Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (18/01/2022)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2021/22

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (2xz - y^2 - 2y,\ x + y + 2z)$.

(a) Dire quali insiemi di livello di g sono curve regolari. Detta Γ la curva passante per $A(1, 0, 0)$, parametrizzare Γ attorno ad A e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in A.

(b) Dimostrare che Γ è compatta, e calcolare gli estremi assoluti di $f(x, y, z) = y - z$ su Γ.

2. Nel primo ottante $x, y, z \geq 0$ dello spazio cartesiano si consideri il cubo di lato $2a$ (ove $a > 0$) con uno spigolo nell'origine, e sia E il solido dato dai punti del cubo tali che $z^2 \leq x^2 + y^2$.(1)

(a) Detta P la parte orizzontale di superficie esterna di E contenuta nel piano $z = 2a$, determinare il baricentro geometrico di P.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, x, 0)$.

(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per il campo F e la superficie P.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + \alpha(y')^2 = 4y + (\alpha - 1)e^{2t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni?

(b) Risolvere il problema per $\alpha = 1$.

(c) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

(1) Si noti che $z^2 = x^2 + y^2$ è il cono di vertice l'origine generato dalla rotazione attorno all'asse z della retta $z = x$ nel piano (x, z).

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (18/01/2022) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana di $g(x,y,z) = (2xz - y^2 - 2y,\ x+y+2z)$ è $\mathsf{J}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & -2(y+1) & 2x \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; imponendo che abbia rango non massimo si ha $z = -2(y+1)$ e $x = -2z$, condizioni soddisfatte dai punti della retta $(2\alpha, -1-\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sui quali g vale $(3\alpha^2+1, 3\alpha-1)$. Dunque tutte le curve di livello di g non di questo tipo sono regolari, in particolare lo è quella Γ di $A(1,0,0)$ su cui vale $g(P) = (0,1)$. Essendo $\mathsf{J}_g(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, attorno P si possono esplicitare ad esempio $x(z)$ e $y(z)$ con $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$: derivando rispetto z l'identità $\begin{cases} 2xz - y^2 - 2y = 0 \\ x+y+2z = 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} 2x'z + 2x - 2yy' - 2y' = 0 \\ x' + y' + 2 = 0 \end{cases}$ (che in $z = 0$ dà $\begin{cases} 2 - 2y'(0) = 0 \\ x'(0) + y'(0) + 2 = 0 \end{cases}$, da cui $x'(0) = -3$ e $y'(0) = 1$), e derivando di nuovo si ha $\begin{cases} 2x''z + 2x' + 2x' - 2(y')^2 - 2yy'' - 2y'' = 0 \\ x'' + y'' = 0 \end{cases}$ (che in $z = 0$ dà $\begin{cases} -12 - 2 - 2y''(0) = 0 \\ x''(0) + y''(0) = 0 \end{cases}$, da cui $x''(0) = -y''(0) = 7$). Si ha così $(x(z), y(z)) = (1 - 3z + \frac{7}{2}z^2 + o_0(z^2), z - \frac{7}{2}z^2 + o_0(z^2))$, e lo sviluppo al primo ordine $\begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = z \end{cases}$ dà la retta tangente affine a Γ in P, data anche da $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{cases} y = z \\ x+y+2z = 1 \end{cases}$ (espressione equivalente).

(b) La curva Γ è un chiuso di $\mathbb{R}^3$ (perché definita da un sistema di equazioni continue); sostituendo poi $x = 1 - y - 2z$ in $2xz - y^2 - 2y = 0$ si ottiene $y^2 + 2yz + 4z^2 - 2y + 2z = 0$ (proiezione di Γ sul piano (y,z)) che è un'ellisse in quanto il discriminante della parte quadratica è < 0: ciò mostra che y e z sono limitate e dunque anche $x = 1 - y - 2z$, da cui Γ è anche limitata e perciò compatta. Pertanto in base a Weierstrass la funzione $f(x,y,z) = y - z$ assumerà estremi assoluti su Γ. Iniziamo cercandone i punti stazionari: imponendo con Lagrange che la matrice 3×3 le cui prime due righe sono quelle di $\mathsf{J}_g(x,y,z)$ e la terza il gradiente $\nabla f = (0,1,-1)$ abbia determinante nullo si trova $x = y + 3z + 1$, condizione che in Γ individua i due punti $A(1,0,0)$ (già noto) e $B(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$. Essendo $f(A) = 0$ e $f(B) = -\frac{14}{3}$, ne ricaviamo che A e B sono rispettivamente il punto di massimo e minimo assoluto per f su Γ.

2. (a) (Figura 2) La parte orizzontale P di superficie esterna di E contenuta nel piano $z = 2a$ può essere vista come la differenza tra un quadrato P' e un quarto di cerchio P'', e per simmetria basterà calcolare la x del baricentro. Si ha $\int_P x\,dx\,dy = \int_{P'} x\,dx\,dy - \int_{P''} x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_0^{2a} x\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = 4a^3 - \frac{8}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$, e dividendo per l'area $(4-\pi)a^2$ si ha $x_G = \frac{4}{3(4-\pi)}a$. Il baricentro geometrico di P è dunque $(\frac{4}{3(4-\pi)}a, \frac{4}{3(4-\pi)}a, 2a)$.

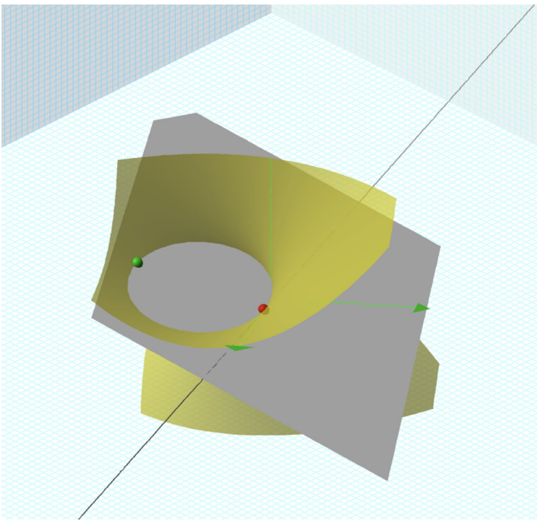
(b) Poiché il campo $F = (0,x,0)$ è parallelo all'asse y, le uniche componenti della superficie esterna di E attraverso le quali il flusso uscente di F può non essere nullo sono quella conica posteriore C, quella triangolare T nel piano $y = 0$ e quella quadrata Q nel piano $y = 2a$. Usando la definizione di flusso si ha $\Phi_T(F) = \int_T (0,x,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_0^{2a} dx \int_0^{2a-x} x\,dz = -\int_0^{2a} x(2a-x)\,dx = -\frac{8}{3}a^3$ e $\Phi_Q(F) = \int_Q (0,x,0)\cdot(0,1,0)\,dx\,dz = 2a\int_0^{2a} x\,dx = 4a^3$. Quanto alla superficie conica C, usando le coordinate cilindriche (ρ,θ) essa può essere parametrizzata da $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$ con $0 \le \rho \le 2a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante nel cono dunque uscente da E), e si ha così $\Phi_C(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\,d\rho = -[-\frac{1}{4}\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} = -\frac{4}{3}a^3$. Il flusso totale di F uscente dalla superficie esterna di E è dunque $-\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 - \frac{4}{3}a^3 = 0$, coerentemente col fatto che la divergenza di F è nulla. Ciò verifica il teorema di Gauss.

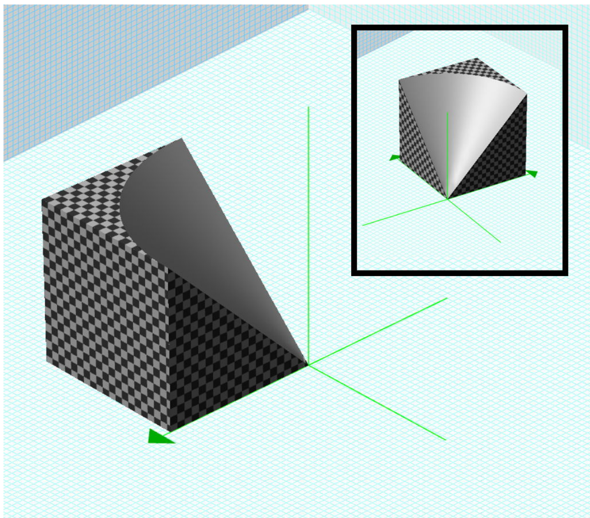
(c) Il rotore di F è $\nabla \times F = (0,0,1)$, e il suo flusso attraverso la superficie P nel piano $z = 2a$ (usando la normale in su) è $\Phi_P(\nabla\times F) = \int_P (0,0,1)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \text{Area}\,P = (4-\pi)a^2$. D'altra parte la circuitazione antioraria di F lungo il bordo di P (partendo dal punto $(2a,0,0)$) è $\oint_{\partial P} F\cdot d\ell = \int_0^{2a} (0,2a,0)\cdot(0,1,0)\,dy + 0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (0, 2a\cos\theta, 0)\cdot(-2a\sin\theta, 2a\cos\theta, 0)\,d\theta = 4a^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^2\theta\,d\theta = 4a^2(1 - [\frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}) = 4a^2(1 - \frac{\pi}{4}) = (4-\pi)a^2$, come previsto dalla formula di Kelvin-Stokes.

3. (a) L'equazione $y'' + \alpha(y')^2 = 4y + (\alpha-1)e^{2t}$ è equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $(y,p) = (y,y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4y - \alpha p^2 + (\alpha-1)e^{2t} \end{cases}$. La funzione $f(t,y,p) = (p, 4y - \alpha p^2 + (\alpha-1)e^{2t})$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$, dunque la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, se $\alpha \ne 0$ non si può dire nulla a priori (infatti c'è crescita quadratica), mentre se $\alpha = 0$ l'equazione diventa lineare e dunque la soluzione sarà certamente definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' + (y')^2 = 4y$, autonoma del 2o ordine ed equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $\begin{cases} y' = p \\ p' = 4y - p^2 \end{cases}$. Passando all'equazione totale $\omega = (4y - p^2)\,dy - p\,dp = 0$ e notando che $\frac{1}{-p}(\frac{\partial(4y-p^2)}{\partial p} - \frac{\partial(-p)}{\partial y}) = 2$ non dipende da p, si ha che $\rho(y) = e^{2y}$ è un fattore integrante. Detta $F(y,p)$ una primitiva di $e^{2y}\omega$, da $\partial_p F = -pe^{2y}$ si ha $F(y,p) = -\frac{1}{2}p^2e^{2y} + \varphi(y)$ con φ da determinare, e da $\partial_y F = -pe^{2y} + \varphi'(y) = (4y - p^2)e^{2y}$ si ricava $\varphi'(y) = 4ye^{2y}$, da cui integrando $\varphi(y) = (2y-1)e^{2y}$ (a meno di costanti additive). Si ha così $F(y,p) = (-\frac{1}{2}p^2 + 2y - 1)e^{2y}$; essendo nel dato iniziale $F(1, -\sqrt{2}) = 0$, tale valore nullo sarà mantenuto lungo tutta la soluzione cercata. Ci siano allora ricondotti all'equazione del 1o ordine $p^2 = (y')^2 = 2(2y-1)$, da cui $y' = -\sqrt{2(2y-1)}$, a variabili separabili. Ponendo $u = 2(2y-1)$ si ha $\frac{1}{4}u' = \sqrt{u}$, da cui separando le variabili $\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = 2\,dt$ che integrata dà $\sqrt{u} = k - 2t$, e da $u(0) = \frac{1}{2}$ si ricava $k = \sqrt{2}$. Pertanto $\sqrt{u} = \sqrt{2} - 2t$, da cui $u(t) = 2(1 - t\sqrt{2})^2$ e infine $y(t) = t^2 - t\sqrt{2} + 1$.

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' - 4y = -e^{2t}$, lineare del 2o ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono generate da e^{2t} e e^{-2t} mentre, essendo 2 una radice caratteristica semplice, una soluzione particolare per l'equazione completa sarà della forma $\tilde{y}(t) = ate^{2t}$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare, e i conti danno $a = -\frac{1}{4}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque $y(t) = (A - \frac{1}{4}t)e^{2t} + Be^{-2t}$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = A + B = 1$ e $y'(0) = 2A - \frac{1}{4} - 2B = -\sqrt{2}$ si ottiene $(A, B) = (\frac{9-4\sqrt{2}}{16}, \frac{7+4\sqrt{2}}{16})$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (07/02/2022)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2021/22

Cognome-Nome ____ Matr. ___________ - _____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y, z) = xz - y^2 + 3x$.

(a) Dire quali insiemi di livello di g sono superfici regolari. Detta S la superficie per $P(-2, -1, 1)$, parametrizzare S attorno a P con una serie di Taylor fino all'ordine quadratico e determinare in due modi il piano tangente affine a S in P.

(b) Determinare eventuali punti stazionari di S per la distanza dall'origine, chiarendo la natura di almeno uno di essi.

2. Nel piano cartesiano si disegni $A = \{(x, y) : 0 \le x \le a,\ x(1 - \frac{x}{a}) \le y \le x\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare (se convergono) gli integrali $\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ e $\int_A \frac{1}{y}\, dx\, dy$.
In generale, dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali $\int_A x^\alpha\, dx\, dy$ e $\int_A y^\alpha\, dx\, dy$.

Si consideri ora A nel piano verticale (x, z), e sia E il solido del primo ottante che si ottiene ruotando A di un angolo retto attorno all'asse z in senso antiorario.

(b) Calcolare volume e baricentro geometrico di E.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, 0, z)$.

3. Si abbia il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \beta(t) \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$ in $(x(t), y(t))$, con $(x(0), y(0)) = (1, -2)$.

(a) Se $\beta(t)$ è una funzione continua definita in un intorno di $t = 0$, cosa si può affermare riguardo a esistenza e unicità della soluzione?

(b) Posto $\beta(t) = 0$, si determini un integrale primo del sistema e la curva integrale della soluzione del problema di Cauchy assegnato. Si calcoli poi esplicitamente tale soluzione.

(b) Posto $\beta(t) = 2 \sin t$, determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (07/02/2022) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Il gradiente di $g(x,y,z) = xz - y^2 + 3x$, ovvero $\nabla g = (z+3, -2y, x)$, si annulla solo in $(0,0,-3)$: dunque tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne eventualmente quella di livello 0 nel punto $(0,0,-3)$. In particolare è regolare la superficie di livello S passante per $P(-2,-1,1)$, ovvero $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = xz - y^2 + 3x = g(P) = -9\}$. Da $\nabla g(P) = (4,2,-2) = 2(2,1,-1)$ si ricava subito il piano tangente affine a S in P dato da $(2,1,-1)\cdot(x+2, y+1, z-1) = 0$, ovvero $2x + y - z + 6 = 0$, e si deduce che si può ad esempio esplicitare $z(x,y)$ con $z(-2.-1) = 1$ e $\nabla z(-2,-1) = (2,1)$. Derivando parzialmente l'identità $g(x,y,z(x,y)) \equiv 0$ si ricava $z + x\dot{z}_x + 3 = 0$ e $x\dot{z}_y - 2y = 0$ da cui calcolando per $(x,y) = (-2,-1)$ si ha $1 - 2\dot{z}_x(-2,-1) + 3 = 0$ e $-2\dot{z}_y(-2,-1) + 2 = 0$, ovvero nuovamente $\dot{z}_x(-2,-1) = 2$ e $\dot{z}_y(-2,-1) = 1$; derivando ancora si ottiene poi $2\dot{z}_x + x\ddot{z}_{xx} = 0$, $\dot{z}_y + x\ddot{z}_{xy} = 0$ e $x\ddot{z}_{yy} - 2 = 0$ da cui calcolando per $(x,y) = (-2,-1)$ si ha $4 - 2\,\ddot{z}_{xx}(-2,-1) = 0$, $1 - 2\,\ddot{z}_{xy}(-2,-1) = 0$ e $-2\,\ddot{z}_{yy}(-2,-1) - 2 = 0$, ovvero $\ddot{z}_{xx}(-2,-1) = 2$, $\ddot{z}_{xy}(-2,-1) = \frac{1}{2}$ e $\ddot{z}_{yy}(-2,-1) = -1$. La parametrizzazione di S attorno a P è dunque data da $z = 1 + 2(x+2) + 1(y+1) + \frac{1}{2}\big(2(x+2)^2 + 1(x+2)(y+1) - 1(y+1)^2\big) + \cdots$, e il troncamento al primo ordine $z = 1 + 2(x+2) + 1(y+1)$ ridà il piano tangente affine $2x + y - z + 6 = 0$.

(b) La domanda può essere riformulata come la ricerca di eventuali punti stazionari di S per la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. La condizione di Lagrange che $\nabla g = (z+3, -2y, x)$ e $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ siano paralleli equivale al sistema dato da $z+3 = -2x$ e $x = -2z$, da cui già si ricava $x = -2$ e $z = 1$; imponendo poi l'appartenenza a S si ottiene $y = \pm 1$. Si ottengono dunque i due punti stazionari $P(-2,-1,1)$ (già noto) e $P'(-2,1,1)$, per determinare la natura dei quali servirà una parametrizzazione locale di S. Ad esempio per P, usando quanto trovato nel punto precedente si può studiare il carattere di $(x,y) = (-2,-1)$ per $F(x,y) = f(x,y,z(x,y)) = x^2 + y^2 + z(x,y)^2$. Si ha $\nabla F = (2x + 2z\dot{z}_x, 2y + 2z\dot{z}_y)$, da cui $\nabla F(-2,-1) = (-4+4, -2+2) = (0,0)$ come previsto; si ha poi $\mathsf{H}_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1 + \dot{z}_x^2 + z\ddot{z}_{xx}) & 2(\dot{z}_x\dot{z}_y + z\ddot{z}_{xy}) \\ 2(\dot{z}_x\dot{z}_y + z\ddot{z}_{xy}) & 2(1 + \dot{z}_y^2 + z\ddot{z}_{yy}) \end{pmatrix}$, da cui $\mathsf{H}_F(-2,-1) = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, che essendo definita positiva mostra che P è punto di minimo locale stretto per f su S, ovvero localmente di minima distanza dall'origine. Calcoli analoghi per P' mostrano che attorno ad esso vale $z = 1 + 2(x+2) - 1(y-1) + \frac{1}{2}\big(2(x+2)^2 - 1(x+2)(y-1) - 1(y-1)^2\big) + \cdots$, $\nabla F(-2,1) = (0,0)$ (come previsto) e $\mathsf{H}_F(-2,1) = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, pure definita positiva, dunque anche P' è localmente di minima distanza dall'origine su S.

2. (a) (Figura 2) Poiché A si trova nel primo quadrante, per Fubini e Tonelli possiamo calcolare integrali iterati e vedere cosa succede. Nel nostro caso converrà naturalmente ragionare per x-sezioni, con $0 \le x \le a$ e $x(1 - \frac{x}{a}) \le y \le x$. • Vale $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^x \frac{1}{x}\,dy = \int_0^a \frac{1}{x}(x - x(1 - \frac{x}{a}))\,dx = \int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}a$ (finito), pertanto $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$ converge con valore $\frac{1}{2}a$. • D'altra parte, ponendo $u = 1 - \frac{x}{a}$ da cui $dx = -a\,du$, vale $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^x \frac{1}{y}\,dy = \int_0^a [\log y]_{x(1-\frac{x}{a})}^x\,dx = -\int_0^a \log(1 - \frac{x}{a})\,dx = -\int_1^0 \log u\,(-a\,du) = -a\int_0^1 \log u\,du = -a[u(\log u\ - 1)]_0^1 = -a(-1-0) = a$, pertanto $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy$ converge con valore a. • Si ha $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^x x^\alpha\,dy = \int_0^a \frac{1}{x}^\alpha(x - x(1 - \frac{x}{a}))\,dx = \int_0^a \frac{x^{\alpha+2}}{a}\,dx$, che per l'integrabilità in 0^+ richiede $\alpha + 2 > -1$, ovvero $\alpha > -3$: e in tal caso si ricava $\int_A x^\alpha\,dx\,dy = \frac{1}{\alpha+3}a^{\alpha+2}$. • Per $\int_A y^\alpha\,dx\,dy$ abbiamo già visto prima il caso $\alpha = -1$. Invece per $\alpha \ne -1$ si ha $\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^x y^\alpha\,dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^a x^{\alpha+1}(1 - (1 - \frac{x}{a})^{\alpha+1})\,dx$. Poiché la funzione integranda è $\sim^*_{0^+} x^{\alpha+1}x = x^{\alpha+2}$ la condizione di convergenza in 0^+ è ancora $\alpha + 2 > -1$, ovvero $\alpha > -3$. Invece per a^- la situazione è più delicata, in quanto la funzione integranda per $\alpha < -1$ è $\sim_{a^-} (a-x)^{\alpha+1}$ e per $\alpha > -1$ è $\sim_{a^-} 1$, dunque la condizione di convergenza in a^- è $\alpha + 1 > -1$ ovvero $\alpha > -2$. Pertanto l'integrale $\int_A y^\alpha\,dx\,dy$ converge se e solo se $\alpha > -2$.

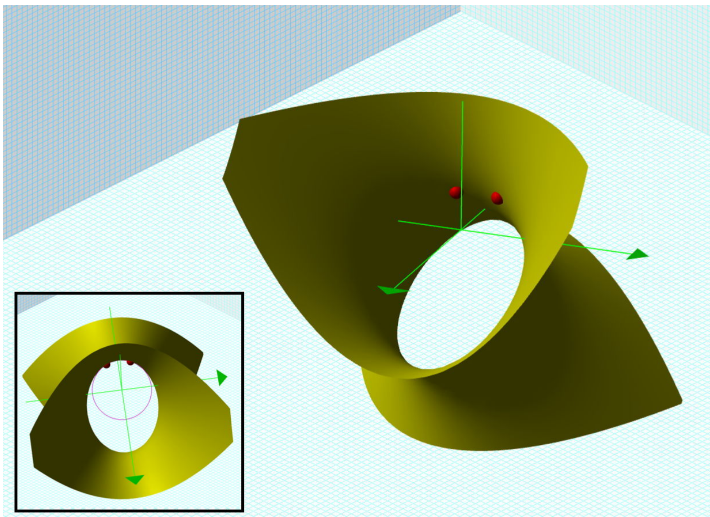
(b) Per Guldino il volume di E vale $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^a dx \int_{x(1-\frac{x}{a})}^x x\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^a x(x - x(1 - \frac{x}{a}))\,dx = \frac{\pi}{2a}\int_0^a x^3\,dx = \frac{\pi}{8}a^3$. Si ha poi $\int_E x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a d\rho \int_{\rho(1-\frac{\rho}{a})}^{\rho} \rho\cos\theta\,\rho\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^a \frac{1}{a}\rho^4\,d\rho = \frac{1}{5}a^4$ e $\int_E z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a d\rho \int_{\rho(1-\frac{\rho}{a})}^{\rho} z\,\rho\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho[\frac{1}{2}z^2]_{z=\rho(1-\frac{\rho}{a})}^{z=\rho}\,d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^a \rho(\rho^2 - \rho^2(1 - \frac{\rho}{a})^2)\,d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^a \rho^3(\frac{2}{a}\rho - \frac{1}{a^2}\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{4}[\frac{2}{5a}\rho^5 - \frac{1}{6a^2}\rho^6]_0^a = \frac{7\pi}{120}a^4$; dividendo per il volume e data l'evidente simmetria di E, il baricentro risulta $G(\frac{8}{5\pi}a, \frac{8}{5\pi}a, \frac{7}{15}a)$.

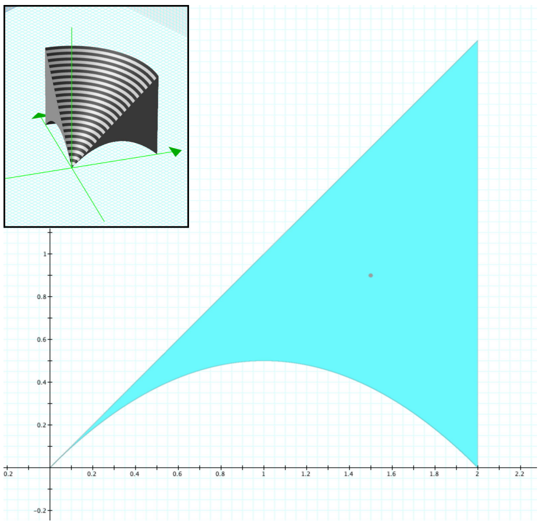
(c) Poiché il campo $F = (0,0,z)$ è parallelo all'asse z, i flussi attraverso le due superfici piane verticali e la superficie cilindrica posteriore di E sono nulli, e restano da valutare solo i flussi uscenti dalla superficie conica superiore C e dalla superficie inferiore P generata dalla rotazione dell'arco parabolico nel piano (x,z). La superficie C è parametrizzata da $\gamma_C(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$ con $0 \le \rho \le a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente) e dunque $\Phi_C(F) = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \rho & 1 & 0 \end{pmatrix} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{\pi}{6}a^3$, mentre la superficie P è parametrizzata da $\gamma_P(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho(1 - \frac{\rho}{a}))$ con $0 \le \rho \le a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante) e dunque $\Phi_P(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ \rho(1 - \frac{\rho}{a}) & 1 & 0 \end{pmatrix} d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2(1 - \frac{\rho}{a})\,d\rho = -\frac{\pi}{2}[\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{4a}\rho^4]_0^a = -\frac{\pi}{24}a^3$. Il flusso totale di F uscente da ∂E è dunque pari a $\frac{\pi}{6}a^3 - \frac{\pi}{24}a^3 = \frac{\pi}{8}a^3$. D'altra parte la divergenza di F vale $\nabla \cdot F = 1$ e perciò $\int_E (\nabla \cdot F)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(E) = \frac{\pi}{8}a^3$, il che conferma il teorema di Gauss.

3. (a) Poiché il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \beta(t) \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$ è lineare, se $\beta : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita in un intervallo aperto massimale $I \subset \mathbb{R}$ contenente $t = 0$ la soluzione del problema di Cauchy avrà esistenza e unicità globali su tutto I.

(b) Nel caso $\beta(t) = 0$ si ottiene il sistema autonomo $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$. La forma differenziale associata (a meno del segno) $(2x + y)\,dx + (x + y)\,dy$ è esatta; se $F(x, y)$ è una sua primitiva si dovrà avere $(\partial_x F, \partial_y F) = (2x + y, x + y)$, così da $\partial_x F = 2x + y$ si ricava $F(x, y) = x^2 + xy + \varphi(y)$ con φ da determinare, dunque da $\partial_y F = x + \varphi'(y) = x + y$ si ricava $\varphi'(y) = y$ da cui $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$, ovvero – a meno di costanti additive – $F(x, y) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2xy + y^2)$. Le curve integrali del problema sono pertanto le coniche del tipo $2x^2 + 2xy + y^2 = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (si tratta di ellissi), e quella che compete al dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, -2)$ è data da $k = 2$. • Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono $\pm i$; un autovettore relativo a i è $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1+i \end{smallmatrix}\right)$, pertanto due soluzioni reali indipendenti del sistema sono $\mathrm{Re}(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1+i \end{smallmatrix}\right)e^{it}) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{smallmatrix}\right)$ e $\mathrm{Im}(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1+i \end{smallmatrix}\right)e^{it}) = \left(\begin{smallmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{smallmatrix}\right)$. Una risolvente reale è allora $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, e la soluzione del problema di Cauchy assegnato è $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$.

(c) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2\sin t \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$ è a coefficienti reali, dunque interpretando $\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 2\,e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$ possiamo cercare una soluzione particolare per il termine non omogeneo $\begin{pmatrix} 2\,e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}$ e poi prenderne la parte immaginaria. Poiché i è una delle due radici caratteristiche, il sistema $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2e^{it} \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$ avrà qualche soluzione della forma $\begin{pmatrix} (at + b)\,e^{it} \\ (ct + d)\,e^{it} \end{pmatrix}$, per opportuni $a, b, c, d \in \mathbb{C}$: imponendolo si trova ad esempio $(a, b, c, d) = (1 - i, 0, 2i, -1 - i)$ ovvero $\begin{pmatrix} (1 - i)t\,e^{it} \\ (2it - 1 - i)\,e^{it} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -t \\ 2t - 1 \end{pmatrix}\right)(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) \\ -\cos t - (2t - 1)\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} t(\sin t - \cos t) \\ (2t - 1)\cos t - \sin t \end{pmatrix}$. La soluzione generale del sistema dato è dunque $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t(\sin t - \cos t) \\ (2t - 1)\cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t + t(\sin t - \cos t) \\ (B - A)\cos t - (A + B)\sin t + (2t - 1)\cos t - \sin t \end{pmatrix}$; imponendo infine che $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B - A - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ si ha $(A, B) = (1, 0)$, da cui la soluzione cercata $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + t(\sin t - \cos t) \\ -\cos t - \sin t + (2t - 1)\cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - t)\cos t + t\sin t \\ 2(t - 1)\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (27/06/2022)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2021/22

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano sono dati $g(x,y,z) = x^2 - 2yz + y^2 + 2xy - z^2$ e il punto $P(0,1,1)$.

(a) Determinare quali superfici di livello di g sono regolari. Detta S qualla passante per P, parametrizzarla all'intorno di P e calcolarne in due modi lo spazio tangente affine.

(b) Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = x + \alpha y + \beta z$ ammette P come punto stazionario su S, e determinarne la natura (punto di massimo, minimo, sella).

2. Nel piano cartesiano si disegni $A = \{(x,y) : y^2 \le ax \le 2ay\}$ (ove $a > 0$).

(a) Determinare il baricentro geometrico di A.

(b) Calcolare (se convergono) gli integrali $\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ e $\int_A \frac{1}{y}\, dx\, dy$.
In generale, dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali $\int_A x^\alpha\, dx\, dy$ e $\int_A y^\alpha\, dx\, dy$.

Si consideri ora A nel piano verticale (x,z), e sia E il solido del primo ottante che si ottiene ruotando A di un angolo retto attorno all'asse z in senso antiorario.

(c) Calcolare il volume di E, e verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, 0, 0)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 2(\alpha+1)y^3 + 2\alpha i(y+t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni?

(b) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

(c) Risolvere il problema per $\alpha = -1$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (27/06/2022) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Il gradiente di $g(x,y,z) = x^2 - 2yz + y^2 + 2xy - z^2$, ovvero $\nabla g = (2(x+y), 2(y+x-z), -2(y+z))$, si annulla solo in $(0,0,0)$: dunque tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne eventualmente quella di livello 0 nel punto $(0,0,0)$. In particolare è regolare la superficie di livello S passante per $P(0,1,1)$, ovvero $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = x^2 - 2yz + y^2 + 2xy - z^2 = g(P) = -2\}$. Da $\nabla g(P) = (2,0,-4) = 2(1,0,-2)$ si ricava subito il piano tangente affine a S in P dato da $(1,0,-2)\cdot(x-0, y-1, z-1) = 0$, ovvero $x - 2z + 2 = 0$, e si deduce che si può ad esempio esplicitare $x(y,z)$ con $x(1.1) = 0$ e $\nabla x(1,1) = (0,2)$. Derivando parzialmente l'identità $g(x(y,z),y,z) \equiv -2$ si ricava $2x\dot{x}_y - 2z + 2y + 2\dot{x}_y y + 2x = 0$ e $2x\dot{x}_z - 2y + 2\dot{x}_z y - 2z = 0$ da cui calcolando per $(y,z) = (1,1)$ si ha $-2 + 2 + 2\dot{x}_y = 0$ e $-2 + 2\dot{x}_z - 2 = 0$, ovvero nuovamente $\dot{x}_y(1,1) = 0$ e $\dot{x}_z(1,1) = 2$; derivando ancora si ottiene poi $2(\dot{x}_y)^2 + 2x\ddot{x}_{yy} + 2 + 2\ddot{x}_{yy}y + 2\dot{x}_y + 2\dot{x}_y = 0$, $2\dot{x}_z\dot{x}_y + 2x\ddot{x}_{yz} - 2 + 2\ddot{x}_{yz}y + 2\dot{x}_z = 0$ e $2(\dot{x}_z)^2 + 2x\ddot{x}_{zz} + 2\ddot{x}_{zz}y - 2 = 0$ da cui calcolando per $(x,y) = (1,1)$ si ha $2 + 2\ddot{x}_{yy} = 0$, $-2 + 2\ddot{x}_{yz} + 4 = 0$ e $8 + 2\ddot{x}_{zz} - 2 = 0$, ovvero $\ddot{x}_{yy}(1,1) = -1$, $\ddot{x}_{yz}(1,1) = -1$ e $\ddot{x}_{zz}(1,1) = -3$. La parametrizzazione di S attorno a P è dunque data da $x = 0 + 0(y-1) + 2(z-1) + \frac{1}{2}\big(-1(y-1)^2 - 2(y-1)(z-1) - 1(z-1)^2\big) + \cdots = 2(z-1) - \frac{1}{2}\big((y-1)^2 + 2(y-1)(z-1) + (z-1)^2\big) + \cdots$, e il troncamento al primo ordine $x = 2(z-1)$ ridà il piano tangente affine $x - 2z + 2 = 0$.

(b) La condizione di Lagrange che $\nabla g(P) = 2(1,0,-2)$ e $\nabla f = (1,\alpha,\beta)$ dà $\alpha = 0$ e $\beta = -2$. Per determinare il carattere di P come punto stazionario di $f(x,y,z) = x - 2z$ su S sostituiamo in f la parametrizzazione locale $x(y,z)$ e studiamo il carattere di $(y,z) = (1,1)$ per la funzione $F(y,z) = f(x(y,z),y,z) = x(y,z) - 2z$. Si ha $\nabla F = (\dot{x}_y, \dot{x}_z - 2)$, da cui $\nabla F(1,1) = (0, 2-2) = (0,0)$ come previsto; si ha poi $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, che essendo definita negativa mostra che P è punto di massimo locale stretto per f su S.

2. (a) (Figura 2) Ragionando per y-fili, l'area di A vale $\int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} dx = \int_0^{2a}(2y - \frac{1}{a}y^2)\,dy = [y^2 - \frac{1}{3a}y^3]_0^{2a} = \frac{4}{3}a^2$. Inoltre $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} x\,dx = \int_0^{2a}[\frac{1}{2}x^2]_{\frac{1}{a}y^2}^{2y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(4y^2 - \frac{1}{a^2}y^4)\,dy = [\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{5a^2}y^5]_0^{2a} = \frac{32}{15}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} y\,dx = \int_0^{2a} y(2y - \frac{1}{a}y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4a}y^4)\,dy = \frac{4}{3}a^3$, dunque dividendo per l'area si ha $G(\frac{8}{5}a, a)$.

(b) Poiché A si trova nel I quadrante, per Fubini e Tonelli possiamo calcolare integrali iterati e vedere cosa succede. • Ragionando ancora per y-fili si ha $\int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{2a}(\log(2y) - \log(\frac{1}{a}y^2))\,dy = \int_0^{2a}\log(\frac{2y}{y^2/a})\,dy = \int_0^{2a}\log(\frac{2a}{y})\,dy = \int_0^{2a}(\log 2a - \log y)\,dy = [y\log 2a - y(\log y - 1)]_0^{2a} = 2a\log 2a - 2a\log 2a + 2a = 2a$ e $\int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} \frac{1}{y}\,dx = \int_0^{2a}\frac{1}{y}(2y - \frac{1}{a}y^2)\,dy = \int_0^{2a}(2 - \frac{1}{a}y)\,dy = [2y - \frac{1}{2a}y^2]_0^{2a} = 2a$. Dunque gli integrali $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$ e $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy$ convergono entrambi con valore $2a$. • Poniamo ora $\alpha \neq -1$. Si ha $\int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{2a}((2y)^{\alpha+1} - (\frac{1}{a}y^2)^{\alpha+1})\,dy$, e va esaminata l'integrabilità in $y = 0^+$: se $\alpha + 1 > 0$ l'integrale ovviamente converge, mentre se $\alpha - 1 < 0$ la funzione integranda è $\sim_{0^+}^* y^{2(\alpha+1)}$ e dunque la condizione è $2(\alpha+1) > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{3}{2}$. Si ha poi $\int_0^{2a} dy \int_{\frac{1}{a}y^2}^{2y} y^\alpha\,dx = \int_0^{2a} y^\alpha(2y - \frac{1}{a}y^2)\,dx$: poiché la funzione integranda è $\sim_{0^+}^* y^{\alpha+1}$ la condizione è $\alpha + 1 > -1$, ovvero $\alpha > -2$.

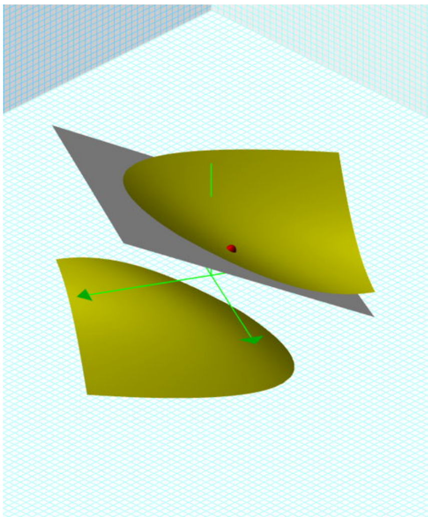
(c) Per Guldino il volume di E vale $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{32}{15}a^3 = \frac{16\pi}{15}a^3$. • I flussi del campo $F = (x,0,0)$ attraverso le due componenti piane di ∂E nei piani $x = 0$ e $y = 0$ sono nulli, per nullità o parallelismo; restano da esaminare i flussi di F uscenti dalle superfici P e C generate rispettivamente dalle rotazioni dell'arco di parabola e del segmanto. La superficie P è parametrizzata da $\gamma_P(z,\theta) = (\frac{1}{a}z^2\cos\theta, \frac{1}{a}z^2\sin\theta, z)$ (normale associata uscente), mentre C da $\gamma_C(z,\theta) = (2z\cos\theta, 2z\sin\theta, z)$ con $0 \le z \le 2a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque il flusso totale di F uscente da ∂E è $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} \frac{1}{a}z^2\cos\theta & \frac{2}{a}z\cos\theta & -\frac{1}{a}z^2\sin\theta \\ 0 & \frac{2}{a}z\sin\theta & \frac{1}{a}z^2\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 2z\cos\theta & 2\cos\theta & 2z\sin\theta \\ 0 & 2\sin\theta & 2z\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} dz$, ovvero $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2a}(4z^2 - \frac{1}{a^2}z^4)\,dz = \frac{\pi}{4}(\frac{32}{3}a^3 - \frac{32}{5}a^3) = \frac{16\pi}{15}a^3$. D'altra parte la divergenza di F vale $\nabla\cdot F = 1$ e perciò $\int_E(\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(E) = \frac{16\pi}{15}a^3$, il che conferma il teorema di Gauss.

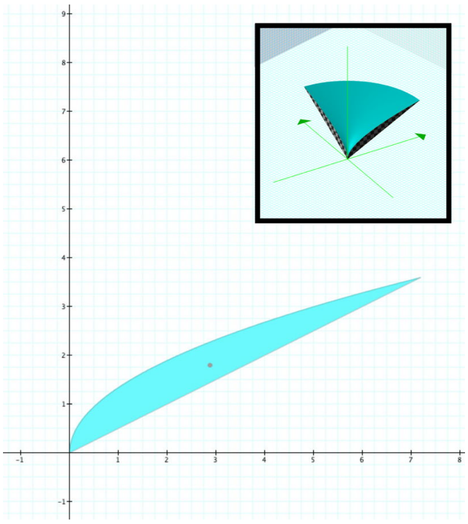
3. (a) L'equazione $y'' = 2(\alpha+1)y^3 + 2\alpha i(y+t)$ è equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $(y,p) = (y,y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = 2(\alpha+1)y^3 + 2\alpha i(y+t) \end{cases}$. La funzione $f(t,y,p) = (p, 2(\alpha+1)y^3 + 2\alpha i(y+t))$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$, dunque la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, se $\alpha \neq -1$ non si può dire nulla a priori (infatti c'è crescita cubica), mentre se $\alpha = -1$ l'equazione diventa lineare e dunque la soluzione sarà certamente definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = 2y^3$, autonoma del tipo $y'' = g(y)$, che come noto ammette l'integrale dell'energia $E(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 - G(y)$ ove $G(y)$ è una primitiva di $g(y) = 2y^3$, ad esempio $G(y) = \frac{1}{2}y^4$. Si ha così che $E(y,y') = \frac{1}{2}((y')^2 - y^4)$ è costante lungo le soluzioni, ed essendo nel nostro caso $E(1,-1) = 0$ si avrà $(y')^2 = y^4$, da cui (essendo $y'(0) < 0$) si ha $y' = -y^2$, equazione a variabili separabili che integrata dà facilmente $y(t) = \frac{1}{1+t}$, definita per $t \in]-1, +\infty[$.

(c) Per $\alpha = -1$ l'equazione diventa $y'' = -2i(y+t)$, lineare del 2o ordine a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata $y'' = -2iy$ ha come radici caratteristiche le radici quadrate di $-2i$ ovvero $\pm w$ ove si è posto $w = -1 + i$, dunque le sue soluzioni sono generate da e^{wt} e e^{-wt}. Una soluzione particolare per l'equazione completa sarà poi della forma $\tilde{y}(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare, e i conti danno $a = -1$ e $b = 0$. La soluzione generale dell'equazione è dunque $y(t) = A\,e^{wt} + B\,e^{-wt} - t$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = A + B = 1$ e

$y'(0) = wA - wB - 1 = -1$ (ovvero $A = B$) si ottiene $A = B = \frac{1}{2}$, ovvero $y(t) = \frac{1}{2}(e^{wt} + e^{-wt}) - t = \cosh(wt) - t$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (22/08/2022)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2021/22

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano sia $g(x, y) = x^2y + 4x + y^2$.

(a) Dire quali curve di livello di g sono regolari. Parametrizzare la curva di livello Γ passante per $P(\frac{1}{2}, 0)$ fino all'ordine quadratico, e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Dire se Γ ha punti di estremo relativo per la quota y, calcolandoli e specificandone la natura.

2. Nello spazio cartesiano si disegni $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2,\ 0 \leq x \leq a,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ (ove $a > 0$), e sia B la componente della superficie esterna ∂E nel piano orizzontale (x, y).

(a) Determinare il baricentro geometrico di B.

(b) Calcolare il volume di E. (<u>Facoltativo</u>: più in generale, determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_E x^\alpha \, dx\, dy\, dz$ e calcolarlo.)

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, 0, 0)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} (\alpha ty - t + 2)y' = y \\ y(1) = -2 \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza-unicità e crescenza delle soluzioni del problema?

(b) Risolvere il problema per $\alpha = 1$.

(c) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (22/08/2022) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Il gradiente di $g(x,y) = x^2y + 4x + y^2$, ovvero $\nabla g = (2(xy+2), x^2+2y)$, si annulla solo nel punto $A(\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$: dunque tutte le curve di livello di g sono regolari tranne quella di livello $g(A) = 3\sqrt[3]{4} \sim 4{,}8$ nel punto A. In particolare è regolare la curva di livello Γ passante per $P(\frac{1}{2}, 0)$, ovvero $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = g(P) = 2\}$. Da $\nabla g(P) = (4, \frac{1}{4})$ si ricava subito la retta tangente affine a Γ in P data da $(4, \frac{1}{4}) \cdot (x - \frac{1}{2}, y - 0) = 0$, ovvero $y = -16x + 8$, e si deduce che si può ad esempio esplicitare $y(x)$ con $y(\frac{1}{2}) = 0$ e $y'(\frac{1}{2}) = -16$. Derivando rispetto a x l'identità $g(x, y(x)) \equiv 2$ si ricava $2xy + x^2y' + 4 + 2yy' = 0$ da cui calcolando per $x = \frac{1}{2}$ si ha $0 + \frac{1}{4}y' + 4 + 0 = 0$, ovvero nuovamente $y'(\frac{1}{2}) = -16$; derivando ancora si ottiene poi $2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$, da cui calcolando per $x = \frac{1}{2}$ si ha $0 - 16 - 16 + \frac{1}{4}y'' + 512 + 0 = 0$, ovvero $y''(\frac{1}{2}) = -1920$. La parametrizzazione di Γ attorno a P è dunque $y = 0 - 16(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-1920)(x - \frac{1}{2})^2 + \cdots$, e il troncamento al primo ordine ridà la retta tangente affine $y = -16x + 8$.

(b) La domanda equivale a chiedersi se vi siano estremi locali di $f(x,y) = y$ vincolati su Γ. La condizione di Lagrange che ∇g e ∇f siano paralleli dà $xy + 2 = 0$, ovvero $y = -\frac{2}{x}$, che posto nel vincolo $g(x,y) = 2$ dà $-2x + 4x + \frac{4}{x^2} = 2$, ovvero $x^3 - x^2 + 2 = 0$. Notata la chiara soluzione $x = -1$ si fattorizza ottenendo $(x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0$, che non ha altre soluzioni reali, da cui il solo punto stazionario $B(-1, 2)$. Per capire la natura di B bisogna parametrizzare Γ attorno B tramite $y(x)$: calcolando si ha $y'(-1) = 0$ (come atteso) e $y''(-1) = -\frac{4}{5} < 0$, dunque B è di massimo locale.

2. (a) (Figura 2) Ragionando per x-fili, l'area di B vale $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2}} dy = \int_0^a \sqrt{4a^2 - x^2}\, dx$ da cui, posto $x = 2a \sin t$, si ottiene $4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt = 4a^2 [\frac{t + \sin t \cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6} a^2$. Inoltre $\int_B x\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2}} x\, dy = \int_0^a x\sqrt{4a^2 - x^2}\, dx = [-\frac{1}{3}(4a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{3} a^3$ e $\int_B y\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2}} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^a (4a^2 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}[4a^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{11}{6}a^3$, dunque dividendo per l'area si ha il baricentro geometrico $(\frac{2(8-3\sqrt{3})}{2\pi + 3\sqrt{3}} a, \frac{11}{2\pi + 3\sqrt{3}} a)$.

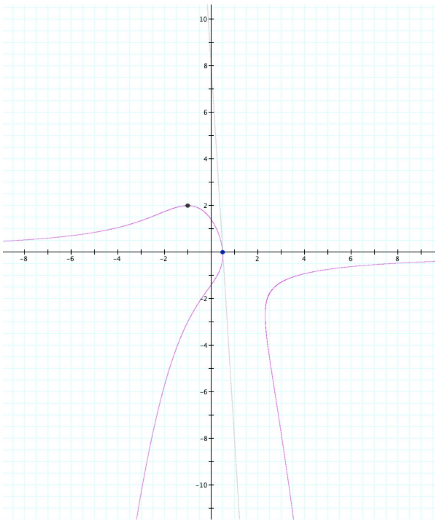
(b) Notando che la funzione integranda è > 0 e procedendo per x-fette (per $0 \le x \le a$ la x-fetta E_x è il quarto di cerchio di raggio $\sqrt{4a^2 - x^2}$) si ha l'integrale iterato $\int_0^a x^\alpha\, dx \int_{E_x} dy\, dz = \frac{\pi}{4}\int_0^a x^\alpha (4a^2 - x^2)\, dx$, da cui l'evidente condizione $\alpha > -1$ per l'integrabilità in 0^+: in tal caso si ha $\frac{\pi}{4}[\frac{4a^2}{\alpha+1}x^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+3}x^{\alpha+3}]_0^a = \frac{\pi}{4}[\frac{4}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+3}]a^{\alpha+3} = \frac{(3\alpha+11)\pi}{4(\alpha+1)(\alpha+3)} a^{\alpha+3}$. In particolare per $\alpha = 0$ si ha il volume $\frac{11\pi}{12}a^3$ (ottenibile anche con Guldino come rotazione di B, ovvero $\frac{\pi}{2}\int_B y\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}\frac{11}{6}a^3 = \frac{11\pi}{12}a^3$); e per $\alpha = 1$ si ha $\int_E x\, dx\, dy\, dz = \frac{7\pi}{16}a^4$, da cui si deduce che la x del baricentro geometrico di E vale $\frac{7\pi}{16}\frac{12}{11\pi}a = \frac{21}{44}a$.

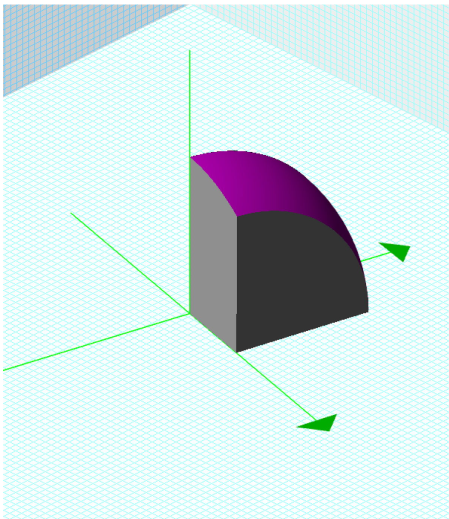
(c) Per parallelismo o nullità, gli unici flussi non nulli del campo $F = (x, 0, 0)$ sono quelli attraverso la componente sferica S e la componente piana D sul piano $x = a$. Quest'ultimo vale $\int_D (a,0,0) \cdot (1,0,0)\, dy\, dz = a\, \text{Area}\, D = \frac{3\pi}{4}a^3$, mentre quello uscente da S, parametrizzata da $(2a\sin\varphi, 2a\cos\theta\cos\varphi, 2a\sin\theta\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ (normale associata uscente) vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \det \begin{pmatrix} 2a\sin\varphi & 0 & 2a\cos\varphi \\ 0 & -2a\sin\theta\cos\varphi & -2a\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & 2a\cos\theta\cos\varphi & -2a\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \frac{\pi}{2} 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 4a^3[\frac{1}{3}\sin^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}a^3$. D'altra parte vale $\nabla \cdot F = 1$ e perciò $\int_E (\nabla \cdot F)\, dx\, dy\, dz = \text{Vol}(E) = \frac{11\pi}{12}a^3 = \frac{3\pi}{4}a^3 + \frac{\pi}{6}a^3$, il che conferma Gauss.

3. (a) Per studiare esistenza e unicità della soluzione di $(\alpha t y - t + 2)y' = y$ con $y(1) = -2$ l'equazione va portata in forma normale all'intorno del dato iniziale $(1, -2)$, e ciò è possibile solo quando $-2\alpha - 1 + 2 \ne 0$, ovvero $\alpha \ne \frac{1}{2}$: in tale ipotesi esistenza e unicità della soluzione $y(t)$ sono garantite localmente, mentre globalmente non si può dire. Invece se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha necessariamente $y(1) = 0$, dunque il problema dato non ha soluzione. • Sempre per $\alpha \ne \frac{1}{2}$ si ha poi $y' = \frac{y}{\alpha t y - t + 2}$, da cui $y'(1) = \frac{-2}{-2\alpha - 1 + 2} = \frac{2}{2\alpha - 1}$, dunque la soluzione del problema dato è crescente/decrescente in $t = 1$ per $\alpha \gtrless \frac{1}{2}$.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $(ty - t + 2)y' = y$. L'equazione totale associata è $\omega = p(y,t)\, dy + q(y,t)\, dt = 0$ con $p = ty - t + 2$ e $q = -y$. Poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = -1$ non dipende da t, la funzione $\rho(y) = e^{-y}$ è fattore integrante; detta $F(y,t)$ una primitiva di $\rho\omega$, da $\frac{\partial F}{\partial t} = -y\, e^{-y}$ si ricava $F = -ty\, e^{-y} + \phi(y)$, e allora dalla prima $\frac{\partial F}{\partial y} = -t(-y+1)e^{-y} + \phi'(y) = (ty - t + 2)e^{-y}$, da cui $\phi'(y) = 2e^{-y}$ e dunque $\phi(y) = -2e^{-y}$. Dunque le curve integrali dell'equazione totale sono le curve di livello di $F(y,t) = -(ty+2)e^{-y}$, ovvero $ty + 2 = ke^y$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: per il nostro dato iniziale si ricava $k = 0$, da cui la soluzione cercata $y(t) = -\frac{2}{t}$, definita per $t > 0$.

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $(2 - t)y' = y$, lineare del 1o ordine: scritta come $y' + \frac{1}{t-2}y = 0$ si ricava subito $y(t) = k\exp(-\int \frac{1}{t-2}\, dt) = \frac{k}{t-2}$, che con la condizione $y(1) = -2$ dà $k = 2$. Si ha perciò $y(t) = -\frac{2}{2-t}$, definita per $t < 2$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (06/09/2022)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2021/22

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano la superficie X è parametrizzata da $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u^2 - v^2,\ uv,\ 2u - v)$, ove $u, v \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare il piano tangente affine a X in $P = \gamma(1,-1)$. Determinare poi una forma grafico di X attorno P, e ricalcolare tale piano.

(b) Determinare gli estremi assoluti (esistono?) di $f(x,y,z) = x - 2y\sqrt{3}$ sulla porzione X' di X data dagli (u,v) tali che $u^2 + v^2 \leq 1$.

2. Nel I ottante dello spazio cartesiano si consideri il quarto di cono avente come base il quarto di disco nel piano orizzontale di centro l'origine e raggio $2a$, e come vertice il punto $(0,0,2a)$ $(a > 0)$. Siano poi E il cono troncato con $0 \leq z \leq a$, S la componente conica della superficie esterna di E.

(a) Determinare il baricentro geometrico di E.

(b) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, x, 0)$.

(c) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per S e F.

3. Si abbia il sistema differenziale $\begin{cases} \dot{x} = y(2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x(2 - x^2 - y^2) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t), y(t))$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni? Determinare gli equilibri e le orbite delle soluzioni non costanti.

(b) Determinare le soluzioni che per $t = 0$ valgono rispettivamente $(-2,2)$ e $(1,1)$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (06/09/2022) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Lo jacobiano della parametrizzazione $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u^2 - v^2,\, uv,\, 2u - v)$ è $\mathsf{J}_\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Guardando ora al punto $P = \gamma(1,-1) = (0,-1,3)$, lo jacobiano $\mathsf{J}_\gamma(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango massimo e dunque con le sue colonne genera il piano tangente a X in P, che nella sua versione affine è dato da $\{(x,y,z) = (0,-1,3) + \alpha(2,-1,2) + \beta(2,1,-1) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (2\alpha+2\beta, -1-\alpha+\beta, 3+2\alpha-\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$; eliminando i parametri si ha la forma cartesiana $x - 6y - 4z + 6 = 0$. • Notando che il minore di $\mathsf{J}_\gamma(1,-1)$ fatto dalle ultime due righe è nonsingolare, è possibile invertire localmente $(y(u,v), z(u,v))$ per ottenere una forma grafico $x(y,z)$ con $x(-1,3) = 0$ e $\nabla x(-1,3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}$: pertanto il piano tangente affine risulta $x = 0 + (6,4)\cdot(y-(-1), z-3)$, ovvero $x - 6y - 4z + 6 = 0$, come già trovato in precedenza.

(b) Detto $D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1\}$ (il disco chiuso di raggio 1 nel piano dei parametri), la porzione X' di X data dagli $(u,v) \in D$ è un compatto di $\mathbb{R}^3$ (in quanto immagine del compatto $D \subset \mathbb{R}^2$ tramite la funzione continua γ) su cui $f(x,y,z) = x - 2y\sqrt{3}$ assumerà estremi assoluti per Weierstrass. Per il calcolo, si tratta di studiare gli estremi assoluti su D della funzione composta $F(u,v) := (f\circ\gamma)(u,v) = u^2 - v^2 - 2uv\sqrt{3}$, cercando i punti stazionari di F sui punti interni $\dot{D}$ e sul bordo ∂D e confrontarne i valori. Si ha $\nabla F = (2(u - v\sqrt{3}), -2(v + u\sqrt{3}))$, dunque l'unico punto stazionario è $O(0,0)$ che sta in $\dot{D}$. Parametrizzando la circonferenza ∂D come $(\cos\theta, \sin\theta)$ si ha $\phi(\theta) := F(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sqrt{3} = \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta$; si ha $\phi'(\theta) = -2(\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta) = 0$ per $\operatorname{tg} 2\theta = -\sqrt{3}$, ovvero $2\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ da cui $\theta = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, che in un periodo dà $\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ ovvero i punti $A(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \sqrt{3} + \frac{1}{2})$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -(\sqrt{3} + \frac{1}{2}))$ e $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}))$. Essendo $F(O) = 0$, $F(A) = F(C) = 2$ e $F(B) = F(D) = -2$, il massimo assoluto di f su X' è 2 (assunto in A e C) e il minimo -2 (in B e D).

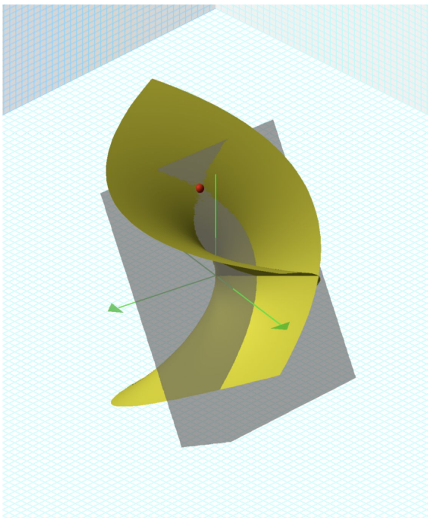
2. (a) (Figura 2) Il tronco di cono E si lascia parametrizzare opportunamente in coordinate cilindriche con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le z \le a$ e $0 \le \rho \le 2a - z$, da cui il volume risulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dz \int_0^{2a-z} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^a (2a-z)^2\, dz = \frac{\pi}{4}[-\frac{1}{3}(2a-z)^3]_0^a = \frac{7\pi}{12}a^3$. Si ha poi $\int_E x\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dz \int_0^{2a-z} \rho\cos\theta\, \rho\, d\rho = -\frac{1}{3}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (2a-z)^3\, dz = -\frac{1}{3}\frac{1}{4}[(2a-z)^4]_0^a = \frac{5}{4}a^4$ e $\int_E z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a z\, dz \int_0^{2a-z} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^a z(2a-z)^2\, dz = \frac{11\pi}{48}a^4$, dunque dividendo per il volume si ottiene $x_G = \frac{15}{7\pi}a$ (uguale anche a y_G per simmetria) e $z_G = \frac{11}{28}a$.

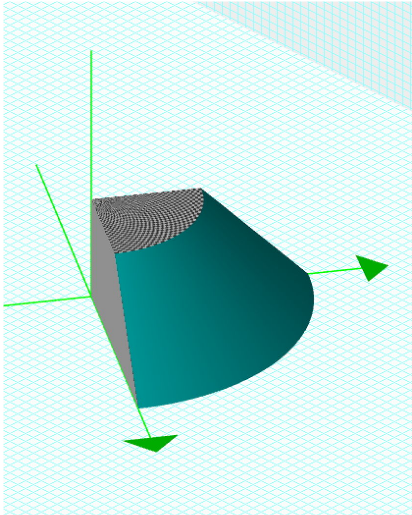
(b) Gli unici flussi non nulli (per parallelismo o nullità) del campo $F = (0,x,0)$ uscenti da ∂E sono quelli attraverso la componente conica S e la componente trapezoidale T nel piano $y = 0$. Il secondo vale $\Phi_T(F) = \int_0^a dz \int_0^{2a-z} (0,x,0)\cdot(0,-1,0)\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^a (2a-z)^2\, dz = -\frac{7}{6}a^3$, e il primo dà $\Phi_S(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & -(2a-z)\sin\theta & -\cos\theta \\ (2a-z)\cos\theta & (2a-z)\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^a (2a-z)^2\, dz = \frac{7}{6}a^3$: pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E è nullo, coerentemente col fatto che $\nabla\cdot F = 0$ come prescritto dal teorema di Gauss.

(c) Il flusso del rotore $\nabla\times F = (0,0,1)$ attraverso S vale $\Phi_S(\nabla\times F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & -(2a-z)\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & (2a-z)\cos\theta & -\sin\theta \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^a (2a-z)\, dz = \frac{3\pi}{4}a^2$. Quanto alla circuitazione di F sul bordo ∂S percorso in senso antiorario, gli unici contributi non nulli sono quelli lungo gli archi di circonferenza, ovvero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 2a\cos\theta, 0)\cdot(-2a\sin\theta, 2a\cos\theta, 0)\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, a\cos\theta, 0)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)\, d\theta = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4}a^2$, lo stesso valore di prima. Questo verifica la formula di Kelvin-Stokes.

3. (a) Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = y(2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x(2 - x^2 - y^2) \end{cases}$ ha esistenza e unicità locale per ogni dato di Cauchy, perché il secondo membro è una funzione $\mathcal{C}^1$; nulla si può invece affermare riguardo l'esistenza globale, perché il relativo teorema non è applicabile visto che la crescita non è sublineare. Al di fuori della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ (che è fatta di equilibri) il sistema è equivalente a quello in cui si semplifica per $2 - x^2 - y^2$, ovvero $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, x)$: l'unico altro equilibrio è dunque l'origine $(0,0)$, e un integrale primo del sistema (al di fuori della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$) è dato da $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, le cui curve di livello $x^2 - y^2 = k$ per $k \ne 0$ sono iperboli equilatere di asintoti $y = \pm x$ e per $k = 0$ sono l'unione delle due bisettrici $y = \pm x$. Tenendo presente che gli equilibri (che sono $(0,0)$ e tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$) spezzano le curve di livello in orbite distinte, si ha che le orbite non costanti sono le porzioni delle suddette curve di livello $x^2 - y^2 = k$ che non contengono equilibri.

(b) Per quanto detto prima, l'orbita della soluzione con $(x(0), y(0)) = (-2, 2)$ sarà la semiretta $y = -x$ con $x < -1$ (punto d'intersezione di $y = -x$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$), percorsa dal basso verso l'alto (infatti $\dot{x}(0) = y(0)(2 - x(0)^2 - y(0)^2) = -12 < 0$). Sostituendo $y = -x$ in $\dot{x} = y(2 - x^2 - y^2)$ si ottiene $\dot{x} = 2x(x^2 - 1)$, equazione scalare del 1o ordine a variabili separabili: integrando $\frac{1}{x(x^2-1)}\, dx = 2\, dt$ si ottiene $\log(\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}) = 2t + h$, e ricordando che $x(0) = -2$ si ricava $k = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$; esponenziando si ha $\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{2t}$, da cui $\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{3}{4}e^{4t}$ ovvero $(4 - 3e^{4t})x^2 = 4$ e dunque (sempre ricordando che $x(0) = -2$) si ricava $x(t) = -\frac{2}{\sqrt{4 - 3e^{4t}}}$. La soluzione cercata è perciò $(x(t), y(t)) = (-\frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}}, \frac{2}{\sqrt{4-3e^{4t}}})$, definita per $t < t_0 := \frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$: si noti che per $t \to -\infty$ la soluzione tende all'equilibrio $(-1,1)$ e per $t \to t_0^-$ scappa all'infinito. • Il punto $(1,1)$ è un equilibrio, dunque la soluzione con tale dato iniziale sarà la costante in tale punto.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.