

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (22/01/2019)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2018/19

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si consideri la funzione $g(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 8x - 4y$.
 - (a) Descrivere le curve di livello di g , dicendo quali sono regolari. Detta poi S quella passante per $P(0, 1)$ determinarne una parametrizzazione locale in P (sviluppo di Taylor fino all'ordine quadratico) e la retta tangente affine (in due modi).
 - (b) Studiare gli estremi di $f(x, y) = x - y$ su S , dandone un'interpretazione geometrica.
2. Nel piano cartesiano, dato $a > 0$ si disegnino $A = \{(x, y) : \max\{y, \frac{y^2}{a}\} \leq x \leq a\}$ e la zona B compresa tra l'asse y e la spirale d'Archimede $\rho = a\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
 - (a) Determinare il baricentro di A e l'area di B .
 - (b) Dire se per $\alpha = -\frac{1}{2}$ gli integrali $\int_A |y|^\alpha dx dy$ e $\int_B (x^2 + y^2)^\alpha dx dy$ convergono, e se sì calcolarli.
 - (c) Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'esistenza e il valore degli integrali del punto (b).
3. Nello spazio cartesiano sia $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq y\}$ (ove $a > 0$).
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume e l'area totale esterna.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (x, 0, 0)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per il campo F e la porzione sferica di ∂E .
4. Si abbia l'equazione differenziale $ty' + (1+t)|y|^\alpha = 0$ nell'incognita scalare $y(t)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni, e sulla loro crescita? Vi sono soluzioni costanti? Se $y(t)$ è soluzione su un intervallo, lo saranno $-y(t)$, oppure anche $y(-t)$ o $-y(-t)$ sull'intervallo opposto?
 - (b) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni tali che $y(1) = -1$, e quelle tali che $y(1) = 0$.
5. (a) Determinare le curve $(x(t), y(t), z(t))$ con $(x', y', z') = (x - y, t - y + 2x, x - y - z)$.
(b) Detta A la matrice dei coefficienti della parte omogenea del sistema lineare, calcolare e^A .

Analisi Matematica III – Esame Scritto (22/01/2019) – Soluzioni.

1. (a) Le curve di livello della funzione quadratica $g(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 8x - 4y$ sono un fascio di ellissi (si noti che il discriminante della parte quadratica è < 0), il cui centro sarà l'unico punto che ne annulla il gradiente $\nabla g = (2(5x - 2y - 4), 4(4y - x - 1))$, ovvero $(1, \frac{1}{2})$; e le curve di livello saranno vuote al di sotto del valore $g(1, \frac{1}{2}) = -5$. [Si può anche dimostrare che i fuochi di queste ellissi sono i punti $(0, 0)$ e $(2, 1)$, dunque gli assi risultano $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -2x$.] L'ellisse S passante per $P(0, 1)$ è data da $g(x, y) = g(P) = 4$; essendo $\nabla g(P) = 12(-1, 1)$ possiamo ad esempio esplicitare localmente $x(y)$ con $x(1) = 0$; derivando $g(x(y), y) \equiv 4$ si ottiene $10xx' - 4x'y - 4x + 16y - 8x' - 4 = 0$, che calcolato per $y = 1$ dà $x'(0) = 1$; derivando ancora si ottiene $10(x')^2 + 10xx'' - 4x''y - 4x' - 4x' + 16 - 8x'' = 0$, che calcolato per $y = 1$ dà $x''(0) = \frac{3}{2}$, dunque la parametrizzazione locale cercata di S in P è $x(y) = (y - 1) + \frac{3}{4}(y - 1)^2 + o_1((y - 1)^2)$. (Esplicitando invece $y(x)$ con $y(0) = 1$ si sarebbe ottenuto $y(x) = 1 + x - \frac{3}{4}x^2 + o_0(x^2)$.) La retta tangente affine a S in P è $y = x + 1$, ottenuta o arrestando gli sviluppi al primo ordine o come $\nabla g(P) \cdot (x, y - 1) = 0$.

(b) Cercando i punti stazionari di $f(x, y) = x - y$ su S , con Lagrange si tratta di risolvere il sistema dato da $g(x, y) = 4$ e da $\det(\nabla g, \nabla f) = \det \begin{pmatrix} 2(5x - 2y - 4) & 4(4y - x - 1) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$, che dà come soluzioni i due punti $P(0, 1)$ e $Q(2, 0)$. (Una parametrizzazione locale di S attorno a Q , con metodi analoghi a quanto fatto per P , risulta $x(y) = 2 + y - \frac{3}{4}y^2 + o_0(y^2)$ oppure $y(x) = (x - 2) + \frac{3}{4}(x - 2)^2 + o_2((x - 2)^2)$.) Per vedere il carattere di P e Q consideriamo $F(y) = f(x(y), y) = x(y) - y$: si ha $F'(y) = x' - 1$ e dunque $F'(1) = F'(0) = 0$ come atteso; si ha poi $F''(y) = x''$ e dunque $F''(1) = x''(1) = \frac{3}{2} > 0$ e $F''(0) = x''(0) = -\frac{3}{2} < 0$, il che ci dice che P e Q sono rispettivamente punti di minimo e massimo locale stretto per f su S . (In realtà, essendo f continua e S compatta, per Weierstrass esisteranno di certo estremi assoluti di f su S che dunque saranno necessariamente assunti in P e Q . La chiara interpretazione geometrica è visibile nella Figura 1.)

2. (a) (Figura 2) L'area di A è data da $\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^x dy = \int_0^a (x + \sqrt{ax}) dx = [\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{ax}]_0^a = \frac{7}{6}a^2$; si ha poi $x_G = \frac{1}{\text{Area } A} \int_A x dx dy = \frac{6}{7a^2} \int_0^a x dx \int_{-\sqrt{ax}}^x dy = \frac{6}{7a^2} \int_0^a x(x + \sqrt{ax}) dx = \frac{6}{7a^2} [\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{ax}]_0^a = \frac{6}{7a^2} \frac{11}{15}a^3 = \frac{22}{35}a$, e $y_G = \frac{1}{\text{Area } A} \int_A y dx dy = \frac{6}{7a^2} \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^x y dy = \frac{6}{7a^2} \int_0^a \frac{1}{2}(x^2 - ax) dx = \frac{3}{7a^2} [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2]_0^a = -\frac{3}{7a^2} \frac{1}{6}a^3 = -\frac{1}{14}a$. • L'area di B è data, in coordinate polari, da $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}a[\frac{1}{3}\theta^3]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48}a^2$.

(b-c) Discutiamo l'esistenza e il calcolo degli integrali richiesti direttamente al variare di α , notando che, per positività, con Fubini e Tonelli possiamo esaminare degli integrali iterati. • Per l'integrale di $|y|^\alpha$ su A bisogna spezzare A nei sottoinsiemi $A^\pm = A \cap \{y \gtrless 0\}$. Per A^- si ha $\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax}}^0 |y|^\alpha dy$, che con la condizione $\alpha > -1$ e posto $\sigma = \text{sign } y$ diventa $\frac{1}{\alpha+1} \int_0^a [\sigma |y|^{\alpha+1}]_{y=-\sqrt{ax}}^{y=0} dx = \frac{a^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\alpha+1} \int_0^a x^{\frac{\alpha+1}{2}} dx = \frac{a^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\alpha+1} [\frac{2}{\alpha+3} x^{\frac{\alpha+3}{2}}]_0^a = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} a^{\alpha+2}$. Per A^+ si ha $\int_0^a dx \int_0^x y^\alpha dy$, che sempre quando $\alpha > -1$ dà $\frac{1}{\alpha+1} \int_0^a [y^{\alpha+1}]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^a x^{\alpha+1} dx = \frac{1}{\alpha+1} [\frac{1}{\alpha+2} x^{\alpha+2}]_0^a = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} a^{\alpha+2}$. Dunque $|y|^\alpha$ è integrabile su A se e solo se $\alpha > -1$ con valore la somma dei due integrali su $A^\pm$, ovvero $\frac{3\alpha+7}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} a^{\alpha+2}$; in particolare per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ottiene $\frac{44}{15}a^{\frac{3}{2}}$, e per $\alpha = 0$ l'area $\frac{7}{6}a^2$. • Per l'integrale di $(x^2 + y^2)^\alpha = \rho^{2\alpha}$ su B si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\theta} \rho^{2\alpha} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\theta} \rho^{2\alpha+1} d\rho$, che con la condizione $2\alpha+1 > -1$ (cioè $\alpha > -1$) dà $\frac{a^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^{2(\alpha+1)} d\theta = \frac{a^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)(2\alpha+3)} (\frac{\pi}{2})^{2\alpha+3} = \frac{\pi^{2\alpha+3}}{2^{2(\alpha+2)}(\alpha+1)(2\alpha+3)} a^{2(\alpha+1)}$: per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si trova $\frac{\pi^2}{8}a$, e per $\alpha = 0$ l'area $\frac{\pi^3}{48}a^2$.

3. (a) (Figura 3) Per calcolare il volume di $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq y\}$ usiamo due metodi: (1. per x -fette): fissato $0 \leq x \leq a$, la x -fetta è un ottavo di disco di raggio $\sqrt{4a^2 - x^2}$ che ha area $\frac{1}{8}\pi(4a^2 - x^2)$, dunque $\text{Vol } E = \int_0^a \frac{1}{8}\pi(4a^2 - x^2) dx = \frac{1}{8}[4a^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{11}{24}\pi a^3$; (2. Guldino): il solido E è generato da una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ attorno all'asse x della faccia B sul piano orizzontale $z = 0$ (ovvero $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, 0 \leq x \leq a, y \geq 0\}$), dunque ragionando per x -fili si ha $\text{Vol } E = \frac{\pi}{4} \int_B y dx dy = \frac{\pi}{4} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2}} y dy = \frac{\pi}{4} \int_0^a \frac{1}{2}(4a^2 - x^2) dx$, uguale a prima. • La superficie esterna ∂E è formata da 5 componenti: la base B sul piano $z = 0$, la faccia B' sul piano $y = z$, le facce C e C' sui piani $x = 0$ e $x = a$, e la faccia sferica esterna S . La faccia B (e B') ha area $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2}} dy = \int_0^a \sqrt{4a^2 - x^2} dx = [\text{posto } x = 2a \sin u] 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 u du = 4a^2 [\frac{u + \sin u \cos u}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}a^2$. La faccia C (resp. C'), un ottavo di disco di raggio $2a$ (resp. $a\sqrt{3}$), ha area $\frac{1}{2}\pi a^2$ (resp. $\frac{3}{8}\pi a^2$). La faccia S si parametrizza usando le coordinate sferiche di asse polare x : l'area si calcola come $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2a)^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} 4a^2 [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi a^2$. Sommando si ha $\text{Area}(\partial E) = (\frac{49}{24} + \sqrt{3})a^2$.

(b) Il campo $F = (x, 0, 0)$ ha divergenza 1, dunque per Gauss va verificato che il flusso totale di F uscente da ∂E sia pari al volume di E , ovvero $\frac{11}{24}\pi a^3$. Ora, poiché F è parallelo all'asse x i suoi flussi attraverso B e B' sono nulli; inoltre F si annulla sul piano $x = 0$ e dunque è nullo anche il flusso attraverso C . Per C' il flusso uscente è dato da $\int_{C'} (a, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dy dz = a \text{Area}(C') = \frac{3}{8}\pi a^3$. D'altra parte, parametrizzando S come detto prima (normale associata entrante) il flusso uscente di F da S risulta $-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 2a \cos \varphi & 0 & -2a \sin \varphi \\ 0 & -2a \sin \theta \sin \varphi & 2a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & 2a \cos \theta \sin \varphi & 2a \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 8a^3 \frac{\pi}{4} [-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12}\pi a^3$. Poiché $\frac{3}{8}\pi a^3 + \frac{1}{12}\pi a^3 = \frac{11}{24}\pi a^3$, il teorema è verificato.

(c) Il campo F ha rotore nullo, dunque per verificare la formula di Kelvin-Stokes basta mostrare che la circuitazione di F attorno al bordo di S è nulla. A tale circuitazione non contribuiscono i tratti verticali del bordo (F è parallelo all'asse x , dunque ortogonale a loro); il tratto di bordo sul piano $z = 0$ (ottenuto con $\theta = 0$) è parametrizzato in senso

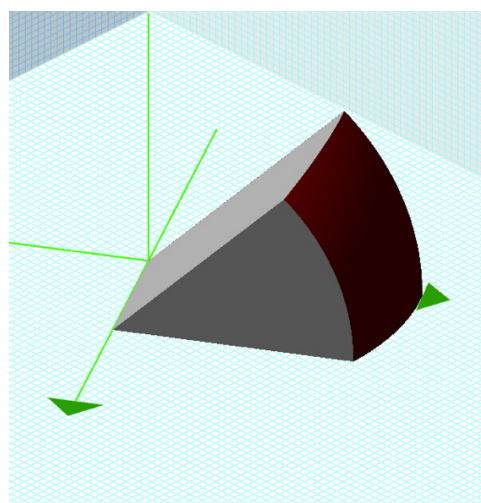
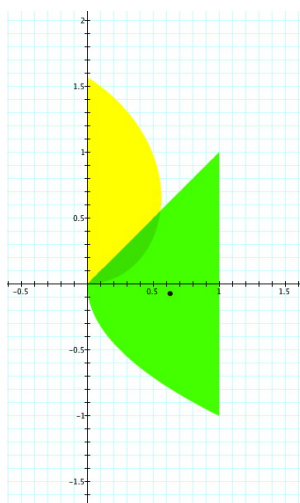
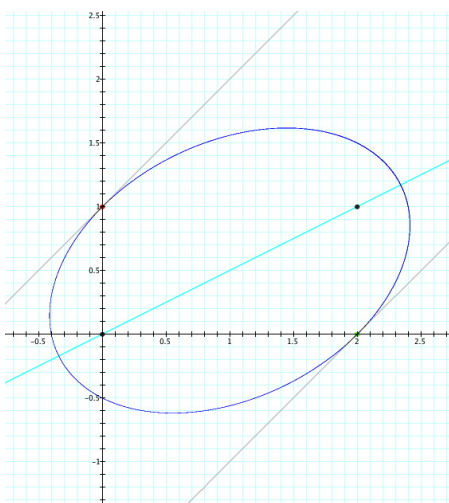
antiorario da $(2a \cos \varphi, 2a \sin \varphi, 0)$ e dunque l'integrale di linea risulta $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2a \cos \varphi, 0, 0) \cdot (-2a \sin \varphi, 2a \cos \varphi, 0) d\varphi = -4a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2a^2 [\cos^2 \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}a^2$; il tratto di bordo sul piano $z = y$ (ottenuto con $\theta = \frac{\pi}{4}$) è parametrizzato in senso orario da $(2a \cos \varphi, \sqrt{2}a \sin \varphi, \sqrt{2}a \sin \varphi)$ e l'integrale viene $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2a \cos \varphi, 0, 0) \cdot (-2a \sin \varphi, \sqrt{2}a \cos \varphi, \sqrt{2}a \cos \varphi) d\varphi = -4a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{1}{2}a^2$. La somma dei due integrali di linea nella circuitazione è dunque nulla, come si voleva.

4. (a) Eventuali soluzioni dell'equazione $ty' + (1+t)|y|^\alpha = 0$ definite all'intorno di $t = 0$ devono soddisfare $|y(0)^\alpha| = 0$, il che è possibile solo se $\alpha > 0$ e in tal caso equivale a $y(0) = 0$, ovvero devono ivi annullarsi: tra esse c'è l'unica soluzione costante (sempre nel caso $\alpha > 0$), che è la funzione nulla. Per $t \neq 0$ l'equazione è equivalente alla sua forma normale $y' = f(t, y) = -\frac{|y|^\alpha(1+t)}{t}$, da cui si deduce che le soluzioni sono crescenti per $-1 < t < 0$ e decrescenti altrove. La funzione f è di classe C^1 nei punti del tipo (t_0, y_0) con $t_0, y_0 \neq 0$ per ogni α , e inoltre quando $\alpha \geq 1$ lo è anche nei punti del tipo $(t_0, 0)$ con $t_0 \neq 0$: dunque per dati iniziali di quel tipo è garantita esistenza e unicità locale. Invece per $0 < \alpha < 1$ la funzione f è continua e non lipschitziana nei punti del tipo $(t_0, 0)$ con $t_0 \neq 0$, dunque se $0 < \alpha < 1$ per tali dati iniziali può saltare l'unicità. Infine, si verifica direttamente che lo spazio delle soluzioni non ha le simmetrie indicate.

(b) Per quanto detto, la soluzione tale che $y(1) = -1$ ha esistenza e unicità locale per ogni α . Separando le variabili si ottiene $|y|^{-\alpha} dy = -(1 + \frac{1}{t}) dt$; se $\alpha = 1$ integrando si ha $-\log |y| = -t - \log t + k$, e con la condizione iniziale si ha $k = 1$, da cui $\frac{1}{|y|} = e^{-t} \frac{1}{t} e$ e dunque $y(t) = -te^{t-1}$ (pensata definita in $t > 0$); se invece $\alpha \neq 1$ integrando si ha $-\frac{1}{1-\alpha} |y|^{1-\alpha} = -t - \log t + k$, e con la condizione iniziale si ha $k = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ da cui $\frac{1}{\alpha-1} |y|^{1-\alpha} = -t - \log t + \frac{\alpha}{\alpha-1}$ e dunque $y(t) = -(\alpha - (\alpha-1)(t + \log t))^{\frac{1}{1-\alpha}}$. • Quanto alla soluzione tale che $y(1) = 0$, la ricerca ha senso solo nel caso $\alpha > 0$. Come spiegato in precedenza, se $\alpha \geq 1$ c'è esistenza e unicità locale e dunque la funzione nulla è l'unica soluzione cercata. Invece se $0 < \alpha < 1$ oltre ad essa si può trovarne altre: se imponiamo in $-\frac{1}{1-\alpha} |y|^{1-\alpha} = -t - \log t + k$ la condizione iniziale $y(1) = 0$ si ottiene $k = 1$, da cui $\frac{1}{\alpha-1} |y|^{1-\alpha} = -t - \log t + 1$ da cui $y(t) = -((1-\alpha)(t + \log t - 1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ con $t \geq 1$, che si può saldare per $t \leq 1$ con (un tratto della) soluzione nulla o con un'analoga soluzione positiva definita per $t \leq 1$ e che si annulla in $t = 1$.

5. (a) Nel sistema lineare $(x', y', z') = (x - y, t - y + 2x, x - y - z)$ le prime due equazioni riguardano solo x e y , dunque iniziamo con esse. La matrice della parte lineare $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\pm i$, e un autovettore riferito a i è $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$: perciò una base reale per le soluzioni della parte omogenea sono $\operatorname{Re}(ve^{it}) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ e $\operatorname{Im}(ve^{it}) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo è $(-t, 1 - t)$, dunque la soluzione generale per x e y è data da $(x(t), y(t)) = (U \cos t + V \sin t - t, (U - V) \cos t + (U + V) \sin t + 1 - t)$ al variare di $U, V \in \mathbb{C}$. Da $z' = x - y - z$ si trova così $z' + z = V \cos t - U \sin t - 1$, che risolta come equazione lineare del I ordine dà $z(t) = We^{-t} + \frac{1}{2}(U + V) \cos t - \frac{1}{2}(U - V) \sin t - 1$ con un'ulteriore costante arbitraria $W \in \mathbb{C}$.

(b) Il sistema omogeneo ha matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Presi ad esempio $(U, V, W) = (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$ si ha la risolvibile $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t & 2 \sin t & 0 \\ 2(\cos t + \sin t) & 2(\sin t - \cos t) & 0 \\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t & e^{-t} \end{pmatrix}$, dunque $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t & 0 \\ 2 \sin t & \cos t - \sin t & 0 \\ \cos t - e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t - \sin t) & e^{-t} \end{pmatrix}$. Per ottenere e^A basterà porre $t = 1$.



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (11/02/2019)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2018/19

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano verticale (x, z) si disegni la curva $z = \cos(\frac{\pi}{3}x)$ per $0 \leq x \leq 3$, e sia S la superficie ottenuta ruotando tale curva di un giro intero attorno all'asse z .
 - (a) Descritta S in forma parametrica e cartesiana, si determini in due modi il piano affine tangente a S nel suo punto P tale che $(x_P, y_P) = (-1, \sqrt{3})$.
 - (b) Calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = x + y + \frac{6}{\pi}z$ su S (perché esistono?), dandone un'interpretazione geometrica.
2. Nel piano cartesiano, dato $a > 0$ si disegni $A = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq ay \leq x^2, x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$.
 - (a) Determinare area e baricentro di A .
 - (b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sono integrabili su A , calcolandone nel caso l'integrale.
3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z) , e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse z .
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume e l'area totale esterna.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (z, 0, -x)$.
 - (c) Verificare la formula di Green per F (visto come campo nel piano (x, z)) e la superficie A .
4. È data l'equazione differenziale $2(1 + \cos y)^2 y'' = \sin y$ nella funzione scalare $y(t)$.
 - (a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità, invarianza temporale, simmetrie delle soluzioni? Ve ne sono di costanti?
 - (b) Determinare un integrale primo per l'equazione descrivendone il ritratto in fase; trovare infine la soluzione tale che $y(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y'(0) = -1$.
5. Di un'equazione differenziale lineare $a(t)y'' + b(t)y' - 3y = 4t^2(t+1)$ nella funzione scalare $y(t)$ si sa che due soluzioni della parte omogenea sono t^3 e $\frac{1}{t}$. Dire a priori quale sarà il dominio delle soluzioni, determinare $a(t)$, $b(t)$ e tutte le soluzioni, in particolare quelle con $y(1) = y'(1) = 0$.

1. (a) (Figura 1) La superficie S è descritta in forma grafica da $z = \cos(\frac{\pi}{3}\sqrt{x^2+y^2})$ con (x, y) nel disco chiuso di raggio 3, e parametricamente in coordinate cilindriche da $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \cos(\frac{\pi}{3}\rho))$ con $0 \leq \rho \leq 3$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Vale $\nabla z = -\frac{\pi}{3}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(\frac{\pi}{3}\sqrt{x^2+y^2}), \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(\frac{\pi}{3}\sqrt{x^2+y^2}))$; nel punto $P(-1, \sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ il piano tangente affine è $z = z_P + \nabla z(x_P, y_P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}) \cdot (x + 1, y - \sqrt{3})$, ovvero $\pi\sqrt{3}x - 3\pi y - 12z + 4\pi\sqrt{3} - 6 = 0$. Altrimenti si ha $J_\gamma(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ -\frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{3}\rho) & 0 \end{pmatrix}$; essendo $\rho_P = 2$ e $\theta_P = \frac{2\pi}{3}$ si ha $J_\gamma(\rho_P, \theta_P) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -\frac{\pi\sqrt{3}}{6} & 0 \end{pmatrix}$, e si ritrova il piano tangente affine tramite $P + \text{Im } J_\gamma(\rho_P, \theta_P) = \{(-1, \sqrt{3}, -\frac{1}{2}) + \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}) + \mu(-\sqrt{3}, -1, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(b) S è una superficie compatta perché chiusa (la curva contiene i suoi estremi) e limitata, dunque per Weierstrass la funzione continua $f(x, y, z) = x + y + \frac{6}{\pi}z$ vi ammetterà estremi assoluti. Per la ricerca studiamo i punti stazionari di f separatamente sui punti interni di S (parametrizzati da $\gamma(\rho, \theta)$ con $\rho < 3$) e sui punti di bordo (la circonferenza bassa parametrizzata da $\psi(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, -1)$). Si ha $F(\rho, \theta) = f(\gamma(\rho, \theta)) = \rho(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{6}{\pi} \cos(\frac{\pi}{3}\rho)$; ponendo $\nabla F = (\cos \theta + \sin \theta - 2 \sin(\frac{\pi}{3}\rho), \rho(\cos \theta - \sin \theta)) = (0, 0)$ si ottengono le soluzioni accettabili $(\rho, \theta) = (\frac{3}{4}, \frac{\pi}{4})$ (il punto $Q(\frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, con $f(Q) = 3\sqrt{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}) \sim 2,4$) e $(\rho, \theta) = (\frac{9}{4}, \frac{\pi}{4})$ (il punto $U(\frac{9\sqrt{2}}{8}, \frac{9\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, con $f(U) = 3\sqrt{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}) \sim 1,8$). Si ha poi $\mathcal{F}(\theta) = f(\psi(\theta)) = 3(\cos \theta + \sin \theta) - \frac{6}{\pi}$; ponendo $\mathcal{F}'(\theta) = 3(\cos \theta - \sin \theta) = 0$ si ottiene $\theta = \frac{\pi}{4}$ (il punto $V(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1)$, con $f(V) = 3(\sqrt{2} - \frac{2}{\pi}) \sim 2,3$) oppure $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ (il punto $W(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -1)$, con $f(W) = -3(\sqrt{2} + \frac{2}{\pi}) \sim -6,1$). Perciò il massimo assoluto di f su S è $3\sqrt{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$ (assunto in Q) e il minimo $-3(\sqrt{2} + \frac{2}{\pi})$ (in W). Per l'interpretazione geometrica si veda in Figura 1 (i piani grigi sono le superfici di livello di f).

2. (a) (Figura 2) L'insieme A può essere opportunamente interpretato o per y -filì o come differenza tra l'ottavo di cerchio $A' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2a^2, 0 \leq y \leq x\}$ e il triangolo parabolico $A'' = \{(x, y) : x \geq 0, \frac{1}{a}x^2 \leq y \leq x\}$. • L'area di A è data da $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx = \int_0^a \sqrt{2a^2-y^2} dy - \int_0^a \sqrt{ay} dy = (\text{posto } y = a\sqrt{2} \sin u) 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du - \sqrt{a} [\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_0^a = a^2[u + \sin u \cos u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{2}{3}a^2 = (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3})a^2 = \frac{3\pi-2}{12}a^2$; alternativamente l'area di A' è $\frac{1}{8}(a\sqrt{2})^2\pi = \frac{\pi}{8}a^2$, quella di A'' è $\int_0^a (x - \frac{1}{a}x^2) dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3a}x^3]_0^a = \frac{1}{6}a^2$ e dunque l'area di A risulta per differenza ancora $\frac{3\pi-2}{12}a^2$. • Sempre per y -filì si ha $\int_A x dx dy = \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^a (2a^2 - y^2 - ay) dy = \frac{1}{2}[2a^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}ay^2]_0^a = \frac{7}{12}a^3$ e $\int_A y dx dy = \int_0^a y(\sqrt{2a^2-y^2} - \sqrt{ay}) dy = [-\frac{1}{3}(2a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{a} \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}]_0^a = \frac{10\sqrt{2}-11}{15}a^3$ da cui, dividendo per l'area, il baricentro risulta $(\frac{7}{3\pi-2}a, \frac{4(10\sqrt{2}-11)}{5(3\pi-2)}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sono positive su A (e anche singolarmente su A' e A''), dunque per Fubini e Tonelli basta esaminare degli integrali iterati. Notiamo che, poiché $A = A' \setminus A''$, può essere che una funzione sia integrabile su A senza esserlo singolarmente su A' e A'' ; tuttavia, se risultasse integrabile sia su A' che su A'' allora lo sarebbe anche su A con la differenza dei due integrali. • Si ha $\int_{A'} \frac{1}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{\cos \theta}} \frac{1}{\rho \cos \theta} \rho d\rho = a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ che chiaramente converge e, posto $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$, risulta $a\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \psi} d\psi = a\sqrt{2}[\log \text{tg}(\frac{1}{2}\psi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{2}(0 - \log \text{tg} \frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1)a$; d'altra parte $\int_{A''} \frac{1}{x} dx dy = \int_0^a \frac{1}{x} (x - \frac{1}{a}x^2) dx = [x - \frac{1}{2a}x^2]_0^a = \frac{1}{2}a$, dunque $\frac{1}{x}$ è integrabile su A con valore $(\sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{2})a$. • Per y -filì si ha $\int_A \frac{x}{y} dx dy = \int_0^a \frac{1}{y} dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{y} (2a^2 - y^2 - ay) dy = \frac{1}{2} \int_0^a (2a^2 \frac{1}{y} - y - a) dy$: poiché la funzione integranda è $\sim_0^* \frac{1}{y}$ l'integrale diverge. • Per $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, vista la simmetria della funzione proviamo con le coordinate polari. La parabola $ay = x^2$ si esprime polarmente come $a\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$, ovvero $\rho = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}a$, dunque $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}a}^{\frac{a\sqrt{2}}{\cos \theta}} \frac{1}{\rho} \rho d\rho = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}) d\theta = a[\sqrt{2}\theta - \frac{1}{\cos \theta}]_0^{\frac{\pi}{4}} = (1 - \sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}))a$, convergente.

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di E in tre modi. (1. Guldino) Vale $\text{Vol } E = \frac{\pi}{2} \int_A x dx dz = \frac{\pi}{2} \frac{7}{12}a^3 = \frac{7\pi}{24}a^3$. (2. Per z -fette) Fissato $0 \leq z \leq a$ la z -fetta è un quarto di corona circolare di raggi $\sqrt{az}$ e $\sqrt{2a^2 - z^2}$ che ha area $\frac{1}{4}\pi(2a^2 - z^2 - az)$, dunque $\text{Vol } E = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(2a^2 - z^2 - az) dz = \frac{\pi}{4}[2a^2z - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}az^2]_0^a = \frac{7\pi}{24}a^3$. (3. Coordinate sferiche) Il paraboloide interno $x^2 + y^2 = az$ è espresso come $\rho^2 \sin^2 \varphi = a\rho \cos \varphi$ ovvero $\rho = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}a$, dunque $\text{Vol } E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}a}^{\frac{a\sqrt{2}}{\cos \varphi}} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3}\rho^3]_{\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}a}^{\frac{a\sqrt{2}}{\cos \varphi}} \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{6}a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sqrt{2} - \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^6 \varphi}) \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{6}a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sqrt{2} \sin \varphi - \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^5 \varphi} \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{6}a^3[-2\sqrt{2} \cos \varphi - \frac{\sin^{-4} \varphi}{-4} + \frac{\sin^{-2} \varphi}{-2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}a^3((-\frac{1}{4}) - (-2)) = \frac{7\pi}{24}a^3$. • La superficie esterna ∂E è formata da 5 componenti: le facce A e A' sui piani (x, z) e (y, z) , la base B sul piano $z = 0$, la porzione di paraboloide P e la faccia sferica esterna S . Le facce A e A' hanno area $\frac{3\pi-2}{12}a^2$, mentre B (quarto di cerchio) ha area $\frac{1}{4}\pi(a\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi a^2$. Per Guldino, la faccia P ha area $\frac{\pi}{2} \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2}} dx = \frac{\pi}{2} [\frac{1}{12}a^2(1 + \frac{4x^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{24}a^2$. Infine, la faccia S ha area $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (a\sqrt{2})^2 \sin \varphi d\varphi = \pi a^2[-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}a^2$. L'area totale esterna di E risulta la somma di questi 5 contributi.

(b) Il campo $F = (z, 0, -x)$ è parallelo al piano (x, z) , e le sue curve integrali sono circonferenze parallele al piano (x, z) con centro sull'asse y : da questo già si intuisce che i flussi di F uscenti da A (nel piano (x, z)) e da S (le cui sezioni su piani paralleli al piano (x, z) sono circonferenze) sono nulli. Il flusso uscente da A' è $\int_{A'} (z, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -\int_{A'} z dy dz = -\frac{10\sqrt{2}-11}{15}a^3$, quello da B è $\int_B (0, 0, -x) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \int_B x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \rho \cos \theta \rho d\rho = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ e quello da P (parametrizzata in coordinate cilindriche da $(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{r^2}{a})$ con $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, con normale uscente da E) è

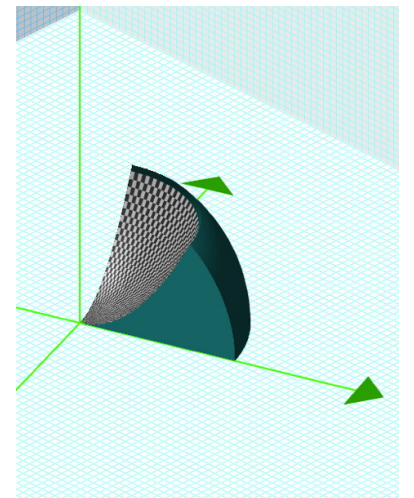
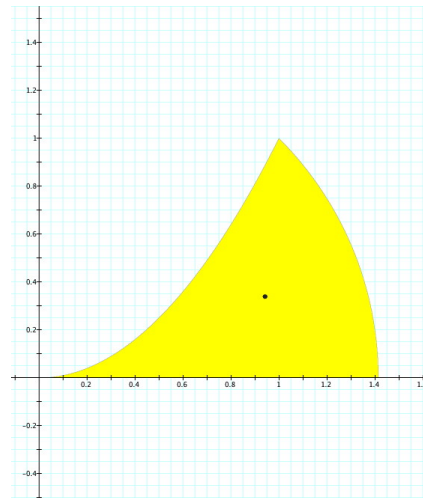
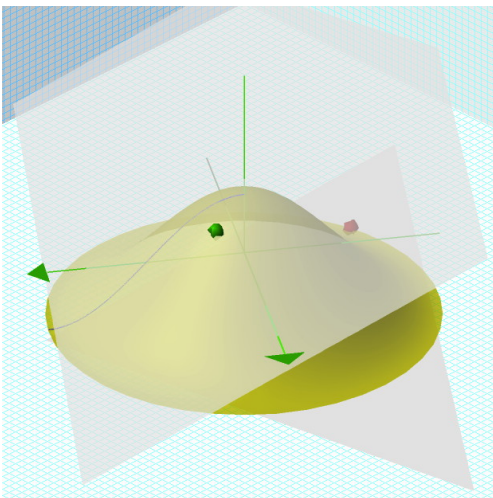
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} \frac{r^2}{a} & \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & r \cos \theta \\ -r \cos \theta & \frac{2r}{a} & 0 \end{pmatrix} dr = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^a \left(\frac{2r^4}{a^2} + r^2 \right) dr = -[\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2r^5}{5a^2} + \frac{r^3}{3} \right]_0^a = -\frac{11}{15} a^3$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque nullo, e poiché $\nabla \cdot F = 0$ ciò verifica il teorema di Gauss.

(c) La circuitazione antioraria di $F = (f, g) = (z, -x)$ lungo ∂A è data da $\int_0^{a\sqrt{2}} (0, -x) \cdot (1, 0) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{2} \sin \theta, -a\sqrt{2} \cos \theta) \cdot (-a\sqrt{2} \sin \theta, a\sqrt{2} \cos \theta) d\theta + \int_0^a \left(\frac{x^2}{a}, -x \right) \cdot (1, 0) dx = 0 - \frac{\pi}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^2 = -\frac{3\pi-2}{6} a^2$. D'altra parte anche $\int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dz = -2 \text{ Area } A = -\frac{3\pi-2}{6} a^2$, come prescrive la formula di Green.

4. (a) L'equazione $2(1 + \cos y)^2 y'' = \sin y$ è autonoma, dunque è garantita l'invarianza temporale dello spazio delle soluzioni: ragioneremo pertanto con dati iniziali in $t = 0$. Essa non è in forma normale; escludendo per il momento le soluzioni con dato iniziale del tipo $(0, \pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (che annullano $1 + \cos y$) essa si può portare nella forma normale $y'' = \frac{\sin y}{2(1 + \cos y)^2}$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y, p) = (y, y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = \frac{\sin y}{2(1 + \cos y)^2} \end{cases}$. La funzione $f(y, p) = (p, \frac{\sin y}{2(1 + \cos y)^2})$ è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$ escluse le rette $y = \pi + 2k\pi$, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (y_0, y'_0) con $y_0 \neq \pi + 2k\pi$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y, p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune soluzioni. Le soluzioni costanti sono quelle per cui $\sin y = 0$, ovvero $y \equiv k\pi$ (tra le quali anche $y \equiv \pi + 2k\pi$). Una verifica diretta mostra che se $\varphi(t)$ è soluzione, lo sono anche $-\varphi(t)$ e $\varphi(-t)$ (quest'ultima sull'intervallo opposto).

(b) L'equazione $y'' = \frac{\sin y}{2(1 + \cos y)^2} = h(y)$ ammette l'integrale primo dell'energia totale $\frac{1}{2}(y')^2 - \int h(y) dy = \frac{1}{2}((y')^2 - \frac{1}{1 + \cos y})$, dunque il ritratto in fase nel piano (y, p) è dato (oltre che dagli equilibri $(k\pi, 0)$) dalle curve di livello $p^2 - \frac{1}{1 + \cos y} = k$, ovvero $(p^2 - k)(1 + \cos y) = 1$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: da esse è inoltre evidente che una soluzione non costante che assume valore $\pi + 2k\pi$ dovrebbe avere ivi derivata prima divergente (infatti $(y')^2 = k + \frac{1}{1 + \cos y}$), dunque le soluzioni non costanti non assumeranno mai tali valori. • Sulla soluzione cercata con $y(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y'(0) = -1$ si ha $((-1)^2 - k)(1 + \cos \frac{\pi}{2}) = 1$ da cui $k = 0$: si ricava dunque $(y')^2 = \frac{1}{1 + \cos y}$, da cui $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cos y}} = -\frac{1}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{y}{2}}}$, da cui $\sqrt{2} \cos \frac{y}{2} dy = -dt$ che integrata dà $2\sqrt{2} \sin \frac{y}{2} = h - t$. Ricordando che $y(0) = \frac{\pi}{2}$ si ha allora $h = 2$, da cui $\sin \frac{y}{2} = \frac{2-t}{2\sqrt{2}}$. Essendo $\frac{y(0)}{2} = \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha $y(t) = 2 \arcsin(\frac{2-t}{2\sqrt{2}})$, soluzione definita quando $-1 < \frac{2-t}{2\sqrt{2}} < 1$ cioè per $-2(\sqrt{2} - 1) < t < 2(\sqrt{2} + 1)$ (intorno di $t = 0$).

5. L'equazione $a(t)y'' + b(t)y' - 3y = 4t^2(t+1)$ è lineare e, viste le soluzioni assegnate t^3 e $\frac{1}{t}$ della parte omogenea $ay'' + by' - 3y = 0$, le sue soluzioni avranno esistenza e unicità globale su $]-\infty, 0[$ oppure su $]0, +\infty[$ a seconda del dato iniziale. Imponendo che t^3 e $\frac{1}{t}$ siano soluzioni della parte omogenea si ottiene rispettivamente $6at + 3bt^2 - 3t^3 = 0$ (ovvero $2a + bt - t^2 = 0$) e $\frac{2}{t^3}a - \frac{1}{t^2}b - \frac{3}{t} = 0$ (ovvero $2a - bt - 3t^2 = 0$): sommando le due equazioni si ottiene $4a - 4t^2 = 0$ ovvero $a(t) = t^2$, e quindi $b(t) = -t$. Si ha perciò l'equazione $t^2 y'' - ty' - 3y = 4t^2(t+1)$, di cui conosciamo le soluzioni della parte omogenea (ovvero $At^3 + B\frac{1}{t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$); per determinare la soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di Lagrange dobbiamo prima rendere monica tale equazione dividendo per t^2 e ottenendo dunque $y'' - \frac{1}{t}y' - \frac{3}{t^2}y = 4(t+1)$. La matrice wronskiana $W = \begin{pmatrix} t^3 & \frac{1}{t^2} \\ 3t^2 & -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix}$ ha determinante $-4t$, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}(t) = c_1(t)t^3 + c_2(t)\frac{1}{t}$ con $c'_1 = -\frac{1/t}{-4t}4(t+1) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$ e $c'_2 = +\frac{t^3}{-4t}4(t+1) = -t^3 - t^2$, da cui $c_1 = \log|t| - \frac{1}{t}$ e $c_2(t) = -\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3$, dunque $\tilde{y}(t) = (\log|t| - \frac{1}{4})t^3 - \frac{4}{3}t^2 + B\frac{1}{t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando si ottiene $y'(t) = (3A + 3\log|t| + \frac{1}{4})t^2 - \frac{8}{3}t - B\frac{1}{t^2}$, dunque la condizione $y(1) = y'(1) = 0$ dà $A + B - \frac{19}{12} = 3A - B - \frac{29}{12} = 0$ che dà $A = 1$ e $B = \frac{7}{12}$, ovvero l'unica soluzione $y(t) = (1 + \log|t| - \frac{1}{4})t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{7}{12t}$.



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (01/07/2019)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2018/19

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si abbiano la funzione $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $g(x, y, z) = (2z^2 - xy, xz - y^2)$, e il punto $P(1, 0, -1)$.
 - (a) Mostrare che l'insieme di livello S di g contenente P è una varietà regolare (di che dimensione?) all'intorno di P , e calcolarne una parametrizzazione locale e lo spazio tangente affine in P .
 - (b) Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = 2x + y + \alpha z$ ha P come punto stazionario su S , determinandone la natura.
2. Nel piano cartesiano siano $A' = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4a^2\}$ e $A'' = \{(x, y) : x \geq 0, x - 2a \leq y \leq 0\}$.
 - (a) Determinare il baricentro di $A = A' \cup A''$.
 - (b) Calcolare, se esistono finiti, gli integrali $\int_{A'} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy$ e $\int_{A''} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy$.
3. Nel primo ottante dello spazio cartesiano (x, y, z) sia E il solido dato da $x^2 + y^2 \leq 4a^2$, $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq z \leq 2a - x$ (ove $a > 0$).
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume e l'area totale esterna.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, z, 0)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la porzione cilindrica C della superficie esterna.
4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = x(x - 2y + 2) \\ \dot{y} = 2(x - y) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.
 - (a) Cosa dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare equilibri e un integrale primo.
 - (b) Determinare la soluzione con $(x(0), y(0)) = (2, 2)$, e quella con $(x(0), y(0)) = (-2, -1)$.
5. È data l'equazione differenziale $y^{(4)} + 4y = 8(1 + 2e^{-t} \sin t)$ nell'incognita $y(t)$.
 - (a) Cosa si può dire a priori sullo spazio delle sue soluzioni reali?
 - (b) Determinare esplicitamente tutte le soluzioni reali.

1. (a) Lo jacobiano di $g(x, y, z) = (2z^2 - xy, xz - y^2)$ è $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y & -x & 4z \\ z & -2y & x \end{pmatrix}$, che calcolato in $P(1, 0, -1)$ diventa $J_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, di rango 2: ciò prova che l'insieme di livello S di g contenente P (cioè $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = g(P) = (2, -1)\}$), ovvero $S = \left\{ \begin{smallmatrix} 2z^2 - xy = 2 \\ xz - y^2 = -1 \end{smallmatrix} \right\}$ è una curva regolare attorno a P . Poiché il primo minore di $J_g(P)$ è nonsingolare, possiamo ad esempio esplicitare x e y in funzione di z . Derivando le equazioni del sistema rispetto a z si ottiene $\begin{cases} 4z - x'y - xy' = 0 \\ x'z + x - 2y'y' = 0 \end{cases}$, che calcolato per $z = -1$ (con $x(-1) = 1, y(-1) = 0$) dà $\begin{cases} -4 - y'(-1) = 0 \\ -x'(-1) + 1 = 0 \end{cases}$, da cui $x'(-1) = 1$ e $y'(-1) = -4$. Derivando ulteriormente rispetto a z si ha $\begin{cases} 4 - x''y - x'y' - x'y'' = 0 \\ x''z + x' + x' - 2(y'y'') = 0 \end{cases}$, che calcolato per $z = -1$ dà $\begin{cases} 4 + 4 + 4 - y''(-1) = 0 \\ -x''(-1) + 1 + 1 - 32 = 0 \end{cases}$, da cui $x''(-1) = -30$ e $y''(-1) = 12$. La curva S è dunque parametrizzata attorno a P da $\gamma(z) = (x(z), y(z), z) = (1 + (z+1) - 15(z+1)^2 + \dots, -4(z+1) + 6(z+1)^2 + \dots, z)$, mentre la retta tangente affine a S in P è data dal sistema $\begin{cases} x = 1 + (z+1) = 0 \\ y = -4(z+1) = 0 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x - z = 2 \\ y + 4z = -4 \end{cases}$.

(b) Per Lagrange, P è punto stazionario per $f(x, y, z) = 2x + y + \alpha z$ su S quando $\det \begin{pmatrix} \nabla g_1(P) \\ \nabla g_2(P) \\ \nabla f(P) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = 0$, che dà $\alpha = 2$. Componendo f con la parametrizzazione $\gamma(z)$ si ha $F(z) := f(x(z), y(z), z) = 2x(z) + y(z) + 2z$: derivando si ha $F'(z) = 2x' + y' + 2$ (da cui $F'(-1) = 2x'(-1) + y'(-1) + 2 = 0$, come previsto), e derivando ancora $F''(z) = 2x'' + y''$ da cui $F''(-1) = 2x''(-1) + y''(-1) = -48 < 0$, il che ci dice che P è un punto di massimo relativo per f su S .

2. (a) (Figura 1) L'area di A è data da $\frac{1}{4}(2a)^2\pi + \frac{1}{2}(2a)^2 = (\pi + 2)a^2$. Si ha poi $\int_{A'} x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho \cos \theta \rho d\rho = \frac{8}{3}a^3$ e $\int_{A''} x dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{x-2a}^0 x dy = \int_0^{2a} x(2a-x) dx = [ax^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{2a} = \frac{4}{3}a^3$, da cui $x_G = \frac{4}{\pi+2}a$; e $\int_{A'} y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho \sin \theta \rho d\rho = \frac{8}{3}a^3$ e $\int_{A''} y dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{x-2a}^0 y dy = \frac{1}{2} \int_0^{2a} (x-2a)^2 dx = \frac{1}{6}[(x-2a)^3]_0^{2a} = -\frac{4}{3}a^3$, da cui $y_G = \frac{4}{3(\pi+2)}a$.

(b) La funzione $\frac{y}{\sqrt{x}}$ è positiva su A' , dunque per Fubini e Tonelli possiamo calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede. Passando direttamente in coordinate polari si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{\rho \cos \theta}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho^{\frac{3}{2}} d\rho = [-2\sqrt{\cos \theta}]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^{2a} = \frac{16\sqrt{2}}{5}a^2\sqrt{a}$, valore finito. • Lo stesso ragionamento vale anche per l'integrale $\int_{A''} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy$. Procedendo per x -fili si ha $\int_0^{2a} dx \int_{x-2a}^0 \frac{1}{\sqrt{x-y}} dy = \int_0^{2a} [-2(x-y)^{\frac{1}{2}}]_{y=x-2a}^{y=0} dx = 2 \int_0^{2a} ((2a)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = 2[\sqrt{2}ax - \frac{2}{3}x\sqrt{x}]_{x=0}^{x=2a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}a\sqrt{a}$, pure finito.

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E in due modi. (1. Per x -fette) Fissato $0 \leq x \leq a$ la x -fetta è un rettangolo in (y, z) di lati $\sqrt{4a^2 - x^2}$ e $2a - x$, dunque $\text{Vol } E = \int_0^a (2a - x)\sqrt{4a^2 - x^2} dx = 2a \int_0^a \sqrt{4a^2 - x^2} dx - \int_0^a x\sqrt{4a^2 - x^2} dx = [x = 2a \sin t] 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt + \frac{1}{3}[(4a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = 4a^3[t + \sin t \cos t]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}(3\sqrt{3}a^3 - 8a^3) = \frac{2\pi+6\sqrt{3}-8}{3}a^3$. (2. Per (x, y) -fili) La proiezione di E sul piano (x, y) è la base $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, 0 \leq x \leq a, y > 0\}$, e lo (x, y) -filo sopra $(x, y) \in B$ è dato da $0 \leq z \leq 2a - x$, dunque $\text{Vol } E = \int_B (2a - x) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2}} (2a - x) dy = \int_0^a (2a - x)\sqrt{4a^2 - x^2} dx$, integrale uguale a prima. • La superficie esterna ∂E è formata da 6 componenti. La base B ha area $\int_0^a \sqrt{4a^2 - x^2} dx = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}a^2$. Il coperchio piano superiore S ha area, per la legge del coseno, pari a $\sqrt{2}$ Area $B = \frac{(2\pi+3\sqrt{3})\sqrt{2}}{6}a^2$. La faccia L nel piano (x, z) è un trapezio di area $\frac{3}{2}a^2$. La faccia R' nel piano (y, z) è un quadrato di area $4a^2$. La faccia R'' nel piano $x = a$ è un rettangolo di area $\sqrt{3}a^2$. Infine, la faccia cilindrica C è parametrizzata da $(2a \cos \theta, 2a \sin \theta, z)$ con $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq 2a - x = 2a(1 - \cos \theta)$ ed elemento d'area $d\sigma = 2a d\theta dz$, dunque l'area vale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a(1-\cos \theta)} 2a dz = 4a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) d\theta = 4a^2[\theta - \sin \theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(\pi-6+3\sqrt{3})}{3}a^2$. L'area totale esterna di E risulta la somma di questi 6 contributi.

(b) Il campo $F = (0, z, 0)$ ha divergenza nulla. D'altra parte F è parallelo all'asse y , dunque i suoi flussi attraverso B, R', R'' e S (le porzioni di ∂E parallele all'asse y) sono tutti nulli. Restano solo da calcolare i flussi di F uscenti da L e da C : quello da L è dato da $\int_L (0, z, 0) \cdot (0, -1, 0) dx dz = - \int_L z dx dz = - \int_0^a dx \int_0^{2a-x} z dz = -\frac{1}{2} \int_0^a (2a-x)^2 dx = \frac{1}{6}[(2a-x)^3]_0^a = -\frac{7}{6}a^3$, mentre quello da C risulta $+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a(1-\cos \theta)} \det \begin{pmatrix} 0 & -2a \sin \theta & 0 \\ z & 2a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a(1-\cos \theta)} 2az \sin \theta dz = 8a^3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{4}{3}a^3[(1 - \cos \theta)^3]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{6}a^3$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque nullo, e ciò verifica il teorema di Gauss.

(c) Il rotore di F è $(-1, 0, 0)$, il cui flusso attraverso C è dato da $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a(1-\cos \theta)} \det \begin{pmatrix} -1 & -2a \sin \theta & 0 \\ 0 & 2a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -4a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta = -4a^2[\sin \theta - \frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -4a^2[(1 - \frac{\pi}{4}) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8})] = -(4 - \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2})a^2$. Quanto alla circuitazione oraria di F lungo il bordo di C , l'unico contributo significativo (gli altri tre sono nulli, per ortogonalità o annullamento del campo) è quello sul tratto curvilineo in alto parametrizzato da $(2a \cos \theta, 2a \sin \theta, 2a(1 - \cos \theta))$ con $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ed è dunque pari a $- \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (0, 2a(1 - \cos \theta), 0) \cdot (-2a \sin \theta, 2a \cos \theta, 2a \sin \theta) d\theta = -4a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta$, lo stesso integrale di prima. Ciò verifica la formula di Kelvin-Stokes.

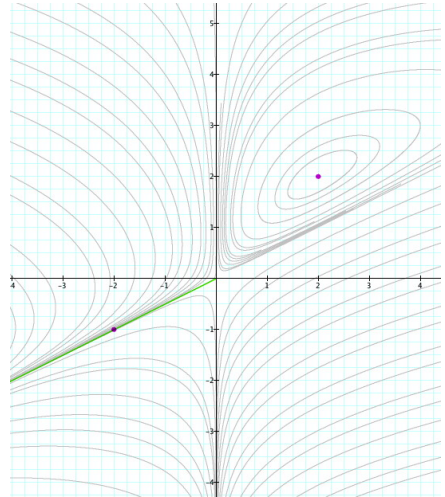
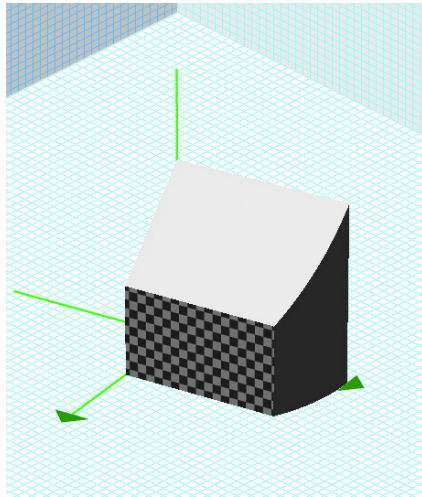
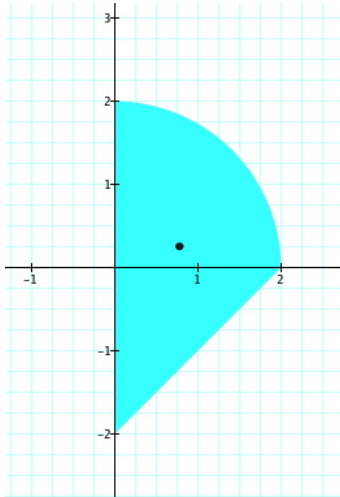
4. (a) (Figura 3) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) = x(x - 2y + 2) \\ \dot{y} = b(x, y) = 2(x - y) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare (attenzione: i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$). Gli equilibri sono le soluzioni del sistema $a = b = 0$, che dà i punti

$(0, 0)$ e $(2, 2)$. Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma $\omega = b dx - a dy = 2(x - y) dx - x(x - 2y + 2) dy$ è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): si ha $\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x} = 2(x - y) \neq 0$, tuttavia poiché $-\frac{1}{b}(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}) = -1$ non dipende da x , sappiamo che $e^{\int(-1) dy} = e^{-y}$ è un fattore integrante, ovvero $e^{-y}\omega$ diventa una forma esatta. In effetti, se F rappresenta una sua primitiva (che sarà un integrale primo del sistema), da $\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - y)e^{-y}$ si ottiene $F(x, y) = x(x - 2y)e^{-y} + \varphi(y)$, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y} = -x(x - 2y + 2)e^{-y} = x(-x + 2y - 2)e^{-y} + \varphi'(y)$ abbiamo $\varphi'(y) = 0$, da cui $\varphi(y)$ costante. Si ha così $F(x, y) = x(x - 2y)e^{-y}$ (a meno di costanti additive), e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello $F(x, y) = k$ per $k \in \mathbb{R}$, cioè $x(x - 2y) = k e^y$. Notiamo che per $k = 0$ si ottiene $x = 0$ (l'asse y) oppure la retta $x = 2y$, ciascuna divisa in tre traiettorie dall'equilibrio $(0, 0)$.

(b) La soluzione con $(x(0), y(0)) = (2, 2)$ (un equilibrio del sistema) è la costante $(x(t), y(t)) \equiv (2, 2)$. Invece la soluzione con $(x(0), y(0)) = (-2, -1)$ sta sulla semiretta $x = 2y$ con $x < 0$ che sarà dunque la sua traiettoria, percorsa verso il basso (notiamo che per $x < y$ si ha $\dot{y} < 0$): sostituendo $x = 2y$ in $\dot{y} = 2(x - y)$ si ottiene $\dot{y} = 2y$, da cui $y(t) = -e^{2t}$ e perciò $x(t) = -2e^{2t}$, ovvero la soluzione cercata $(x(t), y(t)) = (-2e^{2t}, -e^{2t})$ (definita per $t \in \mathbb{R}$).

5. (a) L'equazione differenziale $y^{(4)} + 4y = 8(1 + 2e^{-t} \sin t)$ è lineare a coefficienti costanti reali, e il termine non omogeneo è una funzione C^∞ su tutto $\mathbb{R}$: pertanto lo spazio delle sue soluzioni reali sarà, nello spazio delle funzioni reali C^∞ , uno sottospazio affine reale di dimensione 4, ottenuto traslando il sottospazio vettoriale delle soluzioni reali dell'equazione omogenea associata $y^{(4)} + 4y = 0$ con una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione completa.

(b) L'equazione caratteristica $\xi^4 + 4 = 0$ ha come soluzioni le radici quarte di -4 , ovvero $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$: pertanto le soluzioni reali dell'equazione omogenea associata $y^{(4)} + 4y = 0$ saranno combinazioni lineari reali di $e^t \cos t$, $e^t \sin t$, $e^{-t} \cos t$, $e^{-t} \sin t$. Quanto alla soluzione particolare, una per il termine non omogeneo 8 è chiaramente la costante 2 ; invece per il termine non omogeneo $16e^{-t} \sin t = \text{Im}(16e^{\lambda t})$ con $\lambda = -1 + i$ potremo trovarne una per $16e^{\lambda t}$ e poi prenderne la parte immaginaria. Essendo in un caso risonante (in quanto λ è radice caratteristica semplice), ne cerchiamo una della forma $\tilde{y}(t) = Ate^{\lambda t}$ con $A \in \mathbb{C}$ da determinare: si ha $\tilde{y}'(t) = A(1 + \lambda t)e^{\lambda t}$, $\tilde{y}''(t) = A(2\lambda + \lambda^2 t)e^{\lambda t}$, $\tilde{y}'''(t) = A(3\lambda^2 + \lambda^3 t)e^{\lambda t}$ e $\tilde{y}^{(4)}(t) = A(4\lambda^3 + \lambda^4 t)e^{\lambda t}$, pertanto imponendo che $\tilde{y}^{(4)}(t) + 4\tilde{y}(t) = A(4\lambda^3)e^{\lambda t} = 16e^{\lambda t}$ (in cui si è tenuto conto che $\lambda^4 + 4 = 0$) si ricava $4\lambda^3 A = 16$, da cui $A = \frac{4}{\lambda^3} = \frac{4}{2(1+i)} = 1 - i$. Ne segue che la soluzione particolare cercata per $16e^{-t} \sin t$ sarà $\text{Im}((1 - i)te^{\lambda t}) = te^{-t} \text{Im}((1 - i)(\cos t + i \sin t)) = te^{-t} \text{Im}((\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t)) = t(\sin t - \cos t)e^{-t}$. • Ricapitolando, le soluzioni reali dell'equazione differenziale $y^{(4)} + 4y = 8(1 + 2e^{-t} \sin t)$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (a \cos t + b \sin t)e^t + ((c - t) \cos t + (d + t) \sin t)e^{-t} + 2$ al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



1. Ex. 2. 2 Ex. 3. 3 Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (26/08/2019)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2018/19

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si considerino le funzioni $f(x, y) = x^2 + 2y$ e $g(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2x^2y - 3x + 2y$.
 - (a) Determinare quali curve di livello di g sono regolari. Detta X la curva di livello di g passante per $P(1, 1)$ esprimerne una parametrizzazione locale in P e calcolarne in due modi la retta tangente affine.
 - (b) Cercare eventuali punti stazionari di f su X , determinando la natura di quelli nel primo quadrante.
 - (c) Determinare (perché esistono?) gli estremi assoluti di f su $K = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$.
2. Nel piano cartesiano siano $A' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, x, y \geq 0\}$ e $A'' = \{(x, y) : 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq 2a - y\}$ (ove $a > 0$), e si ponga $A = A' \setminus A''$.
 - (a) Trovare il baricentro di A .
 - (b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A , calcolandone nel caso l'integrale.
3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z) , e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse z .
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (4x, 0, -y)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la porzione conica C della superficie esterna di E .
4. È data l'equazione differenziale $(ty - 1)y' = y + 1$ nella funzione scalare $y(t)$.
 - (a) Analizzare a priori esistenza e unicità delle soluzioni, e la loro crescita. Vi sono soluzioni costanti?
 - (b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione, in particolare quella con $y(1) = 0$ e quella con $y(0) = 0$.
5. Determinare la curva $(x(t), y(t))$ del piano cartesiano reale che per $t = 0$ passa per l'origine e tale che $(\dot{x}, \dot{y}) = (x - y + 3 \sin t, 5x - y - 4t)$.

1. (a) (Figura 1) Il gradiente di $g(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2x^2y - 3x + 2y$ è $\nabla g = (3x^2 - 4xy - 3, -4y - 2x^2 + 2)$, e si annulla nei punti in cui $3x^2 - 4xy - 3 = -4y - 2x^2 + 2 = 0$. Da $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ si ricava $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$; notata l'evidente soluzione $x = 1$ (da cui il punto $A(1, 0)$, con $g(A) = -2$) le altre due sono date da $2x^2 + 5x + 3 = 0$, ovvero $x = -1$ (da cui il punto $B(-1, 0)$, con $g(B) = 2$) e $x = -\frac{3}{2}$ (da cui il punto $C(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{8})$, con $g(C) = \frac{61}{32}$). Dunque, detta X_k la curva di livello k di g , tutte le curve X_k sono regolari tranne al più X_{-2} (in A), X_2 (in B) e $X_{\frac{61}{32}}$ (in C). • In particolare la curva di livello $X = X_{-4}$ passante per $P(1, 1)$ è regolare. Da $\nabla g(P) = (-4, -4)$ si nota che da $g(x, y) = -4$ si può esplicitare ad esempio $x(y)$ con $x(1) = 1$: derivando $g(x(y), y) \equiv -4$ rispetto a y si ottiene $3x^2x' - 4y - 4xyx' - 2x^2 - 3x' + 2 = 0$, da cui calcolando per $y = 1$ si ha $3x' - 4 - 4x' - 2 - 3x' + 2 = 0$, da cui $x'(1) = -1$; derivando di nuovo si ha $6x(x')^2 + 3x^2x'' - 4 - 4y(x')^2 - 4xx' - 4xyx'' - 4xx' - 3x'' = 0$, da cui calcolando per $y = 1$ si ha $x''(1) = \frac{3}{2}$. Una parametrizzazione locale di X in P è data dunque da $(x(y), y) = (1 - (y - 1) + \frac{3}{4}(y - 1)^2 + o_1((y - 1)^2), y)$ definita all'intorno di $y = 1$, mentre lo sviluppo al primo ordine $x = 1 - (y - 1) = 2 - y$ dà la retta tangente affine, che si può determinare anche con $\nabla g(P) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$.

(b) La condizione di Lagrange impone che i gradienti $\nabla g = (3x^2 - 4xy - 3, -4y - 2x^2 + 2)$ e $\nabla f = 2(x, 1)$ siano paralleli, e ciò equivale a $1(3x^2 - 4xy - 3) - x(-4y - 2x^2 + 2) = 0$, ovvero $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$, già risolta in precedenza con soluzioni $x = 1, -1, -\frac{3}{2}$; dalla condizione $g(x, y) = -4$ di appartenenza a X , se $x = 1$ si trovano i punti $(1, 1)$ (già noto come P) e $(1, -1)$; se $x = -1$ i punti $(-1, \sqrt{3})$ e $(-1, -\sqrt{3})$; e se $x = -\frac{3}{2}$ i punti $(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{21}-5}{8})$ e $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{21}+5}{8})$. Di questi sei punti, l'unico nel 1o quadrante è $P(1, 1)$: su di esso si ha $F(y) := f(x(y), y) = x(y)^2 + 2y$, che derivata dà $F'(y) = 2xx' + 2$ (perciò $F'(1) = 2x(1)x'(1) + 2 = 0$, come atteso), e $F''(y) = 2(x')^2 + 2xx''$. Essendo $F''(1) = 2(x'(1))^2 + 2x(1)x''(1) = 5 > 0$, il punto P è di minimo relativo stretto per f su X .

(c) L'insieme $K = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$ è il triangolo pieno e chiuso di estremi $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ e $B(2, 0)$, un compatto su cui f è continua: gli estremi assoluti di f su K esistono dunque in base a Weierstrass. Perché ∇f non si annulla mai, tali estremi non saranno assunti nei punti interni di K . Nel lato obliquo $(x, 1 - \frac{1}{2}x)$ con $0 < x < 2$ si ha $f(x, 1 - \frac{1}{2}x) = x^2 - x + 2$, la cui derivata si annulla per $x = \frac{1}{2}$ dando il punto $C(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ su cui $f(C) = \frac{7}{4}$. Nel lato verticale si ha $f(0, y) = 2y$, senza punti stazionari. Nel lato orizzontale si ha $f(x, 0) = x^2$, la cui derivata non si annulla per $0 < x < 2$. Infine nei vertici si ha $f(O) = 0$, $f(A) = 2$ e $f(B) = 4$. In definitiva gli estremi assoluti di f su K potranno essere assunti solo nei punti C, O, A e B ; e confrontando i valori di f su questi punti si conclude che il massimo assoluto è 4 (assunto in B) e il minimo assoluto è 0 (assunto in O). Per l'interpretazione geometrica di questo risultato si veda in Figura 1 (le curve di livello di f sono le parabole del tipo $y = -\frac{1}{2}x^2 + h$).

2. (a) (Figura 2) L'area di A è $\frac{1}{4}(2a)^2\pi - \frac{1}{2}a(2a + a) = \frac{2\pi-3}{2}a^2$. Si ha poi $\int_{A'} x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho \cos \theta \rho d\rho = [\sin \theta] \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} = \frac{8}{3}a^3$; $\int_{A'} y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho \sin \theta \rho d\rho = [-\cos \theta] \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} = \frac{8}{3}a^3$; $\int_{A''} x dx dy = \int_0^a dy \int_0^{2a-y} x dx = \frac{1}{2} \int_0^a (2a - y)^2 dy = \frac{1}{6}[-(2a - y)^3]_0^a = \frac{7}{6}a^3$; e $\int_{A''} y dx dy = \int_0^a dy \int_0^{2a-y} y dx = \int_0^a y(2a - y) dy = [ay^2 - \frac{1}{3}y^3]_0^a = \frac{2}{3}a^3$, da cui $x_G = \frac{1}{\text{Area } A} \int_A x dx dy = \frac{2}{(2\pi-3)a^2}(\frac{8}{3}a^3 - \frac{7}{6}a^3) = \frac{2}{2\pi-3}a$ e $y_G = \frac{1}{\text{Area } A} \int_A y dx dy = \frac{2}{(2\pi-3)a^2}(\frac{8}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3) = \frac{4}{2\pi-3}a$. Il baricentro è dunque $(\frac{2}{2\pi-3}a, \frac{4}{2\pi-3}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono positive su A (e anche singolarmente su A' e A''), dunque per Fubini e Tonelli basta esaminare degli integrali iterati. Notiamo che, poiché $A = A' \setminus A''$, può essere che una funzione sia integrabile su A senza esserlo singolarmente su A' e A'' ; mentre se fosse integrabile sia su A' che su A'' allora lo sarebbe anche su A con differenza dei due integrali. • L'insieme A ha un'ampia zona di contatto con l'asse y , dunque è probabile che la funzione $\frac{1}{x}$ non sia integrabile su A : per appurarlo basta in effetti notare che $\frac{1}{x}$ non è integrabile sul sottoinsieme rettangolare $[0, a] \times [a, \frac{3}{2}a]$ (cosa immediata, visto che $\log x$ diverge per $x \rightarrow 0^+$), dunque per monotonia $\frac{1}{x}$ non è integrabile nemmeno su A . • Per $\frac{1}{y}$ la situazione cambia, perché l'insieme A tocca l'asse x con un solo punto e dunque è ben più probabile l'integrabilità; invece i singoli insiemi A' e A'' hanno ampie zone di contatto con l'asse x , dunque non vale la pena di vedere se $\frac{1}{y}$ sia integrabile su ciascuno di essi (non lo sarà) ma conviene provare a calcolare subito un integrale iterato su A . Ragioniamo ad esempio per x -filì distinguendo nel calcolo i casi $0 \leq x \leq a$ e $a \leq x \leq 2a$ (lo possiamo fare notando che sul tratto $0 \leq x \leq a$ non ci sono problemi di integrabilità perché si è lontani dall'asse x), e si ottiene $\int_0^a dx \int_a^{\sqrt{4a^2-x^2}} \frac{1}{y} dy + \int_a^{2a} dx \int_{2a-x}^{\sqrt{4a^2-x^2}} \frac{1}{y} dy = \int_0^a (\log \sqrt{4a^2-x^2} - \log a) dx + \int_a^{2a} (\log \sqrt{4a^2-x^2} - \log(2a-x)) dx = \int_0^a (\frac{1}{2} \log(2a+x) + \frac{1}{2} \log(2a-x) - \log a) dx + \int_0^a (\frac{1}{2} \log(2a+x) - \frac{1}{2} \log(2a-x)) dx = \frac{1}{2}[(2a+x)(\log(2a+x) - 1) - (2a-x)(\log(2a-x) - 1) - 2x \log a]_{x=0}^a + \frac{1}{2}[(2a+x)(\log(2a+x) - 1) + (2a-x)(\log(2a-x) - 1)]_{x=a}^{2a} = \frac{1}{2}(3a(\log 3a - 1) - a(\log a - 1) - 2a \log a) + \frac{1}{2}(4a(\log 4a - 1) - 3a(\log 3a - 1) - a(\log a - 1)) = \frac{1}{2}(-a(\log a - 1) - 2a \log a + 4a(\log 4a - 1) - a(\log a - 1)) = (4 \log 2 - 1)a$, valore finito (e omogeneo di grado 1 in a , come preventivabile). Dunque la funzione $\frac{1}{y}$ è integrabile su A con valore $(4 \log 2 - 1)a$.

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di E in due modi. (1. Guldino) Vale $\text{Vol } E = \frac{\pi}{2} \int_A x dx dz = \frac{\pi}{2}(\frac{8}{3}a^3 - \frac{7}{6}a^3) = \frac{3\pi}{4}a^3$. (2. Per z -fette) Per $0 \leq z \leq 2a$ la z -fetta è un quarto di corona circolare di raggi esterno $\sqrt{4a^2 - z^2}$ e interno $2a - z$ (per $0 \leq z \leq a$) oppure un quarto di cerchio di raggio $\sqrt{4a^2 - z^2}$ (per $a \leq z \leq 2a$), dunque $\text{Vol } E = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(4a^2 - z^2 - (2a - z)^2) dz + \int_a^{2a} \frac{1}{4}\pi(4a^2 - z^2) dz = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(4az - 2z^2) dz + \int_a^{2a} \frac{1}{4}\pi(4a^2 - z^2) dz = \frac{1}{4}\pi([2az^2 - \frac{2}{3}z^3]_0^a + [4a^2z - \frac{1}{3}z^3]_a^{2a}) = \frac{1}{4}\pi(\frac{4}{3}a^3 - 0 + \frac{16}{3}a^3 - \frac{11}{3}a^3) = \frac{3\pi}{4}a^3$, come prima.

(b) Il campo $F = (4x, 0, -y)$ ha divergenza $\nabla \cdot F = 4$, dunque $\int_E \nabla \cdot F dx dy dz = 4 \text{Vol } E = 3\pi a^3$. D'altra parte F è parallelo al piano (x, z) , perciò il flusso uscente $\Phi_A(F)$ di F da A è nullo; e sul piano (y, z) il campo è parallelo all'asse z , pertanto anche il flusso $\Phi_{A'}(F)$ uscente dalla superficie A' analoga ad A è nullo. Per il quarto di disco D a quota a si ha $\Phi_D(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (4\rho \cos \theta, 0, -\rho \sin \theta) \cdot (0, 0, -1) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}a^3$. La superficie conica C è parametrizzata da $(u \cos \theta, u \sin \theta, 2a - u)$ con $a \leq u \leq 2a$ e $0 \leq \theta \leq 2a$ (normale associata entrante), dunque $\Phi_C(F) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} 4u \cos \theta & \cos \theta & -u \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & u \cos \theta \\ -u \sin \theta & -1 & 0 \end{pmatrix} du d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} (4x^2 \cos^2 \theta - x^2 \sin \theta) d\theta = -[\frac{1}{3}x^3]_a^{2a} [2(\theta + \sin \theta \cos \theta) + \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{7}{3}(\pi - 1)a^3$. Infine, la superficie sferica S è $(2a \cos \theta \sin \varphi, 2a \sin \theta \sin \varphi, 2a \cos \varphi)$

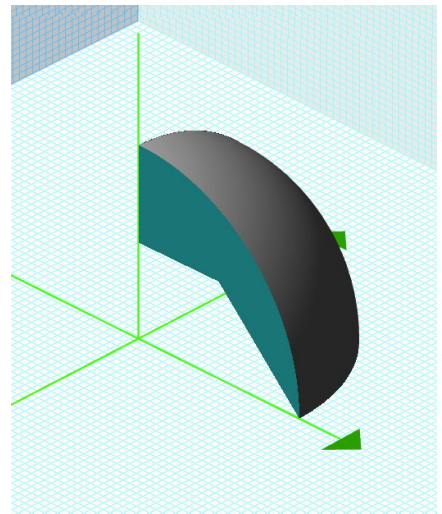
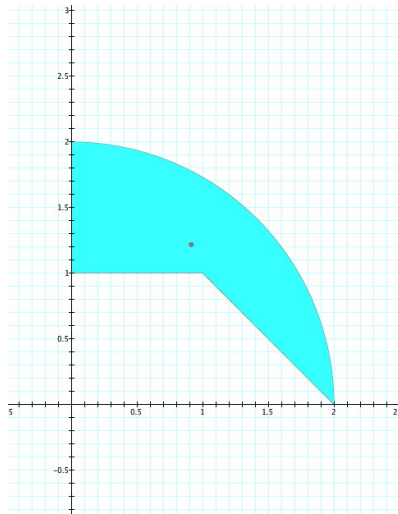
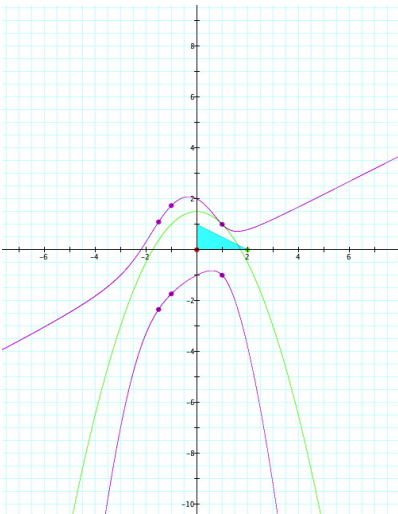
con $0 \leq \theta, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 8a \cos \theta \sin \varphi & -2a \sin \theta \sin \varphi & 2a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & 2a \cos \theta \sin \varphi & 2a \sin \theta \cos \varphi \\ -2a \sin \theta \sin \varphi & 0 & -2a \sin \varphi \end{pmatrix} d\theta d\theta =$
 $8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \theta \sin^3 \varphi - \sin \theta \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\theta = 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi = 8a^3 [\pi(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi) - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
 $\frac{8}{3}(2\pi - 1)a^3$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque $0 + 0 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{7}{3}(\pi - 1)a^3 + \frac{8}{3}(2\pi - 1)a^3 = 3\pi a^3$, e ciò verifica Gauss.

(c) Il rotore di F risulta $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$, dunque (usando per C la parametrizzazione precedente col verso uscente da E) si ha $\Phi_C(\nabla \times F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} -1 & \cos \theta & -u \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & u \cos \theta \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} du d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_a^{2a} u du = \frac{3}{2}a^2$. D'altra parte, calcolando la circuitazione di F lungo ∂C nel verso associato (orario) partendo da $(2a, 0, 0)$ si ha $\oint_{\partial C} F \cdot d\ell = \int_{2a}^a (4x, 0, 0) \cdot (1, 0, -1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4a \cos \theta, 0, -a \sin \theta) \cdot (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0) d\theta + \int_a^{2a} (0, 0, -y) \cdot (0, 1, -1) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (8a \cos \theta, 0, -2a \sin \theta) \cdot (-2a \sin \theta, 2a \cos \theta, 0) d\theta =$
 $-4 \int_a^{2a} x dx - 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_a^{2a} y dy + 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = 3a^2[-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3[\frac{1}{2}x^2]_a^{2a} = 6a^2 - \frac{9}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$, come atteso.

4. (a) L'equazione $(ty - 1)y' = y + 1$ non è in forma normale, e negli istanti t_0 in cui una soluzione soddisfa $t_0 y(t_0) = 1$ (iperbole equilatera nel piano (t, y)) deve essere $y(t_0) + 1 = 0$, ovvero $y(t_0) = -1$: pertanto un problema di Cauchy con dato iniziale del tipo $(t_0, \frac{1}{t_0})$ non ha soluzione tranne il caso $t_0 = -1$, in cui si vede facilmente l'esistenza perlomeno della (unica) soluzione costante $y \equiv -1$. Invece nei dati iniziali (t_0, y_0) con $t_0 y_0 \neq 1$ si può porre l'equazione in forma normale $y' = f(t, y) = \frac{y+1}{ty-1}$, con garanzia di esistenza e unicità locale (e unicità globale); nulla si può dire invece per l'esistenza globale. Si ha $y' = 0$ (punti stazionari) quando $y = -1$, ovvero per la soluzione costante; si ha poi $y' > 0$ (soluzioni crescenti) nelle zone del piano (t, y) in cui $f(t, y) > 0$, dunque all'interno (se $y < -1$) o all'esterno (se $y > -1$) dei rami dell'iperbole equilatera $ty = 1$.

(b) L'equazione totale associata è $\omega = p(y, t) dy + q(y, t) dt = 0$ con $p = ty - 1$ e $q = -(y + 1)$. La forma ω non è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial t} = y \neq \frac{\partial q}{\partial y} = -1$; tuttavia, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = \frac{1}{-(y+1)}(y+1) = -1$ non dipende da t , sappiamo che $\exp(\int (-1) dy) = e^{-y}$ è un fattore integrante, ovvero $e^{-y}\omega$ è esatta. In effetti, detta $F(y, t)$ una sua primitiva, deve essere $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-y}(ty - 1)$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = -(y + 1)e^{-y}$: dalla seconda si ha subito $F(y, t) = -t(y + 1)e^{-y} + \psi(y)$, e allora dalla prima $\frac{\partial F}{\partial y} = tye^{-y} + \psi'(y) = e^{-y}(ty - 1)$, ovvero $\psi'(y) = -e^{-y}$ che dà $\psi(y) = e^{-y}$. Otteniamo così $F(y, t) = (1 - t(y + 1))e^{-y}$, dunque le curve integrali sono $F(y, t) = k$, ovvero $k e^y + t(y + 1) - 1 = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: da questa equazione, tramite Dini potremo esplicitare $y(t)$ attorno a un dato iniziale $y(t_0) = y_0$ con $t_0 y_0 \neq 1$.
 • Col dato iniziale $y(1) = 0$ si ha $k + 1 - 1 = 0$, ovvero $k = 0$: si ha dunque $t(y + 1) - 1 = 0$, da cui si ricava subito la forma finita $y(t) = \frac{1-t}{t}$ (definita per $t > 0$).
 • Invece col dato iniziale $y(0) = 0$ si ha $k - 1 = 0$, ovvero $k = 1$: si ricava dunque $e^y + t(y + 1) - 1 = 0$. Questa equazione non permette di ricavare $y(t)$ in forma finita come nel caso precedente, ma potremo calcolarne i primi termini di uno sviluppo: derivando rispetto a t abbiamo $y' e^y + y + 1 + ty' = 0$, che calcolata per $t = 0$ con $y(0) = 0$ dà $y'(0) = -1$; derivando ancora si ha $y'' e^y + (y')^2 e^y + y' + y' + ty'' = 0$, che per $t = 0$ dà $y''(0) = 1$, dunque $y(t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)$.

5. Gli autovalori della matrice dei coefficienti del sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = (x - y + 3 \sin t, 5x - y - 4t)$ sono $\pm 2i$; un autovettore relativo a $2i$ è $(1, 1 - 2i)$, pertanto una base reale delle soluzioni della parte omogenea è data da $\text{Re}(e^{2it}, (1 - 2i)e^{2it}) = (\cos 2t, \cos 2t + 2 \sin 2t)$ e $\text{Im}(e^{2it}, (1 - 2i)e^{2it}) = (\sin 2t, -2 \cos 2t + \sin 2t)$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo $(3 \sin t, 0) = \text{Im}(3e^{it}, 0)$ sarà (essendo il sistema reale) la parte immaginaria di una soluzione particolare per $(3e^{it}, 0)$, che a sua volta sarà del tipo (ae^{it}, be^{it}) con $a, b \in \mathbb{C}$ da determinare, e i conti danno $(a, b) = (1 + i, 5)$: dunque abbiamo $\text{Im}((1 + i)e^{it}, 5e^{it}) = (\cos t + \sin t, 5 \sin t)$. D'altra parte una soluzione particolare per il termine non omogeneo $(0, -4t)$ è del tipo $(at + b, ct + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ da determinare, e i conti danno $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, -1)$. La soluzione generale è dunque $(x(t), y(t)) = (A \cos 2t + B \sin 2t + t + \cos t + \sin t, A(\cos 2t + 2 \sin 2t) + B(\sin 2t - 2 \cos 2t) + t - 1 + 5 \sin t)$ con $A, B \in \mathbb{C}$; imponendo infine che $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ si ottiene $A = B = -1$, da cui la soluzione cercata $(x(t), y(t)) = (-\cos 2t - \sin 2t + t + \cos t + \sin t, \cos 2t - 3 \sin 2t + t - 1 + 5 \sin t)$.



1. Ex. 1. 2. Ex. 2. 3. Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (10/09/2019)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2018/19

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano si consideri la funzione $g(x, y, z) = x^3 + 3xyz - 2z^2 + y^2z$.
 - (a) Quali superfici di livello di g sono regolari? Detta S quella contenente $P(1, -1, 0)$, la si parametrizzi all'intorno di P fino all'ordine quadratico e si determini in due modi il piano affine tangente in P .
 - (b) Dire per quale α il punto P è stazionario per $f(x, y, z) = x + \alpha z$ su S , determinandone la natura.
2. Nel piano cartesiano si disegni l'insieme $A = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y(x^2 + 1) \leq 2x\}$.
 - (a) Determinare il baricentro di $A' = A \cap \{(x, y) : x \leq 1\}$.
 - (b) Dire se le funzioni $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ sono integrabili su A , calcolandone nel caso l'integrale.
3. Nel primo ottante dello spazio cartesiano si traccino nel piano (x, z) il quarto di circonferenza di raggio r centrato nell'origine, e nel piano (y, z) il segmento tra i punti $(0, r, 0)$ e $(0, 0, r)$ (ove $r > 0$); sia poi S la superficie ottenuta unendo con segmenti orizzontali i vari punti del quarto di circonferenza con i rispettivi punti del segmento posti alla stessa quota, e si denoti con E il solido che S racchiude nel primo ottante.
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (6x, z, 0)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la superficie S .
4. È data l'equazione differenziale $y''\sqrt{y} = \sqrt{y} - \alpha$ (ove $\alpha \geq 0$) nella funzione scalare $y(t)$.
 - (a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità, invarianza temporale, simmetrie delle soluzioni? Ve ne sono di costanti?
 - (b) Posto $\alpha = 1$ determinare un integrale primo; trovare infine la soluzione con $y(0) = 4$ e $y'(0) = -\sqrt{2}$.
5. Di un sistema differenziale lineare $(\dot{x}, \dot{y}) = (ax + by - t, cx + dy + 1)$ nell'incognita $(x(t), y(t))$ nel piano cartesiano reale (ove i coefficienti a, b, c, d sono funzioni continue di t) si sa che $(t, -1)$ e $(1, t)$ sono due soluzioni del sistema omogeneo associato. Ricostruire i coefficienti del sistema e determinarne tutte le soluzioni, in particolare quelle (quante sono?) che per $t = 0$ passano per l'origine.

1. (a) Il gradiente della funzione $g(x, y, z) = x^3 + 3xyz - 2z^2 + y^2z$ è $\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (3(x^2 + yz), (3x + 2y)z, 3xy - 4z + y^2)$. Ponendo $\nabla g = (0, 0, 0)$, da $\frac{\partial g}{\partial y}$ si ricava $z = 0$ (che dà luogo al solo punto $O(0, 0, 0)$) oppure $y = -\frac{3}{2}x$ (che dà luogo al punto $A(-\frac{32}{27}, \frac{16}{9}, -\frac{64}{81})$ e nuovamente a $O(0, 0, 0)$). Pertanto tutte le superfici di livello di g sono regolari in ogni loro punto tranne quella di livello $g(O) = 0$ nel punto O e quella di livello $g(A) = -2^{13}/3^9$ nel punto A . • La superficie di livello S contenente $P(1, -1, 0)$ è data da $g(x, y, z) = g(P) = 1$. Da $\nabla g(P) = (3, 0, -2)$ si deduce che da $g(x, y, z) = 1$ è possibile esplicitare ad esempio x in funzione di y e z , con $x(-1, 0) = 1$. Derivando l'identità $g(x(y, z), y, z) \equiv 1$ parzialmente rispetto a y e z si ottiene $3x^2\dot{x}_y + 3\dot{x}_y yz + 3xz + 2yz = 0$ e $3x^2\dot{x}_z + 3\dot{x}_z yz + 3xy - 4z + y^2 = 0$, che calcolate per $(y, z) = (-1, 0)$ danno $\dot{x}_y(-1, 0) = 0$ e $\dot{x}_z(-1, 0) = \frac{2}{3}$. Derivando ulteriormente si ha $6x(\dot{x}_y)^2 + 3x^2\ddot{x}_{yy} + 3\ddot{x}_{yy}yz + 3\dot{x}_y z + 3\dot{x}_y z + 2z = 0$, $6x\dot{x}_y\dot{x}_z + 3x^2\ddot{x}_{yz} + 3\ddot{x}_{yz}yz + 3\dot{x}_y y + 3\dot{x}_z z + 3x + 2y = 0$ e $6x(\dot{x}_z)^2 + 3x^2\ddot{x}_{zz} + 3\ddot{x}_{zz}yz + 3\dot{x}_z y + 3\dot{x}_z y - 4 = 0$, che calcolate per $(y, z) = (-1, 0)$ danno $\ddot{x}_{yy}(-1, 0) = 0$, $\ddot{x}_{yz}(-1, 0) = -\frac{1}{3}$ e $\ddot{x}_{zz}(-1, 0) = \frac{16}{9}$. Si ha dunque $x(y, z) = x(-1, 0) + \dot{x}_y(-1, 0)(y + 1) + \dot{x}_z(-1, 0)z + \frac{1}{2}(\ddot{x}_{yy}(-1, 0)(y + 1)^2 + 2\ddot{x}_{yz}(-1, 0)(y + 1)z + \ddot{x}_{zz}(-1, 0)z^2) + \dots = 1 + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}(y + 1)z + \frac{8}{9}z^2 + \dots$, sviluppo dal cui 1° ordine si deduce l'equazione $x = 1 + \frac{2}{3}z$ (ovvero $3x - 2z = 3$) del piano affine tangente a S in P che si può dedurre anche da $\nabla g(P) \cdot (x - 1, y + 1, z) = 0$.

(b) La condizione di Lagrange affinché il punto P sia stazionario per $f(x, y, z) = x + \alpha z$ su S dà subito $\alpha = -\frac{2}{3}$. Componendo f con la parametrizzazione trovata in precedenza si ha $F(y, z) := f(x(y, z), y, z) = x(y, z) - \frac{2}{3}z$: da $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (\dot{x}_y, \dot{x}_z - \frac{2}{3})$ si ha subito $\nabla F(-1, 0) = (0, 0)$, come atteso; passando alla matrice hessiana si ha $H_F(y, z) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{yy} & \ddot{x}_{yz} \\ \ddot{x}_{yz} & \ddot{x}_{zz} \end{pmatrix} = H_x(y, z)$, e perciò $H_F(-1, 0) = H_x(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, matrice indefinita (si noti che $\det < 0$). Pertanto P è un punto di sella per f su S .

2. (a) (Figura 1) L'area di $A' = A \cap \{(x, y) : x \leq 1\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y(x^2 + 1) \leq 2x\}$ è $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\log(x^2 + 1)]_0^1 = \log 2$. Si ha poi $\int_{A'} x dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} x dy = \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1} dx = 2 \int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx = 2[x - \arctg x]_0^1 = \frac{4-\pi}{2}$ e $\int_{A'} y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} y dy = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 x \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = [x(-\frac{1}{x^2+1})]_0^1 - \int_0^1 1(-\frac{1}{x^2+1}) dx = -\frac{1}{2} - 0 + [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$, dunque il baricentro di A' è il punto $(\frac{4-\pi}{2\log 2}, \frac{\pi-2}{4\log 2})$.

(b) Le funzioni $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{1}{x+y}$ sono positive sull'insieme illimitato $A = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y(x^2 + 1) \leq 2x\}$, dunque per Fubini e Tonelli possiamo esaminare l'integrabilità usando integrali iterati. • Si ha $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{y}{x} dy = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = 2[-\frac{1}{2(x^2+1)}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$, valore finito. Dunque $\frac{y}{x}$ è integrabile su A con valore 1. • Si ha $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{x}{y} dy = \int_0^{+\infty} x dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{1}{y} dy$, ma l'integrale in y diverge in 0^+ . Pertanto $\frac{x}{y}$ non è integrabile su A . • Si ha $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{1}{x+y} dy = \int_0^{+\infty} [\log(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{2x}{x^2+1}} dx = \int_0^{+\infty} (\log(x + \frac{2x}{x^2+1}) - \log x) dx = \int_0^{+\infty} \log(1 + \frac{2}{x^2+1}) dx$ (e già ora si nota che si avrà integrabilità perché $\log(1 + \frac{2}{x^2+1})$ è finita in 0^+ ed è $\sim_{+\infty} \frac{2}{x^2+1} \sim_{+\infty} x^{-2}$). Proseguendo il conto, che darà dunque valore finito, integrando per parti si ha $[x \log(1 + \frac{2}{x^2+1})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \frac{-\frac{4x}{(x^2+1)^2}}{1 + \frac{2}{x^2+1}} dx = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} x \frac{4x}{(x^2+1)^2} \frac{x^2+1}{x^2+3} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+3)} dx = 2 \int_0^{+\infty} (\frac{3}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+1}) dx = 2 \int_0^{+\infty} (\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{3}(\frac{x^2}{3}+1)} - \frac{1}{x^2+1}) dx = 2[\sqrt{3} \arctg(\frac{x}{\sqrt{3}}) - \arctg x]_0^{+\infty} = 2(\sqrt{3} - 1)\frac{\pi}{2} = (\sqrt{3} - 1)\pi$. Dunque $\frac{1}{x+y}$ è integrabile su A con valore $(\sqrt{3} - 1)\pi$.

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di E in due modi. (1) Fissato $0 \leq z \leq r$ la z -fetta è un triangolo rettangolo di cateti $\sqrt{r^2 - z^2}$ e $r - z$, dunque si ha $\text{Vol } E = \int_0^r \frac{1}{2}(r - z)\sqrt{r^2 - z^2} dz = \frac{1}{2}r \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} dz - \frac{1}{2} \int_0^r z\sqrt{r^2 - z^2} dz = \frac{1}{2}r(\frac{1}{4}r^2\pi) - \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}]_{z=0}^{z=r} = (\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6})r^3$. (2) La superficie S può essere parametrizzata, seguendo la sua costruzione, tramite i segmenti orizzontali che la formano unendo i punti $(\sqrt{r^2 - z^2}, 0, z)$ e $(0, r - z, z)$ al variare di $0 \leq z \leq r$, ovvero $t(\sqrt{r^2 - z^2}, 0, z) + (1 - t)(0, r - z, z) = (t\sqrt{r^2 - z^2}, (1 - t)(r - z), z)$: qui si intende che i parametri z e t variano con $0 \leq z \leq r$ e $0 \leq t \leq 1$.⁽¹⁾ Parametrizzata S risulta possibile parametrizzare anche l'intero solido E facendo muovere ciascun punto di S lungo il segmento orizzontale che lo congiunge all'asse z , ovvero tramite $(u\sqrt{r^2 - z^2}, u(1 - t)(r - z), z)$ ove i parametri (u, z, t) variano con $0 \leq u \leq 1, 0 \leq z \leq r$ e $0 \leq t \leq 1$ (si noti che per $u = 1$ il punto è sulla superficie S , mentre per $u = 0$ è sull'asse z alla stessa quota). Il cambio di variabili $(x, y, z) = \phi(u, z, t) = (u\sqrt{r^2 - z^2}, u(1 - t)(r - z), z)$ ci permette in particolare di calcolare il volume di E in modo alternativo: lo jacobiano $\begin{pmatrix} t\sqrt{r^2 - z^2} & -\frac{utz}{\sqrt{r^2 - z^2}} & u\sqrt{r^2 - z^2} \\ (1 - t)(r - z) & -u(1 - t) & -u(r - z) \end{pmatrix}$ ha determinante $u(r - z)\sqrt{r^2 - z^2}$, pertanto $\text{Vol } E = \int_E dx dy dz = \int_0^1 du \int_0^r dz \int_0^1 u(r - z)\sqrt{r^2 - z^2} dt = \int_0^1 u du \int_0^r (r - z)\sqrt{r^2 - z^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^r (r - z)\sqrt{r^2 - z^2} dz$, poi il calcolo procede come prima.

(b) Il campo $F = (6x, z, 0)$ è orizzontale, dunque il suo flusso attraverso la base è nullo; inoltre sul piano (y, z) F è parallelo all'asse y , dunque anche lì il suo flusso è nullo. Il flusso di F uscente dal quarto di cerchio D nel piano (x, z) è $\int_D (6x, z, 0) \cdot (0, -1, 0) dx dz = -\int_D z dx dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^r \rho \sin \alpha \rho d\rho = -\frac{1}{3}r^3$. Infine, il flusso uscente da S , usando la parametrizzazione tramite (z, t) vista in precedenza (normale associata uscente) è $\int_0^r dz \int_0^1 \det \begin{pmatrix} 6t\sqrt{r^2 - z^2} & -\frac{tz}{\sqrt{r^2 - z^2}} & \sqrt{r^2 - z^2} \\ z & -(1 - t) & -(r - z) \end{pmatrix} dt = \int_0^r dz \int_0^1 (6t(r - z) + z)\sqrt{r^2 - z^2} dt =$

⁽¹⁾In alternativa, qui e nel seguito, al posto del parametro z si potrebbe usare l'angolo polare $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nel piano (x, z) , ottenendo $t(r \cos \alpha, 0, r \sin \alpha) + (1 - t)(0, r(1 - \sin \alpha), r \sin \alpha) = (tr \cos \alpha, (1 - t)r(1 - \sin \alpha), r \sin \alpha)$.

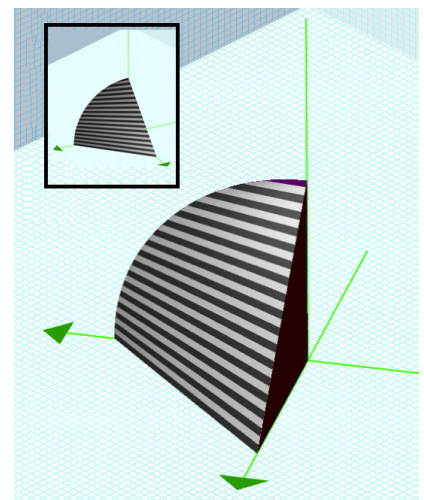
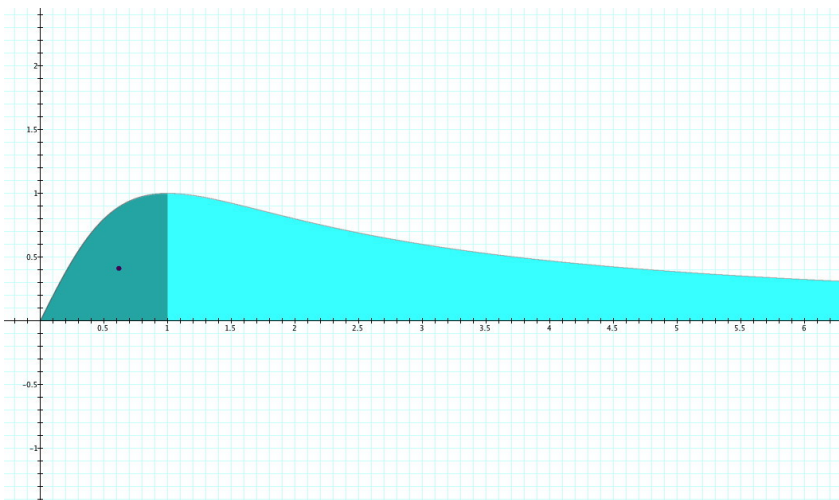
$\int_0^r (3r - 2z) \sqrt{r^2 - z^2} dz = 3r \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} dz - 2 \int_0^r z \sqrt{r^2 - z^2} dz = 3r(\frac{1}{4}\pi r^2) + [\frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}]_0^r = (\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3})r^3$. Il flusso totale di F uscente da E è pertanto $-\frac{1}{3}r^3 + (\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3})r^3 = (\frac{3\pi}{4} - 1)r^3$; d'altra parte si ha $\int_E (\nabla \cdot F) dx dy dz = 6 \text{Vol } E = 6(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6})r^3 = (\frac{3\pi}{4} - 1)r^3$, e ciò conferma il teorema di Gauss.

(c) Il flusso del rotore $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$ attraverso S è $\Phi_C(\nabla \times F) = \int_0^r dz \int_0^1 \det \begin{pmatrix} -1 & -\frac{tz}{\sqrt{r^2 - z^2}} & \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 & \frac{r^2 - z^2}{(1-t)} & -(r-z) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^r dz \int_0^1 (r - z) dt = -\int_0^r (r - z) dz = -\frac{1}{2}r^2$. D'altra parte, calcolando la circuitazione di F lungo ∂S nel verso associato (antiorario) partendo da $(r, 0, 0)$ si ha $\oint_{\partial S} F \cdot d\ell = \int_r^0 (6x, 0, 0) \cdot (1, -1, 0) dx + \int_r^0 (0, r - y, 0) \cdot (0, 1, -1) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (6r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0) \cdot (-r \sin \alpha, 0, r \cos \alpha) d\alpha = -6 \int_0^r x dx - \int_0^r (r - y) dy + 6r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = -3[x^2]_0^r - [ry - \frac{1}{2}y^2]_0^r + \frac{3}{2}[-\cos 2\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3r^2 - \frac{1}{2}r^2 + 3r^2 = -\frac{1}{2}r^2$, come atteso.

4. (a) L'equazione $y'' \sqrt{y} = \sqrt{y} - \alpha$ è autonoma, dunque è garantita l'invarianza temporale dello spazio delle soluzioni: ragioneremo pertanto con dati iniziali in $t = 0$. Essa dà luogo a soluzioni $y \geq 0$; dove una soluzione y si annulla si ricava $\alpha = 0$, unico caso in cui ciò può accadere (e risulta $y'' = 1$, da cui le soluzioni $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + kt + h$ definite ≥ 0), mentre per $\alpha \neq 0$ le soluzioni sono strettamente positive e si può portare l'equazione nella forma normale $y'' = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{y}}$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y, p) = (y, y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{y}} \end{cases}$. La funzione $f(y, p) = (p, 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{y}})$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (y_0, y'_0) con $y_0 > 0$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y, p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune soluzioni. L'unica soluzione costante è $y \equiv \alpha^2$. Una verifica diretta mostra che se $\varphi(t)$ è soluzione, lo è anche $\varphi(-t)$ (sull'intervallo opposto).

(b) L'equazione $y'' = y'' = 1 - \frac{1}{\sqrt{y}} = h(y)$ ammette l'integrale primo dell'energia totale $\frac{1}{2}(y')^2 - \int h(y) dy = \frac{1}{2}(y')^2 - y + 2\sqrt{y}$. • Sulla soluzione cercata con $y(0) = 4$ e $y'(0) = -\sqrt{2}$ si ha $1 - 4 + 4 = 1$: si ricava dunque $\frac{1}{2}(y')^2 - y + 2\sqrt{y} = 1$, da cui $(y')^2 = 2(\sqrt{y} - 1)^2$ e perciò (tenendo conto delle condizioni iniziali) $y' = -\sqrt{2}(\sqrt{y} - 1)$. Separando le variabili si ha $\frac{1}{\sqrt{y}-1} dy = -\sqrt{2} dt$, che integrata dà $2(\sqrt{y} - \log(\sqrt{y} - 1)) = -\sqrt{2}t + k$; da $y(0) = 4$ si ricava $k = 4$, da cui $\sqrt{y} - \log(\sqrt{y} - 1) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t$. Da questa equazione si potrà ricavare $y(t)$ tramite Dini attorno alla soluzione $(t_0, y_0) = (0.4)$: non sarà possibile esibirne una forma finita, ma da $y(0) = 4$, $y'(0) = -\sqrt{2}$ e $y''(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ possiamo ricavare lo sviluppo (peraltro già noto dall'inizio) $y(t) = 4 - \sqrt{2}t + \frac{1}{4}t^2 + o_0(t^2)$.

5. La risolvente $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ ha determinante $1 + t^2 > 0$: ne deduciamo che $(t, -1)$ e $(1, t)$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni su tutto $\mathbb{R}$. Sappiamo che la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è data da $\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & -\frac{1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$, dunque il sistema è ricostruito come $(\dot{x}, \dot{y}) = (\frac{1}{1+t^2}(tx - y) - t, \frac{1}{1+t^2}(x + ty) + 1)$ (in alternativa, per trovare i coefficienti bastava imporre che $(t, -1)$ e $(1, t)$ fossero soluzioni del sistema omogeneo associato). Usando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, posto $b(t) = (-t, 1)$ una soluzione particolare del sistema completo sarà della forma $\Phi(t)c(t)$ con $c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui $c(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}$ e dunque $\Phi(t)c(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix}$. Le soluzioni del sistema assegnato sono dunque tutte e sole quelle della forma $(x(t), y(t)) = (At + B - t^2, -A + (B + 1)t)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ si ricava $(A, B) = (0, 0)$, ovvero la (unica) soluzione $(x(t), y(t)) = (-t^2, t)$.



1. Ex. 2. 2. Ex. 3.