

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

## Esame Scritto (21/01/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
IN STAMPATELLO FIS / AST

- Nel piano  $(x, z)$  dello spazio cartesiano sia  $\Gamma$  l'arco di parabola  $z = x^2 - 2x$  con  $0 \leq x \leq 3$ , e sia  $L$  la superficie ottenuta ruotando  $\Gamma$  di un quarto di giro antiorario attorno all'asse  $z$ , bordi compresi.
  - Si esprima  $L$  sia in forma parametrica che in forma cartesiana, determinando in due modi il piano tangente affine nel suo punto  $P$  con  $x_P = 1$  e  $y_P = \sqrt{3}$ .
  - Determinare i punti di  $L$  a massima e minima distanza dal piano  $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ .
- Dato  $a > 0$  sia  $A$  la zona del piano racchiusa dalla curva polare  $\rho(\theta) = 2a \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .
  - Disegnare  $A$  e calcolarne area e baricentro.
  - Calcolare, se finiti, gli integrali  $\int_A x^\alpha dx dy$  per  $\alpha = -1$  e  $\int_A \frac{y^\beta}{x^2+y^2} dx dy$  per  $\beta = \frac{1}{2}$ .
  - Discutere al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  l'esistenza e il valore degli integrali del punto (b).
- Nello spazio sia  $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq \min\{4a^2 - x^2, a^2\}, x \geq z\}$  (ove  $a > 0$ ).
  - Si disegni  $E$  e se ne calcoli il volume e l'area della componente cilindrica  $S$  di  $\partial E$ .
  - Verificare la formula di Kelvin-Stokes per  $S$  e per il campo  $F = (y, 0, 0)$ .
  - Calcolare l'area della componente  $T$  di  $\partial E$  sul piano  $y = 0$  usando la formula di Green.
- Si abbia l'equazione differenziale scalare  $ty' = \phi(y)$ , ove  $\phi(y) = \begin{cases} y \log |y| & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \end{cases}$ .
  - Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità, crescita, simmetria, soluzioni costanti?
  - Trovare tutte le soluzioni, in particolare quelle con  $y(0) = 0, y(0) = 2, y(1) = -1, y(1) = 2$ .
- Determinare le curve  $(x(t), y(t))$  in  $\mathbb{C}^2$  tali che  $(\dot{x}, \dot{y}) = (ix + 2(y + 2 \cos t), 2(x - 1) - 3iy)$ , in particolare quella che per  $t = 0$  passa per l'origine.

1. (a) (Figura 1) Poiché sulla superficie  $L$  in coordinate cilindriche  $(\rho, \theta, z)$  si ha  $z = \rho^2 - 2\rho$ , una parametrizzazione globale è data da  $\gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2 - 2\rho)$  con  $0 \leq \rho \leq 3$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Sostituendo  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $z = \rho^2 - 2\rho$  si ha poi la forma grafico  $z = \phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ , da cui subito la forma cartesiana  $g(x, y, z) = z - \phi(x, y) = 0$ . Il punto  $P$  di  $L$  con  $x_P = 1$  e  $y_P = \sqrt{3}$  risulta così  $P(1, \sqrt{3}, 0)$ , dunque il piano tangente affine a  $L$  in  $P$  è dato da  $z = z_P + \nabla\phi(x_P, y_P) \cdot (x - x_P, y - y_P)$  ovvero  $z = 0 + (2x(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}), 2y(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}))|_{(1, \sqrt{3})} \cdot (x - 1, y - \sqrt{3})$  cioè  $z = x + y\sqrt{3} - 4$ . D'altra parte  $P = \gamma(2, \frac{\pi}{3})$ , dunque lo spazio tangente affine è anche  $\{P + \lambda \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}(2, \frac{\pi}{3}) + \mu \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(2, \frac{\pi}{3}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(1, \sqrt{3}, 0) + \lambda(\cos \theta, \sin \theta, 2(\rho - 1))|_{(2, \frac{\pi}{3})} + \mu(-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)|_{(2, \frac{\pi}{3})}\}$  ovvero  $\{(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2) + \mu(-\sqrt{3}, 1, 0)\} = (1 + \frac{1}{2}\lambda - \sqrt{3}\mu, \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \mu, 2\lambda)$ , ed eliminando i parametri  $\lambda, \mu$  si ritrova il piano  $x + y\sqrt{3} - z - 4 = 0$ .

(b) Disegnando il piano  $f(x, y, z) = 4x + 3y + 2z + 1 = 0$  si nota senza difficoltà che  $L$  sta tutta nel semispazio  $f > 0$ , pertanto determinare i punti di  $L$  a massima e minima distanza dal piano equivale a calcolare gli estremi di  $f$  sul compatto  $L$ . Sui punti interni di  $L$  si ha  $F(\rho, \theta) = f(\gamma(\rho, \theta)) = \rho(4 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 2\rho(\rho - 2) + 1$  con  $0 < \rho < 3$  e  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ; ponendo  $\nabla F = (4 \cos \theta + 3 \sin \theta + 4(\rho - 1), \rho(3 \cos \theta - 4 \sin \theta)) = (0, 0)$ , dalla seconda si ricava  $\theta = \theta_0 = \arctg \frac{3}{4}$  (perciò  $\cos \theta_0 = \frac{4}{5}$  e  $\sin \theta_0 = \frac{3}{5}$ ) ma allora la prima dà  $4\rho + 1 = 0$ , senza soluzioni accettabili. Sulla parabola nel piano  $y = 0$  si ha  $F(x) = f(x, 0, x^2 - 2x) = 2x^2 + 1$ , senza punti critici in  $0 < x < 3$ . Sulla parabola nel piano  $x = 0$  si ha  $F(y) = f(0, y, y^2 - 2y) = 2y^2 - y + 1$  con  $0 < y < 3$ , e  $F'(y) = 4y - 1 = 0$  per  $y = \frac{1}{4}$ , ovvero  $Q(0, \frac{1}{4}, -\frac{7}{16})$ . Sull'arco di circonferenza in alto si ha  $F(\theta) = f(3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 3) = 3(4 \cos \theta + 3 \sin \theta + 2) + 1$  con  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , e da  $F'(\theta) = 3(3 \cos \theta - 4 \sin \theta)$  si ricava ancora  $\theta = \theta_0$ , da cui il punto  $R(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 3)$ . • Ricapitolando, gli estremi di  $f$  su  $L$  possono essere assunti solo nei punti  $Q, R, O(0, 0, 0), S(3, 0, 3)$  e  $T(0, 3, 3)$ : essendo  $f(Q) = \frac{7}{8}, f(R) = \frac{48}{5} + \frac{27}{5} + 6 + 1 = 22, f(O) = 1, f(S) = 19$  e  $f(T) = 16$ , il massimo assoluto di  $f$  su  $L$  è 22 (assunto in  $R$ ) e il minimo è  $\frac{7}{8}$  (assunto in  $Q$ ).

2. (a) (Figura 2) La zona del piano racchiusa dalla curva polare  $\rho(\theta) = 2a \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ha area  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a \sin 2\theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = [\text{posto } \psi = 2\theta] 2a^2 [\frac{1}{2} \frac{1}{2} (\psi - \sin \psi \cos \psi)]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} a^2$ . Per ragioni di simmetria il baricentro di  $A$  sta sulla retta  $y = x$ ; si ha poi  $\int_A x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin 2\theta} \rho \cos \theta \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta [\frac{1}{3} \rho^3]_{\rho=0}^{\rho=2a \sin 2\theta} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a \cdot 2 \sin \theta \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta = \frac{64}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta = [\text{posto } t = \cos \theta] \frac{64}{3} a^3 \int_0^1 (1 - t^2)^4 dt = \frac{64}{3} a^3 [\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7]_0^1 = \frac{128}{105} a^3$ : pertanto, dividendo per l'area, il baricentro risulta essere il punto  $(\frac{256}{105\pi} a, \frac{256}{105\pi} a)$ .

(b-c) Discutiamo l'esistenza e il calcolo degli integrali richiesti direttamente al variare dei parametri, notando che, per positività, con Fubini e Tonelli possiamo esaminare integrali iterati. • Per  $\int_A x^\alpha dx dy$  si ha  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin 2\theta} \rho^\alpha \cos^\alpha \theta \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin 2\theta} \rho^{\alpha+1} \cos^\alpha \theta d\rho$ : per l'integrazione in  $\rho \sim 0^+$  bisogna porre  $\alpha + 1 > -1$ , ovvero  $\alpha > -2$ , e sotto questa condizione si ottiene  $\frac{(2a)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha \theta (2 \sin \theta \cos \theta)^{\alpha+2} d\theta = \frac{(2a)^{\alpha+2} 2^{\alpha+2}}{\alpha+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha+2} \theta \cos^{2\alpha+2} \theta d\theta$ . A questo punto, essendo  $\sin \theta \sim_{0^+} \theta$ , per integrare in  $\theta \sim 0^+$  va posto  $\alpha + 2 > -1$ , ovvero  $\alpha > -3$ ; mentre essendo  $\cos \theta \sim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi}{2} - \theta$ , per integrare in  $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$  va posto  $2\alpha + 2 > -1$ , ovvero  $\alpha > -\frac{3}{2}$ . Possiamo così concludere che l'integrale converge se e solo se  $\alpha > -\frac{3}{2}$ ; in particolare, se  $\alpha = -1$  si ottiene  $4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 4a$ . • Per  $\int_A \frac{y^\beta}{x^2 + y^2} dx dy$  si ha  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin 2\theta} \frac{\rho^\beta \sin^\beta \theta}{\rho^2} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin 2\theta} \rho^{\beta-1} \sin^\beta \theta d\rho$ : per l'integrazione in  $\rho \sim 0^+$  bisogna porre  $\beta - 1 > -1$ , ovvero  $\beta > 0$ , e sotto questa condizione si ottiene  $\frac{(2a)^\beta}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\beta \theta (2 \sin \theta \cos \theta)^\beta d\theta = \frac{(2a)^\beta 2^\beta}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\beta} \theta \cos^\beta \theta d\theta$ . Dunque per integrare in  $\theta \sim 0^+$  va posto  $2\beta > -1$ , ovvero  $\beta > -\frac{1}{2}$ ; mentre per integrare in  $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$  va posto  $\beta > -1$ . Perciò l'integrale converge se e solo se  $\beta > 0$ ; in particolare, se  $\beta = \frac{1}{2}$  si ha  $4\sqrt{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sqrt{\cos \theta} d\theta = 4\sqrt{a} [-\frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \sqrt{a}$ .

3. (a) (Figura 3) Per calcolare il volume di  $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq \min\{4a^2 - x^2, a^2\}, x \geq z\}$  converrà procedere per  $(y, z)$ -fili: sopra il quarto di disco  $D$  di raggio  $a$  nel piano  $(y, z)$  si ha  $z \leq x \leq \sqrt{4a^2 - y^2 - z^2}$ , dunque il volume vale  $\int_D (\sqrt{4a^2 - y^2 - z^2} - z) dy dz$ ; passando in coordinate polari  $(r, \psi)$  nel piano  $(y, z)$  si ha  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a (\sqrt{4a^2 - r^2} - r \sin \psi) r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi [-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3 \sin \psi]_0^a = \frac{1}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 3\sqrt{3} - \sin \psi) d\psi = \frac{1}{3}a^3 [(8 - 3\sqrt{3})\psi + \cos \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(8 - 3\sqrt{3})\pi - 2}{6} a^3$ . Allo stesso risultato si arriva distinguendo e sommando tra loro i volumi del tratto  $0 \leq x \leq a$  (vale  $\int_D (a - z) dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a (a - r \sin \psi) r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi [\frac{1}{2}ar^2 - \frac{1}{3}r^3 \sin \psi]_0^a = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin \psi) d\psi = a^3 [\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{3} \cos \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})a^3$ ), del tratto  $a \leq x \leq a\sqrt{3}$  (in cui si ha un quarto di cilindro di volume  $\frac{\pi}{4}(\sqrt{3} - 1)a^3$ ) e del tratto  $a\sqrt{3} \leq x \leq 2a$  (in cui si ha un quarto di calotta sferica di volume  $\int_{a\sqrt{3}}^{2a} \frac{1}{4}(4a^2 - x^2)\pi dx = [\frac{\pi}{4}(4a^2x - \frac{1}{3}x^3)]_{a\sqrt{3}}^{2a} = \frac{\pi}{4}(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3})a^3$ ). • La componente cilindrica  $S$  di  $\partial E$  è descritta da  $(x, a \cos \psi, a \sin \psi)$  con  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  e  $z = a \sin \psi \leq x \leq a\sqrt{3}$ ; l'elemento d'area è  $d\sigma = a d\psi dx$ , dunque Area  $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{a \sin \psi}^{a\sqrt{3}} a dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{3} - \sin \psi) d\psi = a^2 [\sqrt{3}\psi + \cos \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - 1)a^2$ .

(b) Il rotore di  $F = (y, 0, 0)$  è  $\nabla \times F = (0, 0, -1)$ , e vale  $\Phi_S(\nabla \times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{a \sin \psi}^{a\sqrt{3}} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a \sin \psi & 0 \\ -1 & a \cos \psi & 0 \end{pmatrix} dx = -a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{a \sin \psi}^{a\sqrt{3}} \sin \psi dx = -a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{3} - \sin \psi) \sin \psi d\psi = a^2 [\sqrt{3} \cos \psi + \frac{1}{2}(\psi - \sin \psi \cos \psi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{4} - \sqrt{3})a^2$ . • L'orientazione di  $S$  con la parametrizzazione data è quella uscente, dunque nel calcolo della circuitazione di  $F$  lungo  $\partial S$  giriamo in senso antiorario. Partendo da  $(a\sqrt{3}, a, 0)$  e notando che negli ultimi due tratti l'integrale è nullo perché il campo

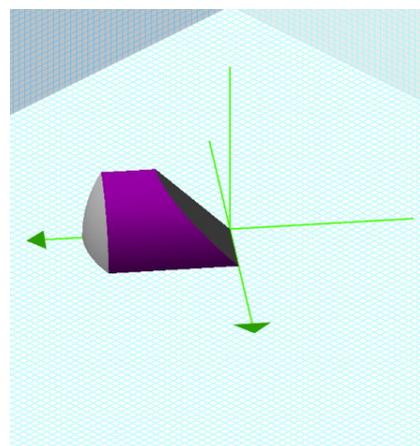
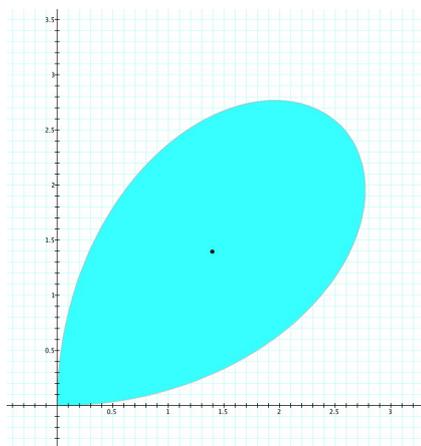
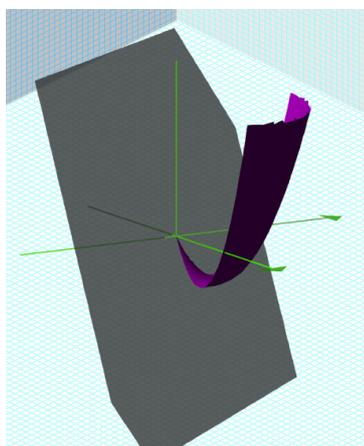
è nullo o perpendicolare, si ha  $\oint_{\partial S} F \cdot dl = -\int_0^{a\sqrt{3}} (a, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos \psi, 0, 0) \cdot (a \cos \psi, -a \sin \psi, a \cos \psi) d\psi + 0 + 0 = -\int_0^{a\sqrt{3}} a dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \psi d\psi = -a[\psi]_0^{a\sqrt{3}} + a^2[\frac{\psi + \sin \psi \cos \psi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{4} - \sqrt{3})a^2$ , come prima.

(c) Per calcolare con Green l'area della componente  $T$  di  $\partial E$  sul piano  $y = 0$  si tratta di calcolare  $\oint_{\partial T} x dz$  in senso antiorario. Partendo dall'origine e notando che l'integrale di linea è nullo nei due tratti orizzontali, tale integrale vale  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2a \cos \alpha d(2a \sin \alpha) + \int_a^0 x dx = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \alpha d\alpha - \frac{1}{2}a^2 = (\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2})a^2$ .

4. (a) Se una soluzione  $y(t)$  è definita in  $t = 0$  deve essere  $\phi(y(0)) = 0$ , da cui  $y(0) = 0$  oppure  $y(0) = \pm 1$ . Invece per  $t \neq 0$  si ha  $y' = f(t, y) = \frac{1}{t}\phi(y)$ , continua: se anche  $y \neq 0$  la funzione  $f$  è  $C^1$  e dunque si ha esistenza e unicità locale, mentre se  $y = 0$  si ha che  $\phi$  non è lipschitziana (notare che  $\lim_{y \rightarrow 0} \phi'(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (\log |y| + 1) = -\infty$ ) e dunque non si può affermare nulla a priori sull'unicità locale. Le soluzioni hanno punti stazionari quando assumono i valori  $0, -1, 1$ , che in realtà danno luogo alle sole soluzioni costanti; per  $t > 0$  le soluzioni sono crescenti quando  $\phi(y) > 0$ , ovvero per  $-1 < y < 0$  oppure per  $y > 1$ . Se  $\varphi(t)$  è una soluzione su un intervallo  $I \subset ]0, +\infty[$ , si verifica direttamente che anche  $-\varphi(t)$  lo è, così come lo sono  $\varphi(-t)$  e  $-\varphi(-t)$  sull'intervallo opposto  $-I$ .

(b) Se si ha un dato iniziale  $(t_0, y_0)$  con  $t_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq -1, 0, 1$ , separando le variabili si ha  $\frac{1}{y \log |y|} dy = \frac{1}{t} dt$ , che integrando dà  $\log |\log |y|| = \log |t| + k$ , ed esponenziando due volte si ottiene  $y = \pm e^{ht}$  con  $h \in \mathbb{R}$  (intesa come definita nella semiretta  $] -\infty, 0[$  oppure  $]0, +\infty[$  che contiene  $t_0$ ). (Notiamo ora che, visto che gli esponenziali non si annullano mai, l'unica soluzione che si può annullare è effettivamente la costante nulla: si è dunque verificata a posteriori l'unicità di una tale soluzione.) Se invece il dato iniziale ha  $t_0 \neq 0$  e  $y_0 \in \{-1, 0, 1\}$ , la soluzione è la relativa funzione costante (e se  $t_0 = 0$  questi gli unici valori ammessi). Dunque, le soluzioni con  $y(0) = 0, y(0) = 2, y(1) = -1, y(1) = 2$  sono rispettivamente: la costante nulla; non esiste; la costante  $-1$ ; la funzione  $y(t) = e^{t \log 2} = 2^t$  definita per  $t > 0$ .

5. Il problema  $(\dot{x}, \dot{y}) = (ix + 2(y + 2 \cos t), 2(x - 1) - 3iy)$  si può scrivere come sistema lineare  $\dot{X} = AX + b(t)$  con  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & -3i \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ -2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  ha autovalore doppio  $-i$ , dunque  $N = A - (-i)I = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$  è nilpotente (infatti  $N^2 = 0$ ) e una risolvente è data da  $\Phi(t) = e^{tA} = e^{-it}(I + tN) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 + 2it & 2t \\ 2t & 1 - 2it \end{pmatrix}$ . Quanto al problema completo (si ricordi che  $4 \cos t = 2(e^{it} + e^{-it})$ ), per i termini non risonanti  $b_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $b_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  si trovano con facilità soluzioni particolari rispettivamente  $\begin{pmatrix} -2ie^{it} \\ -e^{it} \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2i \end{pmatrix}$ . Invece per il termine risonante  $b_3(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-it} \\ 0 \end{pmatrix}$ , per il metodo di variazione delle costanti arbitrarie una soluzione particolare sarà della forma  $\Phi(t)c(t)$  ove  $\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t)b(t) = e^{-tA}b_3(t) = \begin{pmatrix} (1 - 2it)e^{it} & -2te^{it} \\ -2te^{it} & (1 + 2it)e^{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-it} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 - 2it \\ -2t \end{pmatrix}$ , da cui  $c(t) = 2 \begin{pmatrix} t - it^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$ : si ha così  $\Phi(t)c(t) = e^{tA}c(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 + 2it & 2t \\ 2t & 1 - 2it \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} t - it^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} = 2e^{-it} \begin{pmatrix} t + it^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ . Le soluzioni cercate sono pertanto tutte e sole quelle della forma  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A(1 + 2it) + 2Bt)e^{-it} - 2ie^{it} + 4 + 2(t - it^2)e^{-it} \\ (2At + B(1 - 2it))e^{-it} - e^{it} - 2i + 2t^2e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + 2(iA + B + 1)t - 2it^2)e^{-it} - 2ie^{it} + 4 \\ (B + 2(A - 2iB)t + 2t^2)e^{-it} - e^{it} - 2i \end{pmatrix}$  al variare di  $A, B \in \mathbb{C}$ . Infine, da  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - 2i + 4 \\ B - 1 - 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  si ricava  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2i \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$ .



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

## Esame Scritto (10/02/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
IN STAMPATELLO FIS / AST

- Nello spazio cartesiano sia  $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2(y + 1), z^2 = 2x - 1\}$ .
  - Si mostri che  $\Gamma$  è una curva regolare all'intorno del suo punto  $P(1, 0, -1)$ , esprimerne una parametrizzazione locale, e calcolarne la retta tangente affine in due modi.
  - Dire per quale  $\alpha \in \mathbb{R}$  il punto  $P$  è stazionario per  $f(x, y, z) = 2x + \alpha y$  su  $\Gamma$ , determinandone la natura.
  - Dimostrare che  $\Gamma$  è compatta, e determinarne i punti più alto e più basso.
- Nel piano cartesiano, dato  $a > 0$  sia  $A = \{(x, y) : y \geq 0, ax \geq y^2, x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$ .
  - Disegnare  $A$  e calcolarne area e baricentro.
  - Calcolare (se finiti) per  $\alpha = -1$  gli integrali  $\int_{A'} x^\alpha dx dy$  e  $\int_{A'} y^\alpha dx dy$ , ove  $A' = A \cap \{x \leq a\}$ .
  - Discutere l'integrabilità su  $A'$  delle funzioni  $x^\alpha$  e  $y^\alpha$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme  $A$  dell'Ex. 2 nel piano  $(x, z)$ , e sia  $E$  il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di  $A$  attorno all'asse  $z$ .
  - Si disegni  $E$  e se ne calcoli il volume in due modi.
  - Verificare il teorema di Gauss per  $E$  e per il campo  $F = (0, z, 0)$ .
  - Verificare la formula di Kelvin-Stokes per  $F$  e la componente di  $\partial E$  sul piano  $(y, z)$ .
- Si abbia l'equazione differenziale  $y'' + (y')^2 = y^2$  nella funzione incognita scalare  $y(t)$ .
  - Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se  $\varphi(t)$  è una soluzione su un intervallo, lo sono anche  $\varphi(-t)$  (oppure  $-\varphi(-t)$ ) sull'intervallo opposto? Se ciò fosse vero, le soluzioni definite in  $t = 0$  sarebbero necessariamente (dis)pari?
  - Determinare la soluzione tale che  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- Determinare tutte le soluzioni reali  $y(t)$  dell'equazione  $y''' + 4y = 2y' + \frac{1}{\cos t}$  tali che  $y(0) = 0$ , specificandone a priori il dominio.

**Analisi Matematica III – Esame Scritto (10/02/2020) – Soluzioni.**

1. (a) (Figura 1) Detta  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2y, z^2 - 2x)$ , la curva  $\Gamma$  è data da  $(g_1, g_2) = (2, -1)$ . Lo jacobiano di  $g$  è  $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix}$ , e nel punto  $P(1, 0, -1)$  di  $\Gamma$  si ha che  $J_g(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  ha rango 2: ciò prova che  $\Gamma$  è una curva regolare all'intorno di  $P$ . Poiché ad esempio il minore della prima e terza colonna è nonsingolare, per Dini è possibile esprimere localmente  $x(y)$  e  $z(y)$  con  $x(0) = 1$  e  $z(0) = -1$ . Derivando le equazioni rispetto a  $y$  si ha  $(2xx' + 2y + 2zz' - 2, 2zz' - 2x') = (0, 0)$ , che calcolata in  $y = 0$  dà  $(2(x'(0) - z'(0) - 1), -2(z'(0) + x'(0))) = (0, 0)$  ovvero  $x'(0) = \frac{1}{2}$  e  $z'(0) = -\frac{1}{2}$ ; derivando ulteriormente si ottiene  $(2((x')^2 + xx'' + 1 + (z')^2 + zz''), 2((z')^2 + zz'' - x'')) = (0, 0)$ , che calcolata in  $y = 0$  dà  $(2(\frac{1}{4} + x''(0) + 1 + \frac{1}{4} - z''(0)), 2(\frac{1}{4} - z''(0) - x''(0))) = (0, 0)$  ovvero  $(x''(0) - z''(0), x''(0) + z''(0)) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ , da cui  $(x''(0), z''(0)) = (-\frac{5}{8}, \frac{7}{8})$ : una parametrizzazione locale di  $\Gamma$  attorno a  $P$  è dunque  $\gamma(y) = (x(y), y, z(y))$  con  $x(y) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{5}{16}y^2 + o_0(y^2)$  e  $z(y) = -1 - \frac{1}{2}y + \frac{7}{16}y^2 + o_0(y^2)$ . La retta tangente affine a  $\Gamma$  in  $P$  si può ottenere o arrestando  $\gamma$  al primo ordine o come nucleo traslato di  $J_g(P)$ , dando in entrambi i casi la retta  $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ .

(b) Per il metodo di Lagrange, la condizione affinché  $P(1, 0, -1)$  sia stazionario per  $f(x, y, z) = 2x + \alpha y$  su  $\Gamma$  è che  $\nabla f(P)$  sia combinazione lineare di  $\nabla g_1(P)$  e  $\nabla g_2(P)$ , ovvero  $\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$ , e questo porge  $\alpha = -1$ . Quanto alla natura, basta esaminare quella di  $y = 0$  per  $F(y) = f(\gamma(y)) = 2x(y) - y$ : si ha  $F'(y) = 2x' - 1$  (da cui  $F'(0) = 0$ , come previsto), e  $F''(y) = 2x''$  (da cui  $F''(0) = 2x''(0) = -\frac{5}{4} < 0$ ). Si tratta dunque di un punto di massimo locale stretto.

(c) La curva  $\Gamma$  è compatta in quanto chiusa (sistema di due equazioni continue) e limitata (in quanto  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 2$ , ovvero  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$  è la superficie sferica di centro  $(0, 1, 0)$  e raggio  $\sqrt{3}$ ). Pertanto per Weierstrass ha senso cercare i suoi punti più alto e più basso, ovvero gli estremi assoluti su  $\Gamma$  della funzione  $h(x, y, z) = z$ . Da  $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ -2 & 0 & 2z \end{pmatrix} = 0$  si ottiene  $y = 1$ , che messo nelle equazioni di  $\Gamma$  porge i due punti  $A_{\pm}(\sqrt{5}-1, 1, \pm\sqrt{2\sqrt{5}-3})$ , rispettivamente il più alto e il più basso di  $\Gamma$ .

2. (a) (Figura 2) Nel primo quadrante le curve  $ax = y^2$  (parabola) e  $x^2 + y^2 = 2a^2$  (circonferenza di raggio  $a\sqrt{2}$ ) si intersecano in  $(a, a)$ . L'area si ottiene come somma di uno spicchio di cerchio e di un settore parabolico, e risulta  $\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (a\sqrt{2})^2 + \int_0^a (y - \frac{1}{a}y^2) dy = \frac{3\pi+2}{12} a^2$ . • Procedendo per  $y$ -filii si ha  $\int_A x dx dy = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^a (2a^2 - y^2 - \frac{1}{a^2}y^4) dy = \frac{1}{2} [2a^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5a^2}y^5]_0^a = \frac{1}{2} (2a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{5a^2}a^5) = \frac{11}{15} a^3$  e  $\int_A y dx dy = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{\sqrt{2a^2-y^2}} y dx = \int_0^a y(\sqrt{2a^2-y^2} - \frac{1}{a}y^2) dy = [-\frac{1}{3}(2a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}y^4]_0^a = (-\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3) - 9 - \frac{1}{3}2\sqrt{2}a^3 = \frac{8\sqrt{2}-7}{12} a^2$  da cui, dividendo per l'area, il baricentro risulta il punto  $(\frac{44}{5(3\pi+2)}a, \frac{8\sqrt{2}-7}{3\pi+2}a)$ .

(b) Le funzioni  $x^\alpha$  e  $y^\alpha$  sono positive su  $A' = A \cap \{x \leq a\} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq a, \frac{1}{a}y^2 \leq x \leq a\}$ , dunque per Fubini e Tonelli si possono esaminare integrali iterati. • Posto  $\alpha = -1$ , si ha  $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a \frac{1}{x} dx = \int_0^a (\log a - \log(\frac{1}{a}y^2)) dy = \int_0^a \log(\frac{a}{y^2/a}) dy = 2 \int_0^a (\log a - \log y) dy$ , che converge ( $\log y$  è integrabile in  $y \sim 0$ ). Per il calcolo, si ha  $2[(\log a)y - y(\log y - 1)]_0^a = 2a$ . • D'altra parte si ha  $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a \frac{1}{y} dx = \int_0^a \frac{a - \frac{1}{a}y^2}{y} dy$ , che invece diverge (si noti che  $\frac{a - \frac{1}{a}y^2}{y} \sim_0^* \frac{1}{y}$ ).

(c) Sia ora  $\alpha \neq -1$ . • Si ha  $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^a (a^{\alpha+1} - (\frac{1}{a}y^2)^{\alpha+1}) dy = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^a (a^{\alpha+1} - \frac{1}{a^{\alpha+1}}y^{2(\alpha+1)}) dy$ , che per l'integrabilità in  $y \sim 0$  richiede  $2(\alpha+1) > -1$ , ovvero  $\alpha > -\frac{3}{2}$ . • Si ha  $\int_0^a dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^a y^\alpha dx = \int_0^a (a - \frac{1}{a}y^2)y^\alpha dy$ : notando che la funzione integranda è  $\sim_0^* y^\alpha$ , si ha la condizione  $\alpha > -1$ .

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di  $E$  in due modi. (1. Guldino) Vale  $\text{Vol } E = \frac{\pi}{2} \int_A x dx dz = \frac{\pi}{2} \frac{11}{15} a^3 = \frac{11\pi}{30} a^3$ . (2. Per  $z$ -fette) Fissato  $0 \leq z \leq a$  la  $z$ -fetta è un quarto di corona circolare di raggi  $\frac{1}{a}z^2$  e  $\sqrt{2a^2 - z^2}$  che ha area  $\frac{1}{4}\pi(2a^2 - z^2 - \frac{1}{a^2}z^4)$ , dunque  $\text{Vol } E = \int_0^a \frac{1}{4}\pi(2a^2 - z^2 - \frac{1}{a^2}z^4) dz = \frac{\pi}{4}[2a^2z - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5a^2}z^5]_0^a = \frac{11\pi}{30} a^3$ .

(b) La divergenza del campo  $F = (0, z, 0)$  è nulla, dunque dobbiamo mostrare che il flusso totale di  $F$  uscente da  $A$  è pure nullo. Il campo  $F$  è parallelo all'asse  $y$ , dunque i flussi di  $F$  uscenti da  $A'$  (nel piano  $(y, z)$ ) e dalla base  $B$  (nel piano  $(x, y)$ ) sono nulli. Il flusso uscente da  $A$  è  $\int_A (0, z, 0) \cdot (0, -1, 0) dy dz = -\int_A z dx dz = -\frac{8\sqrt{2}-7}{12} a^3$  (già calcolato nell'Ex. 2 con  $y$  al posto di  $z$ ), quello da  $S$  (componente sferica di  $\partial E$ ) è  $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & -a\sqrt{2} \sin \theta \sin \varphi & a\sqrt{2} \cos \theta \cos \varphi \\ a\sqrt{2} \cos \varphi & a\sqrt{2} \cos \theta \cos \varphi & a\sqrt{2} \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & -a\sqrt{2} \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi = 2\sqrt{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} [\sin^3 \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} a^3$ , e quello da  $T$  (componente paraboloidale, parametrizzata in coordinate cilindriche da  $(\frac{1}{a}z^2 \cos \theta, \frac{1}{a}z^2 \sin \theta, z)$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq z \leq a$ , con normale entrante) è  $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a}z^2 \sin \theta & \frac{2}{a}z \cos \theta \\ z & \frac{1}{a}z^2 \cos \theta & \frac{2}{a}z \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^a z^3 dz = -\frac{1}{4} a^3$ . Il flusso totale di  $F$  uscente da  $E$  è dunque nullo, e ciò verifica il teorema di Gauss.

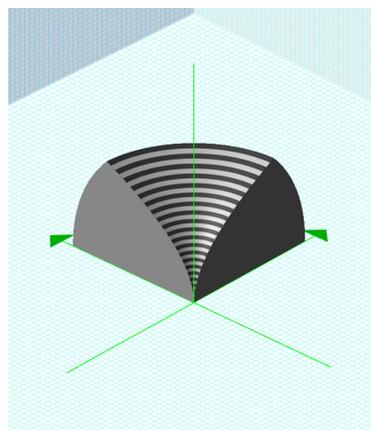
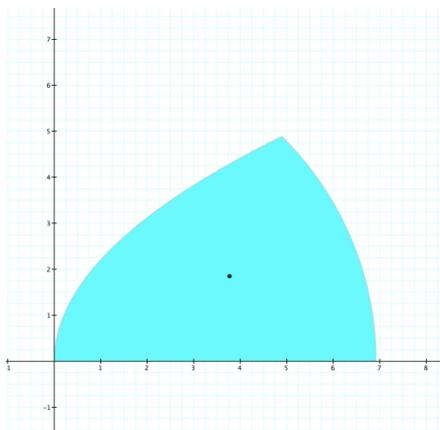
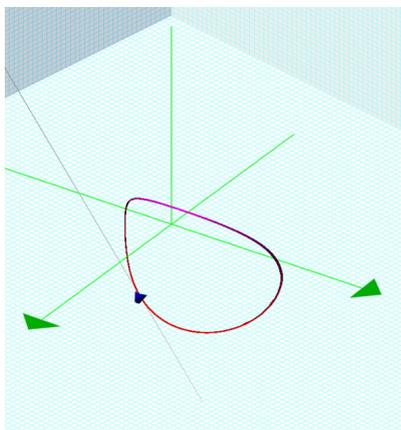
(c) Il flusso di  $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$  attraverso  $A'$  con normale  $(1, 0, 0)$  è  $\int_{A'} (-1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dy dz = -\text{Area } A' = -\frac{3\pi+2}{12} a^2$ .

Calcolando poi la circuitazione antioraria di  $F$  lungo  $\partial A'$  si ha  $0 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (0, a\sqrt{2} \cos \varphi, 0) \cdot (0, a\sqrt{2} \cos \varphi, -a\sqrt{2} \sin \varphi) d\varphi + \int_a^0 (0, z, 0) \cdot (0, \frac{2}{a}z, 1) dz = -2a^2 [\frac{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi}{2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{a} [\frac{1}{3}z^3]_a^0 = -a^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}a^2 = -\frac{3\pi+2}{12}a^2$ , come prima.

4. (a) L'equazione scalare del secondo ordine  $y'' + (y')^2 = y^2$  è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano  $(y, p) = (y, y')$  (il piano delle fasi) dato da  $\begin{cases} y' = p \\ p' = y^2 - p^2 \end{cases}$ . La funzione  $f(y, p) = (p, y^2 - p^2)$  è di classe  $C^\infty$  su tutto il piano delle fasi, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (e con esse anche l'unicità globale), mentre essendoci crescita quadratica (non sublineare) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante  $y \equiv \alpha$  deve soddisfare  $0 = \alpha^2$ , dunque l'unica soluzione costante è  $y \equiv 0$ . Se poi  $\varphi(t)$  è una soluzione su un intervallo  $I$ , posto  $\psi(t) := \varphi(-t)$  per  $t \in -I$  si ha  $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$  e  $\psi''(t) = \varphi''(-t)$ , perciò  $\psi''(t) + (\psi'(t))^2 = \varphi''(-t) + (-\varphi'(-t))^2 = \varphi''(-t) + \varphi'(-t)^2 = \varphi(-t)^2 = \psi(t)^2$ , dunque anche  $\varphi(-t)$  è soluzione su  $-I$ ; un'analoga verifica per  $-\varphi(-t)$  invece non funziona. Ciò implica che le soluzioni definite in  $t = 0$  sono pari? No, perché se  $\varphi(t)$  è una tale soluzione, posto  $\psi(t) = \varphi(-t)$  abbiamo che  $\varphi(0) = \psi(0)$  ma ciò non implica che sia  $\varphi = \psi$  (ovvero che  $\varphi$  sia pari) perché siamo in un caso del secondo ordine, e per fornire un dato iniziale in  $t = 0$  non basta fornire il valore della funzione ma serve anche quello della derivata. Ad esempio la soluzione del punto (b) è definita all'intorno di  $t = 0$  (in realtà il suo dominio sarà  $\mathbb{R}$ ) ma non è pari (come si nota da  $y'(0) \neq 0$ ).

(b) L'equazione totale associata al sistema del primo ordine è  $\omega = (y^2 - p^2) dy - p dp = 0$ . La forma  $\omega$  non è esatta (infatti  $\frac{\partial(y^2 - p^2)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y} = -2p \neq 0$ ), ma poiché  $\frac{1}{p} (\frac{\partial(y^2 - p^2)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}) = 2$  non dipende da  $p$  si ha che  $e^{2y}$  è un fattore integrante per  $\omega$ . In effetti, se  $F(y, p)$  deve soddisfare  $\frac{\partial F}{\partial y} = (y^2 - p^2)e^{2y}$  e  $\frac{\partial F}{\partial p} = -pe^{2y}$ , dalla seconda abbiamo che  $F = -\frac{1}{2}p^2 e^{2y} + \phi(y)$  per una certa funzione  $\phi$ , così dalla prima si ricava  $\frac{\partial F}{\partial y} = -p^2 e^{2y} + \phi'(y) = (y^2 - p^2)e^{2y}$ , ovvero  $\phi'(y) = y^2 e^{2y}$ : integrando per parti si trova  $\phi(y) = \frac{1}{4}(2y^2 - 2y + 1)e^{2y}$ , da cui  $F(y, p) = \frac{1}{4}(2y^2 - 2y + 1 - 2p^2)e^{2y}$ . Le curve integrali nel piano delle fasi sono date perciò dalle curve di livello di  $F$ , ovvero  $(2y^2 - 2y + 1 - 2p^2)e^{2y} = k$  con  $k \in \mathbb{R}$ . • Imponendo la condizione iniziale  $(y(0), p(0)) = (1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  si ottiene  $k = 0$ , ovvero l'equazione del primo ordine  $(y')^2 = y^2 - y + \frac{1}{2}$ , che ricordando che  $y'(0) < 0$  dà  $y' = -\sqrt{y^2 - y + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{(2y-1)^2 + 1}$ . Posto  $u = 2y - 1$  (dunque  $u(0) = 2y(0) - 1 = 1$ ) si ricava  $u' = -\sqrt{u^2 + 1}$ ; separando le variabili e integrando si ha  $\text{seth} u = \log(\sqrt{u^2 + 1} + u) = k - t$  con  $k = \log(\sqrt{2} + 1)$ , da cui  $\sqrt{u^2 + 1} + u = (\sqrt{2} + 1)e^{-t}$ . Si ha allora  $\sqrt{u^2 + 1} = (\sqrt{2} + 1)e^{-t} - u$ , che con la condizione necessaria  $u(t) \leq (\sqrt{2} + 1)e^{-t}$  equivale a  $u^2 + 1 = ((\sqrt{2} + 1)e^{-t} - u)^2$ , ovvero  $u(t) = \frac{(\sqrt{2} + 1)e^{-t} - (\sqrt{2} - 1)e^t}{2}$ , e infine  $y(t) = \frac{(\sqrt{2} + 1)e^{-t} - (\sqrt{2} - 1)e^t}{4} + \frac{1}{2}$ , soluzione che ha senso su tutto  $\mathbb{R}$ .

5. L'equazione  $y''' - 2y' + 4y = \frac{1}{\cos t}$  è lineare a coefficienti costanti, dunque possiamo affermare già ora che il dominio delle sue soluzioni reali con  $y(0) = 0$  sarà lo stesso del termine non omogeneo  $\frac{1}{\cos t}$ , ovvero  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . L'equazione caratteristica  $\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0$  ha soluzioni  $-2$  e  $1 \pm i$ , dunque una base reale di soluzioni per l'equazione omogenea associata sarà dato da  $y_1(t) = e^{-2t}$ ,  $y_2(t) = e^t \cos t$  e  $y_3(t) = e^t \sin t$ . La matrice wroskiana  $W(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t \cos t & e^t \sin t \\ -2e^{-2t} & e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) \\ 4e^{-2t} & -2e^t \sin t & 2e^t \cos t \end{pmatrix}$  ha determinante 10; per il metodo di variazione delle costanti una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma  $\tilde{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t)$  ove  $c_1'(t) = \frac{e^{2t}}{10 \cos t}$ ,  $c_2'(t) = -\frac{(\cos t + 3 \sin t)e^{-t}}{10 \cos t}$  e  $c_3'(t) = \frac{(3 \cos t - \sin t)e^{-t}}{10 \cos t}$ . Denotate con  $\tilde{c}_j(t)$  le primitive con  $\tilde{c}_j(0) = 0$  per  $j = 1, 2, 3$  (ovvero  $\tilde{c}_j(t) = \int_0^t c_j'(\tau) d\tau$ ), le soluzioni reali dell'equazione saranno tutte e sole  $y(t) = (A + \tilde{c}_1(t))e^{-2t} + e^t((B + \tilde{c}_2(t)) \cos t + (C + \tilde{c}_3(t)) \sin t)$  al variare di  $A, B, C \in \mathbb{R}$ ; in particolare, essendo  $y(0) = A + B$ , le soluzioni tali che  $y(0) = 0$  saranno tutte e sole  $y(t) = (A + \tilde{c}_1(t))e^{-2t} + e^t((\tilde{c}_2(t) - A) \cos t + (B + \tilde{c}_3(t)) \sin t)$  al variare di  $A, B \in \mathbb{R}$ .



1. Ex. 1.   2 Ex. 2.   3 Ex. 3.

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

## Esame Scritto (29/06/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
IN STAMPATELLO FIS / AST

- Nello spazio cartesiano siano  $g(x, y, z) = x^3 - xz^2 + y^2$  e  $P(-1, 0, 0)$ .
  - Determinare i punti critici di  $g$  e la loro natura.
  - Si provi che la superficie di livello  $S$  di  $g$  contenente  $P$  è ovunque regolare, la si parametrizzi in  $P$  fino all'ordine quadratico e si determini in due modi il piano tangente affine a  $S$  in  $P$ .
  - Determinare gli estremi assoluti di  $g$  su  $K = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$  (perché esistono?)
- Sia  $A$  la figura piana racchiusa nel I quadrante dalla curva polare  $\rho = a(1 + \cos^2 \theta)$  (ove  $a > 0$ ).
  - Disegnare  $A$ , calcolarne l'area e il momento d'inerzia rispetto all'asse  $y$ .<sup>(1)</sup>
  - Calcolare (se finiti) gli integrali  $\int_A \frac{1}{x} dx dy$  e  $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ .
- Nello spazio cartesiano si consideri il solido  $E = \{(x, y, z) : x^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + 2y^2)\}$ .
  - Si disegni  $E$  e se ne calcoli volume e baricentro.
  - Verificare il teorema di Gauss per  $E'$  (porzione di  $E$  nel I ottante) e per il campo  $F = (0, y, 1)$ .
  - Verificare la formula di Kelvin-Stokes per  $F$  e la componente di  $\partial E'$  tale che  $z = x^2$ .
- Si abbia l'equazione differenziale totale  $(2y - x^2 + 1) dx + x dy = 0$ .
  - Determinare gli equilibri e le curve integrali dell'equazione.
  - Esibire a scelta un sistema piano autonomo all'intorno di  $(x(0), y(0)) = (-1, 0)$  associato all'equazione totale, e risolvere per esso il problema di Cauchy con questo dato iniziale.
- Determinare le curve parametriche  $(x(t), y(t), z(t))$  dello spazio cartesiano tali che  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (x + 3y + 4z, y + z - 4, 2x - y + z)$ .

---

<sup>(1)</sup>La densità di massa sia la costante  $\mu$  (in kg/m<sup>2</sup>). Può servire la formula  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$  (per  $n \geq 1$ ), ove  $m!!$  è il *semifattoriale*, cioè il prodotto dei soli fattori della stessa parità di  $m$ : es.  $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ ;  $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ .

**Analisi Matematica III – Esame Scritto (29/06/2020) – Soluzioni.**

1. (a) Data  $g(x, y, z) = x^3 - xz^2 + y^2$ , annullando il gradiente  $\nabla g = (3x^2 - z^2, 2y, -2xz)$  si ottiene solo il punto  $O(0, 0, 0)$ . L'Hessiano di  $g$  in  $O$  è semidefinito positivo e dunque non permette di concludere subito circa la natura di  $O$ , ma basta osservare che  $g(O) = 0$  e che la restrizione di  $g$  all'asse  $x$  è  $g(x, 0, 0) = x^3$  (assume valori  $\geq 0$  in ogni intorno di  $x = 0$ ) per concludere che  $O$  è un punto di sella.

(b) La superficie di livello  $S$  di  $g$  contenente  $P(-1, 0, 0)$  è data dall'equazione  $g(x, y, z) = g(P) = -1$ , ed è ovunque regolare perché non contiene l'unico punto critico  $O$ . Poiché  $\nabla g(P) = (3, 0, 0)$ , per Dini da  $g(x, y, z) = -1$  si può esplicitare localmente solo  $x(y, z)$  con  $x(0, 0) = -1$  e  $\dot{x}_y(0, 0) = \dot{x}_z(0, 0) = 0$ . Alternativamente derivando  $g(x, y, z) = -1$  rispetto  $y$  e  $z$  si ottiene  $3x^2\dot{x}_y - \dot{x}_yz^2 + 2y = 0$  e  $3x^2\dot{x}_z - \dot{x}_z z^2 - 2xz = 0$ , e derivando di nuovo rispetto  $y$  e  $z$  si ha  $6x(\dot{x}_y)^2 + 3x^2\ddot{x}_{yy} - \ddot{x}_{yy}z^2 + 2 = 0$ ,  $6x\dot{x}_y\dot{x}_z + 3x^2\ddot{x}_{yz} - \ddot{x}_{yz}z^2 - 2\dot{x}_yz = 0$  e  $6x(\dot{x}_z)^2 + 3x^2\ddot{x}_{zz} - \ddot{x}_{zz}z^2 - 2\dot{x}_zz - 2\dot{x}_zz - 2x = 0$ : calcolando ora in  $(y, z) = (0, 0)$  si ha nuovamente  $\dot{x}_y(0, 0) = \dot{x}_z(0, 0) = 0$ , e poi  $\ddot{x}_{yy}(0, 0) = \ddot{x}_{zz}(0, 0) = -\frac{2}{3}$  e  $\ddot{x}_{yz}(0, 0) = 0$ . La richiesta parametrizzazione di  $S$  in  $P$  fino all'ordine quadratico è dunque  $x = -1 - \frac{1}{3}(y^2 + z^2) + \dots$ , che troncata all'ordine lineare dà il piano tangente affine  $x = -1$ ; lo stesso piano si trova con  $\nabla g(P) \cdot (x + 1, y, z) = 0$ .

(c) L'insieme  $K = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$  (circonferenza di raggio 1 nel piano orizzontale centrata nell'origine) è compatta, dunque gli estremi assoluti di  $g$  su  $K$  esistono per Weierstrass. Per calcolarli basta trovare i punti stazionari di  $g$  su  $K$ , che (usando Lagrange oppure la parametrizzazione globale  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ) risultano  $A(1, 0, 0)$ , il già noto  $P(-1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, -1, 0)$ ,  $D(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, 0)$  e  $E(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}, 0)$ , e confrontare i valori di  $g$  su essi: essendo  $g(A) = g(B) = g(C) = 1$ ,  $g(P) = -1$  e  $g(D) = g(E) = \frac{23}{27}$ , il massimo assoluto è 1 (assunto in  $A, B$  e  $C$ ) e il minimo  $-1$  (assunto in  $P$ ).

2. (a) (Figura 1) L'area di  $A$  è data dalla nota formula  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 \theta)^2 d\theta$ , mentre il momento d'inerzia rispetto all'asse  $y$  è dato da  $\int_A \mu x^2 dx dy = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1+\cos^2 \theta)} \rho^2 \cos^2 \theta \rho d\rho = \frac{1}{4} \mu a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)^4 d\theta$ . Usando la citata formula  $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots \cdot 1}{2n(2n-2)\dots \cdot 2} \frac{\pi}{2}$  (dunque  $I_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $I_2 = \frac{3\pi}{16}$ ,  $I_3 = \frac{5\pi}{32}$ ,  $I_4 = \frac{35\pi}{256}$  e  $I_5 = \frac{63\pi}{512}$ ), oltre a  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ , l'area vale  $\frac{1}{2} a^2 (I_0 + 2I_1 + I_2) = \frac{19\pi}{32} a^2$  e il momento d'inerzia  $\frac{1}{4} \mu a^4 (I_1 + 4I_2 + 6I_3 + 4I_4 + I_5) = \frac{1335\pi}{2048} \mu a^4$ .

(b) Poiché le funzioni integrande  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  sono  $> 0$  su  $A$ , per Fubini e Tonelli possiamo calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede. • Per  $\int_A \frac{1}{x} dx dy$  abbiamo  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1+\cos^2 \theta)} \frac{1}{\rho \cos \theta} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a(1+\cos^2 \theta)}{\cos \theta} d\theta$ , che però diverge in  $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$  (infatti  $\cos \theta$  è ivi uno zero del primo ordine). • Per  $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$  abbiamo  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(1+\cos^2 \theta)} \frac{1}{\rho} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(1 + \cos^2 \theta) d\theta$ , che converge con valore  $a(I_0 + I_1) = \frac{3\pi}{4} a$ .

3. (a) (Figura 2) La proiezione orizzontale dell'intersezione delle due superfici (sopra un paraboloido ellittico, e sotto un tubo a sezione parabolica) è data dall'uguaglianza  $x^2 = 2 - (x^2 + 2y^2)$  (la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ ), dunque la proiezione orizzontale di  $E$  è il disco  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . • Il volume di  $E$  conviene ovviamente calcolarlo per  $(x, y)$ -fili, ottenendo  $\int_D dx dy \int_{x^2}^{2-(x^2+2y^2)} dz = 2 \int_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho = 4\pi [\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4]_0^1 = \pi$ . • Per evidenti ragioni di simmetria materiale si ha  $x_G = y_G = 0$ , mentre  $z_G = \frac{1}{\sqrt{01 \cdot E}} \int_E z dx dy dz = \frac{1}{\pi} \int_D dx dy \int_{x^2}^{2-(x^2+2y^2)} z dz = \frac{1}{2\pi} \int_D ((2 - x^2 - 2y^2)^2 - (x^2)^2) dx dy = \frac{2}{\pi} \int_D ((1 - y^2)(1 - x^2 - y^2)) dx dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^2 \sin^2 \theta)(1 - \rho^2) \rho d\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - (1 + \sin^2 \theta)\rho^2 + \rho^4 \sin^2 \theta) \rho d\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}(1 + \sin^2 \theta)\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6 \sin^2 \theta]_{\rho=0}^1 d\theta = \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} (3 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{6\pi} [3\theta - \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta \cos \theta)]_0^{2\pi} = \frac{5}{6}$ .

(b) La divergenza del campo  $F = (0, y, 1)$  vale 1, dunque per verificare Gauss dobbiamo mostrare che il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial E'$  è pari al volume di  $E'$ , ovvero  $\frac{\pi}{4}$ . Il campo  $F$  è parallelo al piano  $(y, z)$ , e nel piano  $(x, z)$  il campo  $F$  è parallelo all'asse  $z$ : ne segue che i flussi di  $F$  attraverso le facce piane di  $\partial E'$  sono nulli. La porzione di faccia curva  $S$  su  $z = 2 - (x^2 + 2y^2)$  (paraboloido ellittico) è parametrizzata come grafico da  $(x, y, 2 - (x^2 + 2y^2))$  con  $(x, y) \in D'$ , ove  $D'$  è il quarto di disco nel primo quadrante del piano orizzontale (normale associata uscente), dunque il flusso uscente risulta  $+\int_{D'} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ 1 & -2x & -4y \end{pmatrix} dx dy = \int_{D'} (4y^2 + 1) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (4\rho^2 \sin^2 \theta + 1) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho^4 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}\rho^2]_{\rho=0}^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} [\theta + \theta - \sin \theta \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ . Anche la porzione di tubo  $T$  su  $z = x^2$  la parametrizziamo come grafico da  $(x, y, x^2)$  con  $(x, y) \in D'$  (normale associata entrante), dunque il flusso uscente risulta  $-\int_{D'} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ 1 & 2x & 0 \end{pmatrix} = -\int_{D'} dx dy = -\text{Area } D' = -\frac{\pi}{4}$ . Il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial E'$  è pertanto  $0 + 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ , come si voleva.

(c) Il rotore di  $F$  è nullo, perciò per verificare Kelvin-Stokes va mostrato che anche la circuitazione di  $F$  lungo  $\partial T$  è nulla. Il bordo  $\partial T$  è costituito da un arco di parabola  $(x, 0, x^2)$  con  $0 \leq x \leq 1$ , un arco di curva intersezione tra le due superfici  $(\cos \theta, \sin \theta, \cos^2 \theta)$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e un segmento  $(0, y, 0)$  sull'asse  $y$  con  $0 \leq y \leq 1$ . Partendo da  $O(0, 0, 0)$  e percorrendo prima l'arco di parabola si ha in effetti  $\oint F \cdot d\ell = \int_0^1 (0, 0, 1) \cdot (1, 0, 2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \sin \theta, 1) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, -2\sin \theta \cos \theta) d\theta + \int_1^0 (0, y, 1) \cdot (0, 1, 0) dy = \int_0^1 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta - \int_0^1 y dy = [x^2]_0^1 - [-\frac{1}{4} \cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{1}{2}y^2]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ , come si voleva.

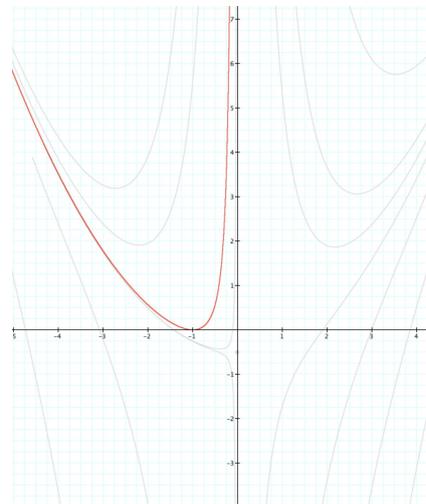
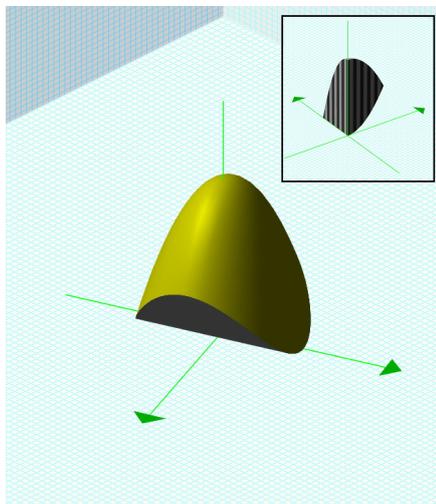
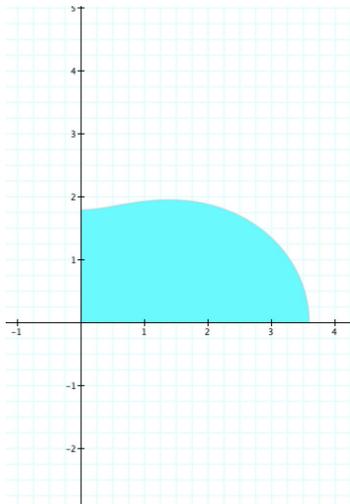
4. (a) (Figura 3) La forma  $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$  con  $p(x, y) = 2y - x^2 + 1$  e  $q(x, y) = x$  ha un solo equilibrio nel punto  $(0, -\frac{1}{2})$ . Essa non è esatta perché  $\frac{\partial p}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial q}{\partial x} = 1$ ; tuttavia, notato che  $x = 0$  è curva integrale, poiché  $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = \frac{1}{x}$  non dipende da  $y$  sappiamo che  $\exp(\int \frac{1}{x} dy) = |x|$  è un fattore integrante, ovvero  $x\omega$  è esatta. In effetti, detta  $F(x, y)$  una sua primitiva, deve essere  $\frac{\partial F}{\partial x} = x(2y - x^2 + 1)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2$ : dalla seconda ricaviamo  $F(x, y) = x^2 y + \psi(x)$ , e dalla prima  $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + \psi'(x) = x(2y - x^2 + 1)$ , ovvero  $\psi'(x) = x - x^3$  che dà  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$ . Le curve integrali dell'equazione sono dunque le curve di livello di  $F(x, y) = x^2 y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$ , ovvero  $x^2(4y + 2 - x^2) = k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ . • (Alternativamente, notati l'equilibrio e la curva integrale  $x = 0$ , l'equazione totale data equivale all'equazione lineare del primo ordine  $y' + \frac{2}{x}y = x - \frac{1}{x}$ , che risolta coi metodi già noti dà luogo alle stesse curve integrali.)

(b) Il punto  $(x(0), y(0)) = (-1, 0)$  appartiene alla curva integrale con  $k = 1$ , ovvero  $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) = (\frac{x^2-1}{2x})^2$ . Ricordiamo poi che due sistemi piani autonomi  $\begin{cases} \dot{x} = a'(x, y) \\ \dot{y} = b'(x, y) \end{cases}$  e  $\begin{cases} \dot{x} = a''(x, y) \\ \dot{y} = b''(x, y) \end{cases}$  sono equivalenti all'intorno di un punto se vale  $(a'', b'') = (\rho a', \rho b')$  ove  $\rho(x, y)$  è una funzione continua mai nulla in un intorno del punto stesso. Ad esempio, il sistema naturalmente associato all'equazione totale data è  $\begin{cases} \dot{x} = -q(x, y) = -x \\ \dot{y} = p(x, y) = 2y - x^2 + 1 \end{cases}$ : la prima dà subito  $x(t) = h e^{-t}$ , da cui tenuto presente che  $x(0) = -1$  si ottiene  $x(t) = -e^{-t}$ , che messo in  $y = (\frac{x^2-1}{2x})^2$  dà  $y(t) = (\frac{e^{-2t}-1}{-2e^{-t}})^2 = (\frac{e^t - e^{-t}}{2})^2 = \sinh^2 t$ . La soluzione del problema di Cauchy per questo sistema è dunque  $(x(t), y(t)) = (-e^{-t}, \sinh^2 t)$ .

5. Il problema dato equivale a trovare la soluzione del sistema lineare a coefficienti costanti  $\dot{X} = AX + b(t)$  con  $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La matrice dei coefficienti  $A$  ha autovalori  $0, -1$  e  $4$  con autovettori rispettivamente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dunque una risolvante del sistema è  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5e^{-t} & 5e^{4t} \\ 1 & 2e^{-t} & e^{4t} \\ -1 & -4e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}$ .

Una soluzione particolare del sistema completo risulta essere  $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -7t + 5 \\ -7t \\ 7t - 3 \end{pmatrix}$ , come si trova cercandone una di tipo polinomiale di primo grado (notare che  $0$  è radice caratteristica semplice) oppure col metodo di variazione delle costanti. Pertanto le curve parametriche dello spazio cartesiano cercate sono tutte e sole quelle del tipo  $X(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + \tilde{X}(t)$

al variare di  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , ovvero  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + 5 - 7t + 5Be^{-t} + 5Ce^{4t} \\ A - 7t + 2Be^{-t} + Ce^{4t} \\ -A - 3 + 7t - 4Be^{-t} + 3Ce^{4t} \end{pmatrix}$ .



1. Ex. 2.    2 Ex. 3.    3 Ex. 4.

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (24/08/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
IN STAMPATELLO FIS / AST

- Nel piano cartesiano sia  $g(x, y) = x^3 - y^2 + 3xy$ .
  - Determinare i punti critici di  $g$  e la loro natura; dire quali insiemi di livello sono curve regolari.
  - Detta  $S$  la curva di livello di  $g$  contenente il punto  $P(-2, -3)$ , la si parametrizzi all'intorno di  $P$  fino all'ordine quadratico e si determini in due modi la retta tangente affine a  $S$  in  $P$ .
  - Calcolare gli estremi assoluti di  $g$  su  $K = \{(x, y) : x \geq -2, x - 4 \leq y \leq 0\}$  (perché esistono?)
- Nel piano cartesiano siano  $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \min(x, \frac{a^3}{x^2})\}$  e  $A' = A \cap \{x \leq 2a\}$  (ove  $a > 0$ ).
  - Determinare area e baricentro geometrico di  $A'$ .
  - Calcolare, se finiti, gli integrali su  $A$  di  $x^\alpha$  e  $y^\alpha$  per  $\alpha = \pm 1$ . (Facoltativo: discutere per  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
- Nello spazio cartesiano si disegni la figura  $A'$  dell'Ex. 2 nel piano orizzontale  $(x, y)$ , e sia  $E$  il solido che si ottiene ruotando  $A'$  di un quarto di giro attorno all'asse  $x$  nel primo ottante.
  - Calcolare il volume di  $E$  in due modi, con Guldino e per  $x$ -fette.
  - Verificare il teorema di Gauss per  $E$  e per il campo  $F = (y, 0, 0)$ .
  - Verificare la formula di Kelvin-Stokes per  $F$  e la componente conica di  $\partial E$ .
- Si abbia l'equazione differenziale  $(t - 3y^2)y' + y = 0$  nella funzione incognita scalare  $y(t)$ .
  - Analizzare a priori esistenza-unicità, crescita, convessità, simmetrie e costanza delle soluzioni.
  - Trovare le soluzioni dell'equazione, in particolare quelle con  $y(1) = -1, y(1) = 0, y(0) = 1$ .
- Determinare tutte le curve complesse regolari  $y(t)$  tali che  $y''' + iy' - (1 + i)y = 2(1 - i \sin t)$ .
  - Descrivere il sistema lineare del I ordine associato all'equazione, ed esibirne una risolvibile.

**Analisi Matematica III – Esame Scritto (24/08/2020) – Soluzioni.**

1. (a) (Figura 1) Data  $g(x, y) = x^3 - y^2 + 3xy$ , il gradiente  $\nabla g = (3(x^2 + y), -2y + 3x)$  si annulla in  $O(0, 0)$  (con  $g(O) = 0$ ) e in  $Q(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$  (con  $g(Q) = \frac{27}{16}$ ); l'hessiano di  $g$  risulta  $H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ , ed essendo  $H_g(O) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  (indefinita) e  $H_g(Q) = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  (definita negativa) si ha che  $O$  è una sella e  $Q$  un punto di massimo locale stretto. Si può inoltre affermare che tutti gli insiemi di livello  $S_\alpha = \{(x, y) : g(x, y) = \alpha\}$  sono curve regolari tranne  $S_0$  (in  $O$ ) e  $S_{\frac{27}{16}}$  (in  $Q$ ).

(b) Il punto  $P(-2, -3)$  sta in  $S_1$ , curva regolare. Da  $\nabla g(P) = (3, 0)$  si può esplicitare  $x(y)$  con  $x(-3) = -2$  e  $x'(-3) = 0$ . Derivando l'identità  $g(x(y), y) \equiv 1$  si ha  $3x^2 x' - 2y + 3x' y + 3x = 0$  (da cui per  $y = -3$  si ha  $12x' + 6 - 6x' - 6 = 0$  ovvero  $x'(-3) = 0$ ), e derivando ancora si ha  $6x(x')^2 + 3x^2 x'' - 2 + 3x'' y + 3x' + 3x' = 0$  (da cui per  $y = -3$  si ha  $12x'' - 2 - 9x'' = 0$  ovvero  $x''(-3) = \frac{2}{3}$ ). La richiesta parametrizzazione di  $S$  in  $P$  è dunque  $x = -2 + \frac{1}{3}(y+3)^2 + o_{-3}((y+3)^2)$ , che troncata all'ordine lineare dà la retta tangente affine  $x = -2$ ; la stessa retta si trova con  $\nabla g(P) \cdot (x+2, y+3) = 0$ .

(c) L'insieme  $K = \{(x, y) : x \geq -2, x - 4 \leq y \leq 0\}$  (triangolo di vertici  $A(-2, 0)$ ,  $B(4, 0)$  e  $C(-2, -6)$ , bordo compreso) è compatto perché chiuso e limitato, dunque gli estremi assoluti di  $g$  su  $K$  esistono per Weierstrass. Per calcolarli basta trovare i punti stazionari di  $g$  sulle componenti-varietà di  $K$ , confrontandovi poi i valori assunti da  $g$ . Tra i punti interni di  $K$  l'unico stazionario è  $Q(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ . Sul lato  $y = 0$  con  $-2 < x < 4$  si ha  $g(x, 0) = x^3$  con  $\frac{d}{dx}g(x, 0) = 3x^2 = 0$  per  $x = 0$ , dando il punto  $O(0, 0)$ . Sul lato  $x = -2$  con  $-6 < y < 0$  si ha  $g(-2, y) = -8 - y^2 - 6y$  con  $\frac{d}{dy}g(0, y) = -2y - 6 = 0$  per  $y = -3$ , dando il già noto punto  $P(-2, -3)$ . Sul lato  $y = x - 4$  con  $-2 < x < 4$  si ha  $g(x, x - 4) = x^3 + 2x^2 - 4x - 16$  con  $\frac{d}{dx}g(x, x - 4) = 3x^2 + 4x - 4 = 0$  per  $x = \frac{2}{3}$ , dando il punto  $T(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$ . Infine, vanno tenuti presente anche i vertici  $A(-2, 0)$ ,  $B(4, 0)$  e  $C(-2, -6)$ . Essendo  $g(Q) = \frac{27}{16}$ ,  $g(O) = 0$ ,  $g(P) = 1$ ,  $g(T) = -\frac{472}{27}$ ,  $g(A) = g(C) = -8$  e  $g(B) = 64$ , è chiaro che il massimo assoluto di  $g$  su  $K$  è 64 (assunto in  $B$ ) e il minimo  $-\frac{472}{27} \sim -17,5$  (assunto in  $T$ ).

2. (a) (Figura 2) L'area di  $A' = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \min(x, \frac{x^3}{2}), x \leq 2a\}$  è data da  $\int_0^a x dx + \int_a^{2a} \frac{x^3}{2} dx = [\frac{1}{2}x^2]_0^a + [-\frac{x^3}{6}]_a^{2a} = a^2$ . Si ha poi  $\int_{A'} x dx dy = \int_0^a dx \int_0^x x dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\frac{x^3}{2}} x dy = \int_0^a x^2 dx + \int_a^{2a} \frac{x^3}{x} dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^a + [a^3 \log x]_a^{2a} = (\frac{1}{3} + \log 2)a^3$  e  $\int_{A'} y dx dy = \int_0^a dx \int_0^x y dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\frac{x^3}{2}} y dy = \frac{1}{2}(\int_0^a x^2 dx + \int_a^{2a} \frac{a^6}{x^4} dx) = \frac{1}{2}([\frac{1}{3}x^3]_0^a + [-\frac{a^6}{3x^3}]_a^{2a}) = \frac{5}{16}a^3$ , da cui il baricentro geometrico di  $A'$  risulta  $(\frac{1}{3} + \log 2)a, \frac{5}{16}a$ .

(b) Esaminiamo da subito il caso generale, specificando poi i casi  $\alpha = \pm 1$ . • Poiché le funzioni integrande  $x^\alpha$  e  $y^\alpha$  sono  $> 0$  su  $A$ , per Fubini e Tonelli possiamo calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede. Inoltre l'integrale su  $A$  esisterà finito se e solo se esisteranno finiti entrambi gli integrali sul triangolo  $A_1 = A \cap \{x \leq a\}$  e sul sottografico  $A_2 = A \cap \{x \geq a\}$ , e in tal caso sarà la loro somma. • Si ha  $\int_{A_1} x^\alpha dx dy = \int_0^a x^{\alpha+1} dx$ , che converge in  $0^+$  per  $\alpha + 1 > -1$  ovvero  $\alpha > -2$ ; e  $\int_{A_2} x^\alpha dx dy = \int_a^{+\infty} x^\alpha \frac{x^3}{2} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{2} x^{\alpha+3} dx$ , che converge in  $+\infty$  per  $\alpha - 2 < -1$  ovvero  $\alpha < 1$ . Pertanto  $x^\alpha$  è integrabile su  $A$  se e solo se  $-2 < \alpha < 1$ : ne consegue che  $\int_A x dx dy$  diverge a  $+\infty$ , mentre  $\int_A \frac{1}{x} dx dy = \int_0^a dx + \int_a^{+\infty} a^3 x^{-3} dx = a + [-\frac{a^3}{2x^2}]_a^{+\infty} = \frac{3}{2}a$ . • Si ha  $\int_{A_1} y^\alpha dx dy = \int_0^a dx \int_0^x y^\alpha dy$ , che nell'ipotesi  $\alpha > -1$  dà  $\frac{1}{\alpha+1} \int_0^a x^{\alpha+1} dx$ , che converge per  $\alpha + 1 > -1$  ovvero  $\alpha > -2$  (soddisfatta se  $\alpha > -1$ ). Si ha poi  $\int_{A_2} y^\alpha dx dy = \int_a^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x^3}{2}} y^\alpha dy$ , che sempre nell'ipotesi  $\alpha > -1$  dà  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\alpha+1} (\frac{x^3}{2})^{\alpha+1} dx = \frac{a^{3(\alpha+1)}}{\alpha+1} \int_a^{+\infty} x^{-2(\alpha+1)} dx$ , che converge in  $+\infty$  per  $-2(\alpha+1) < -1$  ovvero  $\alpha > -\frac{1}{2}$ . Pertanto  $y^\alpha$  è integrabile su  $A$  se e solo se  $\alpha > -\frac{1}{2}$ : ne consegue che  $\int_A \frac{1}{y} dx dy$  diverge a  $+\infty$ , mentre  $\int_A y dx dy = \frac{1}{2} \int_0^a x^2 dx + \frac{1}{2} a^6 \int_a^{+\infty} x^{-4} dx = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^6 [-\frac{1}{3x^3}]_a^{+\infty} = \frac{1}{3}a^3$ .

3. (a) (Figura 2) Il volume di  $E$  con Guldino risulta  $\frac{\pi}{2} \int_{A'} y dx dy = \frac{5\pi}{32} a^3$ . Alternativamente, la  $x$ -fetta di  $E$  è un quarto di cerchio di raggio  $x$  (per  $0 \leq x \leq a$ ) oppure  $\frac{a^3}{x^2}$  (per  $a \leq x \leq 2a$ ), dunque il volume risulta  $\int_0^a \frac{1}{4} \pi x^2 dx + \int_a^{2a} \frac{1}{4} \pi (\frac{a^3}{x^2})^2 dx = \frac{\pi}{4}([\frac{1}{3}x^3]_0^a + [-\frac{a^3}{3x^3}]_a^{2a}) = \frac{\pi}{12}a^3(1 - \frac{1}{8} + 1) = \frac{5\pi}{32}a^3$ , concordemente a prima.

(b) La superficie esterna  $\partial E$  è costituita dalle porzioni piane  $A'$  sul piano  $(x, y)$ ,  $A''$  sul piano  $(x, z)$  (l'analogo di  $A'$ ) e  $B$  il piccolo quarto di disco nel piano  $x = 2a$ ; dalla superficie conica  $C$  data dalla rotazione del segmento  $(x, x, 0)$  con  $0 \leq x \leq a$ ; e dalla superficie curva  $D$  data dalla rotazione del grafico  $(x, \frac{a^3}{x^2}, 0)$  con  $a \leq x \leq 2a$ . Poiché il campo  $F = (y, 0, 0)$  ha divergenza nulla, per verificare Gauss si tratta dunque di mostrare che il flusso totale di  $F$  uscente da  $E$  è pure nullo. Ora, essendo  $F$  parallelo all'asse  $x$ , i suoi flussi attraverso  $A'$  e  $A''$  saranno nulli; inoltre, detta  $B'$  la proiezione di  $B$  sul piano  $(y, z)$  (dunque  $B'$  è un quarto di cerchio di raggio  $\frac{1}{4}a$ ), dette  $(r, \psi)$  le coordinate polari nel piano  $(y, z)$  vale per definizione  $\Phi_B(F) = \int_{B'} (y, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dy dz = \int_{B'} y dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{1}{4}a} r \cos \psi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^{\frac{1}{4}a} r^2 dr = \frac{1}{192}a^3$ . Per  $C$ , parametrizzata da  $(x, \psi)$  tramite  $(x, x \cos \psi, x \sin \psi)$  con  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  (normale associata entrante) si ha  $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a \det \begin{pmatrix} x \cos \psi & 1 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -x \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & x \cos \psi \end{pmatrix} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^a x^2 dx = -\frac{1}{3}a^3$ . Infine per  $D$ , parametrizzata da  $(x, \psi)$  tramite  $(x, \frac{a^3}{x^2} \cos \psi, \frac{a^3}{x^2} \sin \psi)$  con  $a \leq x \leq 2a$  e  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  (normale associata entrante) si ha  $\Phi_D(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^{2a} \det \begin{pmatrix} \frac{a^3}{x^2} \cos \psi & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2a^3}{x^3} \cos \psi & -\frac{a^3}{x^2} \sin \psi \\ 0 & -\frac{2a^3}{x^3} \sin \psi & \frac{a^3}{x^2} \cos \psi \end{pmatrix} dx = 2a^9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_a^{2a} x^{-7} dx = -\frac{1}{3}a^9 [x^{-6}]_a^{2a} = \frac{21}{64}a^3$ .

Il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial E$  è dunque  $0 + 0 + \frac{1}{192}a^3 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{21}{64}a^3 = 0$ , come richiesto da Gauss.

(c) Il flusso del rotore  $\nabla \times F = (0, 0, -1)$  attraverso  $C$  è  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -x \sin \psi \\ -1 & \sin \psi & x \cos \psi \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi \int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2$ . Per verificare Kelvin-Stokes va dunque mostrato che questo è anche il valore della circuitazione di  $F$  lungo  $\partial C$ , percorso in senso orario. Partendo per comodità dall'origine  $(0, 0, 0)$ , il segmento nel piano orizzontale è parametrizzato da  $(x, x, 0)$  con  $0 \leq x \leq a$  (verso concorde), l'arco di circonferenza da  $(a, a \cos \psi, a \sin \psi)$  con  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  (ma lì il campo  $F$  è ortogonale) e il segmento nel piano  $(x, z)$  da  $(x, 0, x)$  (ma lì il campo  $F$  è nullo): si ha pertanto  $\oint_{\partial C} F \cdot dl = \int_0^a (x, 0, 0) \cdot (1, 1, 0) dx + 0 + 0 = \int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2$ , come richiesto da Kelvin-Stokes.

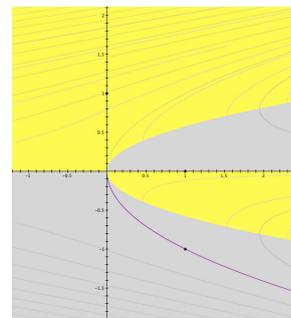
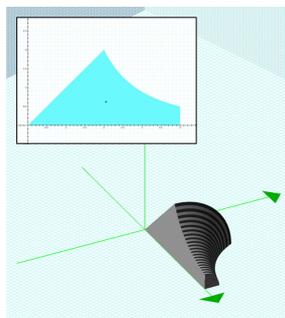
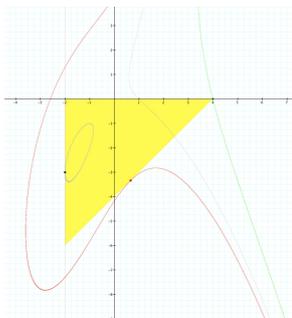
4. (a) (Figura 3) L'equazione  $(t - 3y^2)y' + y = 0$  non è in forma normale, e negli istanti  $t_0 \geq 0$  in cui una soluzione soddisfa  $t_0 = 3y(t_0)^2$  (parabola nel piano  $(t, y)$ ) deve essere  $y(t_0) = 0$ : pertanto un problema di Cauchy con dato iniziale del tipo  $(t_0, \pm\sqrt{\frac{t_0}{3}})$  non ha soluzione tranne il caso in cui  $t_0 = 0$ , in cui si vede facilmente l'esistenza perlomeno della (unica) soluzione costante  $y \equiv 0$ . Invece nei dati iniziali  $(t_0, y_0)$  con  $t_0 \neq 3y_0^2$  si può porre l'equazione in forma normale  $y' = f(t, y) = \frac{y}{3y^2 - t}$ , con garanzia di esistenza e unicità locale (e unicità globale). Per l'esistenza globale, notiamo che per  $t \in I = ]-\infty, 0[$  la funzione  $f(t, y)$  è definita su tutta la striscia  $I \times \mathbb{R}$  e ha ivi crescita sublineare (perché  $3y^2 - t > 0$  e dunque  $|f(t, y)| = \frac{|y|}{3y^2 - t} \leq \frac{|y|}{|t|} \leq (\max_{t \in K} \frac{1}{|t|})|y|$  su ogni compatto  $K \subset I$ ), pertanto la soluzione di un problema di Cauchy con dato  $(t_0, y_0)$  con  $t_0 < 0$  sarà definita almeno su tutto  $I$ , ovvero anche per ogni altro  $t < 0$ . Si ha  $y' = 0$  (punti stazionari) quando  $y = 0$ , ovvero per la soluzione costante; si ha poi  $y' > 0$  (soluzioni crescenti) nelle zone del piano  $(t, y)$  in cui  $f(t, y) > 0$ , dunque all'interno della parabola  $t = 3y^2$  (se  $y < 0$ ) o all'esterno (se  $y > 0$ ). Derivando ulteriormente e sostituendo l'espressione di  $y'$  si ricava poi  $y'' = \frac{y'(3y^2 - t) - (6yy' - 1)y}{(3y^2 - t)^2} = -\frac{2ty}{(3y^2 - t)^3}$ , dunque si ha  $y'' > 0$  (soluzioni convesse) nelle zone del piano  $(t, y)$  all'interno della parabola  $t = 3y^2$  (nel 1° e 3° quadrante) o all'esterno (nel 2° e 4° quadrante). Infine, si verifica facilmente che se  $y(t)$  è soluzione lo è anche  $-y(t)$ .

(b) L'equazione totale associata è  $\omega = p(y, t) dy + q(y, t) dt = 0$  con  $p = t - 3y^2$  e  $q = y$ . La forma  $\omega$  è esatta perché  $\frac{\partial p}{\partial t} = 1 = \frac{\partial q}{\partial y}$ . Detta  $F(y, t)$  una sua primitiva, deve essere  $\frac{\partial F}{\partial y} = t - 3y^2$  e  $\frac{\partial F}{\partial t} = y$ : dalla seconda si ha subito  $F(y, t) = ty + \psi(y)$ , e allora dalla prima  $\frac{\partial F}{\partial y} = t + \psi'(y) = t - 3y^2$ , ovvero  $\psi'(y) = -3y^2$  che dà  $\psi(y) = -y^3$ . Otteniamo così  $F(y, t) = ty - y^3$ , dunque le curve integrali sono  $F(y, t) = k$ , ovvero  $y^3 - ty + k = 0$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ : da questa equazione, tramite Dini potremo esplicitare  $y(t)$  attorno a un dato iniziale  $y(t_0) = y_0$  con  $t_0 \neq 3y_0^2$ . • Col dato iniziale  $y(1) = -1$  si ha  $k = 0$ : si ha dunque  $y^3 - ty = 0$ , da cui semplificando per  $y \neq 0$  dsì ricava subito  $y^2 = t$  e dunque (essendo  $y < 0$ ) la forma finita  $y(t) = -\sqrt{t}$ , definita per  $t > 0$ . • Col dato iniziale  $y(1) = 0$  la soluzione è quella nulla  $y \equiv 0$ . • Infine, col dato iniziale  $y(0) = 1$  si ha  $k = -1$ , da cui  $y^3 - ty - 1 = 0$ . Questa equazione non permette di ricavare  $y(t)$  in forma finita come nei casi precedenti, ma potremo calcolarne i primi termini di uno sviluppo: derivando rispetto a  $t$  abbiamo  $3y^2 y' - y - ty' = 0$ , che calcolata per  $t = 0$  con  $y(0) = 1$  dà  $y'(0) = \frac{1}{3}$ ; derivando ancora si ha  $6y(y')^2 + 3y^2 y'' - y' - y' - ty'' = 0$ , che per  $t = 0$  dà  $y''(0) = 0$ ; e derivando ancora una volta dà  $12(y')^3 + 6y \cdot 2y'y'' + 6yy'y'' + 3y^2 y''' - 2y'' - y'' - ty''' = 0$  da cui  $y'''(0) = -\frac{4}{27}$ , dunque  $y(t) = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{2}{81}t^3 + o_0(t^3)$ .

5. (a) L'equazione caratteristica di  $y'' + iy' - (1+i)y = 2(1-i)\sin t$  è  $\lambda^3 + i\lambda - (1+i) = 0$ , con radici  $1, -i$  e  $-1+i$ : una base di soluzioni dell'omogenea associata è data dunque da  $e^t, e^{-it}, e^{(-1+i)t}$ . Una soluzione particolare per il termine non omogeneo costante  $2$  sarà pure costante, che si calcola subito essere  $-(1-i)$ . Quanto invece a  $-2i\sin t = e^{-it} - e^{it}$ , una soluzione particolare per  $e^{-it}$  sarà pure della forma  $\alpha e^{it}$ , e dai conti si ricava  $\alpha = \frac{1}{4}(1-i)$ . Invece una soluzione particolare per  $e^{it}$  (caso risonante) sarà della forma  $\beta t e^{it}$ , e dai conti si ricava  $\beta = -\frac{1}{10}(3+i)$ . Le curve cercate saranno dunque tutte e sole quelle del tipo  $y(t) = A e^t + (B - \frac{3+i}{10}t) e^{-it} + C e^{(-1+i)t} - (1-i) + \frac{1-i}{4} e^{it}$  al variare di  $A, B, C \in \mathbb{C}$ .

(b) Il sistema del 1o ordine associato è  $Y' = AY + b(t)$  con  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+i & -i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1-i)\sin t \end{pmatrix}$ .

Una risolvete è la matrice wronskiana  $W(t) = \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & e^{-it} & e^t \\ (-1+i)e^{(-1+i)t} & -ie^{-it} & e^t \\ -2ie^{(-1+i)t} & -e^{-it} & e^t \end{pmatrix}$ , e volendo si ha anche  $e^{tA} = W(t)W(0)^{-1}$ .



1. Ex. 1. 2 Exx. 2-3. 3 Ex. 4.

# Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (08/09/2020)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2019/20

Cognome-Nome \_\_\_\_\_ Matr. \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si consideri  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $g(x, y, z) = (2xy - z^2, x - 3yz)$ .
  - (a) Mostrare che l'insieme di livello  $\Gamma$  di  $g$  contenente  $P(0, 0, -1)$  è una curva regolare all'intorno di  $P$ , esibirne una parametrizzazione locale e calcolarne la retta tangente affine in  $P$ .
  - (b) Determinare i punti stazionari di  $f(x, y, z) = z$  su  $\Gamma$  chiarendone la natura (estremi locali?).
2. Nel piano cartesiano sia  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq \frac{1}{a}x(a - x), x^2 + y^2 \leq a^2\}$  (ove  $a > 0$ ).
  - (a) Disegnare  $A$  e calcolarne area e baricentro geometrico.
  - (b) Dire se le funzioni  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{y}$  sono integrabili su  $A$ , e in tal caso calcolarne l'integrale.
3. Nello spazio sia  $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, 2(a - x) \leq z \leq 2a\}$  (ove  $a > 0$ ).
  - (a) Si disegni  $E$  e se ne calcolino il volume e l'area totale della superficie esterna  $\partial E$ .
  - (b) Verificare il teorema di Gauss per  $E$  e per il campo  $F = (0, 0, z)$ .
  - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per  $F$  e la componente cilindrica di  $\partial E$ .
4. Si abbia il sistema differenziale  $\begin{cases} \dot{x} = y(x - 2y) \\ \dot{y} = y^2(x - y - 1) \end{cases}$  nell'incognita  $(x(t), y(t))$ .
  - (a) Cosa dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Calcolare equilibri e integrale primo.
  - (b) Determinare la soluzione con  $(x(0), y(0)) = (-1, -1)$ , e quella con  $(x(0), y(0)) = (3, 0)$ .
5. Determinare tutte le curve parametriche  $(x(t), y(t))$  del piano cartesiano reale tali che  $(\dot{x}, \dot{y}) = (2 - x - 4y, x - y + 5t)$ , in particolare quella che per  $t = 0$  passa per il punto  $(2, 0)$ .

1. (a) (Figura 1) Lo jacobiano di  $g(x, y, z) = (2xy - z^2, x - 3yz)$  è  $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & -2z \\ 1 & -3z & -3y \end{pmatrix}$ ; dato poi  $P(0, 0, -1)$ , poiché  $J_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  ha rango 2 possiamo affermare che  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = g(P) = (-1, 0)\}$  è una curva regolare all'intorno di  $P$ . Poiché il minore formato dalle ultime due colonne è nonsingolare, da  $g(x, y, z) = (-1, 0)$  (ovvero dal sistema  $\begin{cases} 2xy - z^2 = -1 \\ x - 3yz = 0 \end{cases}$ ) possiamo esplicitare  $(y(x), z(x))$  in un intorno di  $x = 0$  con  $y(0) = 0$  e  $z(0) = -1$ . Derivando rispetto a  $x$  l'identità del sistema si ha poi  $\begin{cases} 2y + 2xy' - 2zz' = 0 \\ 1 - 3y'z - 3yz' = 0 \end{cases}$ , che per  $x = 0$  dà  $\begin{cases} 2z'(0) = 0 \\ 1 + 3y'(0) = 0 \end{cases}$  da cui  $y'(0) = -\frac{1}{3}$  e  $z'(0) = 0$ ; e derivando ancora si ha  $\begin{cases} 2y'' + 2y' + 2xy'' - 2(z')^2 - 2zz'' = 0 \\ -3y''z - 3y'z' - 3y'z' - 3yz'' = 0 \end{cases}$ , che per  $x = 0$  dà  $\begin{cases} 4y''(0) + 2z''(0) = 0 \\ 3y''(0) = 0 \end{cases}$ , da cui  $y''(0) = 0$  e  $z''(0) = \frac{2}{3}$ . Una parametrizzazione locale di  $\Gamma$  attorno a  $P$  è dunque  $(x, -\frac{1}{3}x + o_0(x^2), -1 + \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2))$  definita all'intorno di  $x = 0$ , e il troncamento al 1o ordine di tali sviluppi dà la retta tangente affine  $(x, -\frac{1}{3}x, -1)$  ovvero  $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ z = -1 \end{cases}$ ; allo stesso risultato si arriva calcolando  $J_g(P) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(b) I punti stazionari di  $f(x, y, z) = z$  su  $\Gamma$  sono le soluzioni del sistema dato dalle equazioni di  $\Gamma$  e dalla condizione di Lagrange che il rango di  $\begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix}$  sia  $< 3$ , ovvero che il determinante si annulli. Ne esce il sistema  $\begin{cases} 2xy - z^2 = -1 \\ x - 3yz = 0 \\ x + 3yz = 0 \end{cases}$ : dalle ultime due si ricava  $x = yz = 0$ , da cui  $z^2 = 1$  e allora  $y = 0$ , ovvero i punti  $P(0, 0, -1)$  (già noto) e  $Q(0, 0, 1)$ . Per capire la loro natura basta considerare la funzione  $f$  composta con una parametrizzazione di  $\Gamma$  attorno a  $P$  e a  $Q$ . Iniziamo da  $P$ , si ha  $F(x) := f(x, y(x), z(x)) = z(x)$ : essendo  $F'(0) = z'(0) = 0$  (come previsto) e  $F''(0) = z''(0) = \frac{2}{3} > 0$  si ha che  $P$  è un punto di minimo locale stretto per  $f$  su  $\Gamma$ , ovvero un punto di  $\Gamma$  di quota  $z$  localmente minima. Quanto a  $Q$ , procedendo come per  $P$  si vede che si possono esplicitare  $(y(x), z(x))$  in un intorno di  $x = 0$  con  $(y(0), z(0)) = (0, 1)$ ,  $(y'(0), z'(0)) = (\frac{1}{3}, 0)$  e  $(y''(0), z''(0)) = (0, \frac{2}{3})$ , dunque anche  $Q$  è un punto di minimo locale stretto per  $f$  su  $\Gamma$ .

2. (a) (Figura 2) L'area di  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq \frac{1}{a}x(a-x), x^2 + y^2 \leq a^2\}$  risulta  $\frac{1}{4}\pi a^2 - \int_0^a \frac{1}{a}x(a-x) dx = \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{a}[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{3\pi-2}{12}a^2$ . Si ha poi, sempre per differenza,  $\int_A x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \rho d\rho - \int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{a}x(a-x)} x dy = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{a} \int_0^a x^2(a-x) dx = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{a}[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^a = \frac{1}{4}a^3$  e  $\int_A y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho \sin \theta \rho d\rho - \int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{a}x(a-x)} y dy = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2a^2} \int_0^a x^2(a-x)^2 dx = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2a^2}[\frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5]_0^a = \frac{19}{60}a^3$ , da cui il baricentro risulta  $(\frac{3}{3\pi-2}a, \frac{19}{5(3\pi-2)}a)$ .

(b) Poiché le funzioni integrande  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{y}$  sono  $> 0$  su  $A$ , per Fubini e Tonelli possiamo calcolare un integrale iterato e vedere cosa succede. Attenzione: non sapendo se c'è convergenza, qui non è ammesso spezzare l'integrale per differenza di domini.

• Per  $\frac{1}{x}$ , poiché  $A$  si appoggia all'asse  $y$  sarà probabile che l'integrale diverga: in effetti basta notare che già diverge quello sul sottoinsieme di  $A$  dato dal settore circolare al di sopra della bisettrice (infatti  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{1}{\rho \cos \theta} \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$  diverge per  $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$ ), dunque per monotonia divergerà anche l'integrale su  $A$ . • Per  $\frac{1}{y}$ , procedendo per  $x$ -fili si ha

$\int_A \frac{1}{y} dx dy = \int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x(a-x)}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{y} dy = \int_0^a \log \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x(a-x)} dx$ , e già ora si nota che l'integrale convergerà (infatti il logaritmo è integrabile negli infinitesimi polinomiali). Procedendo col calcolo, ricordando che una primitiva di  $\log u$  è  $u(\log u - 1)$  si ha  $\int_0^a \log \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x\sqrt{a-x}} dx = \int_0^a (\log a + \frac{1}{2} \log(a+x) - \log x - \frac{1}{2} \log(a-x)) dx = [x \log a + \frac{1}{2}(a+x)(\log(a+x) - 1) - x(\log x - 1) + \frac{1}{2}(a-x)(\log(a-x) - 1)]_0^a = [a \log a + a(\log 2a - 1) - a(\log a - 1)] - [\frac{1}{2}a(\log a - 1) + \frac{1}{2}a(\log a - 1)] = a \log a + a \log 2 + a \log a - a - a \log a + a - a \log a + a = (1 + \log 2)a$  (si noti che, come era prevedibile dalla forma dell'integrale che stiamo calcolando, il risultato è lineare in  $a$ ).

3. (a) (Figura 3) Il volume di  $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, 2(a-x) \leq z \leq 2a\}$  si può calcolare in vari modi, ad esempio questi. Per  $(x, y)$ -fili: detta  $D$  la proiezione di  $E$  sul piano orizzontale (il quarto di disco di raggio  $a$ ) si ha  $\int_D (2a - 2(a-x)) dx dy = 2 \int_D x dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}a^3$ . Per  $x$ -fette: preso  $0 \leq x \leq a$  la  $x$ -fetta di  $E$  è data da  $0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$  e  $2(a-x) \leq z \leq 2a$  (rettangolo di area  $2x\sqrt{a^2-x^2}$ ), dunque il volume risulta  $\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2} dx = [-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{2}{3}a^3$ . Per  $y$ -fette: preso  $0 \leq y \leq a$  la  $y$ -fetta di  $E$  è data da  $0 \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2}$  e  $2(a-x) \leq z \leq 2a$  (triangolo rettangolo di cateti  $\sqrt{a^2-y^2}$  e  $2\sqrt{a^2-y^2}$ , dunque con area  $a^2-y^2$ ), dunque il volume risulta  $\int_0^a (a^2-y^2) dy = [a^2y - \frac{1}{3}y^3]_0^a = \frac{2}{3}a^3$ . • La superficie esterna  $\partial E$  è costituita da 4 componenti: quella cilindrica  $C$ , il coperchio piano superiore  $B$  (un quarto di disco a quota  $z = 2a$ ), quella  $T$  nel piano  $(x, z)$  (un triangolo rettangolo) e quella posteriore  $S$  nel piano  $z = 2(a-x)$ . L'area di  $B$  è  $\frac{\pi}{4}a^2$ , mentre quella di  $T$  è  $a^2$ . La superficie  $C$  è parametrizzata da  $(a \cos \theta, a \sin \theta, z)$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $2(a-x) = 2a(1-\cos \theta) \leq z \leq 2a$ , con elemento d'area  $d\sigma = a d\theta dz$ , dunque l'area risulta  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a(1-\cos \theta)}^{2a} a dz = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2a^2$ . Infine  $B$  è parametrizzata come grafico da  $(x, y, 2(a-x))$  con  $(x, y) \in D$ , con elemento d'area  $d\sigma = \sqrt{5} dx dy$ , dunque l'area vale  $\int_D \sqrt{5} dx dy = \sqrt{5} \text{Area}(D) = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}a^2$  (coerentemente alla legge del coseno). L'area totale di  $\partial E$  risulta  $(3 + (\sqrt{5} + 1)\frac{\pi}{4})a^2$ .

(b) La divergenza di  $F = (0, 0, z)$  è 1, dunque per verificare Gauss va mostrato che il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial E$  è pari al volume di  $E$ , ovvero  $\frac{2}{3}a^3$ . Poiché il campo  $F$  è parallelo all'asse  $z$  i flussi di  $F$  attraverso  $T$  e  $C$  sono nulli, mentre si ha  $\Phi_B(F) = \int_D (0, 0, 2a) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 2a \text{Area}(D) = \frac{\pi}{2}a^3$  e  $\Phi_S(F) = + \int_D \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2(a-x) & -2 & 0 \end{pmatrix} dx dy =$

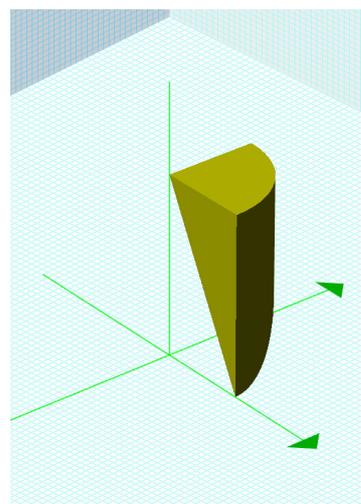
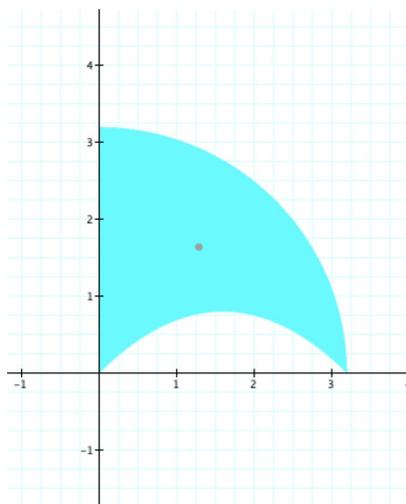
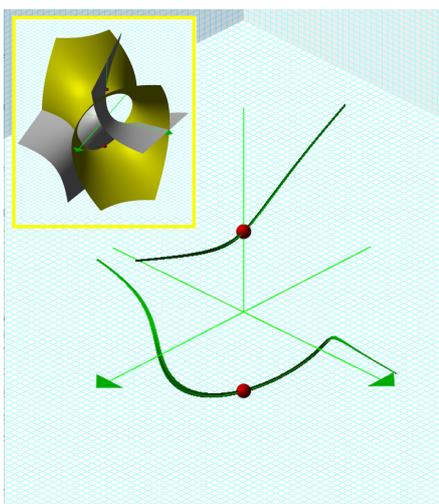
$2 \int_D (x-a) dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (\rho \cos \theta - a) \rho d\rho = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3} \cos \theta - \frac{1}{2}) d\theta = 2a^2 [\frac{1}{3} \sin \theta - \frac{1}{2} \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}) a^2$ . Il flusso totale di  $F$  uscente da  $\partial E$  è pertanto  $0 + 0 + \frac{\pi}{2} a^2 + (\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}) a^2 = \frac{2}{3} a^2$ , come si voleva.

(c) Il rotore di  $F$  è nullo, perciò per verificare Kelvin-Stokes va mostrato che anche la circuitazione di  $F$  lungo  $\partial C$  è nulla. Partendo dal punto  $(a, 0, 0)$  il bordo  $\partial C$  è dato da un segmento verticale  $(0, 0, z)$  con  $0 \leq z \leq 2a$ , un arco di circonferenza orizzontale (dunque ortogonale a  $F$ ) e la curva intersezione tra piano e cilindro  $(a \cos \theta, a \sin \theta, 2a(1 - \cos \theta))$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (percorsa a ritroso): si ha così  $\oint_{\partial C} F \cdot dl = \int_0^{2a} (0, 0, z) \cdot (0, 0, 1) dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2a(1 - \cos \theta)) \cdot (-a \sin \theta, a \cos \theta, 2a \sin \theta) d\theta = \int_0^{2a} z dz - 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2a^2 - 4a^2 [-\cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 - 4a^2 (\frac{1}{2}) = 0$ , come si voleva.

4. (a) (a) (Figura 3) Il sistema  $\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) = y(x-2y) \\ \dot{y} = b(x, y) = y^2(x-y-1) \end{cases}$  ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione  $C^1$ ; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare (attenzione: i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su  $\mathbb{R}$ ). Al di fuori dell'asse  $y = 0$  (che è fatto di equilibri) il sistema è equivalente a quello in cui si semplifica per  $y$ , ovvero  $(\dot{x}, \dot{y}) = (a(x, y), b(x, y)) = (x-2y, y(x-y-1))$ . Gli altri equilibri sono dunque le soluzioni del sistema  $a = b = 0$ , che dà i punti  $(0, 0)$  e  $(2, 1)$ . Per un integrale primo del sistema, vediamo se la forma  $\omega = b dx - a dy = y(x-y-1) dx + (2y-x) dy$  è esatta (ovvero se è chiusa, visto che è definita su tutto il piano, semplicemente connesso): si ha  $\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x} = x-2y \neq 0$ , tuttavia poiché  $\frac{1}{-a} (\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial(-a)}{\partial x}) = -1$  non dipende da  $y$ , sappiamo che  $e^{\int(-1) dx} = e^{-x}$  è un fattore integrante, ovvero  $e^{-x} \omega$  diventa una forma esatta. In effetti, se  $F$  rappresenta una sua primitiva (che sarà un integrale primo del sistema), da  $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-x} (2y-x)$  si ottiene  $F(x, y) = e^{-x} y(y-x) + \varphi(x)$ , dunque da  $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{-x}(x-y-1) = ye^{-x}(x-y-1) + \varphi'(x)$  abbiamo  $\varphi'(x) = 0$ , da cui  $\varphi(x)$  costante. Si ha così  $F(x, y) = ye^{-x}(y-x)$  (a meno di costanti additive), e le curve integrali del sistema sono le componenti connesse delle curve di livello  $F(x, y) = k$  per  $k \in \mathbb{R}$ , cioè  $y(y-x) = ke^x$ . Notiamo che per  $k = 0$  si ottiene l'asse  $x$  (fatto come detto di equilibri) oppure la retta bisettrice  $x = y$ , divisa in tre traiettorie dall'equilibrio  $(0, 0)$ .

(b) La soluzione con  $(x(0), y(0)) = (3, 0)$  (un equilibrio del sistema) è la costante  $(x(t), y(t)) \equiv (3, 0)$ . Invece la soluzione con  $(x(0), y(0)) = (-1, -1)$  sta sulla semiretta  $x = y$  con  $x < 0$  che sarà dunque la sua traiettoria, percorsa verso il basso (notiamo che sulla semiretta  $x = y$  con  $x < 0$  si ha  $\dot{x} < 0$ ): sostituendo  $x = y$  si ottiene così  $\dot{x} = -x^2$  e  $\dot{y} = -y^2$ , equazioni a variabili separabili che danno facilmente la soluzione cercata  $(x(t), y(t)) = (-\frac{1}{1-t}, -\frac{1}{1-t})$  (definita per  $t < 1$ ).

5. Il problema dato equivale a trovare la soluzione del sistema lineare a coefficienti costanti  $\dot{X} = AX + b(t)$  con  $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  e  $b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5t \end{pmatrix}$ . La matrice dei coefficienti  $A$  ha autovalori  $-1 \pm 2i$ ; un autovettore riferito a  $-1 + 2i$  è  $v = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ , dunque due soluzioni reali che generano lo spazio delle soluzioni dell'omogenea sono  $\text{Re}(v e^{(-1+2i)t}) = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t}$  e  $\text{Im}(v e^{(-1+2i)t}) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{-t}$ . Una soluzione particolare del sistema completo risulta essere  $\begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+2 \\ t+1 \end{pmatrix}$ , come si trova cercandone una di tipo polinomiale di primo grado. Pertanto le curve cercate sono tutte e sole quelle del tipo  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(-2A \sin 2t + 2B \cos 2t) - 4t + 2 \\ e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + t + 1 \end{pmatrix}$  al variare di  $A, B \in \mathbb{R}$ ; ponendo infine  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2B+2 \\ A+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  si ha  $A = -1$  e  $B = 0$ , dunque la soluzione  $\begin{pmatrix} 2e^{-t} \sin 2t - 4t + 2 \\ t + 1 - e^{-t} \cos 2t \end{pmatrix}$ .



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.