $0 \le \alpha \le 1$, che risulta $\int_0^1 (2r\alpha,0,0)\cdot 2r(-1,1,0)\,d\alpha = -4r^2\int_0^1 \alpha\,d\alpha = -2r^2$, come trovato prima.

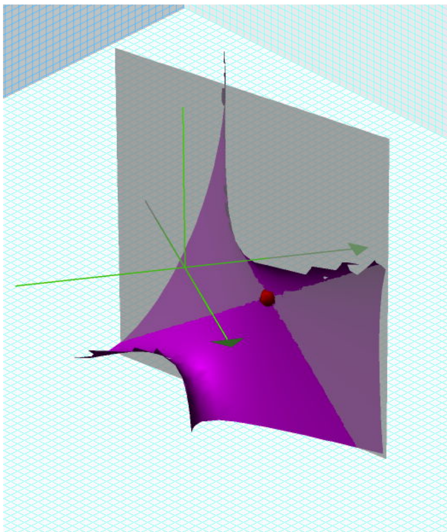
4. (a) L'equazione $y'(y-t) = 2y$ non è in forma normale, e nei punti in cui una soluzione soddisfa $y(t) = t$ risulta $0 = 2\,y(t)$, ovvero ciò può accadere solo in $t = 0$ e lì si deve annullare: in sostanza, per dati iniziali del tipo $y(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \neq 0$ non c'è alcuna soluzione. Negli altri casi portiamo in forma normale $y' = f(t,y) = \frac{2y}{y-t}$: dunque una soluzione $y(t)$ cresce quando è $> \max\{0,t\}$ oppure $< \min\{0,t\}$, e il teorema di Cauchy assicura esistenza e unicità locali per dati iniziali del tipo $y(t_0) = y_0$ con $t_0 \neq y_0$. Derivando rispetto a t si ottiene $y'' = 2\frac{y'(y-t)-y(y'-1)}{(y-t)^2} = 2\frac{y-ty'}{(y-t)^2} = 2\frac{y(y-3t)}{(y-t)^3}$, dunque una soluzione $y(t)$ è convessa o concava a seconda del segno del secondo membro. • Una funzione $y(t) = at+b$ è soluzione se e solo se $a((a-1)t+b) = 2(at+b)$, ovvero se e solo se $a(a-1) = 2a$ e $ab = 2b$: ciò dà $a = b = 0$ (soluzione costante $y \equiv 0$) oppure $a = 3$ e $b = 0$ (soluzione lineare $y = 3t$). • Una semplice verifica diretta mostra che se $y(t)$ è soluzione su un intervallo di $]0,+\infty[$, lo sarà anche $-y(-t)$ sull'intervallo opposto.

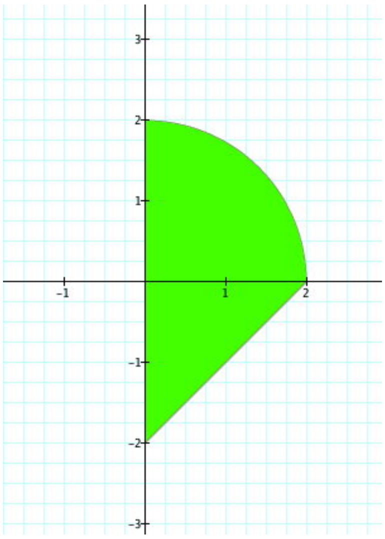
(b) L'equazione totale associata è $\omega = p(y,t)\,dy + q(y,t)\,dt = 0$ con $p = y - t$ e $q = -2y$. La forma ω non è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial t} = -1 \neq \frac{\partial q}{\partial y} = -2$; tuttavia, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = -\frac{1}{2y}$ non dipende da t, sappiamo che $\exp(-\int \frac{1}{2}\,dy) =$ $\exp(-\frac{1}{2}\log y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ è un fattore integrante, ovvero $\frac{1}{\sqrt{y}}\omega$ è esatta (si noti che per quanto dimostrato con le simmetrie possiamo limitarci alle soluzioni $y(t)$ con $y > 0$). In effetti, detta $F(y,t)$ una sua primitiva, deve essere $\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{y} - \frac{t}{\sqrt{y}}$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = -2\sqrt{y}$: dalla seconda ricaviamo $F(y,t) = -2t\sqrt{y} + \psi(y)$, e dalla prima $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{t}{\sqrt{y}} + \psi'(y) = \sqrt{y} - \frac{t}{\sqrt{y}}$, ovvero $\psi'(y) = \sqrt{y}$ che dà $\psi(y) = \frac{2}{3}y\sqrt{y}$. Otteniamo così $F(y,t) = \frac{2}{3}\sqrt{y}(y-3t)$, dunque le curve integrali dell'equazione sono $\sqrt{y}(y-3t) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Notiamo che per $k = 0$ otteniamo le due soluzioni costante $y = 0$ e lineare $y = 3t$, mentre per $k \neq 0$ le altre soluzioni si otterranno esplicitando $y(t)$ dall'equazione secondo quanto prescrive il Dini.

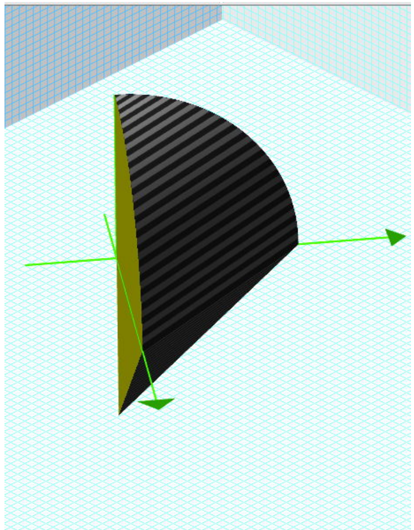
5. (a) Il sistema lineare autonomo $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}$ è associato all'equazione totale $\omega = (3x-2y)\,dx + (y-2x)\,dy = 0$. La forma ω è esatta, e una sua primitiva $F(x,y)$ dovrà soddisfare $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x - 2y$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = y - 2x$: dalla seconda si ha $F(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - 2xy + \psi(x)$, e allora la prima $\frac{\partial F}{\partial x} = -2y + \psi'(x) = 3x - 2y$ dà $\psi(x) = \frac{3}{2}x^2$ da cui $F(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - 2xy + \frac{3}{2}x^2$. Le traiettorie delle soluzioni sono contenute nelle curve di livello di F, ovvero $3x^2 - 4xy + y^2 = k$: poiché il discriminante $(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 4$ è > 0 si tratta di iperboli, con asintoti $y = 3x$ e $y = x$. Più precisamente, l'unico equilibrio $(0,0)$ divide la curva di livello 0 (ovvero l'unione dei due asintoti) nelle quattro traiettorie date dalle semirette; mentre per $k \neq 0$ ciascuno dei due rami dell'iperbole costituisce una traiettoria.

(b) La matrice dei coefficienti del sistema ha autovalori 1 e -1, con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: pertanto le soluzioni reali sono tutte e sole quelle del tipo $(x(t), y(t)) = (Ae^t + Be^{-t},\ Ae^t + 3Be^{-t})$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Nel sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 1 \\ \dot{y} = 3x - 2y - 1 \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$ le prime due componenti (x,y) non dipendono da z e si tratta del sistema precedente con l'aggiunta del termine non omogeneo costante $(-1,-1)$, per il quale un'evidente soluzione particolare è la costante $(x_0, y_0) = (1,1)$: da (b) ne deduciamo che $(x(t), y(t)) = (Ae^t + Be^{-t} + 1,\ Ae^t + 3Be^{-t} + 1)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Si ha allora $\dot{z} = x - y + z = (Ae^t + Be^{-t} + 1) - (Ae^t + 3Be^{-t} + 1) + z = z - 2Be^{-t}$, ovvero l'equazione lineare $\dot{z} + p(t)z = q(t)$ con $p(t) = -1$ e $q(t) = -2Be^{-t}$. Essendo $P(t) = \int p(t)\,dt = -t$ e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = -2B\int e^{-2t}\,dt = Be^{-2t}$ si avrà $z(t) = e^{-P(t)}(\int e^{P(t)}q(t)\,dt + C) = e^t(Be^{-2t} + C) = Ce^t + Be^{-t}$. Pertanto le soluzioni reali sono tutte e sole quelle del tipo $(x(t), y(t), z(t)) = (Ae^t + Be^{-t} + 1,\ Ae^t + 3Be^{-t} + 1,\ Ce^t + Be^{-t})$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{R}$.







1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3** Ex. 3.