Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (23/01/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia Γ la curva ottenuta intersecando il piano $x + y - 2z + 1 = 0$ col cono a una falda di vertice l'origine, asse l'asse x e passante per il punto $A(1, 0, 1)$.

(a) Esprimere Γ in forma cartesiana e parametrica attorno ad A, e calcolare in due modi la retta tangente affine a Γ in A esibendone un vettore parallelo.

(b) Tra i punti di Γ con $x \leq 2$ trovare il più vicino e il più lontano dall'origine (perché esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia A l'insieme dei punti del primo quadrante compresi tra gli assi e tra la curva polare $\rho(\theta) = a(1 + 2\cos\theta)$, che distano almeno a dall'origine (ove $a > 0$).

(a) Calcolare area e baricentro di A.

(b) Calcolare (se finiti) gli integrali su A di x^α, y^α, $(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ nel caso $\alpha = -1$.

(c) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ tali funzioni sono integrabili su A?

3. Nello spazio cartesiano sia $E = \{(x, y, z) : x, y \geq 0\,;\ x+y \leq a\,;\ 0 \leq az \leq a^2 - x^2 - y^2\}$ (con $a > 0$).

(a) Disegnare E e calcolarne il volume.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, 0, -y)$.

(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la porzione piana di ∂E nel primo ottante.

4. Si abbia l'equazione differenziale $2y^2y'' + \alpha t^2 + 1 = 0$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \geq 0$).

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza, unicità, invarianza temporale delle soluzioni? Ve ne sono di costanti? Se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo, lo sono anche $\varphi(-t)$ (oppure $-\varphi(-t)$) sull'opposto? In tal caso le soluzioni definite in $t = 0$ sarebbero necessariamente (dis)pari?

(b) Nel caso $\alpha = 0$ determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

5. Sia data l'equazione differenziale $t^2y'' = 2y + 3t^3$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza, unicità, definizione in $t = 0$ delle soluzioni?

(b) Determinare tutte le soluzioni, sapendo che un sistema fondamentale dell'omogenea associata è dato da $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = \frac{1}{t}$. In particolare dire quali soluzioni sono estendibili a tutto $\mathbb{R}$, e trovare la soluzione con $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (23/01/2018) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Un cono di vertice l'origine e asse l'asse x ha equazione cartesiana $x^2 = \alpha(y^2+z^2)$ per qualche $\alpha \geq 0$, e il passaggio per il punto $A(1,0,1)$ impone $\alpha = 1$: dunque la curva Γ è data cartesianamente dal sistema $\begin{cases} g_1(x,y,z) := x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ g_2(x,y,z) := x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ con la condizione $x \geq 0$. Come sappiamo si tratta di una conica, che in questo caso è un ramo di iperbole (notiamo infatti che ci sono anche intersezioni tra il piano e la seconda falda con $x < 0$, ad esempio per $x = -1$ si trova subito $(-1, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$). Si ha $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & -2z \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, e perciò $\mathsf{J}_g(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$: dunque dal sistema $g = 0$ si può esplicitare all'intorno di A qualsiasi coppia di coordinate rispetto alla rimanente, ad esempio $\begin{pmatrix} x(y) \\ z(y) \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} x(y) \\ z(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y + o_0(y) \\ 1 + y + o_0(y) \end{pmatrix}$. Dunque la retta tangente affine a Γ in A è data da $\begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 + y \end{cases}$, ovvero $\{(1,0,1) + t(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$ con vettore parallelo $(1,1,1)$. Lo stesso risultato si ottiene anche cartesianamente, calcolando come al solito il nucleo traslato di $\mathsf{J}_g(A)$.

(b) I punti di Γ con $x \leq 2$ sono un tratto di curva chiuso (definito da equazioni e disuguaglianze larghe di funzioni continue) e limitato (è un segmento di iperbole che giace sul pezzo di cono con $0 \leq x \leq 2$), dunque compatto. Per la ricerca si tratta di determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ su tale tratto di curva. Consideriamo dapprima i punti dati da $x < 2$, che studieremo col metodo di Lagrange: imponendo che $\det\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2y & -2z \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$ e l'appartenenza a Γ con $0 \leq x < 2$ si ottiene il solo punto $P(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-5-\sqrt{5}}{20}, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$, con $f(P) = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \sim 1{,}3$. D'altra parte, ponendo $x = 2$ nel sistema di Γ si ottengono i punti $B_\pm(2, \frac{\pm 2\sqrt{11}-3}{5}, \frac{6\pm\sqrt{11}}{5})$ nei quali $f(B_\pm) = 8$. Ne ricaviamo che tra i punti di Γ con $x \leq 2$ il punto più vicino all'origine è P, e i più distanti $B_\pm$.

<u>Nota</u>. Una parametrizzazione globale di Γ si può ottenere con le coordinate cilindriche $(x,y,z) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ riferite all'asse x: in effetti imponendo l'appartenenza al piano si ha $x + \rho(\cos\theta - 2\sin\theta) + 1 = 0$, ma poiché sul cono si ha $x = \rho$ si ottiene $\rho(1 + \cos\theta - 2\sin\theta) + 1 = 0$, da cui $\rho = \frac{1}{2\sin\theta - \cos\theta - 1}$ e perciò $(x,y,z) = \gamma(\theta) = (\frac{1}{2\sin\theta-\cos\theta-1}, \frac{\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta-1}, \frac{\sin\theta}{2\sin\theta-\cos\theta-1})$ con la condizione $x > 0$ che dà $\theta \in]\arcsin\frac{4}{5}, \pi[$. Questa γ si può usare per risolvere in modo alternativo i quesiti (a-b); ad esempio, sul cono si ha $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2x^2$ e dunque determinare i punti risp. di max/min distanza di Γ dall'origine equivale a studiare i punti risp. di min/max di $2\sin\theta - \cos\theta - 1$.

2. (a) (Figura 2) L'area dell'insieme A dei punti del primo quadrante compresi tra gli assi e tra la curva polare $\rho(\theta) = a(1 + 2\cos\theta)$ che distano almeno a dall'origine è data dalla nota formula delle aree racchiuse tra curve polari $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((a(1+2\cos\theta))^2 - a^2)\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta + \cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi+4}{2}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+2\cos\theta)} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{3}\rho^3]_a^{a(1+2\cos\theta)}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+2\cos\theta)^3 - 1)\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8\cos^4\theta + 12\cos^3\theta + 6\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}(\frac{3\pi}{2} + 14)a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_a^{a(1+2\cos\theta)}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{3}\rho^3]_a^{a(1+2\cos\theta)}\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+2\cos\theta)^3 - 1)\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^1(8u^3 + 12u^2 + 6u)\,du = 3a^3$, da cui $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area}\,A}(\int_A x\,dx\,dy, \int_A y\,dx\,dy) = (\frac{3\pi+28}{3(\pi+4)}a, \frac{6}{\pi+4}a)$.

(b-c) Le funzioni x^α, y^α, $(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ sono definite e positive nei punti di A, dunque per Fubini e Tonelli basta testare un integrale iterato. • Si ha $\int_A x^\alpha\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_a^{a(1+2\cos\theta)}\rho^\alpha\cos^\alpha\theta\,\rho\,d\rho =$ [se $\alpha \neq -2$] $\frac{1}{\alpha+2}a^{\alpha+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha\theta((1+2\cos\theta)^{\alpha+2} - 1)\,d\theta$; ora, poiché $\cos\theta \sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - \theta)$ e $(1+2\cos\theta)^{\alpha+2} - 1 \sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - \theta)$ la funzione integranda è $\sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - \theta)^{\alpha+1}$, dunque la condizione è $\alpha+1 > -1$, ovvero $\alpha > -2$. D'altra parte, se $\alpha = -2$ si ottiene $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-2}\theta\,\log(1+2\cos\theta)\,d\theta$ in cui la funzione integranda è $\sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\cos^{-2}\theta)(2\cos\theta) \sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} \cos^{-1}\theta \sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - \theta)^{-1}$, non integrabile. Dunque la condizione è $\alpha > -2$. Nel caso $\alpha = -1$ si ha $a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-1}\theta((1+2\cos\theta) - 1)\,d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\theta = \pi a$. • Per y^α si ragiona in modo simile (con problemi d'integrazione in $\theta \sim 0^+$ anziché in $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$), ottenendo però stavolta $\alpha > -1$. Dunque per $\alpha = -1$ la funzione non è integrabile. • Invece $(x^2+y^2)^{\alpha/2}$ è sempre integrabile, perché A è un insieme misurabile limitato ben lontano dall'origine; il calcolo dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_a^{a(1+2\cos\theta)}\rho^\alpha\,\rho\,d\rho$, che per $\alpha \neq -2$ dà $\frac{1}{\alpha+2}a^{\alpha+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+2\cos\theta)^{\alpha+2} - 1)\,d\theta$ mentre per $\alpha = -2$ dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(1+2\cos\theta)\,d\theta$; in particolare per $\alpha = -1$ si trova $a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)\,d\theta = 2a$.

3. (a) (Figura 3) Il corpo $E = \{(x,y,z) : x,y \geq 0\,;\, x + y \leq a\,;\, 0 \leq az \leq a^2 - x^2 - y^2\}$ è un quarto di paraboloide con un taglio piano verticale. Per il volume usiamo gli (x,y)-fili: la proiezione orizzontale è il triangolo $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq y \leq a - x\}$, da cui $\text{Vol}\,E = \int_T \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{a}\int_0^a dx\int_0^{a-x}(a^2 - x^2 - y^2)\,dy = \frac{1}{a}\int_0^a[(a^2-x^2)y - \frac{1}{3}y^3]_{y=0}^{y=a-x}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a((a^2-x^2)(a-x) - \frac{1}{3}(a-x)^3)\,dx = \frac{1}{a}[a^3x - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{12}(a-x)^4]_0^a = \frac{5}{12}a^3 - \frac{1}{12}a^3 = \frac{1}{3}a^3$. Alternativamente, per $x \in [0,a]$ la x-fetta di E è la porzione di settore parabolico $\{(y,z) : 0 \leq y \leq a - x,\, 0 \leq z \leq \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2)\}$, la cui area $\int_0^{a-x}\frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2)\,dy = \frac{2}{3a}(a-x)^2(a+2x)$ integrata per $x \in [0,a]$ ridà il volume $\frac{1}{3}a^3$.

(b) La divergenza di $F = (x, 0, -y)$ è $\nabla\cdot F = 1$, dunque $\int_E(\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = \text{Vol}\,E = \frac{1}{3}a^3$. D'altra parte la superficie esterna ∂E del corpo E è costituita da cinque porzioni: il triangolo T come base, il taglio piano verticale parabolico L, la superficie di paraboloide P, e le due pareti laterali S' e S'' rispettivamente sui piani (x,z) e (y,z). Sul piano (x,z) (risp. (y,z)) il campo è parallelo all'asse x (risp. al'asse z), dunque i flussi uscenti $\Phi_{S'}(F)$ e $\Phi_{S''}(F)$ sono nulli. Per la base T si ha $\Phi_T(F) = \int_T(x,0,-y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy = \int_T y\,dx\,dy = \int_0^a dx\int_0^{a-x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a(a-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}[(a-x)^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3$. La superficie L si proietta nel piano (x,z) sul settore parabolico $L' = \{(x,z) : 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq z \leq \frac{2}{a}x(a-x)\}$ (si noti infatti che dal sistema tra $z = \frac{1}{a}(a^2-x^2-y^2)$ e $x + y = a$ si ottiene appunto $z = \frac{2}{a}x(a-x)$), dunque L è parametrizzata da $(x, a-$

$x, z)$ con $(x,z) \in L'$ (normale associata entrante) e si ha $\Phi_L(F) = -\int_{L'} \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -(a-x) & 0 & 1 \end{pmatrix} dx\,dz = \int_{L'} x\,dx\,dz = \int_0^a dx \int_0^{\frac{2}{a}x(a-x)} x\,dz = \frac{2}{a}\int_0^a x^2(a-x)\,dx = \frac{2}{a}[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^a = \frac{1}{6}a^3$. Infine P è parametrizzata da $(x, y, \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2))$ con $(x,y) \in T$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_P(F) = +\int_T \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -y & -\frac{2}{a}x & -\frac{2}{a}y \end{pmatrix} dx\,dy = \int_T (\frac{2}{a}x^2 - y)\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (\frac{2}{a}x^2 - y)\,dy = \int_0^a [\frac{2}{a}x^2y - \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=a-x}\,dx = \int_0^a (\frac{2}{a}x^2(a-x) - \frac{1}{2}(a-x)^2)\,dx = [\frac{2}{a}(\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4) + \frac{1}{6}(a-x)^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = 0$. Dunque $\Phi_{\partial E}(F) = 0 + 0 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{6}a^3 + 0 = \frac{1}{3}a^3$, come prescritto da Gauss.

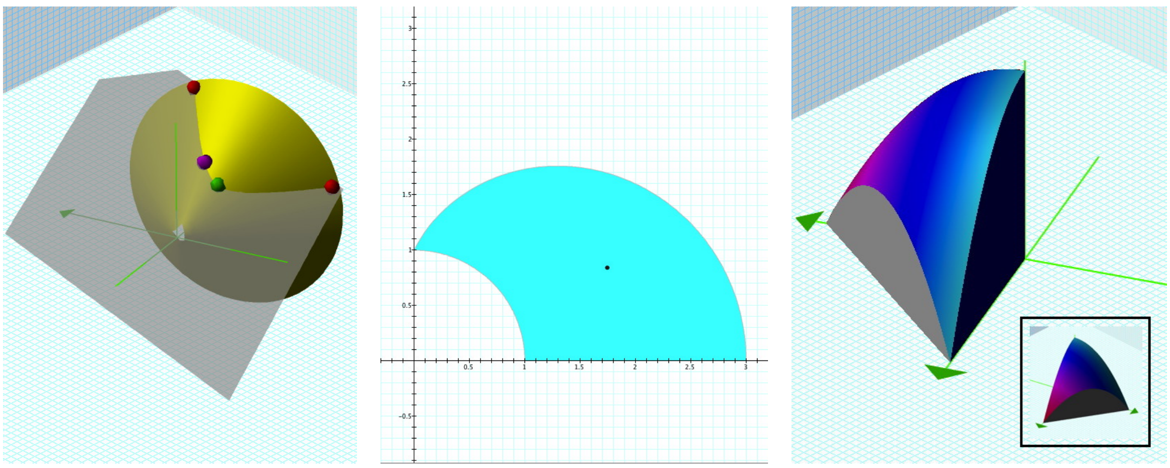
(c) Il rotore di F è $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$, dunque $\Phi_L(\nabla \times F) = \int_{L'} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dx\,dz = \text{Area}\,L' = \int_0^a \frac{2}{a}x(a-x)\,dx = \frac{2}{a}[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{1}{3}a^2$. D'altra parte percorrendo il circuito ∂L in senso orario da $(0, a, 0)$ si ha $\oint_{\partial L} F \cdot d\ell = \int_0^a (x, 0, x-a) \cdot (1, -1, 0)\,dx + \int_a^0 (x, 0, x-a) \cdot (1, -1, \frac{2}{a}(a-2x))\,dx = \int_0^a (x, 0, x-a) \cdot (0, 0, \frac{2}{a}(2x-a))\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a (x-a)(2x-a)\,dx = \frac{2}{a}[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 - ax^2 + a^2x]_0^a = \frac{1}{3}a^2$, come prescritto da Kelvin-Stokes.

4. (a) L'equazione $2y^2y'' + \alpha t^2 + 1 = 0$ non è in forma normale; tuttavia se una sua soluzione $y(t)$ si annullasse in un punto t_0, si dovrebbe avere $0 = \alpha t_0^2 + 1$, impossibile perché $\alpha \geq 0$, e dunque l'equazione è equivalente alla sua forma normale $y'' = -\frac{1}{2}y^{-2}(\alpha t^2 + 1)$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y, p) = (y, y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = -\frac{1}{2}y^{-2}(\alpha t^2 + 1) \end{cases}$. La funzione $f(y, p; t) = (p, -\frac{1}{2}y^{-2}(\alpha t^2 + 1))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ escluso il piano $y = 0$, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0, y_0, y_0') con $y_0 \neq 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y, p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune soluzioni. L'equazione non è autonoma, dunque non c'è invarianza temporale dello spazio delle soluzioni. Una soluzione costante $y \equiv k$ darebbe luogo a $\alpha t^2 + 1 = 0$, impossibile: dunque non ve ne sono. Se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo, è facile verificare che lo è anche $\varphi(-t)$ sull'intervallo opposto; tuttavia, essendo l'equazione del 2o ordine, ciò non implica che $\varphi(t)$ sia pari, e un esempio lo vedremo nel prossimo punto.

(b) L'equazione $y'' = -\frac{1}{2}y^{-2} = h(y)$ ammette l'integrale primo dell'energia totale $\frac{1}{2}(y')^2 - \int h(y)\,dy = \frac{1}{2}((y')^2 - \frac{1}{y})$, che sulla soluzione cercata con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$ vale costantemente 0. Si ricava dunque $(y')^2 - \frac{1}{y} = 0$, da cui $y' = -y^{-\frac{1}{2}}$, da cui $y^{\frac{1}{2}}\,dy = -dt$ che integrata dà $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = k - t$. Ricordando che $y(0) = 1$ si ha allora $k = \frac{2}{3}$, da cui $y^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}t$ e perciò $y(t) = (1 - \frac{3}{2}t)^{\frac{2}{3}}$, definita per $t < \frac{2}{3}$ (e non pari).

5. (a) L'equazione $t^2y'' = 2y + 3t^3$ è lineare del 2o ordine, e per $t \neq 0$ si pone in forma normale $y'' - 2t^{-2}y = 3t$: in base all'esistenza e unicità globali possiamo allora affermare che le soluzioni saranno definite su $]-\infty, 0[$ oppure su $]0, +\infty[$. Eventuali soluzioni $y(t)$ definite anche in $t = 0$ dovranno soddisfare $0 = 2y(0)$, e dunque annullarsi in $t = 0$.

(b) Le due funzioni $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = \frac{1}{t}$ sono indipendenti (non sono proporzionali) e si vede direttamente che risolvono l'equazione omogenea $y'' - 2t^{-2}y = 0$. Per l'equazione completa usiamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie: il wronskiano $\begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$ ha determinante -3, dunque una soluzione particolare sarà della forma $\tilde{y}(t) = c_1(t)\,t^2 + c_2(t)\,\frac{1}{t}$ con $c_1(t) = -\int \frac{\frac{1}{t}}{-3}3t\,dt = t$ e $c_2(t) = +\int \frac{t^2}{-3}3t\,dt = -\frac{1}{4}t^4$, da cui $\tilde{y}(t) = \frac{3}{4}t^3$. Le soluzioni dell'equazione completa sono dunque tutte e sole quelle della forma $y(t) = At^2 + B\frac{1}{t} + \frac{3}{4}t^3$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$; quelle estendibili a tutto $\mathbb{R}$ sono tutte e sole quelle con $B = 0$, mentre imponendo che $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$ si ottiene $A = -1$ e $B = \frac{1}{4}$, ovvero $y(t) = \frac{3}{4}t^3 - t^2 + \frac{1}{4t}$.



1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (12/02/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g(x, y, z) = \log(y^2 - xz) + 2x + y - 3z$, e sia S la superficie di livello di g contenente $A(0, -1, 2)$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari. Notato che S lo è, esprimerla in forma cartesiana e parametrica all'intorno di A e calcolare in due modi il piano tangente affine in A.

(b) Sia T il triangolo nel piano $z = 0$ di vertici $(0, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$ e $(0, 3, 0)$ (interno e lati inclusi): spiegare perché g ammette estremi assoluti su T, e calcolarli.

2. Nel piano cartesiano si disegni $A = \{(x, y) : y \geq 0,\ 2y^2 \leq ax \leq a(y + a)\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare area, baricentro e momento d'inerzia di A rispetto alla retta $x = a$.[(1)]

(b) Calcolare (se finiti) gli integrali su A di $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z), e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse x.

(a) Calcolare il volume e l'area totale esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (y, -2a, 0)$.

(c) Verificare la formula di Green per F (campo piano) e la porzione di ∂E sul piano $z = 0$.

4. È data l'equazione differenziale $(y^2 + 2t - 1)y' + y(y - 2) = 0$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Analizzare a priori esistenza e unicità delle soluzioni, e la loro crescenza. Vi sono soluzioni costanti? Se $y(t)$ è soluzione lo saranno anche $-y(t)$, $y(-t)$, $-y(-t)$?

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione, in particolare quella tale che $y(1) = -1$.

5. Dato il sistema differenziale $(\dot{x}, \dot{y}) = (x + 1 + (1 + i)y,\ x - 2t + (1 - i)y)$ determinarne tutte le soluzioni $(x(t), y(t))$, in particolare quella che per $t = 0$ passa per l'origine.

[(1)] Si pensi ad A come a una lamina materiale omogenea di densità superficiale di massa μ (in kg/m^2).

Analisi Matematica III – Esame Scritto (12/02/2018) – Soluzioni.

1. (a) La funzione $g(x,y,z) = \log(y^2 - xz) + 2x + y - 3z$ ha dominio dato dalla condizione $xz < y^2$: posto $u = y^2 - xz$, il gradiente $\nabla g = (-\frac{z}{u} + 2, \frac{2y}{u} + 1, -\frac{x}{u} - 3)$ si annulla quando $(x,y,z) = (-3u, -\frac{1}{2}u, 2u)$, pertanto da $u = y^2 - xz = \frac{1}{4}u^2 + 6u^2 = \frac{25}{4}u^2$ si ricava $u = \frac{4}{25}$, e perciò il punto $P(-\frac{12}{25}, -\frac{2}{25}, \frac{8}{25})$ in cui $g(P) = -2(1 + \log 5 - \log 2)$. Pertanto tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne eventualmente quella di livello $-2(1 + \log 5 - \log 2)$ nel suo punto P: in particolare lo è quella che contiene il punto $A(0,-1,2)$, ovvero $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = g(A) = -7\}$. Da $\nabla g(A) = (0,-1,-3)$ si vede che localmente in A si può esprimere S ad esempio come $y(x,z)$, con $y(0,2) = -1$ e $(\dot{y}_x(0,2), \dot{y}_z(0,2)) = (0,-3)$: pertanto si ha la parametrizzazione locale $y(x,z) = -1 - 3(z-2) + \cdots$ (ove i puntini indicano termini infinitesimi di ordine ≥ 2 in $(x,z) = (0,2)$). Il piano tangente affine a S in A è dato da $\nabla g(0,2) \cdot (x - 0, y - (-1), z - 2) = (0,-1,-3) \cdot (x, y+1, z-2) = 0$, ovvero $y + 3z = 5$; che alternativamente si può ottenere anche dallo sviluppo al primo ordine $y = -1 - 3(z-2)$ visto prima.

(b) Il triangolo T nel piano orizzontale $z = 0$ di vertici $L(0,1,0)$, $M(2,1,0)$ e $N(0,3,0)$ (interno e lati inclusi) è un insieme chiuso e limitato – dunque compatto – interamente contenuto nel dominio di g (che nel piano $z = 0$ consiste dei due semipiani $y \gtrless 0$, e T sta dentro il semipiano $y > 0$): gli estremi assoluti esistono dunque in base a Weierstrass. Per la loro ricerca dividiamo T nei suoi punti interni, nei lati privati dei vertici e nei tre vertici. • Per i punti interni, la condizione di Lagrange imporrebbe che $\nabla g = (-\frac{z}{u} + 2, \frac{2y}{u} + 1, -\frac{x}{u} - 3)$ e $\nabla z = (0,0,1)$ fossero proporzionali in qualche punto di $z = 0$, ma si vede subito che ciò non può accadere (se $z = 0$ vale $\frac{\partial g}{\partial x} \equiv 2 \neq 0$). • Il lato LM è dato da $(x,1,0)$ con $0 < x < 2$: su esso vale $F(x) := g(x,1,0) = 2x + 1$, che non ha punti stazionari. • Il lato LN è dato da $(0,y,0)$ con $1 < y < 3$: su esso vale $F(y) := g(0,y,0) = 2\log(y) + y$, e da $F'(y) = \frac{2}{y} + 1 = 0$ si ricava $y = -2$, non accettabile. • Il lato MN è dato da $(x, 3-x, 0)$ con $0 < x < 2$: su esso vale $F(x) := g(x, 3-x, 0) = 2\log(3-x) + x + 3$, e da $F'(x) = -\frac{2}{3-x} + 1 = 0$ si ricava $x = 1$, che dà il punto $Q(1,2,0)$. • I candidati per diventare estremanti assoluti di g su T sono dunque i soli punti L, M, N, Q: poiché $g(L) = 1$, $g(M) = 5$, $g(N) = 2\log 3 + 3 \sim 5{,}2$ e $g(Q) = 2\log 2 + 4 \sim 5{,}4$, il minimo assoluto di g su T è 1 (assunto in L) e il massimo assoluto $2\log 2 + 4$ (assunto in Q).

2. (a) (Figura 1) La forma di A pare suggerire che convenga ragionare per y-fili. Si ha $\text{Area}(A) = \int_0^a ((y+a) - \frac{2y^2}{a})\, dy = [\frac{1}{2}y^2 + ay - \frac{2y^3}{3a}]_0^a = (\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3})a^2 = \frac{5}{6}a^2$, $\int_A x\, dx\, dy = \int_0^a dy \int_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^a ((y+a)^2 - \frac{4y^4}{a^2})\, dy = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(y+a)^3 - \frac{4y^5}{5a^2}]_0^a = \frac{23}{30}a^3$ e $\int_A y\, dx\, dy = \int_0^a y((y+a) - \frac{2y^2}{a})\, dy = [\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{y^4}{2a}]_0^a = \frac{1}{3}a^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)}\int_A x\, dx\, dy = \frac{23}{25}a$ e $y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)}\int_A y\, dx\, dy = \frac{2}{5}a$. Il momento d'inerzia di A rispetto all'asse $x = a$ è dato da $\int_A \mu(x-a)^2\, dx\, dy = \mu\int_0^a dy \int_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a} (x-a)^2\, dx = \frac{1}{3}\mu\int_0^a [(x-a)^3]_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a}\, dy = \frac{1}{3}\mu\int_0^a (y^3 - (\frac{2y^2}{a} - a)^3)\, dy = \frac{1}{3}\mu\int_0^a (y^3 - \frac{8y^6}{a^3} + \frac{12y^4}{a} - 6ay^2 + a^3)\, dy = \frac{1}{3}\mu[\frac{1}{4}y^4 - \frac{8y^7}{7a^3} + \frac{12y^5}{5a} - 2ay^3 + a^3y]_0^a = \frac{71}{420}\mu\, a^4$ (si osservi che la dimensione fisica risulta $(\text{kg/m}^2) \cdot \text{m}^4 = \text{kg} \cdot \text{m}^2$).

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ sono positive su A e dunque per Fubini e Tonelli si può studiare un loro integrale iterato, che se avrà valore finito sarà l'integrale cercato. • Si ha allora $\int_0^a dy \int_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a} \frac{1}{x}\, dx = \int_0^a (\log(y+a) - \log(\frac{2y^2}{a}))\, dy = \int_0^a (\log(y+a) - \log 2 - 2\log y + \log a)\, dy = [(y+a)(\log(y+a) - 1) + (\log a - \log 2)y - 2y(\log y - 1)]_0^a = 2a(\log 2a - 1) + (\log a - \log 2)a - 2a(\log a - 1) - a(\log a - 1) = 2a\log 2 + 2a\log a - 2a + a\log a - a\log 2 - 2a\log a + 2a - a\log a + a = (1 + \log 2)a$ (finito). (In alternativa potremmo procedere per x-fili testando l'integrale iterato più esteso $\int_0^{2a} \frac{1}{x}\, dx \int_0^{\sqrt{\frac{ax}{2}}} dy = \sqrt{\frac{a}{2}}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{a}{2}}[2\sqrt{x}]_0^{2a} = 2a$; e poiché questo converge calcoliamo anche $\int_a^{2a} \frac{1}{x}\, dx \int_0^{x-a} dy = \int_a^{2a} (1 - \frac{a}{x})\, dx = [x - a\log x]_a^{2a} = (2a - a\log 2a) - (a - a\log a) = (1 - \log 2)a$, che sottratto dal precedente dà lo stesso risultato di prima.) • Si ha poi $\int_0^a dy \int_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a} \frac{x}{y}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{y}((y+a)^2 - (\frac{2y^2}{a})^2)\, dy$ che diverge a $+\infty$ perché la funzione integranda è $\sim_0^* \frac{1}{y}$. • Infine $\int_0^a dy \int_{\frac{2y^2}{a}}^{y+a} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}}(y + a - \frac{2y^2}{a})\, dy = [\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + 2ay^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5a}y^{\frac{5}{2}}]_0^a = \frac{28}{15}a\sqrt{a}$ (finito). Possiamo così concludere che $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{\sqrt{y}}$ sono integrabili su A con $\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy = (1 + \log 2)a$ e $\int_A \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx\, dy = \frac{28}{15}a\sqrt{a}$, mentre $\frac{x}{y}$ non lo è.

3. (a) (Figura 2) Il volume di E, generato da una rotazione di un quarto di giro dell'insieme A dell'Ex. 2 attorno all'asse x, si ottiene facilmente con Guldino tramite $\frac{\pi}{2}\int_A z\, dx\, dz = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3}a^3 = \frac{\pi}{6}a^3$. • Le due facce A e B di ∂E rispettivamente sui piani (x,z) e (x,y) hanno area $\frac{5}{6}a^2$; le parti conica C sul retro e di paraboloide P sono date dalla rotazione delle curve nel piano (x,z) parametrizzate da $(x, x-a)$ con $a \leq x \leq 2a$ e $(\frac{2z^2}{a}, z)$ con $0 \leq z \leq a$, e dunque per Guldino hanno area $\frac{\pi}{2}\int_a^{2a} (x-a)\sqrt{2}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}[\frac{1}{2}x^2 - ax]_a^{2a} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}a^2$ e $\frac{\pi}{2}\int_0^a z\sqrt{\frac{16z^2}{a^2} + 1}\, dz = \frac{\pi}{2}[\frac{1}{48}a^2(\frac{16z^2}{a^2} + 1)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{\pi}{96}(17^{\frac{3}{2}} - 1)a^2$. L'area totale esterna di E è la somma di questi quattro contributi.

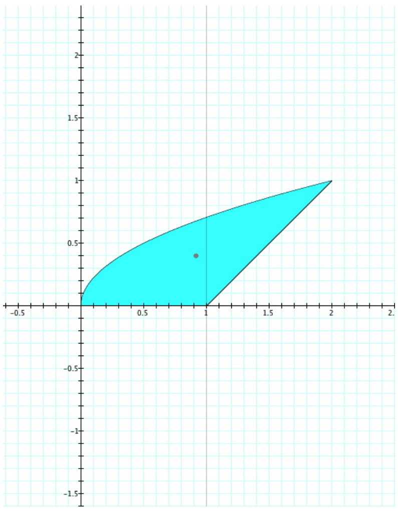
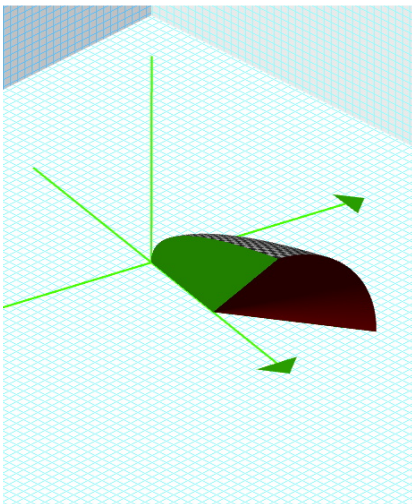
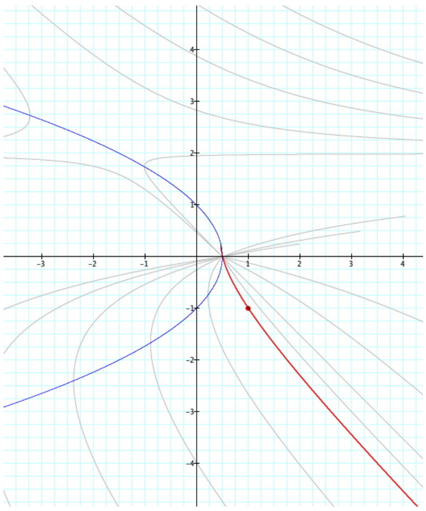
(b) Il campo $F = (y, -2a, 0)$ ha divergenza nulla, dunque il suo flusso totale in uscita da ∂E dovrà essere nullo. D'altra parte F è un campo orizzontale, dunque $\Phi_B(F) = 0$, mentre $\Phi_A(F) = \int_A (0, -2a, 0) \cdot (0, -1, 0) = 2a\, \text{Area}\, A = \frac{5}{3}a^3$. La superficie conica C è parametrizzata da $(x, (x-a)\sin\psi, (x-a)\cos\psi)$ con $a \leq x \leq 2a$ e $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque il flusso uscente risulta $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^{2a} \det\begin{pmatrix} (x-a)\sin\psi & 1 & 0 \\ -2a & \sin\psi & (x-a)\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & -(x-a)\sin\psi \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\, d\psi \int_a^{2a} ((x-a)^2 + 2a(x-a))\, dx = [\frac{1}{3}(x-a)^3 + ax^2 - 2a^2x]_a^{2a} = \frac{1}{3}a^3 - (-a^3) = \frac{4}{3}a^3$. La superficie di paraboloide P è parametrizzata da $(\frac{2z^2}{a}, z\sin\psi, z\cos\psi)$ con $0 \le z \le a$ e $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_P(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a \det \begin{pmatrix} z\sin\psi & \frac{4z}{a} & 0 \\ -2a & \sin\psi & z\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & -z\sin\psi \end{pmatrix} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\, d\psi \int_0^a (-9z^2)\, dz = [-3z^3]_0^a = -3a^3$. Poiché $\frac{5}{3}a^3 + \frac{4}{3}a^3 + (-3a^3) = 0$, il teorema di Gauss risulta verificato.

(c) La circuitazione antioraria di $(f,g) = (y, -2a)$ lungo il bordo di B è $\int_0^a (0,-2a)\cdot(1,0)\, dx + \int_a^{2a}(x-a,-2a)\cdot(1,1)\, dx + \int_a^0 (y,-2a)\cdot(\frac{4y}{a},1)\, dy = \int_a^{2a}(x-3a)\, dx - \int_0^a(\frac{4y^2}{a}-2a)\, dy = [\frac{1}{2}x^2-3ax]_a^{2a} - [\frac{4y^3}{3a}-2ay]_0^a = (-4a^2)-(-\frac{5}{2}a^2)-(-\frac{2}{3}a^2)+(0) = -\frac{5}{6}a^2$; d'altra parte $\int_B(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\, dx\, dy = -\int_B dx\, dy = -\text{Area}\, B = -\frac{5}{6}a^2$, e ciò conferma la formula di Green.

4. (a) (Figura 3) L'equazione $(y^2+2t-1)y' + y(y-2) = 0$ non è in forma normale, e negli istanti t_0 in cui una soluzione soddisfa $y^2(t_0) + 2t_0 - 1 = 0$ (parabola blu in figura) risulta $y(t_0)(y(t_0)-2) = y(t_0)^2 - 2\,y(t_0) = 1 - 2t_0 - 2\,y(t_0) = 0$, ovvero $y(t_0) = \frac{1}{2} - t_0$: confrontando le due espressioni $y^2(t_0) = 1 - 2t_0 = (\frac{1}{2} - t_0)^2$ si hanno le sole possibilità $t_0 = \frac{1}{2}$ (con $y(\frac{1}{2}) = 0$) e $t_0 = -\frac{3}{2}$ (con $y(-\frac{3}{2}) = 2$). Invece nei dati iniziali (t_0, y_0) con $y^2(t_0) \ne 1 - 2t_0$ si può porre l'equazione in forma normale $y' = f(t,y) = \frac{y(2-y)}{y^2+2t-1}$, con garanzia di esistenza e unicità locale (e unicità globale); nulla si può dire invece per l'esistenza globale. Si ha $y' = 0$ (punti stazionari) quando $y = 0$ oppure $y = 2$, e d'altra parte $y \equiv 0$ e $y \equiv 2$ sono le sole due soluzioni costanti dell'equazione; si ha poi $y' > 0$ (soluzioni crescenti) nelle zone del piano (t,y) in cui $f(t,y) > 0$, dunque all'interno della parabola $y^2 + 2t - 1 = 0$ tranne che nella striscia $0 < y < 2$ in cui si sta all'esterno. Infine, una semplice verifica diretta mostra che, se $y(t)$ è soluzione, nessuna tra $-y(t)$, $y(-t)$, $-y(-t)$ lo è.

(b) L'equazione totale associata è $\omega = p(y,t)\, dy + q(y,t)\, dt = 0$ con $p = y^2 + 2t - 1$ e $q = y(y-2)$. La forma ω non è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial t} = 2 \ne \frac{\partial q}{\partial y} = 2(y-1)$; tuttavia, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = \frac{1}{y(y-2)}(2-2(y-1)) = \frac{1}{y(y-2)}(-2(y-2)) = -\frac{2}{y}$ non dipende da t, sappiamo che $\exp(-\int \frac{2}{y}\, dy) = \exp(-2\log|y|) = \frac{1}{y^2}$ è un fattore integrante, ovvero $\frac{1}{y^2}\omega$ è esatta. In effetti, detta $F(y,t)$ una sua primitiva, deve essere $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \frac{2t-1}{y^2}$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{y-2}{y}$: dalla seconda si ha subito $F(y,t) = \frac{y-2}{y}t + \psi(y)$, e allora dalla prima $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2t}{y^2} + \psi'(y) = 1 + \frac{2t-1}{y^2}$, ovvero $\psi'(y) = 1 - \frac{1}{y^2}$ che dà $\psi(y) = y + \frac{1}{y}$. Otteniamo così $F(y,t) = \frac{y-2}{y}t + y + \frac{1}{y}$, dunque le curve integrali dell'equazione sono $F(y,t) = k$, ovvero $y^2 - (k-t)y - 2t + 1 = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: naturalmente in questo caso si può anche esplicitare la funzione ottenendo $y(t) = \frac{1}{2}(k - t \pm \sqrt{(k-t)^2 + 4(2t-1)})$. Imponendo che $y(1) = -1$ si ottiene $-1 = \frac{1}{2}(k - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2+4})$, da cui la scelta del segno meno e $k = 1$, ottenendo $y(t) = \frac{1}{2}(1 - t - \sqrt{t^2+6t-3})$.

5. Il sistema lineare $(\dot{x}, \dot{y}) = (x + 1 + (1+i)y,\ x - 2t + (1-i)y)$ si scrive come $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$. La matrice della parte omogenea ha autovalori 2 e $-i$, con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; d'altra parte, visto che 0 non è un autovalore, una soluzione particolare del sistema completo sarà del tipo $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (at+b, ct+d)$, e i calcoli danno $(a,b,c,d) = (1-i, 1, i, -1)$. La soluzione generale è dunque della forma $(x(t), y(t)) = (A(1+i)e^{2t} + Be^{-it} + (1-i)t + 1,\ Ae^{2t} - Be^{-it} + it - 1)$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$; e imponendo la condizione $(x(0), y(0)) = (0,0)$ si ottiene $(A,B) = (0,-1)$, ovvero la soluzione $(x(t), y(t)) = ((1-i)t + 1 - e^{-it},\ it - 1 + e^{-it})$.

1. Ex. 2. **2.** Ex. 3. **3** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (02/07/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ____________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g(x,y) = 3x^2y + 2x - y^3$.

(a) Dire quali curve di livello di g nel piano cartesiano sono regolari. Notato che quella Γ passante per $C(0,1)$ lo è, parametrizzarla al 2o ordine in C e trovarne in due modi la retta ivi tangente.

(b) Determinare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y) : y \geq -1,\, 0 \leq x \leq 1 - y\}$ (perché esistono?)

2. Nel piano cartesiano si disegni $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2,\, 0 \leq x \leq \min\{y,\, a\}\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare area e baricentro di A.

(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono finiti gli integrali su A di x^α e y^α, e calcolarli per $\alpha = -1$.

3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x,z), e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse z.

(a) Calcolare il volume e l'area totale esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, z, 0)$.

(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la porzione conica di ∂E.

4. È data l'equazione differenziale $2y'' = 3t^\alpha y^2$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza, unicità, invarianza temporale delle soluzioni? Ve ne sono di costanti, o più in generale della forma $k\,t^\beta$, con $k, \beta \in \mathbb{R}$?

(b) Posto $\alpha = 0$ determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

5. (a) Dato il sistema differenziale $(\dot{x}, \dot{y}) = (ix + 2y,\, 2(x + e^t) - 3iy)$ determinarne tutte le soluzioni $(x(t), y(t))$, in particolare quella che per $t = 0$ passa per l'origine.

(b) Trovare tutte le soluzioni $(x(t), y(t), z(t))$ di $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (ix + 2y + 1,\, 2x - 3iy - 2i,\, x - iz)$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (02/07/2018) – Soluzioni.

1. (a) Il gradiente di $g(x,y)=3x^2y+2x-y^3$ è $\nabla g=(2(3xy+1),\,3(x^2-y^2))$; da $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ha $y=\pm x$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ dà $\pm 3x^2+1=0$ che ha soluzioni reali solo quando $y=-x$, ovvero $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pertanto g non è sommersiva nei punti $A_+(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $A_-(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ (con $g(A_\pm)=\pm\frac{4\sqrt{3}}{9}$): dunque tutte le curve di livello $g(x,y)=\ell$ con $\ell\neq\pm\frac{4\sqrt{3}}{9}$ sono regolari, in particolare lo è quella di livello $g(C(0,1))=-1$, che abbiamo denotato con Γ. Da $\nabla g(C)=(2,-3)$ si può esprimere ad esempio $x=x(y)$ con $x(1)=0$ e $x'(0)=\frac{3}{2}$; alternativamente, derivando rispetto y l'identità $g(x(y),y)\equiv 0$ si ha $6xx'y+3x^2+2x'-3y^2=0$, da cui calcolando in $y=1$ con $x(1)=0$ si ha $2x'(1)-3=0$ ovvero di nuovo $x'(1)=\frac{3}{2}$; derivando ancora si ha poi $6(x')^2y+6xx''y+6xx'+6xx'+2x''-6y=0$, da cui per $y=1$ si ricava $\frac{27}{2}+2x''(1)-6=0$, ovvero $x''(1)=-\frac{15}{4}$. Ne segue che Γ è parametrizzata attorno a C da $(x(y),y)$ con $x(y)=0+\frac{3}{2}(y-1)-\frac{15}{8}(y-1)^2+o_1((y-1)^2)$; la retta tangente è data dallo sviluppo al primo ordine $x=\frac{3}{2}(y-1)$, o analogamente da $\nabla g(C)\cdot(x-0,y-1)=(2,-3)\cdot(x,y-1)=2x-3(y-1)=0$.

(b) L'insieme $K=\{(x,y):y+1\geq 0,\ 0\leq x\leq 1-y\}$ è un triangolo di estremi $C(0,1)$, $D(0,-1)$ e $E(2,-1)$, compresi i lati e i punti interni: si tratta di un insieme compatto, dunque su di esso la funzione continua g ammette estremi assoluti in base a Weierstrass. Per il loro calcolo dividiamo K nei suoi punti interni, nei suoi lati privati dei vertici e negli stessi tre vertici. Il solo punto interno stazionario per g è A_+. Sul lato CD si ha $G(y)=g(0,y)=-y^3$ con $|y|<1$, ed essendo $G'(y)=-3y^2=0$ per $y=0$ si trova il punto $O(0,0)$. Sul lato DE si ha $G(x)=g(x,-1)=-3x^2+2x+1$ con $0<x<2$, ed essendo $G'(x)=-6x+2=0$ per $x=\frac{1}{3}$ si ha il punto $F(\frac{1}{3},-1)$. Sul lato CE si ha $G(x)=g(x,1-x)=3x^2(1-x)+2x-(1-x)^3=-2x^3+5x-1$ con $0<x<2$, ed essendo $G'(x)=-6x^2+5=0$ per $x=\sqrt{\frac{5}{6}}$ si ha il punto $H(\sqrt{\frac{5}{6}},1-\sqrt{\frac{5}{6}})$. Gli estremi di g su K saranno dunque assunti solo nei sette punti A_+, O, F, H, C, D e E: essendo $g(A)=\frac{4}{9}\sqrt{3}\sim 0{,}8$, $g(O)=0$, $g(F)=\frac{4}{3}\sim 1{,}3$, $g(H)=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}-1\sim 2{,}0$, $g(C)=-1$, $g(D)=1$ e $g(E)=-7$, il minimo assoluto di g su K è -7 (assunto in E) e il massimo $\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}-1$ (in H).

2. (a) (Figura 2) Per il calcolo[(1)] decomponiamo $A=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4a^2,\ 0\leq x\leq\min\{y,a\}\}$ in $A_1=A\cap\{y\geq x\sqrt{3}\}$ (settore circolare di apertura $\frac{\pi}{6}$) e $A_2=A\cap\{y\leq x\sqrt{3}\}$ (triangolo scaleno), le cui aree sono $\frac{1}{2}(2a)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}a^2$ e $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)a\cdot a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a^2$, dunque Area $A=(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}-1}{2})a^2=\frac{2\pi+3(\sqrt{3}-1)}{6}a^2$. • Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy=\int_{A_1}x\,dx\,dy+\int_{A_2}x\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a}\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho+\int_0^a x\,(\sqrt{3}-1)x\,dx=\frac{4(2-\sqrt{3})}{3}a^3+\frac{\sqrt{3}-1}{3}a^3=\frac{7-3\sqrt{3}}{3}a^3$ da cui $x_G=\frac{1}{\text{Area }A}\int_A x\,dx\,dy=\frac{2(7-3\sqrt{3})}{2\pi+3(\sqrt{3}-1)}a$; e $\int_A y\,dx\,dy=\int_{A_1}y\,dx\,dy+\int_{A_2}y\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho+\int_0^a dx\int_x^{x\sqrt{3}}y\,dy=\frac{4}{3}a^3+\frac{1}{3}a^3=\frac{5}{3}a^3$ da cui $y_G=\frac{1}{\text{Area }A}\int_A y\,dx\,dy=\frac{10}{2\pi+3(\sqrt{3}-1)}a$.

(b) Le funzioni x e y sono positive su A, dunque per Fubini e Tonelli basta esaminare il comportamento di integrali iterati; inoltre saranno integrabili su A se e solo se lo saranno sia su A_1 che su A_2, e in tal caso l'integrale sarà la somma dei due. Esaminiamo perciò integrali iterati su A_1 e A_2. • Si ha $\int_{A_1}x^\alpha\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a}\rho^\alpha\cos^\alpha\theta\,\rho\,d\rho=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha\theta\,d\theta\int_0^{2a}\rho^{\alpha+1}\,d\rho$ che per convergere sia in $\theta\sim\frac{\pi}{2}$ che in $\rho\sim 0$ richiede $\alpha>-1$; si ha poi $\int_0^a dx\int_x^{x\sqrt{3}}x^\alpha\,dy=\int_0^a(\sqrt{3}-1)x^{\alpha+1}\,dx$ che per convergere richiede $\alpha+1>-1$, ovvero $\alpha>-2$. Dunque x^α è integrabile su A se e solo se $\alpha>-1$; in particolare per $\alpha=-1$ diverge a $+\infty$. • Si ha $\int_{A_1}y^\alpha\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a}\rho^\alpha\sin^\alpha\theta\,\rho\,d\rho=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha\theta\,d\theta\int_0^{2a}\rho^{\alpha+1}\,d\rho$ che per convergere richiede $\alpha+1>-1$, ovvero $\alpha>-2$; nel caso particolare $\alpha=-1$ risulta $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta\int_0^{2a}d\rho=2a[\log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2a(0-\log\frac{1}{\sqrt{3}})=a\log 3$. Si ha poi $\int_0^a dx\int_x^{x\sqrt{3}}y^\alpha\,dy=$ (se $\alpha\neq-1$) $\int_0^a[\frac{1}{\alpha+1}y^{\alpha+1}]_{y=x}^{y=x\sqrt{3}}\,dx=\frac{3^{\frac{\alpha+1}{2}}-1}{\alpha+1}\int_0^a x^{\alpha+1}\,dx$, che per $\alpha+1>-1$ (ovvero $\alpha>-2$) converge a $\frac{3^{\frac{\alpha+1}{2}}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}a^{\alpha+2}$; invece nel caso $\alpha=-1$ si ha $\int_0^a dx\int_x^{x\sqrt{3}}y^{-1}\,dy=\int_0^a[\log y]_x^{x\sqrt{3}}\,dx=\frac{1}{2}a\log 3$. Ricapitolando, y^α è integrabile su A se e solo se $\alpha>-2$; e nel caso particolare $\alpha=-1$ risulta $a\log 3+\frac{1}{2}a\log 3=\frac{3}{2}a\log 3$.

3. (a) (Figura 3) Il volume di E, generato da una rotazione di un quarto di giro dell'insieme A dell'Ex. 2 attorno all'asse z, si ottiene facilmente con Guldino tramite $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz=\frac{\pi}{2}\frac{7-3\sqrt{3}}{3}a^3=\frac{(7-3\sqrt{3})\pi}{6}a^3$. • Le aree delle facce A su $y=0$ e A' su $x=0$ sono $\frac{2\pi+3(\sqrt{3}-1)}{6}a^2$. La porzione sferica S (ricordiamo che l'elemento d'area di una sfera di raggio R in coordinate sferiche è $R^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$) ha area $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a)^2\sin\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}4a^2[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}}=(2-\sqrt{3})\pi a^2$. La porzione cilindrica C è parametrizzata da $(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$ con $\theta\in[0.\frac{\pi}{2}]$ e $z\in[a,a\sqrt{3}]$, con elemento d'area $a\,d\theta\,dz$, dunque l'area risulta $\frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2}a^2$. Infine, la porzione conica P è parametrizzata da $(z\cos\theta,z\sin\theta,z)$ con $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ e $z\in[0,a]$ con elemento d'area $\sqrt{2}\,z\,d\theta\,dz$, da cui l'area $\frac{\pi}{2}\int_0^a\sqrt{2}\,z\,dz=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}a^2$. L'area totale di E è la somma di questi contributi.

(b) Il campo $F=(0,z,0)$ ha divergenza 0, dunque va verificato che il flusso uscente totale sia nullo. La superficie S è data da $(2a\cos\theta\sin\varphi,2a\sin\theta\sin\varphi,2a\cos\varphi)$ con $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ e $\varphi\in[0,\frac{\pi}{6}]$ (normale associata entrante), dunque si ottiene $\Phi_S(F)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\det\begin{pmatrix}0&-2a\sin\theta\sin\varphi&2a\cos\theta\cos\varphi\\2a\cos\varphi&2a\cos\theta\sin\varphi&2a\sin\theta\cos\varphi\\0&0&-2a\sin\varphi\end{pmatrix}d\varphi=-8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\det\begin{pmatrix}0&-\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\cos\varphi\\\cos\varphi&\cos\theta\sin\varphi&\sin\theta\cos\varphi\\0&0&-\sin\varphi\end{pmatrix}d\varphi=$ $8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{8}{3}a^3[\sin^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}a^3$. Per C e P (normali associate uscenti) si ha $\Phi_C(F)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a\sqrt{3}}\det\begin{pmatrix}0&-a\sin\theta&0\\z&a\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}dz=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a\sqrt{3}}z\sin\theta\,dz=a\int_a^{a\sqrt{3}}z\,dz=a[\frac{1}{2}z^2]_a^{a\sqrt{3}}=a^3$ e $\Phi_P(F)=$

[(1)] Per la risoluzione, anziché il metodo indicato si poteva anche ragionare comodamente per x-fili.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} 0 & -z\sin\theta & \cos\theta \\ z & z\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a z^2 \sin\theta \, dz = a[\frac{1}{3}z^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Infine $\Phi_{A'}(F) = 0$ (il campo F è parallelo all'asse y, dunque a A'), e $\Phi_A(F) = \int_A (0,z,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -\frac{5}{3}a^3$ (conto già fatto in (a)). Si ha dunque $\Phi_{\partial E}(F) = \frac{1}{3}a^3 + a^3 + \frac{1}{3}a^3 + (-\frac{5}{3}a^3) = 0$, come si voleva.

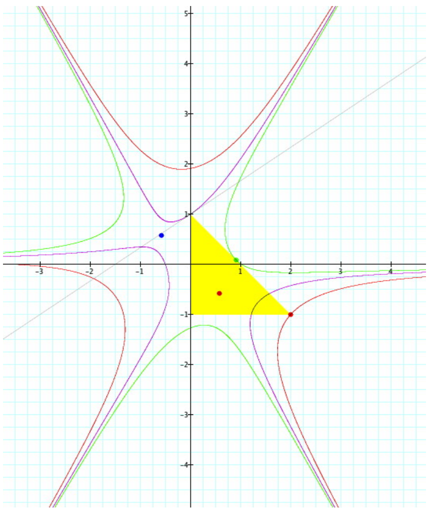
(c) F ha rotore $\nabla\times F = (-1,0,0)$, e dunque $\Phi_P(\nabla\times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} -1 & -z\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & z\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a z\cos\theta\,dz = -\int_0^a z\,dz = -\frac{1}{2}a^2$. Calcoliamo ora la circuitazione di F lungo ∂P con l'orientazione antioraria: partendo da $(a,0,a)$ si ha $\oint_{+\partial P} F\cdot d\ell = \int_a^0 (0,x,0)\cdot(1,0,1)\,dx + \int_0^a (0,y,0)\cdot(0,1,1)\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (0,a,0)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)\,d\theta = 0 + \int_0^a y\,dy - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = 0 + \frac{1}{2}a^2 - a^2 = -\frac{1}{2}a^2$, come atteso.

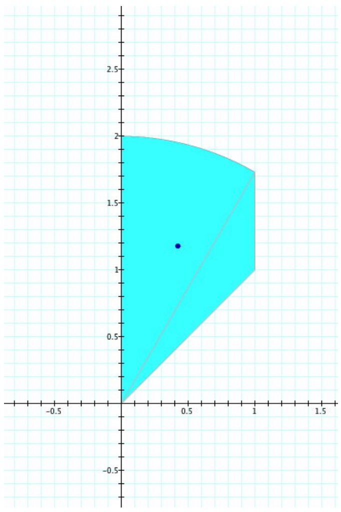
4. (a) L'equazione $2y'' = 3t^\alpha y^2$, ovvero $y'' = \frac{3}{2}t^\alpha y^2$ è in forma normale, ed è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y,p) = (y,y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = \frac{3}{2}t^\alpha y^2 \end{cases}$. La funzione $f(y,p;t) = (p, \frac{3}{2}t^\alpha y^2))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (t_0, y_0, y_0') (se $\alpha \geq 0$) o (t_0, y_0, y_0') con $t_0 \neq 0$ (se $\alpha < 0$) (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y,p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune soluzioni. Se $\alpha \neq 0$ l'equazione non è autonoma, dunque non c'è invarianza temporale dello spazio delle soluzioni. L'unica soluzione costante è quella nulla; più in generale, imponendo che $k\,t^\beta$ sia soluzione si ha $2k\beta(\beta-1)t^{\beta-2} = 3t^\alpha k^2 t^{2\beta} = 3k^2 t^{\alpha+2\beta}$, da cui $2k\beta(\beta-1) = 3k^2$ e $\beta - 2 = \alpha + 2\beta$: se ne ricava $\beta = -\alpha - 2$ e $k = 0$ oppure $k = \frac{2}{3}\beta(\beta-1)$, ovvero la soluzione nulla oppure $y(t) = \frac{2}{3}(\alpha+2)(\alpha+3)t^{-\alpha-2}$.

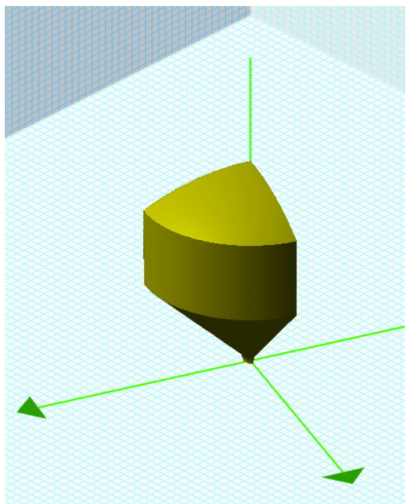
(b) Posto $\alpha = 0$, l'equazione $y'' = \frac{3}{2}y^2$ ha tra le sue soluzioni quella nulla e $y(t) = 4t^{-2}$, che non soddisfano la condizione iniziale proposta $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Notiamo però che l'equazione ammette l'integrale primo dell'energia totale $\frac{1}{2}(y')^2 - \int \frac{3}{2}y^2\,dy = \frac{1}{2}((y')^2 - y^3)$, che sulla soluzione cercata con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$ vale costantemente 0. Si ricava dunque $(y')^2 = y^3$, da cui $y' = -y^{\frac{3}{2}}$, da cui $y^{-\frac{3}{2}}\,dy = -dt$ che integrata dà $-2y^{-\frac{1}{2}} = k - t$, ovvero $y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t-k)$: imponendo che $y(0) = 1$ si ha $k = -2$, da cui $y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2+t)$ e perciò $y(t) = \frac{4}{(2+t)^2}$ (che, si noti, è una traslata temporale della soluzione $y(t) = 4t^{-2}$: il fatto non sorprende, visto che per $\alpha = 0$ l'equazione diventa autonoma).

5. (a) Il sistema lineare $(\dot{x},\dot{y}) = (ix + 2y,\, 2(x+e^t) - 3iy)$ si scrive $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$. La matrice A della parte omogenea ha autovalore doppio $-i$, dunque dalla teoria sappiamo che $N = A - (-i)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $N^2 = \mathbf{0}$) e che $e^{tA} = e^{-it}(1+tN)$: le soluzioni dell'omogenea sono allora $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2it)e^{-it} & 2t\,e^{-it} \\ 2t\,e^{-it} & (1-2it)e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. D'altra parte, visto che 1 non è autovalore, una soluzione particolare del sistema completo sarà del tipo $(f\,e^t, g\,e^t)$ e i calcoli danno $(f,g) = (-2i, -1-i)$. La soluzione generale è dunque della forma $(x(t),y(t)) = (((1+2it)A + 2Bt)e^{-it} - 2ie^t,\, (2At + (1-2it)B)e^{-it} - (1+i)e^t) = ((2(B+iA)t + A)e^{-it} - 2ie^t,\, (2(A-iB)t + B)e^{-it} - (1+i)e^t)$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$; e imponendo la condizione $(x(0),y(0)) = (0,0)$ si ottiene $(A,B) = (2i, 1+i)$.

(b) Le prime due equazioni del sistema $(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = (ix + 2y + 1,\, 2x - 3iy - 2i,\, x - iz)$ non coinvolgono z e hanno parte omogenea uguale a quella del punto (a); inoltre una soluzione particolare relativa al termine non omogeneo $(1, -2i)$ sarà del tipo (a,b), e dai conti risulta $(a,b) = (i,0)$. Pertanto le soluzioni per le prime due componenti sono tutte e sole quelle del tipo $(x(t),y(t)) = ((2(B+iA)t + A)e^{-it} + i,\, (2(A-iB)t + B)e^{-it})$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Si ha così $\dot{z} + iz = 2(B+iA)t + A)e^{-it} + i$, equazione lineare del primo ordine che ha soluzione $z(t) = e^{-it}(\int e^{it}((2(B+iA)t + A)e^{-it} + i)\,dt\ + C) = e^{-it}(\int(2(B+iA)t + A + ie^{it})\,dt\ + C) = e^{-it}((B+iA)t^2 + At + e^{it} + C)$. Concludendo, le soluzioni del sistema proposto sono tutte e sole quelle del tipo $(x(t),y(t),z(t)) = \big((2(B+iA)t + A)e^{-it} + i,\, (2(A-iB)t + B)e^{-it},\, e^{-it}((B+iA)t^2 + At + C) + 1\big)$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$.







1. Ex. 1. **2.** Ex. 2. **3** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (27/08/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g(x, y, z) = \sqrt{x + y - z} + 2xz - y^2$.

(a) Notato che la superficie di livello S di g passante per $P(0, 1, 0)$ è regolare, parametrizzarla in P e trovarne in due modi il piano ivi tangente.

(b) Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z$ ha P come punto stazionario su S, determinandone la natura.

2. Nel piano cartesiano si disegni $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax,\ x \leq y\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare area e baricentro di A.[(1)]

(b) Dire per quali (α, β) esiste finito l'integrale su A di $x^\alpha y^\beta$, e calcolarlo per $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ e $(0, -1)$.

3. Nello spazio cartesiano si disegni $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x + z \leq a\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare il volume (possibilmente in due modi) e l'area totale esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, 0, 2y)$.

(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la porzione cilindrica di ∂E.

4. È data l'equazione differenziale $t^2(1 + \sqrt{|y|})\, y' = \sqrt{|y|}$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza, unicità, crescenza, invarianza temporale delle soluzioni? Ve ne sono di costanti? Se $\eta(t)$ è una soluzione su $I \subset \mathbb{R}_{>0}$, lo sono anche $\eta(-t)$ oppure $-\eta(-t)$ su $-I$?

(b) Determinare le soluzioni tali che $y(1) = -1$, $y(1) = 1$ oppure $y(1) = 0$, specificando il loro dominio.

5. Trovare tutte le soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = x + 1 - 2y \\ \dot{y} = \alpha x - (\alpha + 1)y \end{cases}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[(1)] Può essere utile sapere che $\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\sin\theta\cos^3\theta)$ e $\int \sin^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta - \sin\theta\cos\theta) - 2\sin^3\theta\cos\theta)$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (27/08/2018) – Soluzioni.

1. (a) Il gradiente di $g(x,y,z) = \sqrt{x+y-z} + 2xz - y^2$ è $\nabla g = (\frac{1}{2R} + 2z,\ \frac{1}{2R} - 2y,\ -\frac{1}{2R} + 2x)$ (ove si è posto per comodità $R = \sqrt{x+y-z}$). In $P(0,1,0)$ vale $g(P) = 0$ e $\nabla g(P) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, dunque la superficie di livello S passante per P (data da $g=0$) è regolare. Attorno P si può ad esempio esplicitare $x(y,z)$ con $x(1,0)=0$, $\dot{x}_y(1,0) = -\frac{-3/2}{1/2} = 3$ e $\dot{x}_z(1,0) = -\frac{-1/2}{1/2} = 1$: ne ricaviamo che il piano tangente a S in P è dato da $x = 0 + 3(y-1) + 1(z-0)$ ovvero $x - 3y - z + 3 = 0$, risultato che si ritrova anche da $\nabla g(P)\cdot(x-0, y-1, z-0) = 0$.

(b) Per Lagrange la condizione affinché la funzione $f(x,y,z) = x + \alpha y + \beta z$ abbia P come punto stazionario su S è che $\nabla f(P) = (1,\alpha,\beta)$ e $\nabla g(P) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ siano paralleli, e ciò dà $\alpha = -3$ e $\beta = -1$. A questo punto, studiare la natura di P per f su S equivale a studiare la natura di $(y_0, z_0) = (1,0)$ per $F(y,z) = f(x(y,z),y,z) = x(y,z) - 3y - z$. Essendo $\nabla F(y,z) = (\dot{x}_y - 3,\ \dot{x}_z - 1)$ si vede subito che $\nabla F(1,0) = (0,0)$, come già noto; passando poi alle derivate seconde si ha che $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z)$, dunque per capire la natura di $(0,1)$ per F (ovvero la natura di P per f su S) abbiamo bisogno di calcolare $\mathsf{H}_x(1,0)$. Derivando $g(x(y,z),y,z) \equiv 0$ rispetto y e z si ha $\frac{1}{2R}(\dot{x}_y + 1) + 2\dot{x}_y z - 2y = 0$ e $\frac{1}{2R}(\dot{x}_z - 1) + 2\dot{x}_z z + 2x = 0$ (da cui per $(y,z) = (1,0)$ con $x(1,0) = 0$ si trova nuovamente $\dot{x}_y(1,0) = 3$ e $\dot{x}_z(1,0) = 1$). Derivando nuovamente la prima delle due rispetto a y e z si ha $\frac{1}{2R^2}(\ddot{x}_{yy}R - \frac{1}{2R}(\dot{x}_y+1)^2) + 2\ddot{x}_{yy}z - 2 = 0$ e $\frac{1}{2R^2}(\ddot{x}_{yz}R - \frac{1}{2R}(\dot{x}_y+1)(\dot{x}_z-1)) + 2\ddot{x}_{yz}z + 2\dot{x}_y = 0$, che calcolate in $(y,z) = (1,0)$ coi valori trovati prima danno $\ddot{x}_{yy}(1,0) = 12$ e $\ddot{x}_{yz}(1,0) = -12$; derivando poi la seconda delle due nuovamente rispetto z si ha $\frac{1}{2R^2}(\ddot{x}_{zz}R - \frac{1}{2R}(\dot{x}_z-1)^2) + 2\ddot{x}_{zz}z + 2\dot{x}_z + 2\dot{x}_z = 0$, che calcolata in $(y,z) = (1,0)$ coi valori trovati prima dà $\ddot{x}_{zz}(1,0) = -8$. Si ha perciò $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}$, matrice indefinita (si noti che $\det < 0$): questo ci dice che P è un punto di sella per f su S.

2. (a) (Figura 1) L'insieme $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2ax,\ x \le y\}$ si può descrivere in coordinate polari come $\rho \le 2a\cos\theta$ con $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, e la sua area risulta dunque $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2a\cos\theta)^2\,d\theta = a^2[\theta + \cos\theta\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{4}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[\frac{1}{8}(3(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\sin\theta\cos^3\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}a^3[(\frac{3\pi}{2} - (\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2})] = \frac{3\pi-8}{12}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[-\frac{1}{4}\cos^4\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}a^3[0 - (-\frac{1}{4})] = \frac{1}{6}a^3$, da cui $(x_G, y_G) = (\frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A x\,dx\,dy,\ \frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A y\,dx\,dy) = (\frac{3\pi-8}{3(\pi-2)}a,\ \frac{2}{3(\pi-2)}a)$ (si noti che il baricentro appartiene all'asse di simmetria $x + y = a$).

(b) La funzione $x^\alpha y^\beta$ è positiva su A, dunque per Fubini e Tonelli basta esaminare un integrale iterato che descrive $\int_A x^\alpha y^\beta\,dx\,dy$ e vedere cosa succede. Si ha $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^\alpha(\rho\sin\theta)^\beta\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta\,d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^{\alpha+\beta+1}\,d\rho$, che per essere integrata in $\rho \sim 0$ richiede sia $\alpha + \beta + 1 > -1$ ovvero $\beta > -\alpha - 2$. Sotto questa ipotesi, integrando in ρ si ricava $\frac{(2a)^{\alpha+\beta+2}}{\alpha+\beta+2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha+\beta+2}\theta\,\sin^\beta\theta\,d\theta$: ora gli eventuali problemi di integrazione sono in $\theta \sim \frac{\pi}{2}$, in cui il coseno è uno zero del primo ordine, dunque la condizione necessaria per l'integrabilità è $2\alpha + \beta + 2 > -1$ ovvero $\beta > -2\alpha - 3$. Ricapitolando, la funzione $x^\alpha y^\beta$ ha integrale finito su A se e solo se $\begin{cases} \beta > -\alpha - 2 \\ \beta > -2\alpha - 3 \end{cases}$. In particolare questa condizione è soddisfatta in entrambi i casi proposti per il calcolo: se $(\alpha,\beta) = (-1,0)$ si ottiene $2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}a$, mentre se $(\alpha,\beta) = (0,-1)$ si ha $2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\sin^{-1}\theta\,d\theta = 2a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}\theta\,d\theta = 2a[\log\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -2a\log\frac{1}{\sqrt{2}} = a\log 2$.

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E in due modi. 1. Per (x,y)-fili: detta B la base di E sul piano orizzontale (il quarto di cerchio di raggio a), il filo sopra $(x,y) \in B$ è dato da $0 \le z \le a - x$, dunque il volume di E risulta $\int_B (a-x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (a - \rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\theta)\,d\theta = a^3[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3}\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})a^3$. 2. Per x-fette: fissato $0 \le x \le a$ la corrispondente x-fetta è data da $0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$ e $0 \le z \le a - x$, ovvero un rettangolo in (y,z) di lati $\sqrt{a^2-x^2}$ e $a - x$, pertanto il volume di E risulta $\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a\cdot\frac{1}{4}\pi a^2 - [-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})a^3$. • La base B ha area $\frac{1}{4}\pi a^2$; le porzioni laterali triangolare S e quadrata S' hanno aree $\frac{1}{2}a^2$ e a^2. Il coperchio superiore P è parametrizzato da $(x, y, a-x)$ con $x, y \in B$ (elemento d'area $\sqrt{2}\,dx\,dy$), dunque la sua area — conformemente anche alla legge del coseno — è $\sqrt{2}\cdot\text{Area}\,B = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$. Infine la porzione laterale cilindrica C è parametrizzata da $(a\cos\theta, a\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le a - x = a(1 - \cos\theta)$ (elemento d'area $a\,d\theta\,dz$), e l'area è $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} a\,dz = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta)\,d\theta = a^2[\theta - \sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{2} - 1)a^2$. L'area totale di E, somma di questi contributi, risulta dunque $(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 1)a^2 = \frac{(3+\sqrt{2})\pi+2}{4}a^2$.

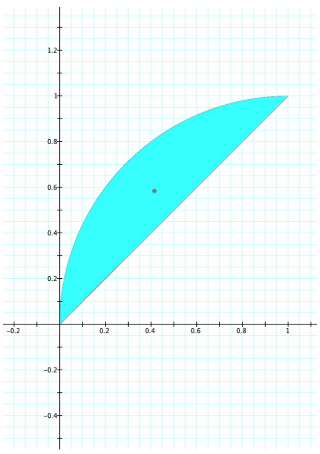
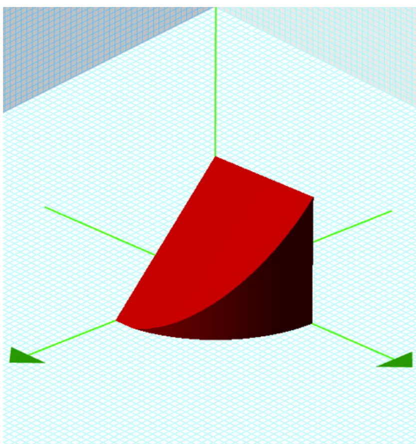
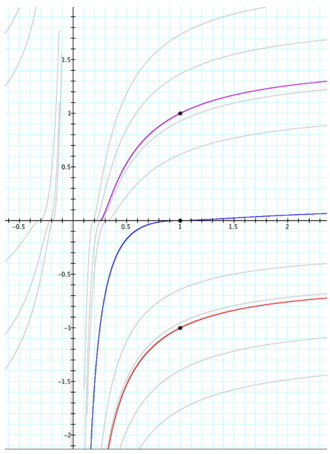
(b) Il campo $F = (x, 0, 2y)$ ha divergenza 1, dunque va verificato che il flusso uscente totale sia pari al volume di E, ovvero $(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})a^3$. Poiché F è parallelo al piano (x,z) si ha $\Phi_S(F) = 0$. Sul piano (y,z) il campo è parallelo all'asse z e dunque a S', perciò $\Phi_{S'}(F) = 0$. Per la base B si ha $\Phi_B(F) = \int_B (x, 0, 2y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy = -2\int_B y\,dx\,dy = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = -\frac{2}{3}a^3$. Per il coperchio P si ha $\Phi_P(F) = +\int_B \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2y & -1 & 0 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_B (x + 2y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + 2\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}a^3[\sin\theta - 2\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3$. Infine per C si ha $\Phi_C(F) = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta & 0 \\ 0 & a\cos\theta & 0 \\ 2a\sin\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} a^2\cos^2\theta\,dz = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta)\cos^2\theta\,d\theta = a^3[\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) - \sin\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3})a^3$. Si ha così $\Phi_{\partial E}(F) = \Phi_S(F) + \Phi_{S'}(F) + \Phi_B(F) + \Phi_P(F) + \Phi_C(F) = (0 + 0 - \frac{2}{3} + 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3})a^3 = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})a^3$, come atteso.

(c) F ha rotore $\nabla\times F = (2,0,0)$, e dunque $\Phi_C(\nabla\times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1-\cos\theta)} \det\begin{pmatrix} 2 & -a\sin\theta & 0 \\ 0 & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta)\cos\theta\,d\theta =$

$a^2[2\sin\theta - \theta - \sin\theta\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{2})a^2$. Calcoliamo ora la circuitazione di F lungo ∂C con l'orientazione antioraria: partendo da $(a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial P} F\cdot d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta, 0, 2a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)\,d\theta + \int_0^a (0,0,2a)\cdot(0,0,1)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\cos\theta, 0, 2a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, a\sin\theta)\,d\theta = -a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta + 2a\int_0^a dz + a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta)\,d\theta = 2a\int_0^a dz - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta\,d\theta = 2a^2 - [\theta - \sin\theta\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{2})a^2$, come già trovato in precedenza.

4. (a) Dall'equazione $t^2(1+\sqrt{|y|})\,y' = \sqrt{|y|}$ si nota che una soluzione $y(t)$ definita in $t=0$ deve necessariamente annullarsi lì, ovvero $y(0)=0$; notato ciò, si può porre in forma normale $y' = f(t,y) = \frac{\sqrt{|y|}}{t^2(1+\sqrt{|y|})}$. La funzione f è continua in tutti i punti del piano (t,y) con $t\neq 0$, ed è lipschitziana rispetto a y ovunque tranne che nel punti con $y=0$ (ove è asintotica a $\sqrt{|y|}$): ne ricaviamo che per ogni dato iniziale (t_0,y_0) con $t_0\neq 0$ la soluzione esiste, ma che per i dati con $y_0=0$ non è assicurata l'unicità (anzi: ricordando il noto caso di $y'=\sqrt{|y|}$ è assai probabile che l'unicità salti). Poiché $f\geq 0$ le soluzioni saranno crescenti sul loro dominio; poiché l'equazione non è autonoma non si avrà invarianza temporale delle soluzioni. L'unica soluzione costante è quella nulla $y\equiv 0$; infine, una semplice verifica mostra che se $\eta(t)$ è una soluzione su $I\subset\mathbb{R}_{>0}$ lo sarà anche $-\eta(-t)$ su $-I$.
(b) (Figura 3) L'equazione è a variabili separabili; per $t\neq 0$ si ha $(\frac{1}{\sqrt{|y|}}+1)\,dy = \frac{1}{t^2}\,dt$, che integrata (posto $\sigma = \operatorname{sign} y$) dà $2\sigma\sqrt{|y|}+y = c-\frac{1}{t}$. • Per la soluzione (definita e unica per $t>0$ finché non si annulla) con $y(1)=-1$ si ricava $c=-2$, da cui $-2\sqrt{|y|}+y = -2-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=-(\sqrt{|y|})^2$) si ha $(\sqrt{|y|})^2 + 2\sqrt{|y|} - (2+\frac{1}{t}) = 0$, da cui $\sqrt{|y|} = \sqrt{3+\frac{1}{t}}-1$, da cui infine $y(t) = -(4+\frac{1}{t}-2\sqrt{3+\frac{1}{t}})$, che per $t>0$ non si annulla mai (verificare) e dunque ha dominio $t>0$. • Per la soluzione (definita e unica per $t>0$ finché non si annulla) con $y(1)=1$ si ricava $c=4$, da cui $2\sqrt{y}+y = 4-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=(\sqrt{y})^2$) si ha $(\sqrt{y})^2+2\sqrt{y}-(4-\frac{1}{t})=0$, da cui $\sqrt{y}=\sqrt{5-\frac{1}{t}}-1$, da cui infine $y(t) = 6-\frac{1}{t}-2\sqrt{5-\frac{1}{t}}$, che per $t>0$ si annulla per $t=\frac{1}{4}$ (verificare) e dunque ha dominio $]\frac{1}{4},+\infty[$. • Infine, per la soluzione con $y(1)=0$ già prevediamo di perdere l'unicità. In effetti $y\equiv 0$ è già un'evidente soluzione, su tutto $\mathbb{R}$; d'altra parte un'eventuale soluzione $y(t)$ non costante dovrà soddisfare per crescenza $y\gtrless 0$ se $t\gtrless 1$, pertanto se $t<1$ si avrà $c=1$ e $-2\sqrt{|y|}+y = 1-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=-(\sqrt{|y|})^2$) si ricava $y(t) = 2\sqrt{\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}-1$, mentre se $t>1$ si avrà ancora $c=1$ e $2\sqrt{y}+y=1-\frac{1}{t}$, da cui (essendo $y=(\sqrt{y})^2$) si ricava $y(t) = 3-\frac{1}{t}-2\sqrt{2-\frac{1}{t}}$. Quella appena descritta à un'altra soluzione con $y(1)=0$, non costante, definita su $]0.+\infty[$; ma ve ne sono infinite altre, ottenute saldando un tratto di costanza 0 attorno a $t=1$ con soluzioni del tipo di quella appena trovata.

5. Il sistema dato si scrive come $\dot{Y} = AY+b$ con $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A ha autovalori -1 e $1-\alpha$, dunque vanno tenuti presente come casi particolari $\alpha=1$ (in cui il secondo autovalore è nullo) e $\alpha=2$ (in cui i due autovalori coincidono). • Per $\alpha\neq 1, 2$, due autovettori riferiti a -1 e $1-\alpha$ sono rispettivamente $(1,1)$ e $(2,\alpha)$; d'altra parte una soluzione particolare del sistema completo sarà una costante (a,b), e i calcoli danno $(a,b) = (\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1})$. Dunque le soluzioni saranno tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,e^{-t} + 2B\,e^{(1-\alpha)t} + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ A\,e^{-t} + \alpha B\,e^{(1-\alpha)t} + \frac{\alpha}{\alpha-1} \end{pmatrix}$ al variare di $A, B\in\mathbb{C}$. • Per $\alpha=1$ nulla cambia per la parte omogenea mentre una soluzione particolare del sistema completo sarà stavolta del tipo $(at+b, ct+d)$, e dai conti si trova $a=2$, $c=1$ e $b=2d+1$: scegliendo ad esempio $d=0$ si hanno le soluzioni $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,e^{-t}+2B+2t+1 \\ A\,e^{-t}+B+t \end{pmatrix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. • Per $\alpha=2$ entrambi gli autovalori valgono -1: in tal caso sappiamo che $N = A-(-1)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $N^2=\mathbf{0}$), e vale $e^{tA} = e^{-t}(1+tN) = \begin{pmatrix} (1+2t)\,e^{-t} & -2t\,e^{-t} \\ 2t\,e^{-t} & (1-2t)\,e^{-t} \end{pmatrix}$. D'altra parte una soluzione particolare del sistema completo sarà ancora una costante (a,b), e posto $\alpha=2$ nel calcolo precedente si ha $(a,b)=(3,2)$. Le soluzioni saranno dunque del tipo $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2(A-B)t+A)\,e^{-t}+3 \\ (2(A-B)t+B)\,e^{-t}+2 \end{pmatrix}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$.

1. Ex. 2. **2** Ex. 3. **3** Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (11/09/2018)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2017/18

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (3xz + y^2,\ x - y - 2z)$.

(a) Dire quali curve di livello di g sono regolari. Notato che la curva di livello Γ passante per $P(0, -1, 0)$ è regolare, parametrizzarla in P fino all'ordine quadratico e trovarne in due modi la retta ivi tangente.

(b) Mostrare che Γ è compatta, e determinare i suoi punti estremali in direzione y (perché esistono?)

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2a\,,\ 0 \le y \le 2a - \frac{1}{2}x\,,\ x^2 + y^2 \ge 2ax\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro.[1]

(b) Calcolare, se finiti, gli integrali su A di $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$.

3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z), e sia E il solido ottenuto nel primo ottante ruotando A di un quarto di giro attorno all'asse z in senso antiorario.

(a) Calcolare il volume e l'area totale esterna di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo costante $F = (1, 0, 0)$.

(c) Verificare la formula di Green nel piano (x, z) per A e per $2z\,F$ (visto come campo piano $(2z, 0)$).

4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = 2xy^2 \\ \dot{y} = (3x^2 - y^2)y \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Se $(x(t), y(t))$ è una soluzione, lo è anche $(-x(t), y(t))$, oppure $(-x(-t), y(-t))$? Determinare gli equilibri e un integrale primo; descrivere le traiettorie col verso di percorrenza.

(b) Determinare la soluzione con $(x(0), y(0)) = (0, -2)$, e quella con $(x(0), y(0)) = (-3, 3)$.

5. (a) Determinare tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione differenziale $y''' - iy' - (1 - i)y = 20(1 + \sin t)$.

(b) Mostrare il sistema lineare del primo ordine equivalente all'equazione data, ed esibirne una risolvente.

---

[1] Può essere utile sapere che $\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\sin\theta\cos^3\theta)$ e $\int \sin^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta - \sin\theta\cos\theta) - 2\sin^3\theta\cos\theta)$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (11/09/2018) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana di $g(x,y,z) = (3xz+y^2,\, x-y-2z)$ è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z & 2y & 3x \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; imponendo che abbia rango non massimo si ha $3z = -2y$ e $3x = 4y$, condizioni soddisfatte dai punti della retta $(4\alpha, 3\alpha, -2\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sui quali g vale $(-15\alpha^2, 5\alpha)$. Dunque tutte le curve di livello di g non di questo tipo sono regolari, in particolare lo è quella di $P(0,-1,0)$ su cui vale $g(P) = (1,1)$. Da $\mathsf{J}_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ si nota che attorno a P si possono esplicitare ad esempio x e y in funzione di z con $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$: derivando rispetto z l'identità $\begin{cases} 3xz + y^2 = 1 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} 3x'z + 3x + 2yy' = 0 \\ x' - y' - 2 = 0 \end{cases}$ (che calcolato in $z = 0$ dà $\begin{cases} -2y'(0) = 0 \\ x'(0) - y'(0) - 2 = 0 \end{cases}$, da cui $x'(0) = 2$ e $y'(0) = 0$), e derivando di nuovo si ha $\begin{cases} 3x''z + 3x' + 3x' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \\ x'' - y'' = 0 \end{cases}$ (che calcolato in $z = 0$ dà $\begin{cases} 12 - 2y''(0) = 0 \\ x''(0) - y''(0) = 0 \end{cases}$ da cui $x''(0) = y''(0) = 6$). Si ha così $(x(z), y(z)) = (2z + 3z^2 + o_0(z^2),\, -1 + 3z^2 + o_0(z^2))$, e lo sviluppo al primo ordine $\begin{cases} x = 2z \\ y = -1 \end{cases}$ dà la retta tangente affine a Γ in P che può essere trovata anche tramite $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - (-1) \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - (y+1) - 2z = 0 \end{cases}$ (espressione equivalente).

(b) (Figura 1) Sostituendo $x = y+2z+1$ in $3xz+y^2 = 1$ si ottiene $y^2+3yz+6z^2+3z = 1$, che rappresenta la proiezione di Γ sul piano (y,z): ma questa è l'equazione cartesiana di un'ellisse (si noti che il discriminante della parte quadratica è $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$). Dunque y e z sono limitate, e con esse anche $x = y + 2z + 1$. Inoltre Γ è un chiuso di $\mathbb{R}^3$ (definito da un sistema di equazioni continue), dunque Γ è compatta. I suoi punti estremali in direzione y, che esistono per Weierstrass, si troveranno tra i punti stazionari di $f(x,y,z) = y$ su Γ: la condizione di Lagrange dà $x + 2z = 0$, che in Γ è soddisfatta da $P(0,-1,0)$ e $Q(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, -\frac{4}{5})$, ed essendo $f(P) = -1$ e $f(Q) = \frac{11}{5}$ i punti estremali in direzione y su Γ saranno P (minimo) e Q (massimo).

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2a,\, 0 \le y \le 2a - \frac{1}{2}x,\, x^2 + y^2 \ge 2ax\}$ può essere visto come differenza del trapezio $A' = \{(x,y) : 0 \le x \le 2a,\, 0 \le y \le 2a - \frac{1}{2}x\}$ e del semicerchio $A'' = \{(x,y) : y \ge 0, x^2 + y^2 \le 2ax\}$: la sua area è data dunque da $\frac{1}{2}(2a)(a + 2a) - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{6-\pi}{2}a^2$. Si ha poi $\int_{A'} x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_0^{2a-\frac{1}{2}x} x\,dy = \int_0^{2a} x(2a - \frac{1}{2}x)\,dx = [ax^2 - \frac{1}{6}x^3]_0^{2a} = \frac{8}{3}a^3$ e (esprimendo il semicerchio come $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $\rho \le 2a\cos\theta$) $\int_{A''} x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[\frac{1}{8}(3(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\sin\theta\cos^3\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^3$, da cui $\int_A x\,dx\,dy = (\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2})a^3 = \frac{16-3\pi}{6}a^3$; e $\int_{A'} y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_0^{2a-\frac{1}{2}x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(2a - \frac{1}{2}x)^2\,dx = [-\frac{1}{3}(2a - \frac{1}{2}x)^3]_0^{2a} = \frac{7}{3}a^3$ e $\int_{A''} y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3\theta\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[-\frac{1}{4}\cos^4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}a^3$, da cui $\int_A y\,dx\,dy = \frac{5}{3}a^3$; pertanto $(x_G, y_G) = (\frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A x\,dx\,dy,\, \frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A y\,dx\,dy) = (\frac{16-3\pi}{3(6-\pi)}a,\, \frac{10}{3(6-\pi)}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono positive su A (e separatamente su A' e A''), dunque per Fubini e Tonelli possiamo esaminare integrali iterati. • Che $\frac{1}{x}$ non sia integrabile su A non è difficile da mostrare: infatti se lo fosse lo sarebbe anche sulla porzione triangolare superiore di A al di sopra di $y = a$, ma su questa si ha $\int_0^{2a} dx \int_a^{2a-\frac{1}{2}x} \frac{1}{x}\,dy = \int_0^{2a} \frac{1}{x}(a - \frac{1}{2}x)\,dx$ che diverge a $+\infty$ perché $\frac{1}{x}(a - \frac{1}{2}x) \sim_0^* \frac{1}{x}$. • Più delicata è invece la questione dell'integrabilità di $\frac{1}{y}$: in effetti l'insieme A si limita a toccare l'asse $y = 0$ con due soli punti cuspidali, dunque parrebbe di sì. D'altra parte non ci è utile separare il conto su A' e A'': infatto su ciascuno di essi, che toccano l'asse $y = 0$ in modo consistente, l'integrale di $\frac{1}{y}$ certamente divergerà a $+\infty$ ma questo non esclude che l'integrale possa convergere sulla loro differenza A. Dobbiamo dunque esaminare un integrale iterato unico, ad esempio quello più naturale per x-fili ovvero $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{2a-\frac{1}{2}x} \frac{1}{y}\,dy = \int_0^{2a} \big(\log(2a - \frac{1}{2}x) - \log\sqrt{2ax - x^2}\big)\,dx = \int_0^{2a} \big(\log(2a - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log(2a - x)\big)\,dx$. Già a questo punto possiamo dire che l'integrale convergerà, perché su $[0, 2a]$ il primo addendo $\log(2a - \frac{1}{2}x)$ non ha alcun problema d'integrabilità mentre $\log x$ e $\log(2a - x)$ li hanno rispettivamente in 0 e in $2a$ ma già sappiamo che $\log t$ è integrabile in senso generalizzato in $t \sim 0$: si tratta solo di terminare il calcolo. Posto $u = 2a - \frac{1}{2}x$ si ha $\int_0^{2a} \log(2a - \frac{1}{2}x)\,dx = \int_{2a}^{a} \log u\,(-2\,du) = 2\int_a^{2a} \log u\,du = 2[u(\log u - 1)]_a^{2a} = 2a(2\log 2 + \log a - 1))$. Si ha poi $\int_0^{2a} \log(2a - x)\,dx = \int_0^{2a} \log t\,dt = [t(\log t - 1)]_0^{2a} = 2a(\log 2 + \log a - 1)$, dunque l'integrale vale $2a(2\log 2 + \log a - 1)) - \frac{1}{2}2a(\log 2 + \log a - 1) - \frac{1}{2}2a(\log 2 + \log a - 1) = 2a(2\log 2 + \log a - 1)) - 2a(\log 2 + \log a - 1) = 2a\log 2$ (giustamente positivo).

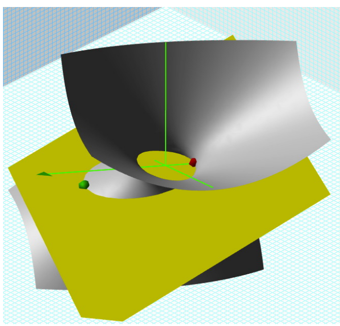
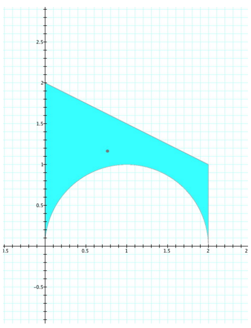
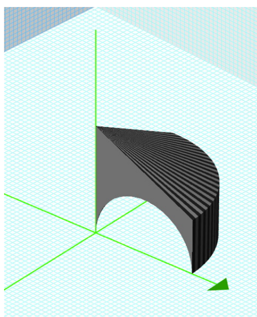
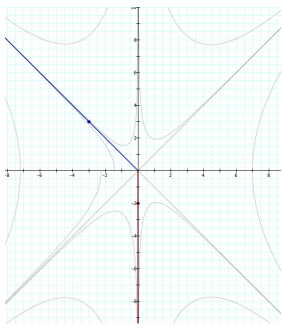
3. (a) (Figura 3) Il volume di E si trova facilmente con Guldino, come $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi(16-3\pi)}{12}a^3$. • L'area di A e del suo corrispondente B nel piano (y,z) vale $\frac{6-\pi}{2}a^2$. L'area della porzione di superficie conica in alto C è data da $\frac{1}{2}\,a\sqrt{5}\,\frac{1}{4}2\pi(2a) = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}a^2$. L'area della porzione di superficie cilindrica laterale L vale $a, \frac{1}{4}2\pi(2a) = \pi a^2$. Infine, l'area della porzione di superficie toroidale T è data da Guldino come $\frac{\pi}{2}\,a\,\frac{1}{2}2\pi a = \frac{\pi^2}{2}a^2$. L'area totale esterna di E è la somma di questi cinque contributi.

(b) Il campo costante $F = (1,0,0)$ ha divergenza nulla, dunque va verificato che il flusso totale di F uscente da ∂E è nullo. • Poiché F è parallelo ad A si ha $\Phi_A(F) = 0$; e per definizione vale $\Phi_B(F) = \int_B (1,0,0)\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz = -\text{Area}\,B = -\frac{6-\pi}{2}a^2$. La superficie C è data da $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2a - \frac{1}{2}\rho)$ con $0 \le \rho \le 2a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_C(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2a} \rho\,d\rho = a^2$. La superficie L è data da $(2a\cos\theta, 2a\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le a$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_L(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 1 & -2a\sin\theta & 0 \\ 0 & 2a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = 2a^2$. Infine, detta ψ la coordinata polare nel piano (x,z), la superficie T è data da $(2a\cos^2\psi\cos\theta, 2a\cos^2\psi\sin\theta, 2a\sin\psi\cos\psi)$ con $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_T(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 1 & -4a\sin\psi\cos\psi\cos\theta & -2a\cos^2\psi\sin\theta \\ 0 & -4a\sin\psi\cos\psi\sin\theta & 2a\cos^2\psi\cos\theta \\ 0 & 2a\cos 2\psi & 0 \end{pmatrix} d\psi =$

$-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\psi\cos^2\psi\,d\psi = -4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\psi-1)\cos^2\psi\,d\psi = -4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^4\psi-\cos^2\psi)\,d\psi = -a^2[3(\psi+\sin\psi\cos\psi)+2\sin\psi\cos^3\psi-2(\psi+\sin\psi\cos\psi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}a^2$. Il flusso totale uscente è così $\Phi_{\partial E}(F) = (0-\frac{6-\pi}{2}+1+2-\frac{\pi}{2})a^2 = 0$, come atteso.
(c) Sul piano (x,z) il campo $2z\,F$ è identificabile col campo piano $(f,g) = (2z,\,0)$, e la formula di Green afferma che $\int_{A'}(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z})\,dx\,dz = \oint_{+\partial A'}(f,g)\cdot(dx,dz)$ (ove $+\partial A'$ indica l'orientazione in senso antiorario nel piano (x,z)): poiché nel nostro caso $\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z} = -2$ il primo membro vale $-2\,\mathrm{Area}\,A = -(6-\pi)a^2$. Quanto al secondo, partendo dal punto $(x,z) = (0,0)$ in senso antiorario e parametrizzando i quattro archi di ∂A come $(2a\cos^2\psi, 2a\sin\psi\cos\psi)$ con $0\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $(2a,z)$ con $0\le z\le a$, $(x, 2a-\frac{1}{2}x)$ con $0\le x\le 2a$ e $(0,z)$ con $0\le z\le 2a$ si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^0(4a\sin\psi\cos\psi,0)\cdot(-2a\sin 2\psi, 2a\cos 2\psi)\,d\psi + \int_0^a(2z,0)\cdot(0,1)\,dz + \int_{2a}^0(4a-x,0)\cdot(1,-\frac{1}{2})\,dx + \int_{2a}^0(2z,0)\cdot(0,1)\,dz = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\psi\,d\psi + 0 - \int_0^{2a}(4a-x)\,dx + 0 = a^2[2\psi-\sin 2\psi\cos 2\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} - [4ax-\frac{1}{2}x^2]_0^{2a} = \pi a^2 - 6a^2 = -(6-\pi)a^2$ come atteso.

4. (a) (Figura 4) Il sistema $\begin{cases}\dot{x} = a(x,y) = 2xy^2\\ \dot{y} = b(x,y) = (3x^2-y^2)y\end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare (attenzione: i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$). Una verifica diretta mostra che se $(x(t),y(t))$ è una soluzione lo è anche $(-x(t),y(t))$, ma non $(-x(-t),y(-t))$. • Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a = b = 0$, che dà tutti e soli i punti dell'asse x: al di fuori di tali punti il sistema dato equivale al sistema semplificato $(\dot{x},\dot{y}) = (a(x,y), b(x,y)) = (2xy,\, 3x^2-y^2)$. Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma $\omega = b\,dx - a\,dy = (3x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): e in effetti è così, perché $\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial(-a)}{\partial x} = -2y - -(-2y) = 0$, dunque una primitiva F di ω sarà un integrale primo del sistema. Da $\frac{\partial F}{\partial y} = -2xy$ si ottiene $F(x,y) = -xy^2+\varphi(x)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2-y^2 = -y^2+\varphi'(x)$ abbiamo $\varphi'(x) = 3x^2$, da cui $\varphi(x) = x^3$. Si ha così $F(x,y) = -xy^2+x^3 = x(x^2-y^2)$, e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x,y) = k$ per $k\in\mathbb{R}$, cioè $x(x^2-y^2) = k$. Per $k = 0$ si ottiene $x = 0$ (l'asse y) oppure $y = \pm x$ (le bisettrici), ciascuna divisa in tre traiettorie dall'equilibrio $(0,0)$. Invece per $k\ne 0$ si ottiene $x(x^2-y^2) = k$, da cui $y = \pm\sqrt{\frac{x^3-k}{x}}$, famiglia di curve con tre rami di cui uno interseca l'asse x (e viene dunque diviso in due traiettorie) e due no. Il verso di percorrenza è dato dal segno di $\dot{x} = 2xy^2$, che è quello di x; per le traiettorie verticali (i due semiassi $y\gtrless 0$) si guarda invece $\dot{y} = -y^3$, che dice che le soluzioni tenderanno asintoticamente all'origine.
(b) La soluzione con $(x(0),y(0)) = (0,-2)$ avrà come traiettoria il semiasse y con $y<0$, percorsa tendendo all'origine: sostituendo $x\equiv 0$ in $\dot{y} = (3x^2-y^2)y$ si ottiene $\dot{y} = -y^3$, equazione a variabili separabili. Integrando $-y^{-3}\,dy = dt$ tra $t = 0$ e t generico si ottiene $[\frac{1}{2y^2}]_{-2}^{y(t)} = [t]_0^t$, ovvero $\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{8} = t$, da cui $y(t) = -\frac{2}{\sqrt{1+8t}}$. La soluzione cercata è dunque $(x(t),y(t)) = (0,-\frac{2}{\sqrt{1+8t}})$ (definita per $t>-\frac{1}{8}$). • La soluzione con $(x(0),y(0)) = (-3,3)$ sta sulla semibisettrice $y = -x$ con $y>0$, percorsa verso l'alto: sostituendo $y = -x$ in $\dot{x} = 2xy^2$ si ottiene $\dot{x} = 2x^3$, equazione a variabili separabili. Integrando $x^{-3}\,dx = 2\,dt$ tra $t = 0$ e t generico si ottiene $[-\frac{1}{2x^2}]_{-3}^{x(t)} = [2t]_0^t$, ovvero $-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{18} = 2t$, da cui $x(t) = -\frac{3}{\sqrt{1-36t}}$. La soluzione cercata è dunque $(x(t),y(t)) = (-\frac{3}{\sqrt{1-36t}}, \frac{3}{\sqrt{1-36t}})$ (definita per $t<\frac{1}{36}$).

5. (a) L'equazione caratteristica di $y'''-iy'-(1-i)y = 20(1+\sin t)$ ha radici semplici 1, i e $-1-i$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea è generato da e^t, e^{it} e $e^{-(1+i)t}$. Una soluzione particolare per 20 è una costante, e i conti danno $-10(1+i)$. Quanto a $20\sin t = -10i(e^{it}-e^{-it})$, poiché i è radice caratteristica e $-i$ no si ha che delle soluzioni particolari per $-10ie^{it}$ e $10ie^{-it}$ sono del tipo αte^{it} e βe^{-it}, e i calcoli danno $\alpha = 1+3i$ e $\beta = -5(1+i)$. Le soluzioni cercate sono dunque tutte e sole quelle del tipo $y(t) = A\,e^t + B\,e^{it} + C\,e^{-(1+i)t} - 10(1+i) + (1+3i)t\,e^{it} - 5(1+i)\,e^{-it}$ al variare di $A,B,C\in\mathbb{C}$.
(b) Posto $U = (u,v,w) = (y,y',y'')$, il sistema lineare del primo ordine equivalente all'equazione data è dato da $(u',v',w') = (v,w,(1-i)u+iv+20(1+\sin t))$, ovvero $U' = AU+b(t)$ con $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1-i & i & 0\end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 20(1+\sin t)\end{pmatrix}$. È noto che una risolvente per il sistema è data dalla matrice wronskiana dell'equazione scalare, ovvero $W(t) = \begin{pmatrix}e^t & e^{it} & e^{-(1+i)t}\\ e^t & i\,e^{it} & -(1+i)\,e^{-(1+i)t}\\ e^t & -e^{it} & 2i\,e^{-(1+i)t}\end{pmatrix}$; volendo, da questa si può risalire anche alla matrice esponenziale di A tramite la formula $e^{tA} = W(t)\,W(0)^{-1}$.

1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **3** Ex. 3. **4** Ex. 4.