Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (23/01/2023)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2022/23

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Si disegni la zona A del piano cartesiano racchiusa tra la spirale d'Archimede $\rho(\theta) = 2a\theta$ (con $0 \le \theta \le \pi$) e l'asse x, ove $a > 0$ è un parametro.

(a) Parametrizzare la curva-spirale e calcolarne la retta tangente affine nel suo punto con $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcolare il baricentro di A.[1]

(c) Calcolare, se esiste, l'integrale $\int_A \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$. (Facoltativo: discutere l'integrabilità su A della funzione $x^m(x^2+y^2)^n$ al variare di $m, n \in \mathbb{Z}$.)

2. Un solido E nello spazio cartesiano è così descritto: la sua proiezione sul piano orizzontale (x, y) è la figura piana $S = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin x\}$, e le sue sezioni con i piani ortogonali all'asse x sono triangoli rettangoli isosceli con i cateti nel piano orizzontale (x, y) e nel piano verticale (x, z).

(a) Disegnare E, calcolare il volume di E e l'area dell'unica componente non piana di ∂E.[2]

(b) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per S e per il campo $F = (0, x, 0)$.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e F.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y''|y|^\alpha = (1-2\alpha)(y-2e^t) - 1 \\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$ nella funzione scalare $y(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?

(b) Risolvere il problema per $\alpha = \frac{1}{2}$.

(c) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

---

[1] Può essere utile sapere che $\int u^3 \sin u\, du = (6u-u^3)\cos u + 3(u^2-2)\sin u$, $\int u^3 \cos u\, du = 3(u^2-2)\cos u + (u^3-6u)\sin u$.

[2] Può essere utile sapere che per $k > 0$ vale $\int \sqrt{u^2+k}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+k} + k\log(u+\sqrt{u^2+k})\right)$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (23/01/2023) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La spirale d'Archimede $\rho(\theta) = 2a\theta$ è parametrizzata da $\gamma(\theta) = (2a\theta\cos\theta, 2a\theta\sin\theta)$. Si ha $\gamma'(\theta) = 2a(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta)$, pertanto la retta tangente nel punto con $\theta = \frac{\pi}{2}$ ha forma parametrica $\{(x, y) = \gamma(\frac{\pi}{2}) + t\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (0, \pi a) + at(-\pi, 2) : t \in \mathbb{R}\}$, e dunque forma cartesiana $y = -\frac{2}{\pi}x + a\pi$.

(b) L'area di A risulta $\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho(\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi 4a^2\theta^2\,d\theta = \frac{2\pi^3}{3}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2a\theta} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_0^\pi \theta^3\cos\theta\,d\theta$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta\int_0^{2a\theta}\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_0^\pi \theta^3\sin\theta\,d\theta$, così, usando le primitive proposte in nota e dividendo per l'area si ottiene il baricentro $(-\frac{4(3\pi^2-12)}{\pi^3}a, \frac{4(\pi^2-6)}{\pi^2}a)$.

(c) La funzione $\frac{x}{x^2+y^2}$ non ha segno costante su A, dunque conviene studiare separatamente l'integrabilità sulle zone $A_\pm = A \cap \{x \gtrless 0\}$ dove essa è $\gtrless 0$ e si è dunque autorizzati a fare le verifiche con un integrale iterato della funzione. Per A_+ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta\,d\theta = 2a[\theta\sin\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a > 0$, mentre per A_- si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^{2a\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho = 2a[\theta\sin\theta + \cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(\pi+2)a < 0$, pertanto $\int_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ converge e vale $(\pi-2)a - (\pi+2)a = -4a < 0$. • Quanto all'integrabilità su A della funzione $x^m(x^2+y^2)^n$ al variare di $m, n \in \mathbb{Z}$, ragionando come in precedenza partiamo con A_+, dove si ha l'integrale iterato $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\theta}(\rho\cos\theta)^m\rho^{2n}\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\theta)\,d\theta\int_0^{2a\theta}\rho^{m+2n+1}\,d\rho$: per la convergenza dell'integrale in $\rho \sim 0^+$ la condizione è $m + 2n + 1 > -1$ ovvero $n > -\frac{1}{2}m - 1$, e in tale ipotesi si passa a $\frac{(2a)^{m+2n+2}}{m+2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^{m+2n+2}\cos^m(\theta)\,d\theta$, dove per la convergenza dell'integrale in $\theta \sim 0^+$ si ha la condizione $m + 2n + 2 > -1$ (già assicurata dalla precedente) e per la convergenza dell'integrale in $\theta \sim \frac{\pi}{2}^-$ si ha la condizione $m > -1$. Passando ad A_- le condizioni restano le stesse, dunque la funzione $x^m(x^2 + y^2)^n$ è integrabile su A quando $m > -1$ e $n > -\frac{1}{2}m - 1$, cosa che effettivamente è verificata per $(m, n) = (1, -1)$ come visto prima.

2. (a) (Figura 2) Data la descrizione di E, il volume va evidentemente calcolato per x-sezioni. Per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ la x-sezione è un triangolo rettangolo isoscele di cateti $\sin x$, pertanto il volume varrà $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}[\frac{x-\sin x\cos x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$. • La superficie esterna di E è costituita da quattro componenti: S sul piano orizzontale (x, y), la gemella S' sul piano verticale (x, z), la parete verticale B nel piano $x = \frac{\pi}{2}$ e la superficie laterale non piana T. Quanto a T, fatta dalle ipotenuse delle x-sezioni, poiché sui suoi punti deve valere $y + z = \sin x$ essa può essere vista come il grafico $z = \varphi(x, y)$ della funzione $\varphi : S \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x, y) = \sin x - y$, dunque T è parametrizzata da $\gamma(x, y) = (x, y, \sin x - y)$ con $(x, y) \in S$: l'elemento d'area è $d\sigma = \sqrt{1 + ||\nabla\varphi||^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + ||(\cos x, -1)||^2}\,dx\,dy = \sqrt{2 + \cos^2 x}\,dx\,dy$, dunque l'area risulta $\int_S d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\sin x}\sqrt{2+\cos^2 x}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{2+\cos^2 x}\,dx =$ [posto $u = \cos x$] $\int_0^1\sqrt{u^2+2}\,du = [\frac{1}{2}(u\sqrt{u^2+2} + 2\log(u + \sqrt{u^2+2}))]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\log(\sqrt{3}+1) - 2\log\sqrt{2}) = \frac{\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}{2}$. • La descrizione di T può ispirare anche un'ulteriore descrizione di E come sottografico $0 \le z \le \varphi(x, y)$ con $(x, y) \in S$: il volume risulta allora $\int_S(\sin x - y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\sin x}(\sin x - y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[y\sin x - \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin^2 x\,dx$, lo stesso integrale di prima di cui si è già determinato il valore $\frac{\pi}{8}$.

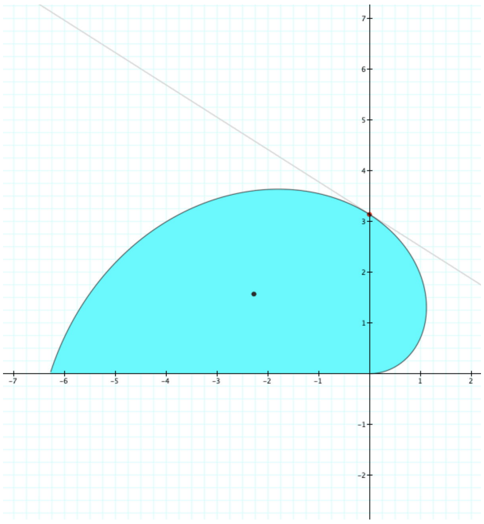
(b) Il rotore di $F = (0, x, 0)$ è $\nabla \times F = (0, 0, 1)$ che, usando per S la normale ascendente $(0, 0, 1)$, ha flusso pari a $\int_S(0, 0, 1)\cdot(0, 0, 1)\,dx\,dy = \text{Area}\,S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = 1$. D'altra parte, percorrendo il bordo ∂S in senso antiorario dall'origine, la circuitazione di F lungo ∂S risulta $0 + \int_0^1(0, \frac{\pi}{2}, 0)\cdot(0, 1, 0)\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0(0, x, 0)\cdot(1, \cos x, 0)\,dx = \int_0^1\frac{\pi}{2}\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 1) = 1$, il che conferma Kelvin-Stokes.

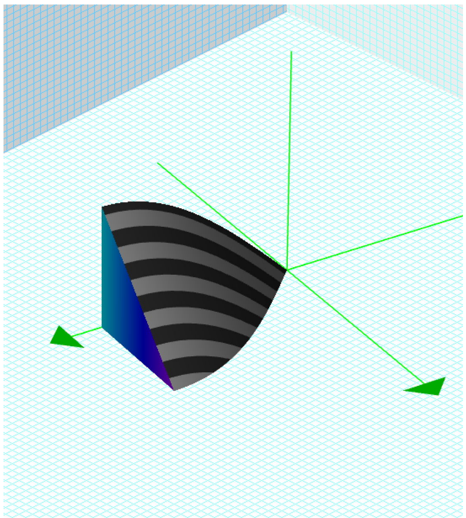
(c) Il campo F è parallelo all'asse y, dunque i suoi flussi attraverso S e B sono nulli. Il flusso uscente da S' è dato da $\int_{S'}(0, x, 0)\cdot(0, -1, 0)\,dx\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\sin x} x\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = -[\sin x - x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$. Il flusso uscente da T, parametrizzato come detto prima (normale associata uscente) è invece dato da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\sin x}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & \cos x & -1 \end{pmatrix} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Il flusso totale di F uscente da E è dunque nullo, e ciò, essendo F a divergenza nulla, conferma Gauss.

3. (a) Essendo $y(0) = -1 \neq 0$, l'equazione $y''|y|^\alpha = (1 - 2\alpha)(y - 2e^t) - 1$ può essere portata in forma normale $y'' = ((1-2\alpha)(y-2e^t)-1)|y|^{-\alpha}$, che è equivalente al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $(y, p) = (y, y')$ dato da $\begin{cases} y' = p \\ p' = ((1-2\alpha)(y-2e^t)-1)|y|^{-\alpha} \end{cases}$. La funzione $f(t, y, p) = (p, ((1-2\alpha)(y-2e^t)-1)|y|^{-\alpha})$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ all'intorno del dato iniziale, dunque la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, essa è assicurata solo nel caso $\alpha = 0$, in cui l'equazione diventa lineare; invece negli altri casi il teorema di Cauchy-Lipschitz globale non può essere applicato, perché se $\alpha < 0$ la crescita di f non è sublineare in y mentre se $\alpha > 0$ deve essere $y \neq 0$ e dunque f non è definita in una striscia in y.

(b) Per $\alpha = \frac{1}{2}$ l'equazione diventa $y''\sqrt{|y|} = -1$, ovvero $y'' = h(y) = -|y|^{-\frac{1}{2}}$. Costruita l'energia potenziale $U(y) = -\int h(y)\,dy = 2\sigma\sqrt{|y|}$ (ove $\sigma = \operatorname{sign} y$), abbiamo l'integrale primo dell'energia $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 + U(y) = \frac{1}{2}((y')^2 + 4\sigma\sqrt{|y|})$, sul quale la nostra soluzione vale costantemente $E(-1, -2) = 0$. Ne ricaviamo che $(y')^2 + 4\sigma\sqrt{|y|} = 0$, da cui (essendo $y(0) < 0$, dunque $\sigma = -1$) $(y')^2 = -4\sigma\sqrt{|y|} = 4\sqrt{|y|}$ e dunque (essendo $y'(0) < 0$) $y' = -2|y|^{\frac{1}{4}}$. Separando

le variabili si ha $|y|^{-\frac{1}{4}}\,dy = -2\,dt$, da cui integrando $\frac{4}{3}\sigma|y|^{\frac{3}{4}} = k - 2t$, e la condizione $y(0) = -1$ dà $k = -\frac{4}{3}$ e $\sigma = -1$: perciò $|y|^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{3}{2}t$, ovvero $|y| = (1 + \frac{3}{2}t)^{\frac{4}{3}}$, da cui infine $y(t) = -(1 + \frac{3}{2}t)^{\frac{4}{3}}$, definita per $1 + \frac{3}{2}t > 0$ ovvero per $t > -\frac{2}{3}$.
(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = y - 2e^t - 1$, ovvero $y'' - y = -1 - 2e^t$, lineare del 2o ordine a coefficienti costanti. Le radici caratteristiche sono ± 1; una soluzione per il termine non omogeneo -1 è evidentemente la costante 1, mentre una soluzione per l'altro termine non omogeneo $-2e^t$ sarà del tipo $\tilde{y} = ate^t$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare, e ponendo $\tilde{y}'' - \tilde{y} = -2e^t$ si ottiene $a = -1$. Le soluzioni sono dunque tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A - t)e^t + Be^{-t} + 1$ con $A, B \in \mathbb{C}$; da $(y(0), y'(0)) = (A + B + 1, A - 1 - B) = (-1, -2)$ si ottiene $A = -\frac{3}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$, da cui la soluzione cercata $y(t) = 1 - \frac{1}{2}((3 + 2t)e^t + e^{-t})$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (10/02/2023)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2022/23

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Data la funzione $g(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2y$, sia $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = 1\}$.

(a) Quali insiemi di livello di g sono curve regolari? Parametrizzare la curva Γ localmente attorno al suo punto $P(-1,-2)$, e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Determinare i punti di Γ che sono estremanti locali per l'ascissa x, assieme alla loro natura.

(c) Sia Q il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Dire perché $\Gamma \cap Q$ ha punti di ascissa x massima e minima assolute, e determinarli.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x + a,\ x^2 + y^2 \ge a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$ e $\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ convergono, e nel caso calcolarli.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse x.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x,0,0)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = (x+y)y^\alpha \\ \dot{y} = -(x - (2\alpha+1)y)x^\alpha \\ (x(0),y(0)) = (1,1) \end{cases}$ nell'incognita $(x(t),y(t))$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?

(b) Posto $\alpha = -1$, si determinino gli equilibri del sistema, un integrale primo e la soluzione del dato problema di Cauchy.

(c) Posto $\alpha = 0$ dire a priori quale sarà il dominio della soluzione del dato problema di Cauchy, determinandola poi esplicitamente.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (10/02/2023) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Data $g(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2y$, il gradiente $\nabla g = 3(x(x+2y), x^2 - y^2)$ si annulla solo in $O(0,0)$: dunque tutti gli insiemi di livello di g sono curve regolari tranne al più la curva $g(x,y) = 0$ nel punto O. In particolare $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = 1\}$ è curva regolare; nel suo punto $P(-1,-2)$ si ha $\nabla g(P) = 3(5,-3)$, ed essendo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(P) = -3 \neq 0$ si può localmente parametrizzare Γ esplicitando $y(x) = -2 + \frac{5}{3}(x+1) + o_{-1}(x+1)$. La retta tangente affine a Γ in P risulta pertanto $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$, ottenibile anche da $\nabla g(P) \cdot (x+1, y+2) = 0$.

(b) Per Lagrange, i punti di Γ che sono estremanti locali per l'ascissa x sono dati dalla condizione $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, ovvero $y = \pm x$, che messe a sistema con l'equazione $g(x,y) = 1$ dà (posto $u = 3^{-\frac{1}{3}} \sim 0{,}7$) i punti $A(u,u)$ e $B(-1,1)$. In tali punti, dall'equazione sarà possibile esprimere $x(y)$ con $x' = 0$: derivando $g(x(y),y) = 1$ rispetto a y si ha $3(x^2x' - y^2 + 2xx'y + x^2) = 0$, e derivando ancora si ha $3(2x(x')^2 + x^2x'' - 2y + 2(x')^2 + 2xx''y + 2xx' + 2xx') = 0$. Dalla seconda, imponendo $x' = 0$ si ricava $x^2x'' - 2y + 2xx''y = 0$, ovvero $x(x+2y)x'' = 2y$: dunque per A si ha $x''(u) = \frac{2u}{u(u+2u)} = \frac{2}{3u} > 0$ (perciò A è punto di ascissa localmente minima per Γ), mentre per B si ha $x''(-1) = -2 < 0$ (perciò B è punto di ascissa localmente massima per Γ).

(c) L'insieme $\Gamma \cap Q$ è non vuoto (ci sta il punto A), chiuso (intersezione di due chiusi) e limitato (perché lo è già Q): dunque è compatto, e l'esistenza di suoi punti di ascissa x massima e minima assolute è assicurata da Weierstrass. Per la ricerca, vanno considerati i punti stazionari di Γ per la funzione ascissa x che stanno all'interno di Q (ovvero Q privato dei suoi lati), e i punti di Γ che stanno sul perimetro di Q. Per i punti stazionari di Γ nell'interno di Q la ricerca è già stata fatta nel punto (b), e si è trovato solo A. Quanto ai punti di Γ sul perimetro di Q, sul lato $x = 0$ con $0 \le y \le 1$ non se ne trovano (da $x = 0$ si ricava $-y^3 = 1$ ovvero $y = -1$, non accettabile); sul lato $y = 1$ con $0 \le x \le 1$ si trova il punto $P(\sqrt{3} - 1, 1)$; e sul lato $x = 1$ con $0 \le y \le 1$ si trova il vertice $Q(1,0)$, che è anche il solo punto che si trova sul lato $y = 0$ con $0 \le x \le 1$. Abbiamo dunque stabilito che gli estremi assoluti dell'ascissa x sul compatto $\Gamma \cap Q$ potranno essere assunti solo eventualmente nei punti A, P e Q: essendo $x(A) = u = 3^{-\frac{1}{3}} \sim 0{,}7$, $x(P) = 1$ e $x(Q) = u = 3^{\frac{1}{2}} - 1 \sim 0{,}7$, di certo l'ascissa x massima assoluta è 1 (assunta in P). Più incerta è l'attribuzione del minimo assoluto: vediamo ad esempio se è vero che $3^{-\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}} - 1$, ovvero (elevando al cubo) $\frac{1}{3} < (\sqrt{3} - 1)^3 = 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1$, ovvero $31 < 18\sqrt{3}$, ovvero (elevando al quadrato) $961 < 972$, che effettivamente è vero. Dunque l'ascissa x minima assoluta è $3^{-\frac{1}{3}}$ (assunta in A).

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x+a,\ x^2+y^2 \ge a^2\}$ è la differenza tra un trapezio rettangolo (basi a e $2a$ e altezza a) e un quarto di cerchio di raggio a, dunque l'area risulta $\frac{3}{2}a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{6-\pi}{4}a^2$. Ragionando per x-fili si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} x\,dy = \int_0^a x(x + a - \sqrt{a^2 - x^2})\,dx = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = (\frac{5}{6} - \frac{1}{3})a^3 = \frac{1}{2}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a ((x+a)^2 - (a^2 - x^2))\,dx = \int_0^a (x^2 + ax)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2]_0^a = \frac{5}{6}a^3$, dunque dividendo per l'area le coordinate del baricentro risultano $(x_G, y_G) = (\frac{2}{6-\pi}a, \frac{10}{3(6-\pi)}a)$.

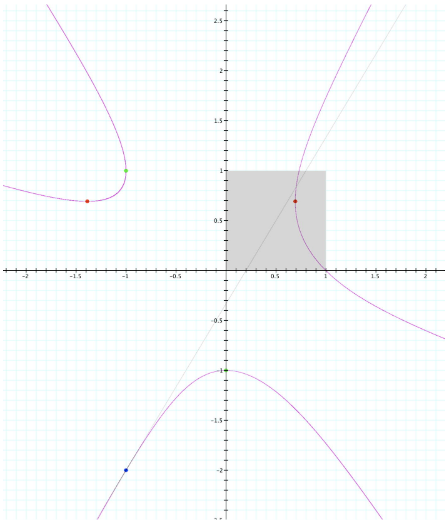
(b) Su A le funzioni $\frac{x}{y^2}$ e $\frac{1}{y^3}$ sono > 0, dunque per Fubini e Tonelli possiamo controllarne l'integrabilità con un integrale iterato, sempre ragionando per x-fili. • Si ha $\int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} \frac{x}{y^2}\,dy = \int_0^a x[-\frac{1}{y}]_{y=\sqrt{a^2-x^2}}^{y=x+a}\,dx = \int_0^a (\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x}{x+a})\,dx = [-\sqrt{a^2 - x^2} - x + a\log(x+a)]_0^a = (-a + a\log(2a)) - (-a + a\log a) = a\log 2$: dunque l'integrale $\int_A \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$ converge con valore $a\log 2$. • Si ha $\int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} \frac{1}{x^2}\,dy = \int_0^a \frac{1}{x^2}(x + a - \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$, un integrale generalizzato che può avere problemi di convergenza solo eventualmente per $x \sim 0$: si tratta dunque di capire il comportamento della funzione integranda per $x \sim 0$. Notando che si ha $x + a - \sqrt{a^2 - x^2} = x + a - a(1 - (\frac{x}{a})^2)^{\frac{1}{2}} = x + a - a(1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{a^2}) + o_0(x^3)) = x + \frac{1}{2a}x^2 + o_0(x^3) \sim_0 x$, la funzione integranda è $\sim_0 \frac{1}{x^2}x = \frac{1}{x}$, dunque non è integrabile per $x \sim 0$. Pertanto l'integrale $\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ non converge.

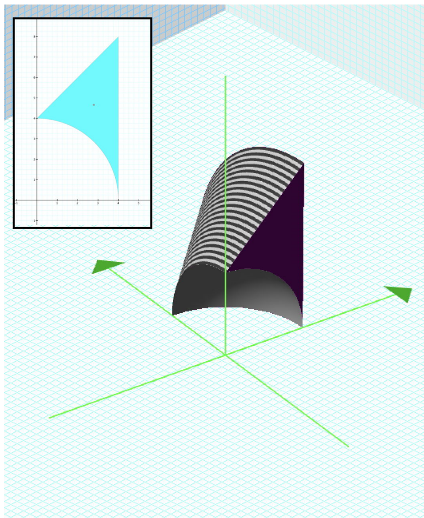
(c) Poiché il campo $F = (x,0,0)$ ha divergenza 1, basterà verificare che il flusso totale di F uscente da E è pari al volume di E, ovvero (usando Guldino e il punto (a)) $\frac{\pi}{2}\int_A z\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{5}{6}a^3 = \frac{5\pi}{12}a^3$. Ora, per parallelismo i flussi di F attraverso le porzioni piane A sul piano (x,z) e A' sul piano (x,y) sono nulli. Attraverso la componente Q nel piano $x = a$ (quarto di disco di raggio $2a$) il flusso uscente è $\Phi_Q(F) = \int_Q (a,0,0) \cdot (1,0,0)\,dy\,dz = a\,\mathrm{Area}\,Q = a \cdot \frac{1}{4}\pi(2a)^2 = \pi a^3$. La componente sferica S è parametrizzata, in coordinate sferiche, da $\gamma(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associate entrante nella sfera, dunque uscente da E), dunque il flusso di F uscente da S vale $\Phi_S(F) = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -a\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = -a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi)\,d\varphi = -[\frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{3}\cos^3(\varphi) - \cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6}a^3$. Infine, la componente conica C si può parametrizzare con $\gamma(x,\varphi) = (x, (x+a)\sin\varphi, (x+a)\cos\varphi)$ con $0 \le x \le a$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associate uscente da E), dunque il flusso di F uscente da C vale $\Phi_C(F) = +\int_0^a dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & (x+a)\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -(x+a)\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^a x(x+a)\,dx = -\frac{\pi}{2}[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2]_0^a = -\frac{5\pi}{12}a^3$. Il flusso uscente totale è dunque $\pi a^3 - \frac{\pi}{6}a^3 - \frac{5\pi}{12}a^3 = \frac{5\pi}{12}a^3$, come si voleva.

3. (a) Il sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x,y) = ((x+y)y^\alpha,\ -(x - (2\alpha+1)y)x^\alpha)$ è autonomo del 1o ordine; essendo f di classe $\mathcal{C}^\infty$ all'intorno del dato iniziale, la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, essa è assicurata solo nel caso $\alpha = 0$, in cui il sistema diventa lineare; invece negli altri casi il teorema di Cauchy-Lipschitz globale non può essere applicato, perché se $\alpha < 0$ la crescita di f non è sublineare in (x, y) mentre se $\alpha > 0$ deve essere $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e dunque f non è definita in tutto il piano (x, y).

(b) Per $\alpha = -1$ il sistema diventa $(\dot{x}, \dot{y}) = (\frac{x+y}{y}, -\frac{x+y}{x})$. Gli equilibri sono tutti (tranne l'origine) e soli i punti della retta $y = -x$, e al di fuori di essa il sistema è equivalente a $(\dot{x}, \dot{y}) = (\frac{1}{y}, -\frac{1}{x})$, la cui forma associata $\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy$ è a variabili separate e dunque esatta con primitiva $\log|x| + \log|y| = \log|xy|$. Un integrale primo per il sistema al di fuori della retta $y = -x$ è dunque la funzione $F(x, y) = xy$; ed essendo $F(1, 1) = 1$, lungo la soluzione si avrà $xy = 1$. Ponendo $y = \frac{1}{x}$ in $\dot{x} = \frac{x+y}{y}$ si ottiene $\dot{x} = x^2 + 1$, da cui $\frac{1}{x^2+1}\,dx = dt$; integrando si ha $\operatorname{arctg} x = k + t$ e imponendo che $x(0) = 1$ si ottiene $k = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, dunque $x(t) = \operatorname{tg}(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}$. La soluzione cercata è dunque $(x(t), y(t)) = (\frac{1+\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}, \frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t})$, definita per $|t| < \frac{\pi}{4}$.

(c) Per $\alpha = 0$ il sistema diventa $(\dot{x}, \dot{y}) = (x + y, -(x - y))$, lineare omogeneo: dunque il dominio della soluzione del problema sarà tutto $\mathbb{R}$. Gli autovalori della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sono $1 \pm i$; un autovettore per $1 + i$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, dunque una risolvente — in realtà la stessa matrice esponenziale e^{tA} — è $\begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}$. La soluzione cercata si ottiene applicando a essa il dato iniziale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ottenendo $(x(t), y(t)) = ((\cos t + \sin t)e^t, (\cos t - \sin t)e^t)$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (26/06/2023)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2022/23

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Data la funzione $g(x,y,z) = 2xz - xy - y^2 + yz$ si ponga $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 2\}$.

(a) Dimostrare che gli insiemi di livello di g sono simmetrici rispetto all'origine, e dire quali di essi sono superfici regolari. Parametrizzare poi la superficie S localmente attorno al suo punto $P(1,0,1)$, e determinare in due modi il piano tangente affine a S in P.

(b) Determinare i punti di S con $x > 0$ che sono estremanti locali per la funzione $f(x,y,z) = x+z$, assieme alla loro natura.

(c) Determinare gli estremi assoluti di g sul quadrato $Q = \{(0,y,z) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ (perché esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4a^2,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le a\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$ e $\int_A \frac{\sqrt{x}}{y}\,dx\,dy$ convergono, e nel caso calcolarli.

Si disegni ora A nel piano orizzontale (x,y) dello spazio cartesiano, e sia C il cono di vertice $(0,0,a)$ e base A.

(c) Verificare il teorema di Gauss per C e per il campo $F = (x,0,0)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} (1 - 2ty^\alpha)y' = y^{\alpha+1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ nell'incognita $y(t)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?

(b) Determinare esplicitamente la soluzione del problema quando $\alpha = 1$.

(c) Determinare esplicitamente la soluzione del problema quando $\alpha = 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (26/06/2023) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Per mostrare che gli insiemi di livello di $g(x,y,z) = 2xz - xy - y^2 + yz$ sono simmetrici rispetto all'origine basta notare che $g(-x,-y,-z) = g(x,y,z)$. • Il gradiente $\nabla g = (-y+2z,\ -x-2y+z,\ 2x+y)$ si annulla solo in $O(0,0,0)$: dunque tutti gli insiemi di livello di g sono superfici regolari tranne al più la superficie $g(x,y,z) = 0$ nel punto O. In particolare $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 2\}$ è una superficie regolare; nel suo punto $P(1,0,1)$ si ha $\nabla g(P) = (2,0,2)$, da cui il piano tangente affine risulta $(2,0,2)\cdot(x-1, y-0, z-1) = 0$ ovvero $x+z = 2$. D'altro canto, ad esempio da $\frac{\partial g}{\partial x}(P) = 2 \neq 0$ si può localmente parametrizzare S esplicitando $x(y,z)$: dall'identità $g(x,y,z) = 2xz - xy - y^2 + yz \equiv 2$ derivando rispetto a y e z si ottiene $2\dot{x}_y z - \dot{x}_y y - x - 2y + z = 0$ e $2\dot{x}_z z + 2x - \dot{x}_z y + y = 0$, che calcolati per $(y,z) = (0,1)$ (con $x(0,1) = 1$) danno $\dot{x}_y(0,1) = 0$ e $\dot{x}_z(0,1) = -1$. Derivando ulteriormente si ha poi $2\ddot{x}_{yy}z - \ddot{x}_{yy}y - \dot{x}_y - \dot{x}_y - 2 = 0$, $2\ddot{x}_{yz}z + 2\dot{x}_y - \ddot{x}_{yz}y - \dot{x}_z + 1 = 0$ e $2\ddot{x}_{zz}z + 2\dot{x}_z + 2\dot{x}_z - \ddot{x}_{zz}y = 0$, che calcolati per $(y,z) = (0,1)$ danno $\ddot{x}_{yy}(0,1) = 1$, $\ddot{x}_{yz}(0,1) = -1$ e $\ddot{x}_{zz}(0,1) = 2$: si ha perciò la parametrizzazione locale $(x(y,z), y, z)$ con $x(y,z) = 1 - (z-1) + \frac{1}{2}\big(y^2 - 2y(z-1) + 2(z-1)^2\big) + \cdots$, che arrestata all'ordine lineare dà nuovamente il piano tangente affine $x = 1 - (z-1)$, ovvero $x + z = 2$.

(b) Imponendo per Lagrange che $\nabla g = (-y+2z,\ -x-2y+z,\ 2x+y)$ e $\nabla f = (1,0,1)$ siano paralleli si ha $-y+2z = 2x+y$ e $-x-2y+z = 0$, da cui $y = 0$ e $x = z$, che sostituite in $g(x,y,z) = 2$ con la condizione $x > 0$ danno la sola soluzione $P(1,0,1)$. La natura del punto P per f su S sarà la stessa di quella di $(y,z) = (0,1)$ per $F(y,z) = f(x(y,z),y,z) = x(y,z) + z$: essendo $\nabla F(y,z) = (\dot{x}_y,\ \dot{x}_z + 1)$ si ha $\nabla F(0,1) = (0,0)$ (come previsto), e da $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z)$ si nota che $\mathsf{H}_F(0,1) = \mathsf{H}_x(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva. Pertanto il punto P è di minimo locale stretto per f su S.

(c) Gli estremi assoluti di g sul quadrato $Q = \{(0,y,z) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ esistono per Weierstrass, perché g è continua e Q compatto (in quanto chiuso e limitato). • Nei punti interni del quadrato si ha $g(0,y,z) = -y^2 + yz$, priva di punti stazionari all'interno di Q. Sui quattro lati privati dei vertici si ha $g(0,0,z) \equiv 0$ (identicamente nulla), $g(0,y,0) = -y^2$ (senza punti stazionari), $g(0,1,z) = z - 1$ (senza punti stazionari) e $g(0,y,1) = -y^2 + y$ con punto stazionario $Q(0,\frac{1}{2},1)$ nel quale $f(Q) = \frac{1}{4}$. Infine, sui vertici si ha $g(0,0,0) = g(0,0,1) = g(0,1,1) = 0$ e $g(0,1,0) = -1$. Pertanto il minimo assoluto di f su Q è -1 (assunto nel vertice $0,1,0)$) e il massimo è $\frac{1}{4}$ (assunto in Q).

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4a^2,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le a\}$ è un quarto di disco di raggio $2a$ tagliato ad altezza a. Ragionando per y-fili, l'area di A è $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} dx = \int_0^a \sqrt{4a^2-y^2}\,dy =$ (posto $y = 2a\sin t$) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(t)\,dt = [\frac{t+\sin t\cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (4a^2-y^2)\,dy = \frac{1}{2}[4a^2y - \frac{1}{3}y^3]_0^a = \frac{11}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^a y\,dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} dx = \int_0^a y\sqrt{4a^2-y^2}\,dy = [-\frac{1}{3}(4a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{8-3\sqrt{3}}{3}a^3$, dunque dividendo per l'area le coordinate del baricentro risultano $(x_G, y_G) = (\frac{11}{2\pi+3\sqrt{3}}a, \frac{2(8-3\sqrt{3})}{2\pi+3\sqrt{3}}a)$.

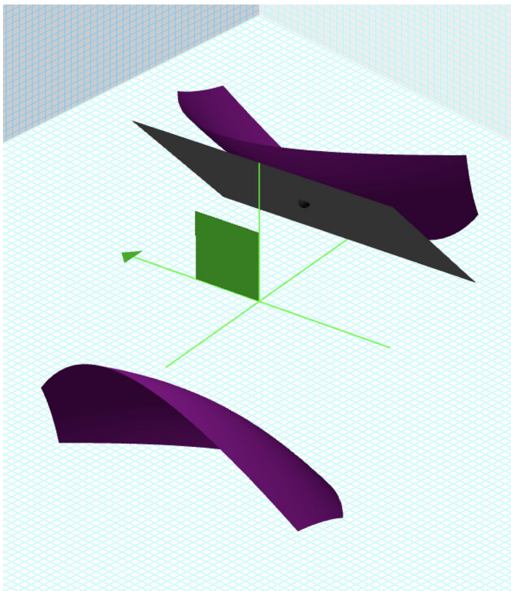
(b) Su A le funzioni $\frac{x}{\sqrt{y}}$ e $\frac{\sqrt{x}}{y}$ sono > 0, dunque per Fubini e Tonelli possiamo controllarne l'integrabilità con un integrale iterato, sempre ragionando per y-fili. • Si ha $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}}[\frac{1}{2}x^2]_0^{\sqrt{4a^2-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}}(4a^2 - y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a (4a^2y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})\,dy = \frac{1}{2}[8a^2\sqrt{y} - \frac{2}{5}y^2\sqrt{y}]_0^a = \frac{19}{5}a^2\sqrt{a}$, che è il valore finito di $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$. • Si ha $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{4a^2-y^2}} \frac{\sqrt{x}}{y}\,dx = \int_0^a \frac{1}{y}[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{4a^2-y^2}}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^a \frac{1}{y}(4a^2-y^2)^{\frac{3}{4}}\,dy$: notando che la funzione integranda è $\sim_0^* \frac{1}{y}$ si conclude che l'integrale $\int_A \frac{\sqrt{x}}{y}\,dx\,dy$ non converge.

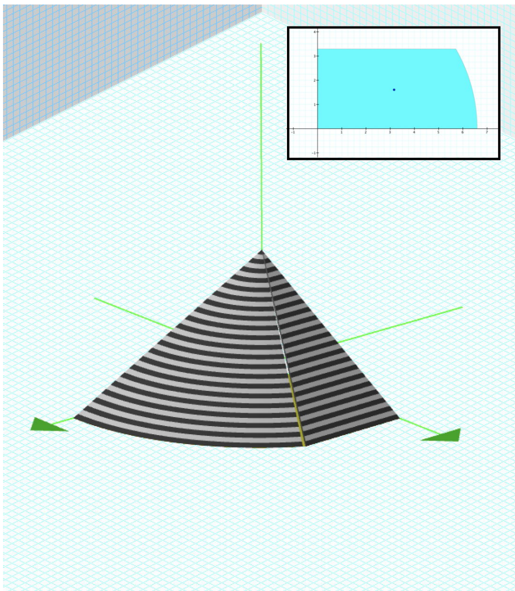
(c) Poiché il campo $F = (x,0,0)$ ha divergenza 1, basterà verificare che il flusso totale di F uscente dal cono C è pari al volume di C, ovvero $\frac{1}{3}\,a\,\text{Area}\,A = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{18}a^3$. Semplici considerazioni geometriche (parallelismo o nullità) mostrano che in realtà i flussi di F uscenti dalle componenti della superficie esterna di C sono tutti nulli tranne eventualmente quello attraverso la componente conica — l'unica non piana — parametrizzata da $\gamma(\theta,z) = (2(a-z)\cos\theta,\ 2(a-z)\sin\theta,\ z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ e $0 \le z \le a$ (normale associata uscente), che in effetti vale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 2(a-z)\cos\theta & -2(a-z)\sin\theta & -2\cos\theta \\ 0 & 2(a-z)\cos\theta & -2\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(\theta)\,d\theta \int_0^a (a-z)^2\,dz = 4[\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}}[-\frac{1}{3}(a-z)^3]_0^a = 4\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot\frac{1}{3}a^3 = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{18}a^3$ come si voleva.

3. (a) L'equazione differenziale $(1-2ty^\alpha)y' = y^{\alpha+1}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) è scalare del 1o ordine. Poiché all'intorno del dato iniziale $y(0) = 2$ si ha $1 - 2ty^\alpha \neq 0$ possiamo mettere l'equazione in forma normale $y' = f(t,y) = \frac{y^{\alpha+1}}{1-2ty^\alpha}$; ed essendo f di classe $\mathcal{C}^\infty$ all'intorno del dato iniziale (fintanto che $y \neq 0$, almeno per certi valori di α), la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, non si può applicare il teorema di Cauchy perché il dominio di f non contiene strisce illimitate nella y, dunque non si può affermare nulla a priori.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $(1-2ty)y' = y^2$, che non è ne' lineare ne' a variabili separabili. L'equazione totale associata è $(2ty-1)\,dy + y^2\,dt = 0$, nella quale la forma differenziale al primo membro è esatta e dunque con una sua primitiva $F(y,t)$ dà luogo a un integrale primo: da $\partial_y F = 2ty - 1$ si ricava $F = ty^2 - y + \varphi(t)$ per una certa $\varphi(t)$ da determinare; e da $\partial_t F = y^2 + \varphi'(t) = y^2$ si ricava φ costante. Dunque a meno di costanti additive si ha $F(y,t) = ty^2 - y$, ed essendo $F(2,0) = -2$ si ha $ty^2 - y + 2 = 0$ da cui $y(t) = \frac{1-\sqrt{1-8t}}{2t}$ (ove si intende che $y(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-8t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-(1-4t+o_0(t))}{2t} = 2$), definita per $t < \frac{1}{8}$.

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione è $(1-2t)y' = y$, lineare. Integrando ambo i membri di $\frac{y'}{y} = \frac{1}{1-2t}$ si ricava $\log y = -\frac{1}{2}\log(1-2t)$ da cui $y(t) = \frac{k}{\sqrt{1-2t}}$; e la condizione $y(0) = 2$ dà $k = 2$, da cui la soluzione $y(t) = \frac{2}{\sqrt{1-2t}}$ definita per $t < \frac{1}{2}$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (21/08/2023)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2022/23

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. È data la funzione $(f, g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x, y, z) = 3xyz - y^3$ e $g(x, y, z) = x - 2z$.

(a) Dimostrare che la curva di livello Γ di (f, g) passante per il punto $P(2, -1, 0)$ è regolare all'intorno di P, parametrizzare Γ localmente attorno a P e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Determinare i punti di estremo relativo di f sulla circonferenza C nel piano $z = 0$ di centro l'origine e raggio 2. Determinare poi gli estremi assoluti di f su C (perché esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq x \leq y\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{y}{\sqrt{x}}\, dx\, dy$ e $\int_A \frac{1}{y}\, dx\, dy$ convergono, e nel caso calcolarli.

Si disegni ora A nel piano verticale (x, z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, 0, z)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 3\alpha y^2 + 2(1 - \alpha)(t^2 - iy) \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -4 \end{cases}$ nell'incognita $y(t)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?

(b) Determinare esplicitamente la soluzione del problema quando $\alpha = 1$.

(c) Determinare esplicitamente la soluzione del problema quando $\alpha = 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (21/08/2023) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana della funzione $(f,g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y,z) = 3xyz - y^3$ e $g(x,y,z) = x - 2z$ è $\mathsf{J}_{(f,g)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3yz & 3(xz-y^2) & 3xy \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, e nel punto $P(2,-1,0)$ vale $\mathsf{J}_{(f,g)}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ che ha rango massimo 2: questo prova che la curva di livello Γ di (f,g) passante per il punto $P(2,-1,0)$ (data dal sistema tra $f(x,y,z) = f(P) = 1$ e $g(x,y,z) = g(P) = 2$) è regolare all'intorno di P. Poiché ad esempio il primo minore di $\mathsf{J}_{(f,g)}(P)$ è nonsingolare, dal sistema $\begin{cases} 3xyz - y^3 = 1 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$ che definisce Γ si possono esplicitare localmente $x(z)$ e $y(z)$ con $x(0) = 2$ e $y(0) = -1$; derivando entrambe le equazioni rispetto z si ottiene poi $\begin{cases} 3x'yz + 3xy'z + 3xy - 3y^2y' = 0 \\ x' - 2 = 0 \end{cases}$, da cui ponendo $z = 0$ si ricava $x'(0) = 2$ e $y'(0) = -2$. Una parametrizzazione locale di Γ attorno a P è data da $\gamma(z) = (x(z), y(z), z) = (2 + 2z + o_0(z),\ -1 - 2z + o_0(z),\ z)$ ove z varia in un intorno di 0; e la parte al primo ordine $\begin{cases} x = 2 + 2z \\ y = -1 - 2z \end{cases}$ dà una forma cartesiana della retta tangente affine a Γ in P, ovvero $\begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$, ottenibile anche da $\mathsf{J}_{(f,g)}(P)\begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) La circonferenza C nel piano $z = 0$ di centro l'origine e raggio 2 è facilmente parametrizzabile da $(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ con $\theta \in \mathbb{R}$, dunque basta studiare gli estremi relativi della funzione di una variabile $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) = -8\sin^3\theta$. La derivata $F'(\theta) = -24\cos\theta\,\sin^2\theta$ si annulla per $\theta = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, e vale $F'(\theta) > 0$ per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$: pertanto il punto con $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ovvero $A_1(0,2,0)$) è di minimo relativo stretto per f su C con $f(A_1) = F(\frac{\pi}{2}) = -8$, il punto con $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (ovvero $A_2(0,-2,0)$) è di massimo relativo stretto per f su C con $f(A_2) = F(\frac{3\pi}{2}) = 8$, e i punti con $\theta = 0$ (ovvero $A_3(2,0,0)$) e $\theta = \pi$ (ovvero $A_4(2,0,0)$) sono di sella per f su C con $f(A_3) = f(A_4) = 0$. • Poiché C è un insieme compatto (chiuso e limitato) di $\mathbb{R}^3$ e f è continua su $\mathbb{R}^3$, gli estremi assoluti di f su C esistono per Weierstrass e, per quanto visto, minimo e massimo valgono risp. -8 (in A_1) e 8 (in A_2).

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le x \le y\}$ è il settore circolare di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ nel 1o quadrante compreso tra l'asse y e la bisettrice $y = x$, di area $\frac{\pi}{8}a^2$. Usando le coordinate polari si ha $\int_A x\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{2-\sqrt{2}}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$, dunque dividendo per l'area le coordinate del baricentro risultano $(x_G, y_G) = (\frac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi}a,\ \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a)$.

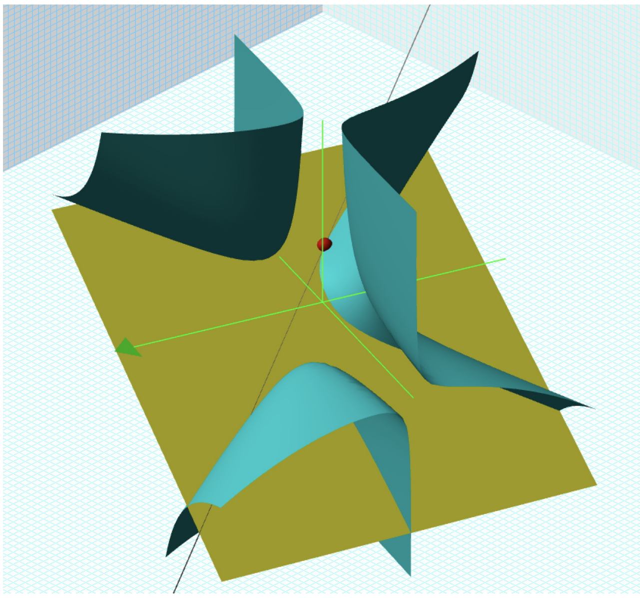
(b) Su A le funzioni $\frac{y}{\sqrt{x}}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0, dunque per Fubini e Tonelli possiamo controllarne l'integrabilità con un integrale iterato, sempre operando in coordinate polari. • Si ha $\int_A \frac{y}{\sqrt{x}}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho\cos\theta}}\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta \int_0^a \rho^{\frac{3}{2}}\,d\rho = [-2\sqrt{\cos\theta}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^a = \frac{4}{5\sqrt[4]{2}}a^2\sqrt{a}$, valore finito. • Si ha $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{1}{\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta \int_0^a d\rho = a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta$. L'integrale indefinito $\int \frac{1}{\sin t}\,dt$ si può calcolare con le formule parametriche ponendo $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, ovvero $t = 2\operatorname{arctg} u$: si ha allora $\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \log\operatorname{tg}\frac{t}{2} + k$, pertanto $a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = a[\log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = a(\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}) = a(\log 1 - \log(\sqrt{2}-1)) = -\log(\sqrt{2}-1)\,a = \log(\sqrt{2}+1)\,a$, valore finito.

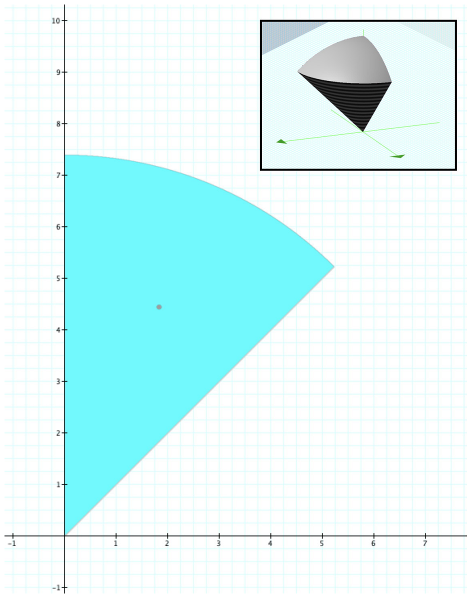
(c) Poiché il campo $F = (0,0,z)$ ha divergenza 1, basterà verificare che il flusso totale di F uscente dal solido E è pari al volume di E, ovvero (con Guldino, usando i risultati di (a)) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{12}a^3$. Ora, per parallelismo i flussi di F uscenti dalle due componenti piane della superficie esterna di E sui piani $x = 0$ e $y = 0$ sono nulli. La componente sferica in alto S è parametrizzata da $(a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ (normale associata entrante), dunque il flusso uscente è $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \det\begin{pmatrix} 0 & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ a\cos\varphi & 0 & -a\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}[-\frac{1}{3}\cos^{3\varphi}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(4-\sqrt{2})\pi}{24}a^3$. Invece la componente conica C è parametrizzata da $(z\cos\theta, z\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (normale associata uscente), dunque il flusso uscente è $+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \det\begin{pmatrix} 0 & -z\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & z\cos\theta & \sin\theta \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} z^2\,dz = -\frac{\pi}{2}[\frac{1}{3}z^3]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{24}a^3$. Sommando i flussi si ottiene effettivamente il volume $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{12}a^3$, come si voleva,

3. (a) L'equazione differenziale $y'' = 3\alpha y^2 + 2(1-\alpha)(t^2 - iy)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) è scalare del 2o ordine, in forma normale $y'' = f(y, y', t)$. Poiché f è $\mathcal{C}^\infty$, la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale; quanto all'esistenza globale, se $\alpha \ne 0$ non si può applicare il teorema di Cauchy perché la crescita di f è quadratica, mentre se $\alpha = 0$ l'equazione diventa lineare e dunque il dominio della soluzione sarà tutto $\mathbb{R}$.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' = 3y^2$, autonoma della forma $y'' = h(y)$. Posto $V(y) = -\int h(y)\,dy = -y^3$ si ha l'integrale dell'energia $E(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 - y^3$, che per la soluzione cercata varrà costantemente $E(2,-4) = 0$: dunque $(y')^2 = 2y^3$, da cui (essendo $y'(0) = -4 < 0$) si ricava $y' = -\sqrt{2}\,y^{\frac{3}{2}}$. Separando le variabili si ha $y^{-\frac{3}{2}}\,dy = -\sqrt{2}\,dt$, che integrata dà $-2y^{-\frac{1}{2}} = k - \sqrt{2}\,t$, e da $y(0) = 2$ si trova $k = -\sqrt{2}$: pertanto $-2y^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\,(1+t)$ ovvero $\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+t)$, da cui infine $y(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$ (definita per $t > -1$).

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = 2(t^2 - iy)$ ovvero $y'' + 2iy = 2t^2$, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda^2 = -2i$ dà $\lambda = \pm\mu$ ove $\mu = -1 + i$; una soluzione particolare del problema non omogeneo avrà la forma $\tilde{y}(t) = at^2 + bt + c$, e imponendo che $\tilde{y}'' + 2i\tilde{y} = 2t^2$ si ricava $a + i(at^2 + bt + c) = iat^2 + ibt + a + ic = t^2$ da cui $(a, b, c) = (-i, 0, 1)$. Le soluzioni dell'equazione completa saranno dunque tutte e sole quelle della forma $y(t) = A\,e^{\mu t} + B\,e^{-\mu t} - it^2 + 1$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$ (da cui $y'(t) = \mu(A\,e^{\mu t} - B\,e^{-\mu t}) - 2it$), e imponendo che $(y(0), y'(0)) = (A + B + 1,\, (-1 + i)(A - B)) = (2, -4)$ si ricava $(A, B) = (\frac{3}{2} + i, -\frac{1}{2} - i)$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (05/09/2023)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2022/23

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si abbia la funzione $g : D \to \mathbb{R}$ con $g(x, y) = 3\log(x + y + 2) + 2x^2 + 4xy$.

(a) Determinare il dominio D di g. Dire quali curve di livello di g sono regolari. Mostrare che in particolare lo è la curva di livello Γ passante per il punto $P(0, -1)$, parametrizzarla attorno a P e determinare in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Determinare gli estremi assoluti di g sul triangolo $T = \{(x, y) : x + y + 1 \geq 0,\ x \leq 0,\ |y| \leq 1\}$ (perché esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a,\ x + y \geq 0,\ ax \geq y^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati (si pensi che A sia un corpo omogeneo con densità di massa μ espressa in $\mathrm{kg/m^2}$, e che a sia espresso in metri).

(b) Dire se l'integrale $\int_A \frac{y}{x}\, dx\, dy$ converge e in tal caso calcolarlo.
(Più in generale, dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_A x^\alpha y\, dx\, dy$.)

Si disegni ora A nel piano orizzontale (x, y) dello spazio cartesiano, si consideri la sua copia A' nel soprastante piano orizzontale $z = a$, e sia E il solido cilindrico compreso tra A e A'.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, y, z)$.

3. È dato il problema di Cauchy $\begin{cases} 2y^\alpha y'' = (y')^{\alpha+1} + 2(\alpha - 1) \\ y(0) = -1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$ nella funzione $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?

(b) Risolvere il problema per $\alpha = 0$.

(c) Risolvere il problema per $\alpha = 1$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (05/09/2023) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Il dominio di $g(x,y) = 3\log(x+y+2) + 2x^2 + 4xy$ è il semipiano $D = \{(x,y) : x+y > -2\}$. Ponendo $\nabla g = (\frac{3}{x+y+2} + 4(x+y), \frac{3}{x+y+2} + 4x) = (0,0)$ si ottiene $\frac{3}{x+y+2} = -4(x+y) = -4x$; dalla seconda uguaglianza si ricava $y = 0$, che messa nella prima dà $\frac{3}{x+2} = -4x$ ovvero $4x^2 + 8x + 3 = 0$, che dà $x = -\frac{3}{2}$ oppure $x = -\frac{1}{2}$. Le curve di livello di g sono dunque regolari tranne al più quella per $A(-\frac{3}{2}, 0)$ (livello $g(A) = \frac{9}{2} - 3\log 2 \sim 2{,}4$) e quella per $B(-\frac{1}{2}, 0)$ (livello $g(B) = 3(\log 3 - \log 2) + \frac{1}{2} \sim 1{,}7$); in particolare lo è quella per il dato punto $P(0,-1)$ (ovvero $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = g(P) = 0\}$). Essendo $\nabla g(P) = (-1,3)$, da $g(x,y) = 0$ possiamo ricavare una delle due variabili a scelta rispetto all'altra: ad esempio, esplicitando $y(x)$ con $y(0) = -1$, derivando $g(x,y(x)) = 0$ rispetto a x si ha $\frac{3(1+y')}{x+y+2} + 4x + 4y + 4xy' = 0$ da cui, calcolando per $x = 0$, si ha $3(1+y'(0)) - 4 = 0$ e perciò $y'(0) = \frac{1}{3}$; derivando ancora si ha $3\frac{y''(x+y+2)-(1+y')^2}{(x+y+2)^2} + 4 + 4y' + 4y' + 4xy'' = 0$ da cui, calcolando per $x = 0$, si ha $3(y''(0) - \frac{16}{9}) + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$ da cui $y''(0) = -\frac{4}{9}$. Si ha pertanto $y = -1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + o_0(x^2)$, la cui parte fino al primo ordine dà la retta tangente affine $y = \frac{1}{3}x - 1$, esprimibile anche come $\nabla g(P) \cdot (x - 0, y - (-1)) = (-1,3) \cdot (x, y+1) = 0$.

(b) (Figura 1) Il triangolo $T = \{(x,y) : x+y+1 \geq 0,\ x \leq 0,\ |y| \leq 1\}$ è compatto perché chiuso (disequazioni larghe) e limitato, ed è interamente contenuto nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su T esistono per Weierstrass. Per cercare i punti di T dove tali estremi potrebbero essere raggiunti dividiamo T nei suoi punti interni, nei lati privati dei vertici e nei tre vertici. L'unico punto interno in cui si annulla ∇g è il noto $B(-\frac{1}{2}, 0)$. Sul lato con $y = 1$ (con $-2 < x < 0$) la funzione è $G(x) = g(x,1) = 3\log(x+3) + 2x^2 + 4x$; da $G'(x) = \frac{3}{x+3} + 4x + 4 = 0$ si ricava $4x^2 + 16x + 15 = 0$, ovvero $x = -\frac{5}{2}$ (non accettabile) e $x = -\frac{3}{2}$, che dà il punto $C(-\frac{3}{2}, 1)$. Sul lato con $x = 0$ (con $-1 < y < 1$) la funzione è $G(y) = g(0,y) = 3\log(y+2)$, priva di punti stazionari. Sul lato con $x + y = -1$ è $G(x) = g(x, -1-x) = -2(x^2 + 2x)$; da $g'(x) = -4(x+1) = 0$ si ricava il punto $E(-1,0)$. Vanno poi tenuti presente i vertici $P(0,-1)$, $Q(0,1)$ e $R(-2,1)$. Da $g(B) = 3(\log 3 - \log 2) + \frac{1}{2} \sim 1{,}7$, $g(C) = 3(\log 3 - \log 2) - \frac{3}{2} \sim -0{,}3$, $g(E) = 2$, $g(P) = 0$, $g(Q) = 3\log 3 \sim 3{,}4$ e $g(R) = 0$ si nota che il massimo assoluto di g su T è $3\log 3$ (assunto in Q) e il minimo è $3(\log 3 - \log 2) - \frac{3}{2}$ (in C).

2. (a) (Figura 2) L'insieme $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ x + y \geq 0,\ ax \geq y^2\}$ può essere visto come l'unione tra il settore parabolico $A_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ y \geq 0,\ ax \geq y^2\}$ e il triangolo $A_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ x + y \geq 0,\ y \leq 0\}$. Ragionando per x-fili, il momento d'inerzia rispetto all'asse x è $I_x = \mu \int_A y^2\,dx\,dy = \mu \int_0^a dx \int_{-x}^{\sqrt{ax}} y^2\,dy = \frac{1}{3}\mu \int_0^a (ax\sqrt{ax} + x^3)\,dx = \frac{1}{3}\mu[\frac{2}{5}ax^2\sqrt{ax} + \frac{1}{4}x^4]_0^a = \frac{13}{60}\mu a^4$, mentre quello rispetto all'asse y è $I_y = \mu \int_A x^2\,dx\,dy = \mu \int_0^a x^2(\sqrt{ax} + x)\,dx = [\frac{2}{7}x^3\sqrt{ax} + \frac{1}{4}x^4]_0^a = \frac{15}{28}\mu a^4$ (la dimensione fisica è $(\mathrm{kg/m^2}) \cdot m^4 = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$, come atteso).

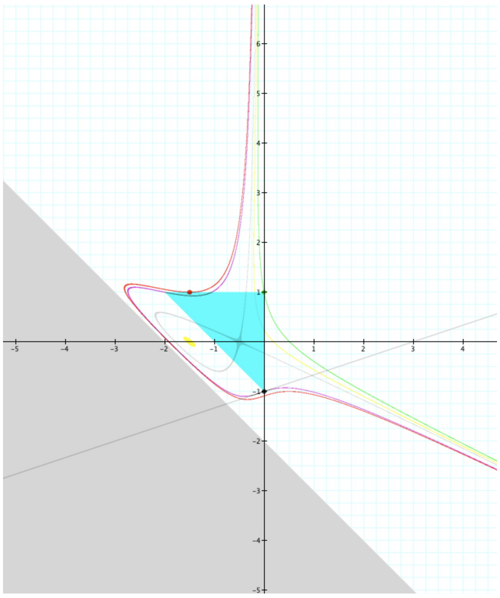
(b) Su A la funzione $\frac{y}{x}$ non ha segno costante; tuttavia, poiché essa è ≥ 0 su A_1 e ≤ 0 su A_2 e poiché $\int_A \frac{y}{x}\,dx\,dy$ converge se e solo se convergono entrambi $\int_{A_{1,2}} \frac{y}{x}\,dx\,dy$ (e in tal caso è la loro somma algebrica), per Fubini e Tonelli possiamo controllare l'integrabilità con un integrale iterato separatamente su A_1 e su A_2. Sempre ragionando per x-fili, per A_1 si ha $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{y}{x}\,dy = \int_0^a \frac{1}{x}[\frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{ax}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a a\,dx = [2\sqrt{ax}]_0^a = \frac{1}{2}a^2$ (finito), e per A_2 si ha $\int_0^a dx \int_{-x}^0 \frac{y}{x}\,dy = \int_0^a \frac{1}{x}[\frac{1}{2}y^2]_{y=-x}^{y=0}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a x\,dx = -\frac{1}{4}a^2$ (pure finito): pertanto $\int_A \frac{y}{x}\,dx\,dy$ converge e vale $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$. • Per il caso generale di $\int_A x^\alpha y\,dx\,dy$, ragionando in modo identico, per A_1 si ha $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} x^\alpha y\,dy = \int_0^a x^\alpha(\frac{1}{2}ax)\,dx = \frac{1}{2}a\int_0^a x^{\alpha+1}\,dx$ che converge se e solo se $\alpha + 1 > -1$ (ovvero $\alpha > -2$) con valore $\frac{1}{2(\alpha+2)}a^{\alpha+3}$, mentre per A_2 si ha $\int_0^a dx \int_{-x}^0 x^\alpha y\,dy = \int_0^a x^\alpha(-\frac{1}{2}x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a x^{\alpha+2}\,dx$ che converge se e solo se $\alpha + 2 > -1$ (ovvero $\alpha > -3$) con valore $-\frac{1}{2(\alpha+3)}a^{\alpha+3}$: pertanto $\int_A x^\alpha y\,dx\,dy$ converge se e solo se $\alpha > -2$, e in tal caso vale $(\frac{1}{2(\alpha+2)} - \frac{1}{2(\alpha+3)})a^{\alpha+3} = \frac{1}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}a^{\alpha+3}$.

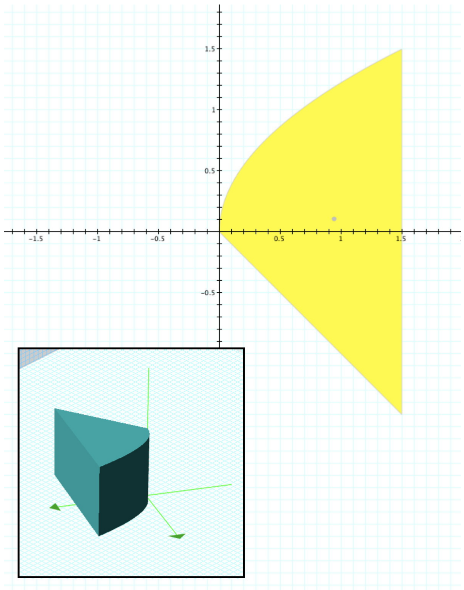
(c) Il campo $F = (x,y,z)$ è il classico campo radiale che emana dall'origine, nel quale ad ogni punto di $\mathbb{R}^3$ viene associato il vettore dato dal proprio vettore posizione. La sua divergenza $\nabla \cdot F$ vale 3, dunque $\int_E \nabla \cdot F\,dx\,dy\,dz = 3\,\mathrm{Vol}\,E = 3\,a\,\mathrm{Area}\,A = 3a\int_0^a(\sqrt{ax} - (-x))\,dx = 3a[\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + \frac{1}{2}x^2]_0^a = 3a \cdot \frac{7}{6}a^2 = \frac{7}{2}a^3$. D'altra parte, la superficie esterna del solido E ha 5 componenti: le basi inferiore e superiore A e A', i rettangoli piani R e R' sui piani verticali $x = a$ e $x + y = 0$ e il rettangolo deformato S costruito sulle basi paraboliche $ax = y^2$. I flussi di F uscenti dalle componenti A e da R' sono nulli per evidente parallelismo del campo su di esse. Per $A' = \{(x,y,a) : (x,y) \in A\}$ e $R = \{(a,y,z) : |y| \leq a,\ 0 \leq z \leq a\}$ i flussi uscenti valgono rispettivamente $\int_A (x,y,a) \cdot (0,0,1)\,dx\,dy = a\,\mathrm{Area}\,A = \frac{7}{6}a^3$ e $\int_{-a}^a dy \int_0^a (a,y,z) \cdot (1,0,0)\,dz = a\,\mathrm{Area}\,R = 2a^3$. Infine, il flusso uscente da $S = \{(x, \sqrt{ax}, z) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq z \leq a\}$ (normale associata entrante) è dato da $-\int_0^a dx \int_0^a \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ \sqrt{ax} & \frac{1}{2}\sqrt{a/x} & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^a dx \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{ax}\,dz = \frac{1}{2}a[\frac{2}{3}x\sqrt{ax}]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E vale $0 + 0 + \frac{7}{6}a^3 + 2a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{7}{2}a^3$, come prescritto da Gauss.

3. (a) L'equazione differenziale $2y^\alpha y'' = (y')^{\alpha+1} + 2(\alpha - 1)$ (con $\alpha \in \mathbb{Z}$) è scalare del 2o ordine; essendo $y(0) \neq 0$, attorno al dato iniziale essa può essere posta in forma normale $y'' = f(t,y,y') = \frac{1}{2}y^{-\alpha}((y')^{\alpha+1} + 2(\alpha - 1))$. Poiché f è $\mathcal{C}^\infty$ (ricordiamo che $\alpha \in \mathbb{Z}$), la soluzione del problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale; quanto all'esistenza globale, tranne il caso $\alpha = 0$ (in cui l'equazione diventa $y'' = \frac{1}{2}(y' - 2)$, lineare, con dominio della soluzione tutto $\mathbb{R}$), se $\alpha \neq 0$ non si può applicare il teorema di Cauchy perché f non è definita su tutto il piano delle (y, y').

(b) Per $\alpha = 0$, come detto l'equazione diventa $y'' = \frac{1}{2}(y' - 2)$, che può essere integrata dando $y' = \frac{1}{2}(y - 2t) + h$:

imponendo le condizioni iniziali $y(0)=-1$ e $y'(0)=-1$ si ha allora $-1=\frac{1}{2}(-1-0)+h$, da cui $h=-\frac{1}{2}$. Si ha dunque $y'=\frac{1}{2}(y-2t-1)$, ovvero $y'+(-\frac{1}{2})y=-t-\frac{1}{2}$, da cui $y(t)=e^{\frac{1}{2}t}(\int e^{-\frac{1}{2}t}(-t-\frac{1}{2})\,dt+k)$. Posto $\tau=-\frac{1}{2}t$ (da cui $t=-2\tau$) si ha $\int e^{-\frac{1}{2}t}(-t-\frac{1}{2})\,dt=\int e^{\tau}(2\tau-\frac{1}{2})(-2\,d\tau)=-\int(4\tau-1)e^{\tau}\,d\tau=-((4\tau-1)e^{\tau}-\int 4e^{\tau}\,d\tau)=-(4\tau-5)e^{\tau}=(2t+5)e^{-\frac{1}{2}t}$, pertanto $y(t)=e^{\frac{1}{2}t}((2t+5)e^{-\frac{1}{2}t}+k)=2t+5+k\,e^{\frac{1}{2}t}$, e imponendo $y(0)=-1$ si ha $k=-6$: dunque $y(t)=2t+5-6\,e^{\frac{1}{2}t}$.
(c) Per $\alpha=1$ l'equazione diventa $2yy''=(y')^2$, autonoma del 2o ordine ed equivalente (fintanto che $y(t)$ non si annulla, ovvero fintanto che $y(t)<0$) al sistema autonomo del 1o ordine nel piano delle fasi $\begin{cases} y'=p \\ p'=\frac{p^2}{2y}\end{cases}$. Passando all'equazione totale $\omega=\frac{p^2}{2y}\,dy-p\,dp=0$ e notando che $\frac{1}{-p}(\frac{\partial(\frac{p^2}{2y})}{\partial p}-\frac{\partial(-p)}{\partial y})=-\frac{1}{y}$ non dipende da p, si ha che $\rho(y)=e^{\int(-\frac{1}{y})\,dy}=\frac{1}{y}$ è un fattore integrante. Detta $F(y,p)$ una primitiva di $\frac{1}{y}\omega=\frac{p^2}{2y^2}\,dy-\frac{p}{y}\,dp$, da $\partial_p F=-\frac{p}{y}$ si ha $F(y,p)=-\frac{p^2}{2y}+\varphi(y)$ con φ da determinare, e da $\partial_y F=\frac{p^2}{2y^2}+\varphi'(y)=\frac{p^2}{2y^2}$ si ricava $\varphi'(y)=0$. Si ha così $F(y,p)=-\frac{p^2}{2y}$; essendo nel dato iniziale $F(-1,-1)=\frac{1}{2}$, tale valore sarà mantenuto lungo tutta la soluzione cercata. Ci siamo allora ricondotti all'equazione del 1o ordine $-\frac{p^2}{2y}=\frac{1}{2}$, da cui $p^2=-y$, da cui $p=y'=-\sqrt{-y}$, a variabili separabili. Da $-\frac{1}{\sqrt{-y}}\,dy=dt$ integrando si ricava $2\sqrt{-y}=t+k$, che imponendo $y(0)=-1$ dà $k=2$: pertanto $2\sqrt{-y}=2+t$, da cui $y(t)=-(1+\frac{1}{2}t)^2$ (definita finché $y(t)<0$, ovvero per $t>-2$).





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.