

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (19/01/2021)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2020/21

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano sia $g(x, y) = \log(2e^y + x) - 2x - y$.
 - (a) Determinare il dominio di g , e dire quali curve di livello sono regolari. Parametrizzare la curva di livello Γ passante per $P(-1, 0)$, e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P .
 - (b) Dire perché g ammette estremi assoluti sul quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, e calcolarli.
2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$, e per $a > 0$ si ponga $A_a = A \cap \{x \leq a\}$.
 - (a) Calcolare area e baricentro geometrico di A_a , osservandone poi il limite per $a \rightarrow +\infty$.
 - (b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$ e $\int_A \frac{e^{-x}}{y+1-e^{-x}} dx dy$ convergono, e nel caso calcolarli.
3. Nel primo ottante $x, y, z \geq 0$ dello spazio cartesiano sia E il solido dato da $z \leq \min\{a, 4a - x - y\}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4a^2$, ove $a > 0$.
 - (a) Si disegni E e se ne calcoli il volume.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, 0, z)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e per la porzione di ∂E sul piano $y = 0$.
4. È data l'equazione differenziale $(3 + 2ty)y' + y^2 = 0$ nella funzione scalare incognita $y(t)$.
 - (a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità, crescita, simmetria, soluzioni costanti?
 - (b) Trovare tutte le soluzioni, specificando quali di esse sono definite anche per $t = 0$.
5. Trovare tutte le soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema differenziale
$$\begin{cases} \dot{x} + 2y = 3x + 2ie^t \\ \dot{y} + y + 2i = (2 + i)x - 1 \end{cases}.$$

1. (a) (Figura 1) Il dominio di $g(x, y) = \log(2e^y + x) - 2x - y$ è dato da $2e^y + x > 0$, ovvero $x > -2e^y$; espressa in altro modo, questa relazione è vera per ogni $x \geq 0$, mentre per $x < 0$ equivale a $y > \log(-\frac{x}{2}) = \log|x| - \log 2$. Da $\nabla g = (\frac{1}{2e^y+x} - 2, \frac{2e^y}{2e^y+x} - 1) = (0, 0)$ si ricava $2e^y = 2e^y + x = \frac{1}{2}$, da cui $e^y = \frac{1}{4}$ (quindi $y = \log \frac{1}{4} = -2 \log 2$) e dunque $x = 0$. L'unico punto stazionario di g è dunque $(0, -2 \log 2)$, che appartiene alla curva di livello $g(x, y) = g(0, -2 \log 2) = \log 2$; le altre curve di livello sono regolari, in particolare quella Γ che passa per $P(-1, 0)$, data da $g(x, y) = g(P) = 2$. Da $\nabla g(P) = (-1, 1)$ si può ad esempio esplicitare $x(y) = -1 + (-\frac{1}{1})(y - 0) + o_0(y) = -1 + y + o_0(y)$; la retta tangente affine a Γ in P si ottiene dallo sviluppo al I ordine $x = y - 1$, o analogamente da $\nabla g(P) \cdot (x - (-1), y - 0) = 0$.

(b) Il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ è un insieme compatto contenuto nel dominio di g , che è continua: dunque gli estremi di g su Q esistono per il teorema di Weierstrass. Come visto prima, l'unico punto stazionario di g è $(0, -2 \log 2)$, dunque tali estremi non saranno assunti in punti interni di Q . Esaminiamo ora i lati senza gli estremi: su quelli orizzontali si ha $g(x, 0) = \log(x + 2) - 2x$ e $g(x, 1) = \log(2e + x) - 2x - 1$, prive di punti critici per $x \in]0, 1[$; e su quelli verticali si ha $g(0, y) \equiv \log 2$ (in effetti g è costante sull'asse y , fatto dunque di punti critici) e $g(1, y) = \log(2e^y + 1) - y - 2$, priva di punti critici. Restano da esaminare solo i vertici di Q , in cui vale $g(0, 0) = g(0, 1) = \log 2$, $g(1, 0) = \log 3 - 2$ e $g(1, 1) = \log(2e + 1) - 3$. I valori di g individuati nei punti critici sono dunque $\log 2$, $\log 3 - 2$ e $\log(2e + 1) - 3$, dei quali solo $\log 2 \sim 0,7$ è positivo e sarà dunque il massimo assoluto di g su Q (assunto su tutto il lato sull'asse y). Quanto agli altri due valori, entrambi negativi, andrà capito quale dei due è minore dell'altro: provando un confronto diretto, osserviamo che vale $\log 3 - 2 > \log(2e + 1) - 3$ se e solo se $\log \frac{2e+1}{3} < 1$, ovvero se e solo se $\frac{2e+1}{3} < e$, cioè se e solo se $e > 1$, vero. Pertanto il minimo assoluto di g su Q è $\log(2e + 1) - 3 \sim -1,1$ (assunto nel vertice $(1, 1)$).

2. (a) (Figura 2) L'area di $A_a = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ è $\int_0^a e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$; si ha poi $\int_{A_a} x dx dy = \int_0^a dx \int_0^{e^{-x}} x dy = \int_0^a x e^{-x} dx = [-x e^{-x} + \int e^{-x} dx]_0^a = [-(x+1)e^{-x}]_0^a = 1 - (a+1)e^{-a}$ e $\int_{A_a} y dx dy = \int_0^a dx \int_0^{e^{-x}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^a e^{-2x} dx = [-\frac{1}{4} e^{-2x}]_0^a = \frac{1}{4}(1 - e^{-2a})$, dunque $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area } A_a} (\int_{A_a} x dx dy, \int_{A_a} y dx dy) = (\frac{1-(a+1)e^{-a}}{1-e^{-a}}, \frac{1+e^{-a}}{4})$. I limiti per $a \rightarrow +\infty$ dell'area e del baricentro sono entrambi finiti e valgono 1 e $(1, \frac{1}{4})$.

(b) Entrambe le funzioni proposte sono positive su $A = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$, dunque con Fubini e Tonelli possiamo esaminare integrali iterati. • Vale $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{e^{-x}} \frac{x}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{+\infty} x [2\sqrt{y}]_0^{e^{-x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx = 2[-2x e^{-\frac{x}{2}} + 2 \int e^{-\frac{x}{2}} dx]_0^{+\infty} = [-4(x+2)e^{-\frac{x}{2}}]_0^{+\infty} = 8$. • Vale $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{e^{-x}} \frac{e^{-x}}{y+1-e^{-x}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} [\log(y+1-e^{-x})]_0^{e^{-x}} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x} \log(1-e^{-x}) dx$, e ponendo $1 - e^{-x} = t$ (da cui $e^{-x} dx = dt$) si ottiene $-\int_0^1 \log(t) dt$, che converge (infatti $\log t$ è integrabile in 0^+) e vale $[-t(\log t - 1)]_0^1 = 1$.

3. (a) (Figura 3) Per calcolare il volume di $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, z \leq \min\{a, 4a-x-y\}, x^2+y^2+z^2 \geq 4a^2\}$ converrà procedere per z -fette. Per $0 \leq z \leq a$ la z -fetta è un triangolo rettangolo isoscele di cateto $4a-z$ meno un quarto di cerchio di raggio $\sqrt{4a^2 - z^2}$, e dunque ha area $\frac{1}{2}(4a-z)^2 - \frac{1}{4}\pi(4a^2 - z^2)$: ne segue che $\text{Vol } E = \int_0^a (\frac{1}{2}(4a-z)^2 - \frac{1}{4}\pi(4a^2 - z^2)) dz = \frac{1}{4}[-\frac{2}{3}(4a-z)^3 + \pi(4a^2 z - \frac{1}{3}z^3)]_0^a = \frac{1}{4}[(-18a^3 - \frac{11}{3}\pi a^3) - (-\frac{128}{3}a^3)] = \frac{74-11\pi}{12}a^3$.

(b) Il campo $F = (0, 0, z)$ è parallelo all'asse z e ha divergenza $\nabla \cdot F = 1$, dunque per verificare Gauss va mostrato che il flusso totale di F uscente da ∂E è pari al volume di E . Ora, il campo F è parallelo all'asse z e si annulla sul piano orizzontale (x, y) : questo già dice che i tre suoi flussi attraverso le componenti piane verticali e la base inferiore di ∂E sono nulli. La base superiore si trova a quota costante $z = a$, dunque il flusso di F attraverso essa sarà la sua area moltiplicata per a , ovvero $(\frac{1}{2}(3a)^2 - \frac{1}{4}\pi(3a^2))a = (\frac{9}{2} - \frac{3\pi}{4})a^3$. La faccia sferica è parametrizzata da $(2a \cos \theta \sin \varphi, 2a \sin \theta \sin \varphi, 2a \cos \varphi)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (normale uscente), da cui il flusso $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 0 & -2a \sin \theta \sin \varphi & 2a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & 2a \cos \theta \sin \varphi & 2a \sin \theta \cos \varphi \\ 2a \cos \varphi & 0 & -2a \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi =$

$-4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -8a^3 \frac{\pi}{2} [-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6}a^3$. Infine il flusso attraverso la faccia piana obliqua P ,

parametrizzata da $(x, y, 4a - x - y)$ (normale uscente) è dato da $\int_{P'} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4a - x - y & -1 & -1 \end{pmatrix} dx dy = \int_{P'} (4a - x - y) dx dy$, ove $P' = \{(x, y) : 3a \leq x + y \leq 4a\}$ (un trapezio isoscele) è la proiezione orizzontale di P . Per il calcolo di questo integrale, nel quale la descrizione di P' in coordinate (x, y) non è agevole, converrà cambiare variabili ponendo $(u, v) = (x + y, y)$: infatti nelle variabili (u, v) la figura P' viene descritta come $x = u - v \geq 0$, $y = v \geq 0$ e $3a \leq x + y = u \leq 4a$, ovvero $3a \leq u \leq 4a$ e $0 \leq v \leq u$ (trapezio rettangolo), così procedendo per u -fili l'integrale diventa $\int_{3a}^{4a} du \int_0^u (4a - u) dv = \int_{3a}^{4a} u(4a - u) du = [2au^2 - \frac{1}{3}u^3]_{3a}^{4a} = \frac{5}{3}a^3$. Sommando i flussi di F uscenti dalle varie facce di ∂E si ritrova effettivamente $0 + 0 + 0 + (\frac{9}{2} - \frac{3\pi}{4})a^3 + (-\frac{\pi}{6}a^3) + \frac{5}{3}a^3 = \frac{74-11\pi}{12}a^3$, ovvero il volume di E calcolato in precedenza.

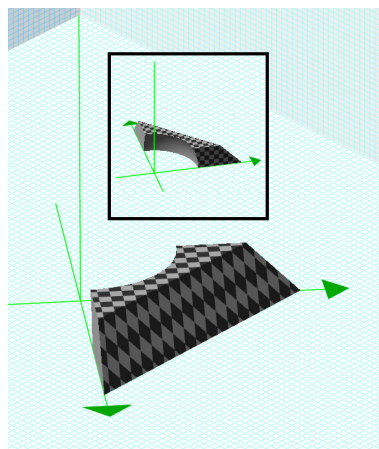
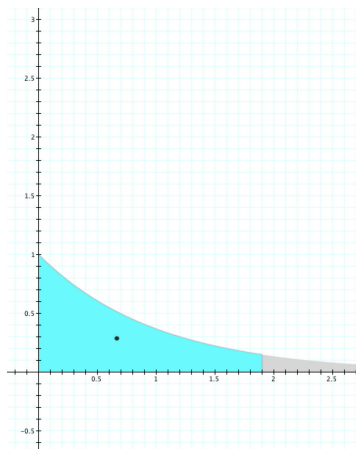
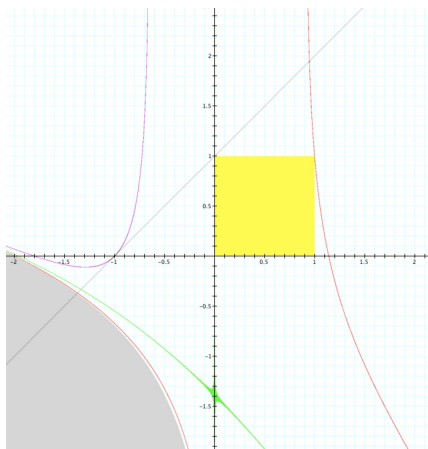
(c) Il rotore di F è nullo, dunque per verificare la formula di Kelvin-Stokes va mostrato che anche la circuitazione di F lungo il bordo della porzione di ∂E sul piano $y = 0$ è nullo. Gli integrali di linea lungo i segmenti orizzontali sono nulli perché il campo è ad essi ortogonale; lungo il tratto di circonferenza $(2a \sin \varphi, 0, 2a \cos \varphi)$ con $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ si ha $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 2a \cos \varphi) \cdot 2a \cos \varphi, 0, -2a \sin \varphi d\varphi = -4a^2 [-\frac{1}{4} \cos 2\varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}a^2$; e lungo il segmento obliquo $(x, 0, 4a - x)$ con $3a \leq x \leq 4a$ si ha $\int_{3a}^{4a} (0, 0, 4a - x) \cdot (1, 0, -1) dx = -\int_{3a}^{4a} (4a - x) dx = -[4ax - \frac{1}{2}x^2]_{3a}^{4a} = -\frac{1}{2}a^2$. La somma dà dunque 0.

4. (a) Nell'equazione differenziale $(3+2ty)y' + y^2 = 0$, per dati iniziali (t_0, y_0) che stanno sull'iperbole equilatera $ty = -\frac{3}{2}$ dovrebbe aversi $y_0^2 = 0$ (impossibile), dunque non esistono soluzioni con tali dati; per tutti gli altri dati invece si può porre l'equazione nella forma normale $y' = f(t, y) = -\frac{y^2}{3+2ty}$, che per Cauchy assicura esistenza e unicità locale. L'unica soluzione costante è $y = 0$, dunque tutte le altre soluzioni avranno segno costante. Le soluzioni $y(t)$ sono crescenti quando $ty < -\frac{3}{2}$, ovvero la zona del piano (t, y) esterna ai due rami d'iperbole. Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione su un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$, si verifica facilmente che anche $\psi(t) = -\varphi(-t)$ è soluzione sull'intervallo opposto $-I$ (infatti per $t \in -I$ si ha $(3+2t\psi(t))\psi'(t) + \psi^2(t) = (3+2t(-\varphi(-t)))\varphi'(-t) + (-\varphi(-t))^2 = (3+2(-t)\varphi(-t))\varphi'(-t) + \varphi(-t)^2 = 0$ perché $-t \in I$), pertanto la famiglia delle soluzioni è dispari.

(b) L'equazione totale associata è $\omega = p(y, t) dy + q(y, t) dt = 0$ con $p = 3 + 2ty$ e $q = y^2$. La forma ω è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial t} = 2y = \frac{\partial q}{\partial y}$; detta $F(y, t)$ una sua primitiva, da $\frac{\partial F}{\partial y} = 3 + 2ty$ si ha $F(y, t) = 3y + ty^2 + \phi(t)$, e allora dalla seconda $\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + \phi'(t) = y^2$, ovvero $\phi(t)$ costante. Dunque le curve integrali dell'equazione totale sono le curve di livello di $F(y, t) = 3y + ty^2$, ovvero $ty^2 + 3y + k = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: esplicitando la y da questa espressione si ricavano per l'equazione scalare originaria le soluzioni $y(t) = \frac{\pm\sqrt{9-\alpha t}-3}{2t}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Tra queste:

- quelle col segno $+$ sono prolungabili come soluzioni anche per $t = 0$ (infatti lo sviluppo asintotico in $t = 0$ dà $y(t) = \frac{\sqrt{9-\alpha t}-3}{2t} = -\frac{1}{12}(\alpha + \frac{1}{36}\alpha^2 t + o_0(t))$, con dominio massimale $t < \frac{9}{\alpha}$ (se $\alpha > 0$) oppure $t > \frac{9}{\alpha}$ (se $\alpha < 0$), mentre se $\alpha = 0$ si riottiene la soluzione costante $y = 0$;
- quelle col segno $-$ non sono prolungabili per $t = 0$ (divergono), e hanno dominio massimale $t < 0$ oppure $0 < t < \frac{9}{\alpha}$ (se $\alpha > 0$); $\frac{9}{\alpha} < t < 0$ oppure $t > 0$ (se $\alpha < 0$); $t < 0$ oppure $t > 0$ (se $\alpha = 0$).

5. Il sistema $\begin{cases} \dot{x} + 2y = 3x + 2ie^t \\ \dot{y} + y + 2i = (2+i)x - 1 \end{cases}$ è dato da $\dot{X} = AX + b$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2+i & -1 \end{pmatrix}$ e $b = b_1 + b_2 = \begin{pmatrix} 2ie^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1-2i \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono i e $2-i$, con autovettori rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$, e due soluzioni particolari del sistema completo per b_1 e b_2 (entrambi casi non risonanti) risultano essere $\begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \end{pmatrix}e^t$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: le soluzioni sono dunque $\begin{cases} x(t) = 2Ae^{it} + 2Be^{(2-i)t} + 2e^t + 2 \\ y(t) = (3-i)Ae^{it} + B(1+i)e^{(2-i)t} + (2+i)e^t + 3 \end{cases}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$.



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (08/02/2021)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2020/21

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano la curva parametrica Γ è data da $\gamma(t) = (t - \sin t, e^t + t, 2 - \cos t)$ con $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Calcolare la retta tangente a Γ in $P = \gamma(0)$. Determinare poi una forma grafico di Γ attorno P esibendone uno sviluppo di Taylor con due termini significativi, e ricalcolare la retta tangente.
 - (b) Determinare gli estremi assoluti (esistono?) di $f(x, y, z) = x + 2z$ sul tratto di Γ con $|t| \leq \pi$.
2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, x \geq a, 0 \leq y \leq x\}$, ove $a > 0$.
 - (a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro geometrico.
 - (b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{1}{x} dx dy$ e $\int_A \frac{1}{y} dx dy$ convergono, e nel caso calcolarli.
3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z) , e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse z .
 - (a) Calcolare, usando in modo opportuno i teoremi di Guldino, il volume di E e le aree delle tre componenti non piane della superficie esterna di E .
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (y, 0, 0)$.
 - (c) Detta B la base di E nel piano (x, y) si calcoli l'integrale $\int_B x dx dy$ direttamente e con la formula di Green.
4. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = 4y(x + y - 1) \\ \dot{y} = x(x + y - 1) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.
 - (a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e le orbite delle soluzioni non costanti.
 - (b) Determinare le soluzioni che per $t = 0$ valgono rispettivamente $(-2, 1)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$.
5. Trovare tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione differenziale scalare $y''' + iy = 1 - 2 \cos t$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (08/02/2021) – Soluzioni

1. (a) (Figura 1) Derivando la parametrizzazione $\gamma(t) = (t - \sin t, e^t + t, 2 - \cos t)$ si ottiene $\gamma'(t) = (1 - \cos t, e^t + 1, \sin t)$: essendo $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t , per il teorema delle immersioni l'immagine per un intervallo sufficientemente piccolo sarà una curva regolare. Ciò accade in particolare per $t = 0$ che individua il punto $P = \gamma(0) = (0, 1, 1)$, in cui $\gamma'(0) = (0, 2, 0)$: pertanto la retta tangente affine a Γ in P sarà, in forma parametrica, $r = \{(0, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0, \lambda, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ o, in forma cartesiana, $r = \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ (la retta per P parallela all'asse y). • Da $\gamma'(0) = (0, 2, 0)$ si nota che attorno a P si può invertire solo $y(t) = e^t + t$ ottenendo $t(y)$: si ha $t(1) = 0$, poi derivando $y = e^t + t$ rispetto a y si ha $1 = t'(e^t + 1)$ che posto $y = 1$ dà $1 = 2t'(1)$ ovvero $t'(1) = \frac{1}{2}$; derivando di nuovo si ha $0 = t''(e^t + 1) + (t')^2 e^t$ che posto $y = 1$ dà $0 = 2t''(1) + \frac{1}{4}$ ovvero $t''(1) = -\frac{1}{8}$ e perciò $t(y) = \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{1}{16}(y - 1)^2 + o_1((y - 1)^2)$. La forma grafico di Γ cercata sarà $(x(y), z(y)) = (t(y) - \sin t(y), 2 - \cos t(y)) = (t(y) - \frac{1}{6}t(y)^3 + o_0(t(y))), 2 - (1 - \frac{1}{2}t(y)^2 + o_0(t(y))) = (\frac{1}{6}t(y)^3 + o_0(t(y))), 1 + \frac{1}{2}t(y)^2 + o_0(t(y)) = (\frac{1}{48}(y - 1)^3 - \frac{1}{128}(y - 1)^4 + o_1((y - 1)^4), 1 + \frac{1}{8}(y - 1)^2 + o_1((y - 1)^2))$, e il suo arresto al primo ordine (ovvero $(x(y), z(y)) = (0, 1)$) ridà la retta tangente calcolata in precedenza.

(b) Il tratto di Γ con $|t| \leq \pi$ è l'immagine dell'intervallo compatto $[-\pi, \pi]$ tramite la funzione continua γ : si tratta dunque di un compatto di $\mathbb{R}^3$, su cui la funzione continua $f(x, y, z) = x + 2z$ assumerà estremi assoluti per Weierstrass. Nelle estremità $A = \gamma(-\pi) = (-\pi, -\pi + e^{-\pi}, 3)$ e $B = \gamma(\pi) = (\pi, \pi + e^{\pi}, 3)$ si ha $f(A) = 6 - \pi \sim 2,9$ e $f(B) = 6 + \pi \sim 9,1$. Invece per i punti interni, considerata $F(t) = f(\gamma(t)) = t - \sin t + 4 - 2 \cos t$ con $|t| < \pi$ si ha $F'(t) = 1 - \cos t + 2 \sin t = 0$ per $t = t_0 := \arcsin \frac{4}{5} - \pi \sim -2,2$ o $t = 0$, con $F(t_0) = t_0 - \sin t_0 + 4 - 2 \cos t_0 = t_0 - (-\frac{4}{5}) + 4 - 2(-\frac{3}{5}) = 6 + t_0 \sim 3,8$ e $F(0) = 2$. Pertanto il massimo e minimo assoluto di f su Γ sono rispettivamente $6 + \pi$ (assunto in B) e 2 (assunto in P).

2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, x \geq a, 0 \leq y \leq x\}$ si può calcolare facilmente per differenza tra le aree del settore circolare A' e del triangolo A'' come $\frac{1}{8}\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{\pi-1}{2}a^2$. Quanto al baricentro, ragionando sempre per differenza si ha $\int_A x \, dx \, dy = \int_{A'} x \, dx \, dy - \int_{A''} x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho - \int_0^a dx \int_0^x x \, dy = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} - [\frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{4\sqrt{2}-1}{3}a^3$ e $\int_A y \, dx \, dy = \int_{A'} y \, dx \, dy - \int_{A''} y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \rho \sin \theta \, \rho \, d\rho - \int_0^a dx \int_0^x y \, dy = [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} - [\frac{1}{6}x^3]_0^a = \frac{15-8\sqrt{2}}{6}a^3$, dunque $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area } A} (\int_A x \, dx \, dy, \int_A y \, dx \, dy) = (\frac{2(4\sqrt{2}-1)}{3(\pi-1)}a, \frac{15-8\sqrt{2}}{3(\pi-1)}a)$. • In alternativa si può descrivere A in coordinate polari (dove $x \geq a$ diventa $\rho \geq \frac{1}{\cos \theta}a$) come $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e $\frac{1}{\cos \theta}a \leq \rho \leq 2a$: si avrebbe così $\int_A x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}a}^{2a} \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (8a^3 - \frac{1}{\cos^3 \theta}a^3) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{3} [8a^3 \sin \theta - \text{tg } \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}-1}{3}a^3$ e similmente per $\int_A y \, dx \, dy$.

(b) Entrambe le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0 su A' e A'' e dunque anche su A , perciò per Fubini e Tonelli si possono esaminare integrali iterati. • La geometria della figura mostra chiaramente che la funzione $\frac{1}{x}$ è integrabile su A , sul quale è limitata, ma suggerisce che potrebbe esserlo anche sia su A' che su A'' , e questo faciliterebbe il conto. In effetti si ha $\int_{A''} \frac{1}{x} \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^x \frac{1}{x} \, dy = \int_0^a dx = a$ (finito) e $\int_{A'} \frac{1}{x} \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \frac{1}{\rho \cos \theta} \rho \, d\rho = 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} \, d\theta$, pure finito: per il calcolo di quest'ultimo integrale, ricordando le formule parametriche conviene porre $t = \text{tg } \frac{\theta}{2}$ (da cui $\theta = 2 \arctg t$ e $d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$), ed essendo $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\text{tg } \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ si ricava $\int_{A'} \frac{1}{x} \, dx \, dy = 2a \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = 2a \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{2}{1-t^2} dt = 2a \int_0^{\sqrt{2}-1} (\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}) dt = 2a [\log(\frac{1+t}{1-t})]_0^{\sqrt{2}-1} = 2a \log \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2a \log(\sqrt{2}+1)$. Si ha perciò $\int_A \frac{1}{x} \, dx = \int_{A'} \frac{1}{x} \, dx - \int_{A''} \frac{1}{x} \, dx = (2 \log(\sqrt{2}+1) - 1)a > 0$. • Sempre la geometria della figura suggerisce che la funzione $\frac{1}{y}$ non sia integrabile su A , e per vederlo basterà mostrare che non lo è su un suo sottoinsieme: ad esempio sul rettangolo $B = [a, \frac{3}{2}a] \times [0, a] \subset A$ si ha $\int_B \frac{1}{y} \, dx \, dy = \int_a^{2a} dx \int_0^a \frac{1}{y} \, dy$, ma la funzione $\frac{1}{y}$ non è integrabile in $y \sim 0$.

3. (a) (Figura 3) In base al teorema di Guldino per i solidi di rotazione, ricordando quanto calcolato nell'Ex. 2 il volume di E risulta $\frac{\pi}{2} \int_A x \, dx \, dz = \frac{(4\sqrt{2}-1)\pi}{6}a^3$. • La parte cilindrica C di ∂E è generata dalla rotazione del segmento verticale Γ parametrizzato da (a, z) con $0 \leq z \leq a$ (elemento lineare dz), dunque in base al teorema di Guldino per le superfici di rotazione l'area di C risulta $\frac{\pi}{2} \int_{\Gamma} x \cdot d\ell = \frac{\pi}{2} \int_0^a a \, dz = \frac{\pi}{2}a^2$. • La parte conica T di ∂E è data dalla rotazione del segmento obliquo (x, x) con $a \leq x \leq a\sqrt{2}$ (con $d\ell = \sqrt{2}dx$), dunque l'area di T è $\frac{\pi}{2} \int_a^{a\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{2} \, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}a^2$. • Infine, la parte sferica S di ∂E è generata dalla rotazione dell'arco $(2a \sin \varphi, 2a \cos \varphi)$ con $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (con $d\ell = 2a \, d\varphi$), dunque l'area di S risulta $\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2a \sin \varphi \cdot 2a \, d\varphi = 2\pi a^2 [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}a^2$.

(b) Il campo $F = (y, 0, 0)$ ha divergenza nulla, dunque per verificare Gauss va mostrato che anche il flusso totale di F uscente da ∂E è nullo. Ora, il campo F è parallelo all'asse x e si annulla sul piano orizzontale (x, y) : questo già dice che i suoi due flussi attraverso le facce A nel piano (x, z) e B nel piano (x, y) sono nulli. Il flusso di F uscente da A' , la faccia nel piano (y, z) , è per definizione $\Phi_{A'}(F) = \int_{A'} (y, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) \, dy \, dz = - \int_{A'} y \, dy \, dz$: ma $\int_{A'} y \, dy \, dz$ corrisponde chiaramente all'integrale $\int_A x \, dx \, dy$ già calcolato nell'Ex. 2, dunque si ottiene $\Phi_{A'}(F) = -\frac{4\sqrt{2}-1}{3}a^3$. La parte cilindrica C è parametrizzata da $\gamma(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq a$ (normale associata entrante), dunque $\Phi_C(F) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} a \sin \theta & -a \sin \theta & 0 \\ 0 & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = -a^3 [-\frac{1}{4} \cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}a^3$. La parte conica T è parametrizzata da $\gamma(z, \theta) = (x \cos \theta, x \sin \theta, x)$ con $a \leq x \leq a\sqrt{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), dunque

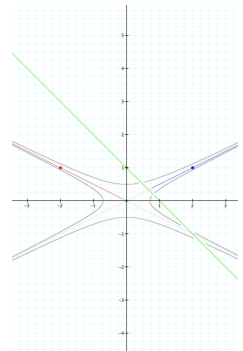
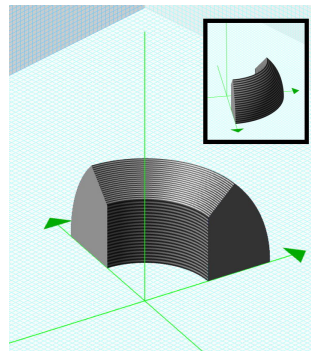
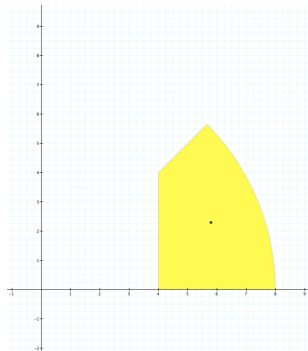
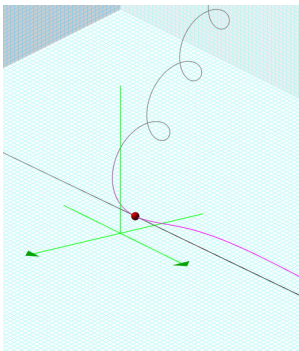
$\Phi_T(F) = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} x \sin \theta & \cos \theta & -x \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & x \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} dz = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_a^{a\sqrt{2}} x^2 dx = -[\frac{1}{4} \cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3} x^3]_a^{a\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}-1}{6} a^3$. Infine, la parte sferica S è parametrizzata da $\gamma(\theta, \varphi) = (2a \cos \theta \sin \varphi, 2a \sin \theta \sin \varphi, 2a \cos \varphi)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque $- \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \det \begin{pmatrix} 2a \sin \theta \sin \varphi & -2a \sin \theta \cos \varphi & 2a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & 2a \cos \theta \sin \varphi & 2a \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & -2a \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = 8a^3 [-\frac{1}{4} \cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = 4a^3 [-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 4a^3 (0 - (-\frac{5}{6\sqrt{2}})) = \frac{5\sqrt{2}}{3} a^3$. Sommando i flussi si ha dunque $0 + 0 - \frac{4\sqrt{2}-1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^3 - \frac{2\sqrt{2}-1}{6} a^3 + \frac{5\sqrt{2}}{3} a^3 = 0$, come previsto.

(c) Il calcolo diretto dà $\int_B x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} \rho \cos \theta \rho d\rho = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3} \rho^3]_a^{2a} = \frac{7}{3} a^3$. • Usando la formula di Green $\int_B (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy = \oint_{\partial B} (f dx + g dy)$, affinché $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x$ si può scegliere il campo (f, g) ad esempio come $(0, \frac{1}{2} x^2)$, e si tratta dunque di calcolare la circuitazione $\frac{1}{2} \oint_{\partial B} x^2 dy$. Percorrendo il bordo della corona circolare B in senso antiorario partendo da $(a, 0)$, tale circuitazione risulta $0 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a \cos \theta)^2 2a \cos \theta d\theta + 0 + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \cos \theta)^2 a \cos \theta d\theta = \frac{7}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{7}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{7}{2} a^3 [\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{2} a^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3} a^3$, come già trovato in precedenza.

4. (a) (Figura 4) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = 4y(x+y-1) \\ \dot{y} = x(x+y-1) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione C^1 ; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare (attenzione: i teoremi di Cauchy-Lipschitz danno condizioni solo sufficienti, dunque è errato affermare ora che non ci può essere esistenza globale su $\mathbb{R}$). Al di fuori della retta $x+y=1$ (che è fatta di equilibri) il sistema è equivalente a quello in cui si semplifica per $x+y-1$, ovvero $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y, x)$: l'unico altro equilibrio è dunque l'origine $(0, 0)$, e un integrale primo del sistema (al di fuori della retta $x+y=1$) è dato da $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - 4y^2)$, le cui curve di livello $x^2 - 4y^2 = k$ per $k \neq 0$ sono iperboli di asintoti $y = \pm \frac{1}{2}x$ e per $k=0$ sono l'unione delle due rette $y = \pm \frac{1}{2}x$. Tenendo presente che gli equilibri (che sono $(0, 0)$ e tutti i punti della retta $x+y=1$) spezzano le curve di livello in orbite distinte, si ha che le orbite non costanti sono le porzioni delle suddette curve di livello $x^2 - 4y^2 = k$ che non contengono equilibri.

(b) L'orbita della soluzione con $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$ sarà la semiretta $y = -\frac{1}{2}x$ con $x < 0$, percorsa dal basso verso l'alto (infatti $\dot{y}(0) = x(0)(x(0)+y(0)-1) = 4 > 0$). Sostituendo $x = -2y$ in $\dot{y} = x(x+y-1)$ si ottiene $\dot{y} = 2y(y+1)$, equazione scalare del 1° ordine a variabili separabili: integrando $\frac{1}{y(y+1)} dy = 2 dt$ si ottiene $\log(\frac{y}{y+1}) = 2t + h$, e ricordando che $y(0) = 1$ si ricava $k = \log \frac{1}{2}$; esponenziando si ha $\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2} e^{2t}$, da cui ricavando y si trova $y(t) = \frac{e^{2t}}{2 - e^{2t}}$ e dunque la soluzione $(x(t), y(t)) = (-\frac{2e^{2t}}{2 - e^{2t}}, \frac{e^{2t}}{2 - e^{2t}})$ definita per $t < \frac{1}{2} \log 2$ (si noti che per $t \rightarrow -\infty$ la soluzione tende all'equilibrio $(0, 0)$ e per $t \rightarrow \frac{1}{2} \log 2^-$ scappa all'infinito). • Il punto $(0, 1)$ è un equilibrio, dunque la soluzione con tale dato iniziale sarà la costante in tale punto. • Infine, l'orbita della soluzione con $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ sarà la semiretta $y = \frac{1}{2}x$ con $x > \frac{2}{3}$ (infatti $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ è un equilibrio), percorsa dal basso verso l'alto (infatti $\dot{y}(0) = x(0)(x(0)+y(0)-1) = 4 > 0$). Sostituendo $x = 2y$ in $\dot{y} = x(x+y-1)$ si ottiene $\dot{y} = 2y(3y-1)$: integrando $\frac{1}{y(3y-1)} dy = (\frac{3}{3y-1} - \frac{1}{y}) dy = 2 dt$ si ottiene $\log(\frac{3y-1}{y}) = 2t + h$, e ricordando che $y(0) = 1$ si ricava $k = \log 2$; esponenziando si ha $\frac{3y-1}{y} = 2e^{2t}$, da cui si ricava $y(t) = \frac{1}{3 - 2e^{2t}}$ e dunque la soluzione $(x(t), y(t)) = (\frac{2}{3 - 2e^{2t}}, \frac{1}{3 - 2e^{2t}})$ definita per $t < \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$ (si noti che per $t \rightarrow -\infty$ la soluzione tende all'equilibrio $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ e per $t \rightarrow \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}^-$ scappa all'infinito).

5. L'equazione $y''' + iy = 1 - 2 \cos t$ è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda^3 + i = 0$ ha come soluzioni le radici cubiche di $-i$, ovvero i e $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo $b_1 = 1$ è chiaramente la costante $\tilde{y}_1 \equiv -i$. D'altra parte $-2 \cos t = -e^{it} - e^{-it}$: una soluzione particolare per $b_2(t) = -e^{it}$ (caso risonante) e $b_3(t) = -e^{-it}$ (non risonante) saranno rispettivamente della forma $\tilde{y}_2 = at e^{it}$ e $\tilde{y}_3 = b e^{-it}$ per certi $a, b \in \mathbb{C}$, e imponendoli si trova $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{2}i$. Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A + \frac{1}{3}t) e^{it} + (B e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + C e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}) e^{-\frac{1}{2}it} + \frac{1}{2}i e^{-it} - i$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$.



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3. 4 Ex. 4.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (28/06/2021)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2020/21

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano si abbiano $g(x, y, z) = \log(z^2 - xy) + x - z$ e il punto $P(0, 2, -1)$.
 - (a) Dire quali delle superfici di livello di g sono regolari. Detta S quella passante per P , se ne determini una parametrizzazione locale e si calcoli in due modi lo spazio tangente affine in P .
 - (b) Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il punto P è stazionario per $f(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z$ su S , e se ne determini la natura (punto di massimo/minimo locale oppure sella).
2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax, 0 \leq y \leq x\}$, ove $a > 0$.
 - (a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro geometrico.⁽¹⁾
 - (b) Dire per quali (α, β) converge l'integrale $\int_A x^\alpha (x^2 + y^2)^\beta dx dy$, e calcolarlo per $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$.
3. Nel I ottante dello spazio cartesiano sia $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + z \leq 2a\}$.
 - (a) Disegnare E e calcolarne il volume e l'area della componente cilindrica della superficie esterna.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, 0, 0)$.
4. Si consideri l'equazione differenziale $(2 + y)^3 y'' + 1 = 0$ nella funzione scalare $y(t)$.
 - (a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità, invarianza temporale, simmetrie delle soluzioni? Ve ne sono di costanti?
 - (b) Determinare un integrale primo per l'equazione descrivendone il ritratto in fase; trovare infine la soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -\frac{1}{2}$.
5. Di un'equazione differenziale lineare $a(t)y'' + 2y' + b(t)y = (1 - 2t)^2$ nella funzione scalare $y(t)$ si sa che $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = te^{-t}$ sono soluzioni della parte omogenea. Determinare $a(t)$, $b(t)$ e tutte le soluzioni, in particolare quelle con $y(0) = y'(0) = 0$.

⁽¹⁾ Potrà essere utile sapere che $\int \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{8}(3(\theta + \sin \theta \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos^3 \theta)$.

1. (a) Il gradiente della funzione $g(x, y, z) = \log(z^2 - xy) + x - z$, definita per $z^2 > xy$, è $\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (-\frac{y}{z^2 - xy} + 1, -\frac{x}{z^2 - xy}, \frac{2z}{z^2 - xy} - 1)$. Ponendo $\nabla g = (0, 0, 0)$, da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricava $x = 0$, che sostituito nelle altre due equazioni $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ dà l'unico punto $Q(0, 4, 2)$: pertanto tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne eventualmente quella di livello $g(Q) = -2(1 - \log 2) \sim -0,6$ nel punto Q . • La superficie di livello S contenente $P(0, 2, -1)$ è data da $g(x, y, z) = g(P) = 1$. Da $\nabla g(P) = (-1, 0, -3)$ si deduce che da $g(x, y, z) = 1$ è possibile esplicitare ad esempio z in funzione di x e y , con $z(0, 2) = -1$. Derivando l'identità $g(x, y, z(x, y)) \equiv 1$ parzialmente rispetto a x e y si ottiene $\frac{2z\dot{z}_x - y}{z^2 - xy} + 1 - \dot{z}_x = 0$ e $\frac{2z\dot{z}_y - x}{z^2 - xy} - \dot{z}_y = 0$, che calcolate per $(y, z) = (0, 2)$ danno $\dot{z}_z(0, 2) = -\frac{1}{3}$ e $\dot{z}_y(0, 2) = 0$.

Derivando ulteriormente si ha $\frac{2(\dot{z}_x^2 + z\ddot{z}_{xx})(z^2 - xy) - (2z\dot{z}_x - y)^2}{(z^2 - xy)^2} - \ddot{z}_{xx} = 0$, $\frac{2(\dot{z}_x\dot{z}_y + z\ddot{z}_{xy}) - (2z\dot{z}_x - y)(2z\dot{z}_y - x)}{(z^2 - xy)^2} - \ddot{z}_{xy} = 0$ e $\frac{2(\dot{z}_y^2 + z\ddot{z}_{yy})(z^2 - xy) - (2z\dot{z}_y - x)^2}{(z^2 - xy)^2} - \ddot{z}_{yy} = 0$, che calcolate per $(x, y) = (0, 2)$ danno $\ddot{z}_{xx}(0, 2) = -\frac{14}{27}$, $\ddot{z}_{xy}(0, 2) = -\frac{1}{3}$ e $\ddot{z}_{yy}(0, 2) = 0$. Si ha dunque $z(x, y) = z(0, 2) + \dot{z}_x(0, 2)(x - 0) + \dot{z}_y(0, 2)(y - 2) + \frac{1}{2}(\ddot{z}_{xx}(0, 2)(x - 0)^2 + 2\ddot{z}_{xy}(0, 2)(x - 0)(y - 2) + \ddot{z}_{yy}(0, 2)(y - 2)^2) + \dots = -1 - \frac{1}{3}x - \frac{14}{27}x^2 - \frac{1}{6}x(y - 2) + \dots$, sviluppo dal cui 1° ordine si deduce l'equazione $z = -1 - \frac{1}{3}x$ (ovvero $x + 3z + 3 = 0$) del piano affine tangente a S in P che si può dedurre anche da $\nabla g(P) \cdot (x - 0, y - 2, z + 1) = 0$.

(b) La condizione di Lagrange affinché il punto P sia stazionario per $f(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z$ su S , ovvero che i vettori $\nabla f(P) = (1, \alpha, \beta)$ e $\nabla g(P) = (-1, 0, -3)$ siano paralleli, dà $(\alpha, \beta) = (0, 3)$. Componendo f con la parametrizzazione trovata prima si ha $F(y, z) := f(x, y, z(x, y)) = x + 3z(x, y)$: da $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) = (1 + 3\dot{z}_x, 3\dot{z}_y)$ si ha subito $\nabla F(0, 2) = (0, 0)$, come atteso; passando alla matrice hessiana si ha $H_F(x, y) = \begin{pmatrix} \ddot{F}_{xx} & \ddot{F}_{xy} \\ \ddot{F}_{xy} & \ddot{F}_{yy} \end{pmatrix} = 3H_z(x, y)$, e perciò $H_F(0, 2) = 3H_z(0, 2) = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice indefinita (si noti che $\det < 0$). Pertanto P è un punto di sella per f su S .

2. (a) (Figura 1) L'insieme A può essere espresso in coordinate polari (ρ, θ) come $\rho < 2a \cos \theta$ per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, dunque l'area risulta $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 [\frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{\pi+2}{4}a^2$ (ottenibile elementarmente anche come somma delle aree di un triangolo e di un quarto di cerchio). Per il baricentro, si ha $\int_A x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \cos \theta \rho d\rho = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{3}a^3 [\frac{1}{8}(3\theta + \sin \theta \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos^3 \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi+8}{12}a^3$ e $\int_A y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \sin \theta \rho d\rho = \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{3}a^3 [-\frac{1}{4} \cos^4 \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}a^3$, dunque $(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Area } A} (\int_A x dx dy, \int_A y dx dy) = (\frac{3\pi+8}{3(\pi+2)}a, \frac{2}{\pi+2}a)$.

(b) Essendo $x^\alpha(x^2 + y^2)^\beta > 0$ su A , per Fubini e Tonelli si possono esaminare integrali iterati. Passando in coordinate polari si ha $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^\alpha \cos^\alpha \theta \rho^{2\beta} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^\alpha \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^{\alpha+2\beta+1} d\rho$, che per la convergenza in $\rho \sim 0$ dà subito la condizione $\alpha + 2\beta + 1 > -1$, ovvero $\beta > -\frac{1}{2}\alpha - 1$; assicurato ciò si ottiene $\frac{(2a)^{\alpha+2\beta+2}}{\alpha+2\beta+2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^\alpha \theta \cos^{\alpha+2\beta+2} \theta d\theta = \frac{(2a)^{\alpha+2\beta+2}}{\alpha+2\beta+2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2(\alpha+\beta+1)} \theta d\theta$, che non ha più problemi di convergenza. La condizione necessaria e sufficiente per la convergenza è dunque $\beta > -\frac{1}{2}\alpha - 1$, che per $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ è soddisfatta e dà $\int_A \frac{1}{x} dx dy = 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{2}a$.

3. (a) (Figura 2) Calcoliamo il volume di $E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + z \leq 2a\}$ in due modi diversi. (i) (Per (x, y) -fili) Detta B la base (quarto di cerchio) di E nel piano orizzontale, il filo sopra $(x, y) \in B$ è dato da $0 \leq z \leq 2a - x - y$, pertanto il volume di E risulta $\int_B dx dy \int_0^{2a-x-y} dz = \int_B (2a - x - y) dx dy$, che passando in coordinate polari dà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} (2a - \rho(\cos \theta + \sin \theta)) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a\rho^2 - \frac{1}{3}(\cos \theta + \sin \theta)\rho^3]_{\rho=0}^{\rho=a \cos \theta} d\theta = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{3}(\cos \theta + \sin \theta)) d\theta = a^3[\theta - \frac{1}{3}(\sin \theta - \cos \theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3((\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3})) = (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})a^3$. (ii) (Per x -fette) Per $0 \leq x \leq a$ la x -fetta è il trapezio dato da $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ e $0 \leq z \leq 2a - x - y$, dunque il volume risulta $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{2a-x-y} dz = \int_0^a [(2a - x)y - \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx - \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2a \frac{\pi}{4}a^2 - [-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)]_0^a - \frac{1}{2}[a^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{\pi}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}a^3) = (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})a^3$, come già trovato prima. • La componente cilindrica C della superficie esterna di E è parametrizzata da $(a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq 2a - a \cos \theta - a \sin \theta = a(2 - \cos \theta - \sin \theta)$; essendo l'elemento d'area pari a $a d\theta dz$, l'area di C risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(2-\cos \theta - \sin \theta)} a dz = a^2[2\theta - \sin \theta + \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a^2$.

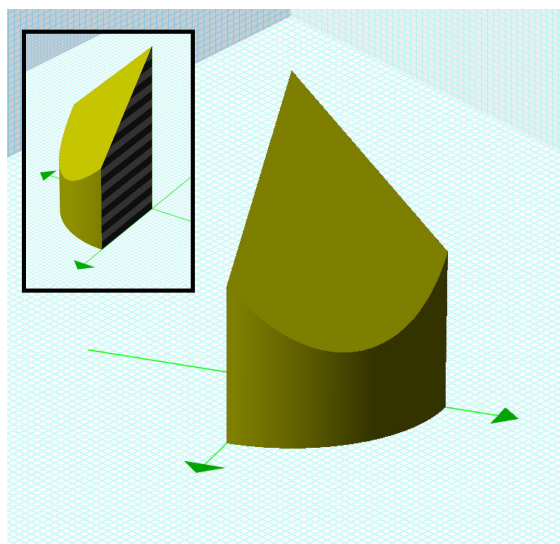
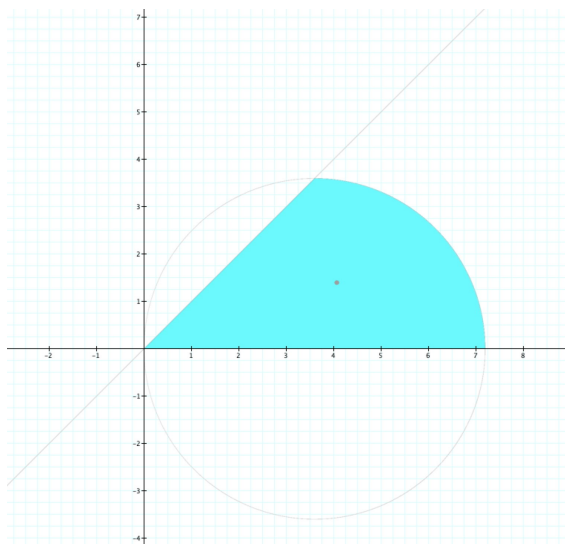
(b) Il campo $F = (x, 0, 0)$ ha divergenza 1, dunque per verificare Gauss va mostrato che il flusso totale di F uscente da ∂E è pari al volume di E . Ora, il campo F è parallelo all'asse x e si annulla sul piano (y, z) , dunque i suoi flussi uscenti dalle componenti di superficie esterna di E sui tre piani coordinati sono tutti nulli. Il flusso di F uscente da C parametrizzata come sopra (normale associata uscente) è dato da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a(2-\cos \theta - \sin \theta)} \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta & 0 \\ 0 & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos \theta - \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 \theta - \cos \theta(1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = a^3[\theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3((\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{3})) = (\frac{\pi}{2} - 1)a^3$. Infine, il tappo superiore T è parametrizzato da $(x, y, 2a - x - y)$ con $(x, y) \in B$ (normale associata uscente), dunque il flusso di F uscente da T risulta $\int_B \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx dy = \int_B x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho \cos \theta \rho d\rho = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{3} \rho^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. La somma dei flussi da C e T dà in effetti $(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})a^3$, pari al volume di E .

4. (a) L'equazione $(2 + y)^3 y'' + 1 = 0$ è autonoma, dunque è garantita l'invarianza temporale dello spazio delle soluzioni:

ragioneremo pertanto con dati iniziali in $t = 0$. Essa non è in forma normale, tuttavia una soluzione non potrà mai assumere il valore -2 (altrimenti nell'equazione risulterebbe $1 = 0$) e perciò possiamo scriverla nella forma $y'' = -(2+y)^{-3}$, che a sua volta è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel piano delle fasi $(y, p) = (y, y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = -(2+y)^{-3} \end{cases}$. La funzione $f(y, p) = (p, -(2+y)^{-3})$ è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$ esclusa la retta $y = -2$, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (y_0, y'_0) con $y_0 \neq -2$ (e con esse anche l'unicità globale), mentre non essendo il dominio illimitato in (y, p) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune soluzioni. Non vi sono soluzioni costanti, perché anche in questo caso risulterebbe $1 = 0$.

(b) L'equazione $y'' = -(2+y)^{-3} = h(y)$ ammette l'integrale primo dell'energia totale $\frac{1}{2}(y')^2 - \int h(y) dy = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(2+y)^{-2}$, dunque il ritratto in fase nel piano (y, p) è dato dalle curve di livello $p^2 - (2+y)^{-2} = k$, ovvero $p = \pm \sqrt{k + \frac{1}{(2+y)^2}}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (per $k = 0$ si tratta dei rami dell'iperbole equilatera $(y+2)p = \pm 1$). • Sulla soluzione cercata con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -\frac{1}{2}$ si ha proprio $k = 0$: essendo $y'(0) < 0$ si ricava $y' = -\frac{1}{2+y}$, che separando le variabili dà $(2+y) dy = -dt$. Integrando si ha $2y + \frac{1}{2}y^2 = h - t$, e ricordando che $y(0) = 0$ si ha $h = 0$. Si ottiene così $2y + \frac{1}{2}y^2 = -t$, ovvero $y^2 + 4y + 2t = 0$, da cui l'unica soluzione $y(t) = 2(\sqrt{1 - \frac{1}{2}t} - 1)$ (definita per $t < 2$, intorno di $t = 0$).

5. L'equazione $a(t)y'' + 2y' + b(t)y = (1-2t)^2$ è lineare, anche se non nella canonica forma “monica” (ovvero con 1 come coefficiente della derivata di ordine massimo). Imponendo che $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = te^{-t}$ siano soluzioni della parte omogenea si ottiene rispettivamente $a+2+b=0$ e $(t-2)a+2(1-t)+tb=0$, da cui si ricava $(a(t), b(t)) = (1-2t, 2t-3)$. Si ha perciò l'equazione $(1-2t)y'' + 2y' + (2t-3)y = (1-2t)^2$ di cui già conosciamo le soluzioni della parte omogenea, ovvero $Ae^t + Bte^{-t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di Lagrange dobbiamo prima rendere monica tale equazione dividendo per $1-2t$ e ottenendo dunque $y'' + \frac{2}{1-2t}y' + \frac{2t-3}{1-2t}y = 1-2t$. La matrice wronskiana $W = \begin{pmatrix} e^t & te^{-t} \\ e^t & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$ ha determinante $1-2t$, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^{-t}$ con $c'_1 = -\frac{te^{-t}}{1-2t}(1-2t) = -te^{-t}$ e $c'_2 = +\frac{e^t}{1-2t}(1-2t) = e^t$, da cui $c_1 = (t+1)e^{-t}$ e $c_2(t) = e^t$, dunque $\tilde{y}(t) = (t+1)e^{-t}e^t + e^t te^{-t} = 1+2t$. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò tutte e sole quelle della forma $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) + \tilde{y}(t) = Ae^t + Bte^{-t} + 1+2t$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando si ottiene $y'(t) = Ae^t + B(1-t)e^{-t} + 2$, dunque la condizione $y(1) = y'(1) = 0$ dà $A+1 = A+B+2 = 0$ che dà $A = B = -1$, ovvero l'unica soluzione $y(t) = 1+2t - e^t - te^{-t}$.



1. Ex. 2. 2. Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (23/08/2021)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2020/21

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano sia $g(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2y^2$.
 - (a) Dire quali curve di livello di g sono regolari. Parametrizzare la curva di livello Γ passante per $P(-1, 1)$, e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P .
 - (b) Dire perché g ammette estremi assoluti sull'ellisse piena U data da $x^2 + 2y^2 \leq 1$, e calcolarli.
2. Sia A il sottoinsieme del primo quadrante del piano cartesiano dato, in coordinate polari (ρ, θ) , dalla condizione $2a\theta \leq \rho \leq a\pi$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (ove $a > 0$).
 - (a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro geometrico.⁽¹⁾
 - (b) Dire se l'integrale $\int_A (x^2 + y^2)^\alpha dx dy$ converge per $\alpha = -1$, e nel caso calcolarlo.
(Facoltativo: discutere la convergenza dell'integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.)
3. Nello spazio cartesiano si disegni l'insieme A dell'Ex. 2 nel piano (x, z) , e sia E il solido nel primo ottante generato da una rotazione di un quarto di giro di A attorno all'asse z .
 - (a) Calcolare il volume di E e le aree delle componenti non piane della superficie esterna ∂E .
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (y, -x, 0)$.
 - (c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per il campo F e la componente orizzontale B di ∂E .
4. È data l'equazione differenziale $y^2 + (y')^2 = 2(y'' + 1)$ nella funzione incognita scalare $y(t)$.
 - (a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Vi sono soluzioni costanti? Se $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo, lo sono anche $\varphi(-t)$ (oppure $-\varphi(-t)$) sull'intervallo opposto? Se ciò fosse vero, le soluzioni definite in $t = 0$ sarebbero necessariamente (dis)pari?
 - (b) Determinare la soluzione tale che $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$.
5. Determinare tutte le soluzioni $y(t)$ dell'equazione $y''' = 1 - iy - 4\sin t$ tali che $y(0) = 0$.

⁽¹⁾ Può essere utile sapere che $\int \theta^3 \cos \theta d\theta = (\theta^3 - 6\theta) \sin \theta + 3(\theta^2 - 2) \cos \theta$ e $\int \theta^3 \sin \theta d\theta = 3(\theta^2 - 2) \sin \theta + (6\theta - \theta^3) \cos \theta$.

1. (a) (Figura 1) Da $g(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2y^2$ si ottiene $\nabla g = (3x^2 + 2x, -3y^2 + 4y)$, che si annulla nei quattro punti $O(0, 0)$, $A'(-\frac{2}{3}, 0)$, $A''(0, \frac{4}{3})$ e $A'''(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$: dunque le curve di livello di g sono regolari tranne eventualmente quelle di livello $g(O) = 0$, $g(A') = \frac{4}{27}$, $g(A'') = \frac{32}{27}$ e $g(A''') = \frac{4}{3}$ in quei punti. In particolare lo è la curva Γ di livello $g(P) = 1$ passante per $P(-1, 1)$: essendo $\nabla g(P) = (1, 1)$, da $g(x, y) = 1$ si può esplicitare localmente ad esempio $x(y)$ con $x(1) = -1$, e derivando l'identità $g(x(y), y) \equiv 1$ si ha $3x^2x' - 3y^2 + 2xx' + 4y \equiv 0$, da cui ponendo $y = 1$ si ricava $x'(1) = -1$; derivando nuovamente si ha $6x(x')^2 + 3x^2x'' - 6y + 2(x')^2 + 2xx'' + 4 \equiv 0$, da cui ponendo $y = 1$ si ricava $x''(1) = 6$. Pertanto una parametrizzazione locale di Γ attorno a P è data dalla forma grafico $x(y) = -1 - (y - 1) + 3(y - 1)^2 + o_1(y - 1)^2$; la retta tangente affine a Γ in P si ottiene dallo sviluppo al I ordine $x = 1 - (y - 1)$ ovvero l'antibisettrice $y = -x$, o analogamente da $\nabla g(P) \cdot (x - (-1), y - 1) = x + y = 0$.

(b) L'ellisse piena U data da $x^2 + 2y^2 \leq 1$ è un insieme compatto contenuto nel dominio di g , che è continua: dunque gli estremi di g su U esistono per il teorema di Weierstrass. Per la ricerca di tali estremi decomponiamo U nella sua parte interna U_1 data da $x^2 + 2y^2 < 1$ (un aperto del piano) e nel suo bordo U_2 dato da $x^2 + 2y^2 = 1$ (ellisse centrata in O di semiassi 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$, curva regolare). Come visto prima, i punti stazionari di g sono O , A' , A'' e A''' , dei quali solo i primi due stanno in U_1 . Per la ricerca in U_2 usiamo invece il metodo di Lagrange, che a conti fatti dà le sei soluzioni $B'(-1, 0)$, $B''(1, 0)$, $C'(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C''(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $D'(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $D''(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Gli estremi assoluti di g su U possono dunque essere raggiunti solo in O , A' , B' , B'' , C' , C'' , D' e D'' : essendo $g(O) = g(B') = 0$, $g(A') = \frac{4}{27} \sim 0,15$, $g(B'') = 2$, $g(C') = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sim 0,65$, $g(C'') = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sim 1,35$, $g(D') = \frac{2}{3} \sim 0,67$ e $g(D'') = \frac{4}{3} \sim 1,33$, il minimo assoluto di g su U è 0 (assunto in O e B') e il massimo assoluto è 2 (assunto in B'').

2. (a) L'insieme A è la zona di piano nel primo quadrante compresa tra la spirale d'Archimede $\rho = 2a\theta$ e la circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio $a\pi$, che in incontrano in alto nel punto $(0, a\pi)$. L'area di A vale $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((a\pi)^2 - (2a\theta)^2) d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 - 4\theta^2) d\theta = \frac{1}{2} a^2 [\pi^2 \theta - \frac{4}{3} \theta^3]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} a^2 [\frac{1}{2} \pi^3 - \frac{1}{6} \pi^3] = \frac{1}{6} \pi^3 a^2$. • Si ha poi $\int_A x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \rho \cos \theta \rho d\rho = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^3 - 8\theta^3) \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} a^3 [\pi^3 \sin \theta - 8(\theta^3 - 6\theta) \sin \theta - 24(\theta^2 - 2) \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} a^3 [(24\pi) - (48)] = 8(\pi - 2)a^3$ e $\int_A y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \rho \sin \theta \rho d\rho = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^3 - 8\theta^3) \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} a^3 [-\pi^3 \cos \theta - 24(\theta^2 - 2) \sin \theta - 8(6\theta - \theta^3) \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} a^3 [(-6(\pi^2 - 8)) - (-\pi^3)] = \frac{\pi^3 - 6\pi^2 + 48}{3} a^3$, da cui dividendo per l'area il baricentro risulta $(\frac{48(\pi - 2)}{\pi^3} a, \frac{2(\pi^3 - 6\pi^2 + 48)}{\pi^3} a)$.

(b) Essendo la funzione integranda $(x^2 + y^2)^\alpha$ positiva su A , per Fubini e Tonelli possiamo controllare la convergenza dell'integrale esaminando un integrale iterato, e lo faremo passando in coordinate polari. • Posto $\alpha = -1$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \rho^{-2} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\log \rho]_{2a\theta}^{a\pi} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \frac{\pi}{2} - \log \theta) d\theta = [\theta \log \frac{\pi}{2} - \theta(\log \theta - 1)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{2} \log \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(\log \frac{\pi}{2} - 1)) - (0) = \frac{\pi}{2}$, valore finito. • In generale, se $\alpha \neq -1$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \rho^{2\alpha} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\theta}^{a\pi} \rho^{2\alpha+1} d\rho = \frac{1}{2(\alpha+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho^{2(\alpha+1)}]_{2a\theta}^{a\pi} d\theta = \frac{(2a)^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\frac{\pi}{2})^{2(\alpha+1)} - \theta^{2(\alpha+1)}) d\theta$. Posto $2(\alpha+1) > -1$ cioè $\alpha > -\frac{3}{2}$, necessario per l'integrabilità in 0^+ , si ottiene $\frac{(2a)^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} [\theta(\frac{\pi}{2})^{2(\alpha+1)} - \frac{1}{2\alpha+3} \theta^{2\alpha+3}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2a)^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} [(\frac{2(\alpha+1)}{2\alpha+3} (\frac{\pi}{2})^{2\alpha+3}) - (0)] = \frac{(2a)^{2(\alpha+1)}}{2\alpha+3} (\frac{\pi}{2})^{2\alpha+3}$. Dunque l'integrale $\int_A (x^2 + y^2)^\alpha dx dy$ converge se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$, con valore $\frac{(2a)^{2(\alpha+1)}}{2\alpha+3} (\frac{\pi}{2})^{2\alpha+3}$; ad esempio per $\alpha = -1$ si ritrova il valore $\frac{\pi}{2}$ ottenuto prima, per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \frac{\pi^2}{4} a$, e per $\alpha = 0$ si ritrova l'area $\frac{1}{6} \pi^3 a^2$.

3. (a) Per Guldino il volume di E vale $\frac{\pi}{2} \int_A x dx dz = \frac{\pi}{2} 8(\pi - 2)a^3 = 4\pi(\pi - 2)a^3$ (l'integrale $\int_A x dx dz$ è già stato calcolato nell'Ex. 2). • Le componenti non piane della superficie esterna ∂E sono due: la superficie sferica esterna S e la superficie interna T generata dalla rotazione della spirale d'Archimede. Per S , usando le coordinate sferiche (θ, φ) l'area risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} (a\pi)^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi^3 a^2$; quanto a T , nel piano (x, z) la spirale d'Archimede è parametrizzata da $(2a\varphi \sin \varphi, 2a\varphi \cos \varphi)$ con elemento d'arco $2a\sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi$, dunque per Guldino l'area vale $\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a\varphi \sin \varphi) 2a\sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi$, che non può essere calcolato in forma finita.

(b) Oltre alle componenti non piane S e T citate in precedenza, la superficie esterna ∂E ha altre tre componenti piane: la base B e le due pareti verticali A (nel piano (x, z)) e A' (nel piano (y, z)). Le curve integrali del campo vettoriale $F = (y, -x, 0)$ sono circonferenze orizzontali centrate nell'asse z , pertanto il suo flusso attraverso S , T e B è certamente nullo perché il campo risulta parallelo ad esse. Il flusso uscente attraverso A è per definizione $\int_A (0, -x, 0) \cdot (0, -1, 0) dx dz = \int_A x dx dz = 8(\pi - 2)a^3$, mentre quello per A' è analogamente $\int_{A'} (y, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -\int_{A'} y dy dz = -\int_A x dx dz = -8(\pi - 2)a^3$. Il flusso totale uscente di F attraverso ∂E risulta dunque nullo, coerentemente col fatto che F ha divergenza nulla: il teorema di Gauss ne risulta verificato.

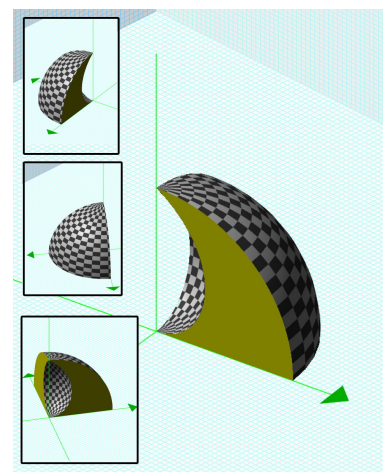
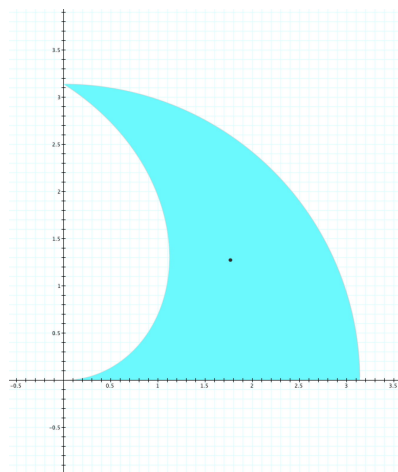
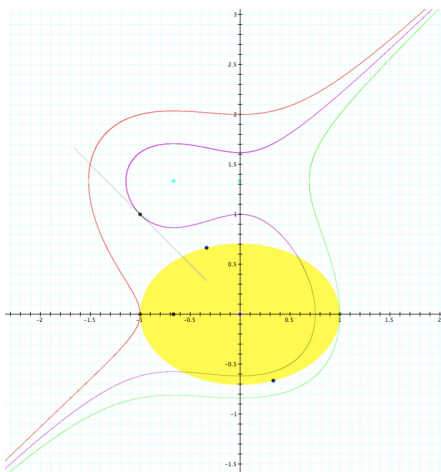
(c) La base B è il quarto di disco di centro l'origine e raggio $a\pi$; e il flusso del rotore $\nabla \times F = (0, 0, -2)$ attraverso B risulta $\int_B (0, 0, -2) \cdot (0, 0, 1) dx dy = -2 \text{Area } B = -2 \frac{1}{4} (\pi a)^2 \pi = -\frac{1}{2} \pi^3 a^2$. D'altra parte la circuitazione oraria di F lungo il bordo ∂B partendo dall'origine risulta $\int_0^{\pi a} (y, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\pi \sin \theta, -a\pi \cos \theta, 0) \cdot (-a\pi \sin \theta, a\pi \cos \theta, 0) d\theta + \int_{\pi a}^0 (0, -x, 0) \cdot (1, 0, 0) dx = 0 - a^2 \pi^2 (-\frac{\pi}{2}) + 0 = -\frac{1}{2} \pi^3 a^2$, analogamente a prima. Ciò prova la formula di Kelvin-Stokes.

4. (a) L'equazione scalare del secondo ordine $y^2 + (y')^2 = 2(y'' + 1)$ è equivalente al sistema autonomo del primo ordine nel

piano $(y, p) = (y, y')$ (il piano delle fasi) dato da $\left\{ \frac{y'}{p} = \frac{p}{\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1} \right.$. La funzione $f(y, p) = (p, \frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1)$ è di classe C^∞ su tutto il piano delle fasi, dunque esistenza e unicità locale sono assicurate per ogni dato iniziale (e con esse anche l'unicità globale), mentre essendoci crescita quadratica (non sublineare) non possiamo dire nulla sull'esistenza globale, che tuttavia non si può escludere a priori per alcune delle soluzioni. Una soluzione costante $y \equiv \alpha$ deve soddisfare $\alpha^2 = 2$, dunque le uniche soluzioni costanti sono $y \equiv \pm\sqrt{2}$. Se poi $\varphi(t)$ è una soluzione su un intervallo I , posto $\psi(t) := \varphi(-t)$ per $t \in -I$ si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$, perciò $\psi(t)^2 + (\psi'(t))^2 = \varphi(-t)^2 + (\varphi'(-t))^2 = 2(\varphi''(-t) + 1) = 2(\psi''(t) + 1)$, dunque anche $\varphi(-t)$ è soluzione su $-I$; un'analoga verifica per $-\varphi(-t)$ invece non funziona. Ciò però non implica che le soluzioni definite in $t = 0$ siano pari, perché siamo in un caso del secondo ordine e per fornire un dato iniziale in $t = 0$ non basta fornire il valore della funzione ma serve anche quello della derivata. Ad esempio la soluzione del punto (b) è definita all'intorno di $t = 0$ (in realtà il suo dominio sarà $\mathbb{R}$) ma non è pari (come si nota da $y'(0) \neq 0$).

(b) L'equazione totale associata al sistema del primo ordine è $\omega = (\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1) dy - p dp = 0$. La forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial(\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y} = p \neq 0$), ma poiché $\frac{1}{-p}(\frac{\partial(\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}) = -1$ non dipende da p si ha che e^{-y} è un fattore integrante per ω . In effetti, se $F(y, p)$ deve soddisfare $\frac{\partial F}{\partial y} = (\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1)e^{-y}$ e $\frac{\partial F}{\partial p} = -pe^{-y}$, dalla seconda abbiamo che $F = -\frac{1}{2}p^2e^{-y} + \phi(y)$ per una certa funzione ϕ , così dalla prima si ricava $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}p^2e^{-y} + \phi'(y) = (\frac{1}{2}(y^2 + p^2) - 1)e^{-y}$, ovvero $\phi'(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)e^{-y}$: integrando per parti si trova $\phi(y) = -\frac{1}{2}(y^2 + 2y)e^{-y}$, da cui $F(y, p) = -\frac{1}{2}(y^2 + p^2 + 2y)e^{-y}$. Le curve integrali nel piano delle fasi sono date perciò dalle curve di livello di F , ovvero $y^2 + p^2 + 2y = ke^y$ con $k \in \mathbb{R}$. • Imponendo la condizione iniziale $(y(0), p(0)) = (-1, 1)$ si ottiene $k = 0$, ovvero l'equazione del primo ordine $(y')^2 = -y^2 - 2y$, che ricordando che $y'(0) = 1 > 0$ dà $y' = \sqrt{-y^2 - 2y} = \sqrt{1 - (y+1)^2}$. Posto $u = y + 1$ (dunque $u(0) = y(0) + 1 = 0$) si ricava $u' = \sqrt{1 - u^2}$; separando le variabili e integrando si ha $\arcsin u = t + k$ con $k = 0$, da cui $u(t) = \sin t$, e dunque infine $y(t) = \sin t - 1$, soluzione su tutto $\mathbb{R}$.

5. L'equazione $y''' = 1 - iy - 4 \sin t$, ovvero $y''' + iy = 1 - 4 \sin t$ è lineare a coefficienti costanti, dunque si può affermare fin d'ora che il dominio delle sue soluzioni sarà $\mathbb{R}$. L'equazione caratteristica $\lambda^3 + i = 0$ ha come soluzioni le radici cubiche di $-i$, ovvero i e $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}i$, dunque le soluzioni della parte omogenea sono $Ae^{it} + (Be^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t})e^{-\frac{1}{2}it}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$. Usando poi la formula di Eulero $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ possiamo scrivere i termini non omogenei come $b_1(t) + b_2(t) + b_3(t)$ con $b_1(t) = 1$, $b_2(t) = 2ie^{it}$ e $b_3(t) = -2ie^{-it}$. Essendo casi non risonanti, una soluzione particolare per b_1 sarà una costante, che si vede subito essere $-i$, mentre una per b_3 sarà del tipo ke^{-it} con $k \in \mathbb{C}$ da determinare, e i calcoli danno $k = -1$. Invece per b_2 una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_3(t) = kte^{it}$ con $k \in \mathbb{C}$ da determinare (si noti che i è radice caratteristica semplice): derivando si ottiene $\tilde{y}_3'(t) = k(1 + it)e^{it}$, $\tilde{y}_3''(t) = k(2i - t)e^{it}$ e $\tilde{y}_3'''(t) = k(-3 - it)e^{it}$, e dunque $\tilde{y}_3''' + i\tilde{y}_3 = -3ke^{it} = 2ie^{it}$ che dà $k = -\frac{2}{3}i$. Le soluzioni dell'equazione data sono dunque tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A - \frac{2}{3}it)e^{it} + (Be^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t})e^{-\frac{1}{2}it} - i - e^{-it}$ al variare di $A, B, C \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = A + B + C - i - 1 = 0$ si ricava $C = -(A + B + 1 + i)$, ovvero $y(t) = (A - \frac{2}{3}it)e^{it} + (Be^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} - (A + B + 1 + i)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t})e^{-\frac{1}{2}it} - i - e^{-it}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$.



1. Ex. 1. 2. Ex. 2. 3. Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (07/09/2021)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2020/21

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (y^2 - xz, x + y + 2z)$.
 - (a) Dire quali curve di livello di g sono regolari. Notato che la curva di livello Γ per $P(3, -2, 0)$ lo è, parametrizzarla in P fino all'ordine lineare e trovarne in due modi la retta ivi tangente.
 - (b) Determinare nella curva Γ eventuali punti stazionari in quota. Mostrare poi che la curva Γ è compatta, trovandone i punti più in alto e più in basso (perché esistono?).
2. Nel piano cartesiano sia $A = A' \cup A''$ ove $A' = \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ e $A'' = \{(x, y) : x \geq 0, x \leq y \leq a\}$ (con $a > 0$).
 - (a) Disegnare A e calcolarne area e baricentro geometrico.
 - (b) Dire se $\frac{x}{\sqrt{y}}$ è integrabile su A , e nel caso calcolarne l'integrale. Stessa domanda per $\frac{x^2+y^2}{y}$.
3. Nel piano (x, z) dello spazio cartesiano si abbia la curva $\gamma = \{(x, 0, z) : x, z \geq 0, rx = 2(r^2 - z^2)\}$ (ove $r > 0$). Detta γ' l'analoga curva nel piano (y, z) , sia S la superficie ottenuta unendo a due a due con segmenti i punti di γ coi rispettivi di γ' alla stessa quota z , e sia E il solido che S racchiude nel 1o ottante.
 - (a) Disegnare E e calcolarne il volume.
 - (b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (z, 0, -r)$.
 - (c) Verificare la formula di Green per L (la componente della superficie esterna di E sul piano verticale (x, z)) e F (visto come campo nel piano (x, z)).
4. È data l'equazione differenziale totale $2xy dx + (2x^2 - 3y) dy = 0$.
 - (a) Determinare gli equilibri e le curve integrali dell'equazione.
 - (b) Esibire a scelta uno o più sistemi piani autonomi all'intorno di $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$ associati all'equazione totale, e risolvere per essi il problema di Cauchy con questo dato iniziale.
5. Descrivere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - (\alpha - 2)y \\ \dot{y} = x + \alpha y \end{cases}.$$

Analisi Matematica III – Esame Scritto (07/09/2021) – Soluzioni

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana di $g(x, y, z) = (y^2 - xz, x + y + 2z)$ è $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z & 2y & -x \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; imponendo che abbia rango non massimo si ha $z = -2y$ e $x = -2y$, condizioni soddisfatte dai punti della retta $(4\alpha, -\alpha, 2\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sui quali g vale $(-7\alpha^2, 7\alpha)$. Dunque tutte le curve di livello di g non di questo tipo sono regolari, in particolare lo è quella Γ di $P(3, -2, 0)$ su cui vale $g(P) = (4, 1)$. Essendo $J_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, attorno P si possono esplicitare ad esempio $x(z)$ e $y(z)$ con $x(0) = 3$ e $y(0) = -2$: derivando rispetto z l'identità $\begin{cases} y^2 - xz = 4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} 2yy' - x'z - x = 0 \\ x' + y' + 2 = 0 \end{cases}$ (che in $z = 0$ dà $\begin{cases} -4y'(0) - 3 = 0 \\ x'(0) + y'(0) + 2 = 0 \end{cases}$, da cui $x'(0) = -\frac{5}{4}$ e $y'(0) = -\frac{3}{4}$), così $(x(z), y(z)) = (3 - \frac{5}{4}z + o_0(z), -2 - \frac{3}{4}z + o_0(z))$, e lo sviluppo al primo ordine $\begin{cases} x = 3 - \frac{5}{4}z \\ y = -2 - \frac{3}{4}z \end{cases}$ dà la retta tangente affine a Γ in P che può essere trovata anche tramite $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} 4y + 3z = -8 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ (espressione equivalente).

(b) Iniziamo cercando i punti stazionari su Γ di $f(x, y, z) = z$: imponendo con Lagrange che la matrice 3×3 le cui prime due righe sono quelle di $J_g(x, y, z)$ e la terza il gradiente $\nabla f = (0, 0, 1)$ abbia determinante nullo si trova $2y + z = 0$, condizione che in Γ individua i due punti $A(\frac{4+3\sqrt{29}}{7}, \frac{-1+\sqrt{29}}{7}, \frac{2(1-\sqrt{29})}{7})$ e $B(\frac{4-3\sqrt{29}}{7}, \frac{-1-\sqrt{29}}{7}, \frac{2(1+\sqrt{29})}{7})$. D'altra parte la curva Γ è un chiuso di $\mathbb{R}^3$ (perché definita da un sistema di equazioni continue); sostituendo poi $y = 1 - x - 2z$ in $y^2 - xz = 4$ si ottiene $x^2 + 3xz + 4z^2 - 2x - 4z = 3$ (proiezione di Γ sul piano (x, z)) che è un'ellisse in quanto il discriminante della parte quadratica è < 0 : ciò mostra che x e z sono limitate e dunque anche $y = 1 - x - 2z$, da cui Γ è anche limitata e perciò compatta. Pertanto in base a Weierstrass la funzione f assumerà estremi assoluti su Γ , che dovranno necessariamente essere raggiunti in A e B , gli unici punti stazionari trovati in precedenza. Ne discende che il punto più alto di Γ è B (a quota $z = \frac{2(1+\sqrt{29})}{7} \sim 1,8$) e il più basso è A (a quota $z = \frac{2(1-\sqrt{29})}{7} \sim -1,3$).

2. (a) (Figura 2) L'area di A , unione del quarto di cerchio A' e del triangolo A'' , vale $\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{\pi+2}{4}a^2$. Si ha poi $\int_A x dx dy = \int_{A'} x dx dy + \int_{A''} x dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \rho d\rho + \int_0^a dx \int_x^a x dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho + \int_0^a x(a-x) dx = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = -\frac{1}{6}a^3$ e $\int_A y dx dy = \int_{A'} y dx dy + \int_{A''} y dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho \sin \theta \rho d\rho + \int_0^a dx \int_x^a y dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho + \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2}a^3$: così dividendo per l'area il baricentro risulta $(-\frac{2}{3(\pi+2)}a, \frac{8}{3(\pi+2)}a)$.

(b) Una funzione è integrabile su A se e solo se lo è sia su A' che su A'' , e l'integrale sarà la somma dei due. Notiamo poi che sia $\frac{x}{\sqrt{y}}$ che $\frac{x^2+y^2}{y}$ hanno segno costante su A' e A'' , dunque per Fubini e Tonelli si può controllare tramite integrali iterati.

• Per $\int_{A'} \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$ si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho \sin \theta}} \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \int_0^a \rho^{\frac{3}{2}} d\rho = [2\sqrt{\sin \theta}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^a = -\frac{4}{5}a^2\sqrt{a}$, mentre per $\int_{A''} \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$ si ha $\int_0^a dx \int_x^a \frac{x}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^a x(\sqrt{a}-\sqrt{x}) dx = [x^2\sqrt{a} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}]_0^a = \frac{1}{5}a^2\sqrt{a}$: pertanto la funzione $\frac{x}{\sqrt{y}}$ è integrabile su A , con $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy = -\frac{4}{5}a^2\sqrt{a} + \frac{1}{5}a^2\sqrt{a} = -\frac{3}{5}a^2\sqrt{a}$. • Per $\int_{A'} \frac{x^2+y^2}{y} dx dy$ si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho^2}{\rho \sin \theta} \rho d\rho = \frac{1}{3}a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin \theta} d\theta$, integrale che però diverge in π^- ove $\sin \theta$ ha uno zero semplice: questo già mostra che $\frac{x^2+y^2}{y}$ non è integrabile su A .

3. (a) (Figura 3) Calcoliamo il volume di E in tre modi. (i) (Per z -fette) Fissato $0 \leq z \leq r$ la z -fetta è un triangolo rettangolo isoscele di cateto $\frac{2}{r}(r^2 - z^2)$, dunque si ha $\text{Vol } E = \int_0^r \frac{1}{2}(\frac{2}{r}(r^2 - z^2))^2 dz = \frac{2}{r^2} \int_0^r (r^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{r^2} [r^2z - \frac{2}{3}r^2z^3 + \frac{1}{5}z^5]_0^r = 2(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5})r^3 = \frac{16}{15}r^3$. (ii) La superficie S può essere parametrizzata, seguendo la sua costruzione, tramite i segmenti orizzontali che la formano unendo i punti $(\frac{2}{r}(r^2 - z^2), 0, z)$ e $(0, \frac{2}{r}(r^2 - z^2), z)$ al variare di $0 \leq z \leq r$, ovvero $(1-t)(\frac{2}{r}(r^2 - z^2), 0, z) + t(0, \frac{2}{r}(r^2 - z^2), z)$ ($(1-t)\frac{2}{r}(r^2 - z^2), t\frac{2}{r}(r^2 - z^2), z$): qui si intende che i parametri z e t variano con $0 \leq z \leq r$ e $0 \leq t \leq 1$. Parametrizzata S risulta possibile parametrizzare anche l'intero solido E facendo muovere ciascun punto di S lungo il segmento orizzontale che lo congiunge all'asse z , ovvero tramite $(u(1-t)\frac{2}{r}(r^2 - z^2), ut\frac{2}{r}(r^2 - z^2), z)$ ove i parametri (u, z, t) variano con $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq z \leq r$ e $0 \leq t \leq 1$ (si noti che per $u = 1$ il punto è sulla superficie S , mentre per $u = 0$ è sull'asse z alla stessa quota). Il cambio di variabili $(x, y, z) = \phi(u, z, t) = (u(1-t)\frac{2}{r}(r^2 - z^2), ut\frac{2}{r}(r^2 - z^2), z)$ ci permette in particolare di calcolare il volume di E in modo alternativo: lo jacobiano $\begin{pmatrix} (1-t)\frac{2}{r}(r^2 - z^2) & -u(1-t)\frac{4}{r}z & -u\frac{2}{r}(r^2 - z^2) \\ t\frac{2}{r}(r^2 - z^2) & -ut\frac{4}{r}z & u\frac{2}{r}(r^2 - z^2) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante $u\frac{4}{r^2}(r^2 - z^2)^2$, pertanto

$\text{Vol } E = \int_E dx dy dz = \int_0^r du \int_0^r dz \int_0^1 u\frac{4}{r^2}(r^2 - z^2)^2 dt = \frac{4}{r^2} \int_0^r u du \int_0^r (r^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{r^2} \int_0^r (r^2 - z^2)^2 dz$, poi il calcolo procede come prima. (iii) (Come sottografico) Dalla parametrizzazione appena vista di S si vede subito che $x + y = \frac{2}{r}(r^2 - z^2)$, da cui ricavando z si ottiene $z(x, y) = \sqrt{\frac{n}{2}(2r - x - y)}$: pertanto, detto T il triangolo di base sul piano (x, y) (ovvero T è dato da $0 \leq x \leq 2r$ e $x + y \leq 2r$), il volume di E è calcolabile anche come l'integrale doppio $\int_T z(x, y) dx dy$. Sostituendo le variabili (x, y) con (x, s) ove $s = x + y$, il triangolo T diventa il triangolo $T' = \{(x, s) : 0 \leq s \leq 2r, 0 \leq x \leq s\}$ e dunque l'integrale diventa $\int_0^{2r} ds \int_0^s \sqrt{\frac{n}{2}(2r - s)} dx = \int_0^{2r} s \sqrt{\frac{n}{2}(2r - s)} ds$. Con l'ulteriore cambio di variabile $\frac{n}{2}(2r - s) = \alpha^2$ (da cui $s = \frac{2}{r}(r^2 - \alpha^2)$ e $ds = -\frac{4}{r}\alpha d\alpha$) l'integrale si trasforma in $\frac{8}{r^2} \int_0^r \alpha^2(r^2 - \alpha^2) d\alpha$, che calcolato ridà $\frac{16}{15}r^3$.

(b) Il campo $F = (z, 0, -r)$ ha divergenza nulla, dunque per verificare Gauss va mostrato che è nullo anche il suo flusso totale uscente dalla superficie esterna ∂E (fatta dalle componenti L, L', S e T). • Poiché F è parallelo al piano (x, z) , il suo flusso attraverso L è nullo. Il flusso uscente da L' (l'analogo di L nel piano (y, z)) è dato da $\int_{L'} (z, 0, -r) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -\int_{L'} z dy dz = -\int_0^r dz \int_0^{\frac{2}{r}(r^2 - z^2)} z dy = -\frac{2}{r} \int_0^r z(r^2 - z^2) dz = -\frac{2}{r} [\frac{1}{2}r^2z^2 - \frac{1}{4}z^4]_0^r = -\frac{1}{2}r^3$, mentre quello uscente da T

è $\int_T (0, 0, -r) \cdot (0, 0, -1) dx dy = r \text{Area } T = 2r^3$. Resta solo da calcolare il flusso attraverso S , che parametrizziamo come prima tramite $(x, y, z) = \gamma(z, t) = ((1-t)\frac{2}{r}(r^2 - z^2), t\frac{2}{r}(r^2 - z^2), z)$ (normale associata entrante): esso vale $-\int_0^r dz \int_0^1 \det \begin{pmatrix} z & -\frac{4}{r}(1-t)z & -\frac{2}{r}(r^2 - z^2) \\ 0 & -\frac{4}{r}tz & \frac{2}{r}(r^2 - z^2) \\ -r & \frac{2}{r}(r^2 - z^2) & 0 \end{pmatrix} dt = -\int_0^r dz \int_0^1 \frac{6}{r} z(r^2 - z^2) dt = -\frac{6}{r} \int_0^r z(r^2 - z^2) dz = -\frac{6}{r} [\frac{1}{2}r^2 z^2 - \frac{1}{4}z^4]_0^r = -\frac{3}{2}r^3$. Il flusso totale di F uscente da ∂E è dunque in effetti $0 - \frac{1}{2}r^3 + 2r^3 - \frac{3}{2}r^3 = 0$, come si voleva.

(c) Scritto $F = (F_1, F_2) = (z, -r)$ nel piano verticale (x, z) , per verificare Green va mostrato che l'integrale doppio $\int_L (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}) dx dz = -\text{Area } L = -\int_0^r \frac{2}{r}(r^2 - z^2) dz = -\frac{2}{r} [r^2 z - \frac{1}{3}z^3]_0^r = -\frac{4}{3}r^2$, è pari alla circuitazione antioraria di F lungo il bordo di L . In effetti quest'ultima, partendo dall'origine $(0, 0)$, vale $\int_0^{2r} (0, -r) \cdot (1, 0) dx + \int_0^r (z, -r) \cdot (-\frac{4}{r}z, 1) dz + \int_r^0 (z, -r) \cdot (0, 1) dz = 0 - \int_0^r (\frac{4}{r}z^2 + r) dz + \int_0^r r dz = -\frac{4}{r} [\frac{1}{3}z^3]_0^r = -\frac{4}{3}r^2$, come si voleva.

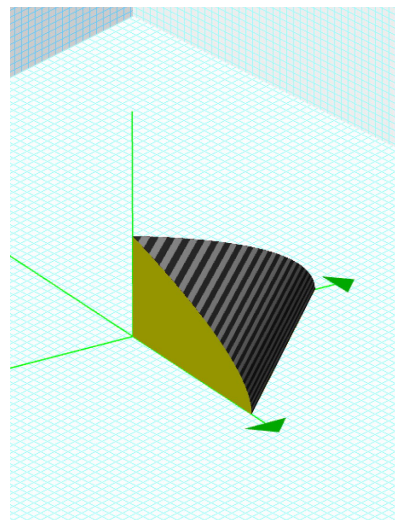
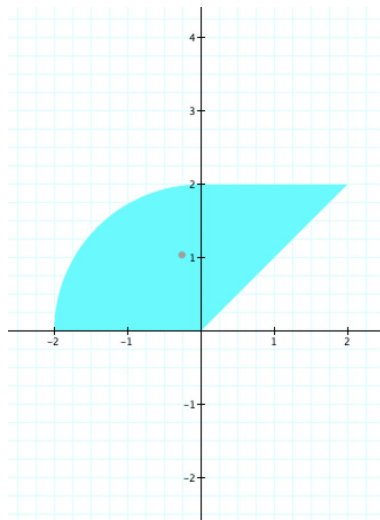
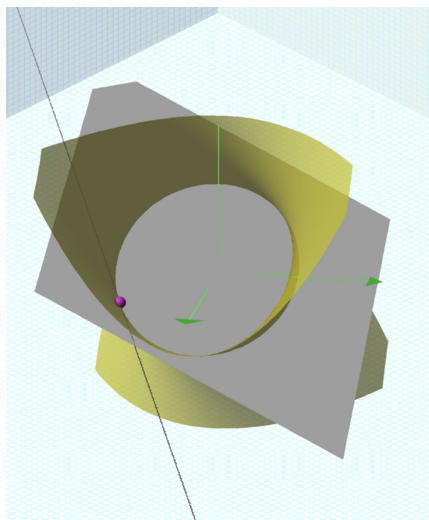
4. (a) La forma $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$ con $p(x, y) = 2xy$ e $q(x, y) = 2x^2 - 3y$ ha un solo equilibrio nel punto $(0, 0)$. Essa non è esatta perché $\frac{\partial p}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial q}{\partial x} = 4x$; tuttavia, poiché $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}) = \frac{1}{y}$ non dipende da x , sappiamo che $\exp(\int \frac{1}{y} dy) = y$ è un fattore integrante, ovvero $y\omega$ è esatta. In effetti, detta $F(x, y)$ una primitiva, deve essere $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2$: dalla prima si ha $F(x, y) = x^2y^2 + \psi(y)$, e dalla seconda $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + \psi'(y) = 2x^2y - 3y^2$, ovvero $\psi'(y) = -3y^2$ che dà $\psi(y) = -y^3$. Le curve integrali sono dunque $F(x, y) = (x^2 - y)y^2 = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ad esempio, per $k = 0$ si ha la parabola $y = x^2$, composta di tre orbite: l'equilibrio $(0, 0)$ e le due mezze parabole con $x \geq 0$.

(b) Il punto $(x(0), y(0)) = (-1, 1)$ appartiene alla curva integrale con $k = 0$, e la sua orbita è la mezza parabola $y = x^2$ con $x < 0$. Ricordiamo poi che due sistemi piani autonomi $\begin{cases} \dot{x} = a'(x, y) \\ \dot{y} = b'(x, y) \end{cases}$ e $\begin{cases} \dot{x} = a''(x, y) \\ \dot{y} = b''(x, y) \end{cases}$ sono equivalenti all'intorno di un punto se vale $(a'', b'') = (\rho a', \rho b')$ ove $\rho(x, y)$ è una funzione continua mai nulla in un intorno del punto stesso; per ognuno di questi sistemi, la soluzione trovata dovrà avere la stessa orbita, nel nostro caso la mezza parabola. Vediamo tre esempi.

• Il sistema naturalmente associato all'equazione totale $\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$ è $\begin{cases} \dot{x} = -q(x, y) = 3y - 2x^2 \\ \dot{y} = p(x, y) = 2xy \end{cases}$: posto $y = x^2$ nella prima si ha $\dot{x} = x^2$, da cui tenuto presente che $x(0) = -1$ si ottiene $x(t) = -\frac{1}{1+t}$, da cui $y(t) = x(t)^2 = \frac{1}{(1+t)^2}$.

• Moltiplicando il sistema per $\rho = x^{-1}$ si ha $\begin{cases} \dot{x} = x^{-1}(3y - 2x^2) \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$. Da $\dot{y} = 2y$ si ottiene $y(t) = e^{2t}$, mentre da $x^2 = y$ si ottiene $x = -e^t$. • Moltiplicando invece per $\rho = x$ si ha $\begin{cases} \dot{x} = x(3y - 2x^2) \\ \dot{y} = 2x^2y \end{cases}$. Inserendo $x^2 = y$ nelle due equazioni si ha $\dot{x} = x^3$ e $\dot{y} = 2y^2$, che coi dati iniziali danno $x(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ e $y(t) = \frac{1}{1-2t}$.

5. Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x - (\alpha - 2)y \\ \dot{y} = x + \alpha y \end{cases}$ è lineare omogeneo, e la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -(\alpha - 2) \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ ha autovalori $\lambda_1 = \alpha - 1$ e $\lambda_2 = 2$. • Se $\alpha \neq 3$, ovvero se gli autovalori sono distinti, autovettori riferiti a essi sono rispettivamente $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dunque una risolvante del sistema è data da $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(\alpha-1)t} & (\alpha-2)e^{2t} \\ -e^{(\alpha-1)t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$: le soluzioni cercate sono allora $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U e^{(\alpha-1)t} + V(\alpha-2)e^{2t} \\ -U e^{(\alpha-1)t} - V e^{2t} \end{pmatrix}$ al variare di $U, V \in \mathbb{C}$. • Se $\alpha = 3$, ovvero se $\lambda = 2$ è un autovalore doppio, sappiamo che $N = A - 2 \text{id} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è nilpotente (infatti $N^2 = 0$), e che una risolvante si calcola come matrice esponenziale $e^{tA} = e^{2t}(\text{id} + tN) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & (1+t)e^{2t} \end{pmatrix}$: le soluzioni cercate saranno $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(1-t)e^{2t} - Vte^{2t} \\ Ute^{2t} + V(1+t)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U - (U+V)t)e^{2t} \\ (V + (U+V)t)e^{2t} \end{pmatrix}$ al variare di $U, V \in \mathbb{C}$.



1. Ex. 1. 2. Ex. 2. 3. Ex. 3.