Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (22/01/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2023/24

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano sia $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 2x - y$.

(a) Determinare quali curve di livello di g sono regolari. Parametrizzare $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = 2\}$ attorno al suo punto $P(0,-1)$, calcolando in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Trovare gli estremi assoluti di $f(x,y) = 3x+y$ su $K = \Gamma \cap \{x^2+y^2 \leq 1\}$ (perché esistono?)

(c) *(Facoltativo)* Descritta Γ in forma polare, determinarne il punto più vicino all'origine $(0,0)$.

2. Nel piano cartesiano si abbia $B = \{(x,y) : x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Calcolare $\int_B xy^\alpha \, dx\, dy$ per $\alpha = -\frac{1}{2}$ (se converge). Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge tale integrale?

Si consideri ora nello spazio cartesiano il solido $E = \{(x,y,z) : (x,y) \in B,\ 0 \leq z \leq 2a - x\}$.

(b) Disegnare E, calcolarne il volume e la coordinata z del baricentro geometrico.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (0,0,y)$.

(d) Calcolare l'area dell'unica componente non piana C della superficie esterna di E, e verificare la formula di Kelvin-Stokes per essa e il campo F.

3. Si abbia il sistema autonomo $(\dot{x},\dot{y}) = (x(x+y),\ x^2-y^2)$ nella funzioni incognite $(x(t), y(t))$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato? Determinarne equilibri e orbite, disegnando possibilmente il tutto sul piano cartesiano.

(b) Risolvere il problema con i dati iniziali $(x(0),y(0)) = (-3,-1)$ oppure $(x(0),y(0)) = (-1,1)$.

(c) Determinare la soluzione del sistema lineare omogeneo $(\dot{x},\dot{y}) = (x,\ x-y)$ con dato iniziale $(x(0),y(0)) = (-3,-1)$, illustrando eventuali relazioni con quanto fatto nei punti precedenti.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (22/01/2024) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Data $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-2x-y$, per $(x,y)\neq(0,0)$ si ha $\nabla g=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-1)=(0,0)$ se e solo se $x=2\sqrt{x^2+y^2}$ e $y=\sqrt{x^2+y^2}$; se ne ricava $x=2y$, pertanto $y=\sqrt{5y^2}$ da cui $y=0$ e allora anche $x=0$. Dunque tutte le curve di livello $\neq g(0,0)=0$ sono regolari; quanto alla curva $g(x,y)=0$ essa è data da $\sqrt{x^2+y^2}=2x+y$, che nell'ipotesi necessaria $2x+y\geq 0$ equivale a $x^2+y^2=(2x+y)^2$ ovvero $x(3x+4y)=0$, l'unione delle due semirette $x=0$ con $y>0$ (semiasse y) e $y=-\frac{3}{4}x$ con $x>0$, che ha un punto irregolare (angoloso) in $(0,0)$. Quanto a $\Gamma=\{(x,y):g(x,y)=2\}$ e al suo punto $P(0,-1)$ si ha $\nabla g(P)=(-2,-2)$, dunque da $g(x,y)=2$ si può ad esempio esplicitare localmente $y=-1+(-\frac{-2}{-2})x+o_0(x)=-1-x+o_0(x)$, sviluppo che troncato al primo ordine dà la retta tangente $y=-1-x$, data alternativamente anche da $\nabla g(P)\cdot(x,y+1)=0$.

(b) L'insieme $K=\Gamma\cap\{x^2+y^2\leq 1\}$ è non vuoto (ci sta $P(0,-1)$), chiuso (intersezione di chiusi) e limitato (perché lo è già il disco $\{x^2+y^2\leq 1\}$), dunque compatto: l'esistenza di estremi assoluti di $f(x,y)=3x+y$ su esso ne segue dal teorema di Weierstrass. Iniziamo con l'individuare i punti di Γ stazionari per f che stanno dentro al disco aperto $\{x^2+y^2<1\}$. La condizione di Lagrange prescrive che ∇g sia parallelo a $\nabla f=(3,1)$, ovvero che $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2=3(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-1)$, da cui $3y-x=\sqrt{x^2+y^2}$: sotto la condizione necessaria $3y-x\geq 0$, elevando al quadrato si ottiene $y(4y-3x)=0$, da cui $y=0$ oppure $y=\frac{3}{4}x$. Se $y=0$, da $g(x,y)=2$ si ricava $|x|-2x=2$ che ha la sola soluzione $x=-\frac{2}{3}$: si ottiene dunque il punto $A(-\frac{2}{3},0)$ (accettabile perché $3y-x\geq 0$ e $x^2+y^2<1$). Se invece $y=\frac{3}{4}x$, da $g(x,y)=2$ si ricava $\frac{5}{4}|x|-\frac{11}{4}x=2$, ovvero $5|x|-11x=8$ che ha la sola soluzione $x=-\frac{1}{2}$: si ottiene dunque il punto $B(-\frac{1}{2},-\frac{3}{8})$ (che però non è accettabile perché $3y-x\ngeq 0$). Vanno poi esaminati i punti di Γ che cadono nel bordo del disco, ovvero tali che $x^2+y^2=1$: da $g(x,y)=2$ si ricava $1-2x-y=2$ ovvero $y=-1-2x$, che messa in $x^2+y^2=1$ dà $x=0$ (da cui $y=-1$, dunque il noto punto $P(0,-1)$) oppure $x=-\frac{4}{5}$ (da cui $y=\frac{3}{5}$, ovvero il punto $Q(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$). Dall'analisi fatta ricaviamo che gli estremi assoluti di $f(x,y)=3x+y$ su K possono essere assunti solo nei punti A, P e Q: essendo $f(A)=-2$, $f(P)=-1$ e $f(Q)=-\frac{9}{5}$ si ha che il massimo assoluto è -1 (assunto in P) e il minimo assoluto è -2 (assunto in A).

(c) Sostituendo in $g(x,y)=2$ le espressioni polari $(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ si ottiene $\rho-2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=2$, da cui $\rho(\theta)=\frac{2}{1-2\cos\theta-\sin\theta}$: poiché $\rho>0$ dovrà allora essere $1-2\cos\theta-\sin\theta>0$, ovvero $2\cos\theta+\sin\theta<1$, disequazione goniometrica lineare (risolvibile con le formule parametriche o con un semplice confronto grafico tra $2\cos\theta$ e $1-\sin\theta$) che nel periodo $[0,2\pi]$ è risolta per $\frac{\pi}{2}<\theta<\theta_0:=2\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. La descrizione di Γ in forma polare è pertanto $\rho(\theta)=\frac{2}{1-2\cos\theta-\sin\theta}$ con $\theta\in(\frac{\pi}{2},\theta_0)$. Ora, cercare il punto di Γ più vicino all'origine $(0,0)$ equivale a trovare – se c'è – il minimo assoluto di $\rho(\theta)$: vale $\rho'(\theta)=-2\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{1-2\cos\theta-\sin\theta}=0$ per $2\sin\theta-\cos\theta=0$, ovvero $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$ che in $(\frac{\pi}{2},\theta_0)$ ha la sola soluzione $\theta_1=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; e vale $\rho'(\theta)>0$ per $2\sin\theta<\cos\theta$, ovvero per $\theta_1<\theta<\theta_0$. Dunque $\rho(\theta)$ assume minimo assoluto in $\theta_1=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, che corrisponde su Γ al punto $(\rho(\theta_1)\cos\theta_1,\rho(\theta_1)\sin\theta_1)=(-(1-\frac{\sqrt{5}}{5}),-\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{5}}{5}))$.

2. (a) (Figura 2) La funzione xy^α è ≥ 0 su $B=\{(x,y):x,y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\}$, dunque per Fubini e Tonelli si può studiare la convergenza di $\int_B xy^\alpha\,dx\,dy$ con integrali iterati. Passando in coordinate polari si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)^\alpha\,\rho\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\sin^\alpha\theta\,d\theta\int_0^a\rho^{\alpha+2}\,d\rho$, che per la convergenza in $\rho\sim 0^+$ (risp. $\theta\sim 0^+$) richiede che $\alpha+2>-1$ (risp. $\alpha>-1$), ovvero per $\alpha>-1$, e in tal caso esso si integra facilmente e vale $\frac{a^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+3)}$; in particolare per $\alpha=-\frac{1}{2}$ si ottiene $\frac{4a^2\sqrt{a}}{5}$.

(b) Operando per (x,y)-fili, il volume di $E=\{(x,y,z):(x,y)\in B,\ 0\leq z\leq 2a-x\}$ è $\int_E dx\,dy\,dz=\int_B dx\,dy\int_0^{2a-x}dz=\int_B(2a-x)dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(2a-\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3\cos\theta]_{\rho=0}^{\rho=a}\,d\theta=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{3}\cos\theta)\,d\theta=a^3[\theta-\frac{1}{3}\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi-2}{6}a^3$. Alternativamente, operando per y-fette, notiamo che per $0\leq y\leq a$ la y-fetta $E_y=\{(x,z):0\leq x\leq\sqrt{a^2-y^2},\ 0\leq z\leq 2a-x\}$ è un trapezio rettangolo di basi $2a$ e $2a-\sqrt{a^2-y^2}$ e altezza $\sqrt{a^2-y^2}$ e dunque di area $\frac{1}{2}(2a+2a-\sqrt{a^2-y^2})\sqrt{a^2-y^2}=2a\sqrt{a^2-y^2}-\frac{1}{2}(a^2-y^2)$, pertanto il volume risulta $2a\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy-\frac{1}{2}\int_0^a(a^2-y^2)\,dy=2a\cdot\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}[a^2y-\frac{1}{3}y^3]_0^a=\frac{\pi}{2}a^2-\frac{1}{2}(a^3-\frac{1}{3}a^3)=\frac{3\pi-2}{6}a^3$, come già trovato in precedenza. • D'altra parte si ha $\int_E z\,dx\,dy\,dz=\int_B dx\,dy\int_0^{2a-x}z\,dz=\frac{1}{2}\int_B(2a-x)^2dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(2a-\rho\cos\theta)^2\,\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(4a^2-4a\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta)\,\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2a^2\rho^2-\frac{4}{3}a\rho^3\cos\theta+\frac{1}{4}\rho^4\cos^2\theta]_{\rho=0}^{\rho=a}\,d\theta=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\frac{4}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}a^4[2\theta-\frac{4}{3}\sin\theta+\frac{1}{8}(\theta+\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}a^4(\pi-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{16})=\frac{51\pi-64}{96}a^4$, pertanto $z_G=\frac{6}{(3\pi-2)a^3}\frac{51\pi-64}{96}a^4=\frac{51\pi-64}{16(3\pi-2)}a$ ($\sim$0,8 a, plausibile).

(c) Il campo $F=(0,0,y)$ è verticale (parallelo all'asse z), dunque i suoi flussi attraverso le componenti di ∂E nei piani (x,z) e (y,z) e attraverso la componente cilindrica C sono nulli. Il flusso uscente dalla base B è $\Phi_B(F)=\int_B(0,0,y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=-\int_B y\,dx\,dy=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^a\rho^2\,d\rho=-\frac{1}{3}a^3$. D'altra parte la componente piana obliqua superiore P è descritta da $(x,y,2a-x)$ con $(x,y)\in B$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_P(F)=\int_B\det\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\y&-1&0\end{pmatrix}dx\,dy=\int_B y\,dx\,dy=\frac{1}{3}a^3$. Il flusso totale di F uscente da ∂E è dunque nullo, in coerenza col fatto che F è a divergenza nulla. Questo conferma il teorema di Gauss per E e il campo F.

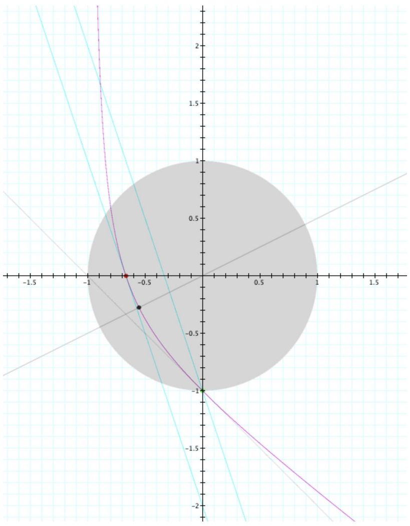
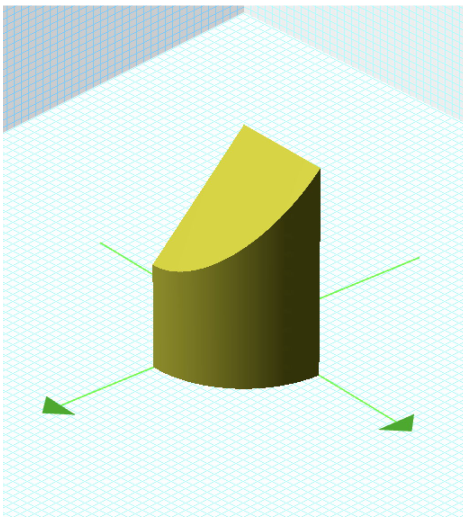
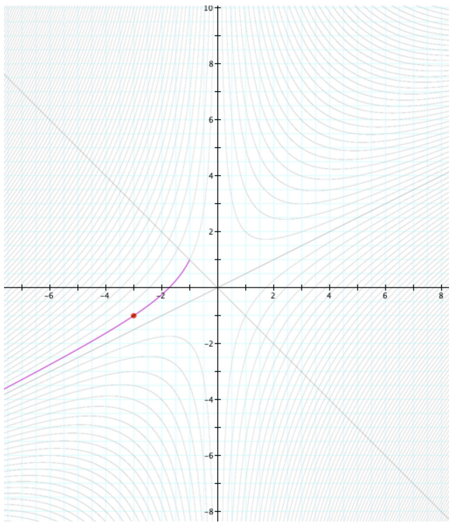
(d) La componente cilindrica C di ∂E è descritta da $(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$ con $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ e $0\leq z\leq 2a-x=(2-\cos\theta)a$ (elemento d'area $d\sigma=a\,d\theta\,dz$), dunque l'area di C vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{(2-\cos\theta)a}a\,dz=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos\theta)\,d\theta=a^2[2\theta-\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=(\pi-1)a^2$. • Usando la parametrizzazione di prima (normale associata uscente), il flusso del rotore $\nabla\times F=(1,0,0)$

attraverso C vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(2-\cos\theta)a} \det \begin{pmatrix} 1 & -a\sin\theta & 0 \\ 0 & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = a^2[2\sin\theta - \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{4})a^2$. D'altra parte, partendo dal punto $(a,0,0)$ e percorrendo il bordo di C in senso antiorario si ha $\oint_{\partial C} F\cdot d\ell = 0 + \int_0^{2a}(0,0,a)\cdot(0,a,1)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(0,0,a\sin\theta)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, a\sin\theta)\,d\theta + 0 = \int_0^{2a} a\,dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\,d\theta = 2a^2 - a^2[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2-\frac{\pi}{4})a^2$ come ottenuto in precedenza, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes per C e il campo F.

3. (a) (Figura 3) Il sistema $(\dot{x},\dot{y}) = f(x,y) = (x(x+y),\, x^2-y^2)$ è autonomo del 1o ordine; essendo f di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, per ogni dato iniziale la soluzione del corrispondente problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, il teorema di Cauchy-Lipschitz globale non può essere applicato, perché la crescita di f non è sublineare. Gli equilibri sono tutti e soli i punti della retta $x+y=0$; al di fuori di essa il sistema è equivalente al sistema lineare $(\dot{x},\dot{y}) = (x,\, x-y)$, la cui equazione totale associata $(x-y)\,dx - x\,dy = 0$ ha primitiva $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-2xy)$. Le curve di livello di F, ovvero $x^2-2xy=k$, si studiano e disegnano facilmente (Figura 3): per $k=0$ si ha $x(x-2y)=0$ ovvero l'unione dell'asse y e della retta $y=\frac{1}{2}x$, mentre per $k\neq 0$ si ha $y=\frac{x^2-k}{2x}$, una funzione il cui grafico è costituito da due rami di curva asintotici all'asse y e alla retta $y=\frac{1}{2}x$ che per $k>0$ intersecano l'asse x in $x=\pm\sqrt{k}$ mentre per $k<0$ non l'intersecano. La retta $x+y=0$ taglia solo i rami delle curve di livello con $k\geq 0$ dividendoli in 5 orbite distinte (le semicurve e l'equilibrio), mentre per $k<0$ ogni ramo di curva è un'orbita intera.

(b) Nel dato iniziale $(x(0),y(0)) = (-3,-1)$ si ha l'integrale primo $x^2-2xy=3$ da cui $y=\frac{x^2-3}{2x}$, dunque $\dot{x} = x(x+y) = \frac{3}{2}(x^2-1)$: separando le variabili si ha $\frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\,dt$, da cui integrando $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{3}{2}t+k$. Da $x(0)=-3$ si ricava $k=\frac{1}{2}\log 2$, dunque $\log\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| = 3t$, da cui esponenziando e ricavando x si ottiene $x(t) = -\frac{2e^{3t}+1}{2e^{3t}-1}$ definita per $t\in(-\frac{1}{3}\log 2, +\infty)$; da $y=\frac{x^2-3}{2x}$ si ricava poi $y(t) = \frac{4e^{6t}-8e^{3t}+1}{4e^{6t}-1}$. • Invece il dato iniziale $(x(0),y(0)) = (-1,1)$ sta sulla retta degli equilibri $x+y=0$, dunque la corrispondente soluzione è la costante $(x(t),y(t)) \equiv (-1,1)$.

(c) Nel sistema lineare omogeneo $(\dot{x},\dot{y}) = (x,\, x-y)$ con dato iniziale $(x(0),y(0)) = (-3,-1)$, da $\dot{x}=x$ si ricava subito $x(t) = -3e^t$; dunque da $\dot{y} = x-y$ si ha $y'+y = -3e^t$, equazione lineare scalare che – tenuto presente il dato iniziale – si risolve facilmente dando $y(t) = -\frac{1}{2}(3e^t - e^{-t})$. • Poiché, come spiegato prima, con questo dato iniziale il sistema lineare $(\dot{x},\dot{y}) = (x,\, x-y)$ è equivalente al sistema $(\dot{x},\dot{y}) = (x(x+y),\, x^2-y^2)$ studiato in precedenza, entrambe le soluzioni $(x(t),y(t))$ trovate nei punti (b) e (c) percorreranno monotonicamente la stessa orbita (in questo caso la mezza curva $x^2-2xy=3$ che sta sotto la retta $x+y=0$), fornendone in effetti due diverse parametrizzazioni.

1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **3** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (09/02/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2023/24

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Sia Γ_α l'intersezione tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e la quadrica $xy - x + 2y + 2z = \alpha$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme Γ_α è una curva regolare?

(b) Parametrizzare $\Gamma = \Gamma_4$ localmente attorno al suo punto $P(2, -1, 5)$ determinandone in due modi la retta tangente affine.

(c) Mostrare che Γ è compatta e determinarne i punti estremi per la coordinata x (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ \sqrt{x}(1 - x) \le y \le 1 - x\}$.

(a) Disegnare[1] A e calcolarne il baricentro.

(b) Calcolare $\int_A y^\alpha \, dx \, dy$ per $\alpha = -2$ (se converge). Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge tale integrale?

Si disegni ora A nel piano orizzontale (x, y) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse x.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, z, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per la componente conica C della superficie esterna di E e per il campo F.

3. È data l'equazione $y'' = 6|y|^{2\alpha} + (1 - \alpha)(\frac{1}{\cos t} - y)$ nella funzione scalare $y(t)$, ove $\alpha \ge 0$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità della soluzione con dato di Cauchy in $t = 0$?

(b) Posto $\alpha = 1$ determinare la soluzione con $(y(0), y'(0)) = (1, -2)$.

(c) Posto $\alpha = 0$ determinare la soluzione con $(y(0), y'(0)) = (1, -2)$.

[1] Iniziare studiando $\varphi(x) = \sqrt{x}(1 - x)$ per $0 \le x \le 1$, con attenzione a crescenza e pendenza agli estremi del dominio.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (09/02/2024) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La matrice jacobiana di $g(x,y,z) = (z - x^2 - y^2, xy - x + 2y + 2z)$, ovvero $\mathsf{J}_g = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \\ y-1 & x+2 & 2 \end{pmatrix}$, ha rango 1 se e solo se $(y-1, x+2) = 2(-2x, -2y)$, il che avviene quando $(x,y) = (\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$, da cui $z = x^2 + y^2 = \frac{13}{25}$: si trova dunque il solo punto $C(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{13}{25})$. Pertanto l'insieme Γ_α è una curva regolare per ogni $\alpha \neq g_2(C) = -\frac{4}{5}$, mentre $\Gamma_{-\frac{4}{5}}$ è una curva probabilmente irregolare in C (in realtà si può verificare che $\Gamma_{-\frac{4}{5}}$ è costituita solo dal punto C).

(b) In $\mathsf{J}_g(2,-1,5) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ il primo minore è nonsingolare, dunque da $g(x,y,z) = (0,4)$ si possono esprimere localmente $x(z)$ e $y(z)$ con $x(5) = 2$ e $y(5) = -1$. Derivando le due equazioni rispetto z si ha $\begin{cases} 1 - 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 0 \\ \dot{x}y + x\dot{y} - \dot{x} + 2\dot{y} + 2 = 0 \end{cases}$ da cui calcolando per $z = 5$ si ricava $x'(5) = 0$ e $y'(5) = -\frac{1}{2}$: gli sviluppi al primo ordine sono dunque $(x(z), y(z)) = (2 + o_5(z-5), -1 - \frac{1}{2}(z-5) + o_5(z-5))$, da cui la retta tangente affine risulta $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 - \frac{1}{2}(z-5) \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} x = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$. Allo stesso risultato si arriva ponendo $\mathsf{J}_g(2,-1,5)\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Sostituendo $z = x^2 + y^2$ in $xy - x + 2y + 2z = 4$ si ottiene $2x^2 + xy + 2y^2 - x + 2y = 4$, un'ellisse (si noti che il discriminante della parte quadratica è < 0) che rappresenta la proiezione di Γ sul piano orizzontale: pertanto x e y sono limitate, e lo sarà anche $z = x^2 + y^2$. Abbiamo così provato che Γ è limitata, oltre che chiusa (luogo geometrico dato da un sistema di equazioni continue in $\mathbb{R}^3$), ovvero è compatta: l'esistenza degli estremi per la coordinata x ne segue per Weierstrass. La condizione di Lagrange applicata alla funzione x sulla curva Γ chiede che $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2x & -2y & 1 \\ y-1 & x+2 & 2 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $4y + x + 2 = 0$. Sostituendo $x = -4y - 2$ e $z = x^2 + y^2 = (-4y-2)^2 + y^2 = 17y^2 + 16y + 4$ in $xy - x + 2y + 2z = 4$ si ottiene $5y^2 + 6y + 1 = 0$, da cui $y = -1$ o $y = -\frac{1}{5}$: si trovano pertanto i due punti $Q(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{37}{25})$ e il già noto $P(2,-1,5)$ che evidentemente sono rispettivamente il punto di minima e massima coordinata x della curva Γ.

2. (a) (Figura 2) Per $0 \le x \le 1$ la funzione $\varphi(x) = \sqrt{x}\,(1-x)$ si annulla in $x = 0$ e $x = 1$ ed è > 0 per $0 < x < 1$; la derivata $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$ è ≥ 0 per $0 < x \le \frac{1}{3}$, dunque $\varphi(x)$ è ivi crescente e ha un massimo stretto per $x = \frac{1}{3}$ con $\varphi(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sim 0{,}4$; si ha infine $\lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = +\infty$ e $\varphi'(1) = -1$. Ne segue che A è l'insieme visibile in Figura 2. • Ragionando per x-fili, l'area di A risulta $\int_0^1 (1 - x - \sqrt{x}\,(1-x))\,dx = \int_0^1 (1-x)(1-\sqrt{x})\,dx$; posto $x = t^2$ si ha $\int_0^1 (1-t^2)(1-t)\,2t\,dt = \int_0^1 2(t - t^2 - t^3 + t^4)\,dt = [t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{5}t^5]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{7}{30}$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^1 x(1-x-\sqrt{x}\,(1-x))\,dx = \int_0^1 t^2(1-t^2)(1-t)\,2t\,dt = \int_0^1 2(t^3 - t^4 - t^5 + t^6)\,dt = [\frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{2}{7}t^7]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{11}{210}$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}\,(1-x)}^{1-x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 ((1-x)^2 - (\sqrt{x}\,(1-x))^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{4}(1-x)^4]_0^1 = \frac{1}{8}$, da cui le coordinate del baricentro risultano $x_G = \frac{30}{7}\cdot\frac{11}{210} = \frac{11}{49} \sim 0{,}22$ e $y_G = \frac{30}{7}\cdot\frac{1}{8} = \frac{15}{28} \sim 0{,}54$.

(b) La funzione y^{-2} è > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli la convergenza dell'integrale $\int_A y^{-2}\,dx\,dy$ può essere verificata tramite un integrale iterato. Si ha $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}\,(1-x)}^{1-x} y^{-2}\,dy = \int_0^1 [-\frac{1}{y}]_{y=\sqrt{x}\,(1-x)}^{y=1-x}\,dx = \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)} - \frac{1}{1-x})\,dx = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1-x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,dx$ che converge (infatti la funzione integranda $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$ è $\sim_{0^+} x^{-\frac{1}{2}}$ ed è definita e continua in $x = 1$); per il calcolo si ha $\int_0^1 \frac{1}{t\,(1+t)}\,2t\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [2\log(1+t)]_0^1 = 2\log 2$. • In generale si ha $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}\,(1-x)}^{1-x} y^\alpha\,dy$. Per $\alpha = -1$ si ha $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}\,(1-x)}^{1-x} y^{-1}\,dy = \int_0^1 (\log(1-x) - \log(\sqrt{x}(1-x)))\,dx = \int_0^1 \log(\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \log x\,dx$ che converge con valore $-\frac{1}{2}[x(\log x - 1)]_0^1 = \frac{1}{2}$. Invece per $\alpha \neq -1$ si ottiene $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}\,(1-x)}^{1-x} y^\alpha\,dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 ((1-x)^{\alpha+1} - x^{\frac{\alpha+1}{2}}(1-x)^{\alpha+1})\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 (1-x)^{\alpha+1}(1 - x^{\frac{\alpha+1}{2}})\,dx$; notando che per $\alpha + 1 < 0$ si ha $(1-x)^{\alpha+1}(1 - x^{\frac{\alpha+1}{2}}) \sim^*_{0^+} x^{\frac{\alpha+1}{2}}$ e che $(1-x)^{\alpha+1}(1 - x^{\frac{\alpha+1}{2}}) \sim^*_{1^-} (1-x)^{\alpha+1}(1-x) = (1-x)^{\alpha+2}$, le condizioni di integrabilità sono $\frac{\alpha+1}{2} > -1$ e $\alpha + 2 > -1$, ovvero $\alpha > -3$.

(c) Il campo $F = (0, z, 0)$ è parallelo all'asse y, dunque i suoi flussi attraverso le componenti di ∂E contenute nei piani (x,y) e (y,z) sono nulli; invece il flusso uscente attraverso A' (la componente di ∂E contenuta nel piano (x,z), analoga ad A) è $\Phi_{A'}(F) = \int_{A'} (0,z,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_{A'} z\,dx\,dz = -\int_A y\,dx\,dy = -\frac{1}{8}$ (come già calcolato in (a)). La componente P di ∂E data dalla rotazione del grafico di $\varphi(x) = \sqrt{x}\,(1-x)$ è parametrizzata in coordinate cilindriche (riferite all'asse x) da $(x, \sqrt{x}(1-x)\cos\psi, \sqrt{x}(1-x)\sin\psi)$ con $0 \le x \le 1$ e $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente), e il flusso uscente di F attraverso P è $\Phi_P(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{x}(1-x)\sin\psi & (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x})\cos\psi & -\sqrt{x}(1-x)\sin\psi \\ 0 & (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x})\sin\psi & \sqrt{x}(1-x)\cos\psi \end{pmatrix} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\,d\psi \cdot \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = -\frac{1}{2}[-\frac{1}{4}\cos 2\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4]_0^1 = -\frac{1}{24}$. Infine, la componente conica C di ∂E è parametrizzata in coordinate cilindriche da $(x, (1-x)\cos\psi, (1-x)\sin\psi)$ con $0 \le x \le 1$ e $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), e il flusso uscente di F attraverso C risulta $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (1-x)\sin\psi & -\cos\psi & -(1-x)\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & (1-x)\cos\psi \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\,d\psi \cdot \int_0^1 (1-x)^2\,dx = [-\frac{1}{4}\cos 2\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [-\frac{1}{3}(1-x)^3]_0^1 = \frac{1}{6}$. Dunque il flusso totale di F uscente da ∂E è $-\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = 0$, in coerenza col fatto che F è a divergenza nulla. Ciò conferma il teorema di Gauss per E e F.

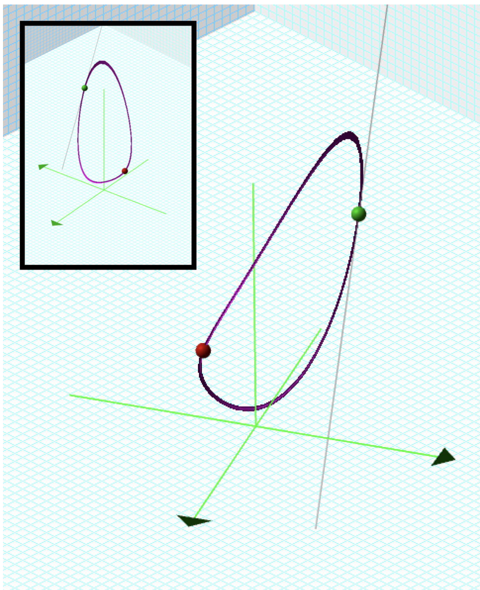
(d) Usando per C la parametrizzazione vista nel precedente punto (b), il flusso del rotore $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$ attraverso C

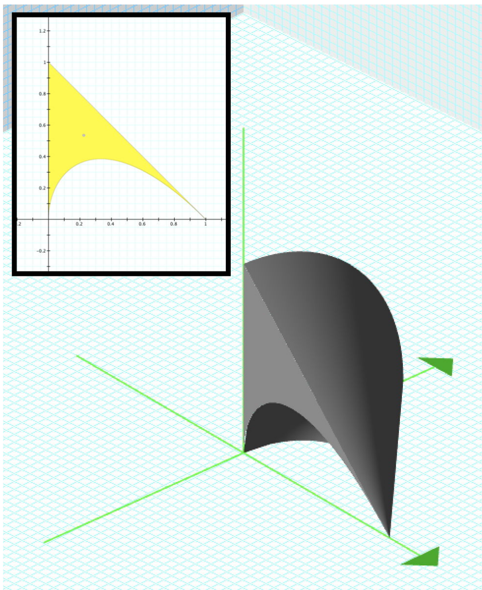
vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\psi & -(1-x)\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & (1-x)\cos\psi \end{pmatrix} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{\pi}{4}$. D'altra parte, partendo dal punto $(1,0,0)$ e percorrendo il bordo di C in senso orario si ha $\oint_{\partial C} F \cdot d\ell = 0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (0, \sin\psi, 0) \cdot (0, -\sin\psi, 0)\, d\psi + 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\, d\psi = [\frac{1}{2}(\psi - \sin\psi\cos\psi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ come ottenuto prima, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes per C e il campo F.

3. (a) L'equazione scalare $y'' = 6|y|^{2\alpha} + (1-\alpha)(\frac{1}{\cos t} - y)$ (ove $\alpha \geq 0$) corrisponde al sistema del primo ordine $(y', p') = f(y, p, t) = (p, 6|y|^{2\alpha} + (1-\alpha)(\frac{1}{\cos t} - y))$. Se nel dato iniziale $(y(0), y'(0))$ si ha $y(0) \neq 0$ la funzione $f(y, p)$ è di classe C^1 all'intorno del dato, dunque esistenza e unicità locale della soluzione sono assicurate; se invece $y(0) = 0$, nel caso in cui $0 < 2\alpha < 1$ (ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{2}$) la funzione non è localmente lipschitziana e dunque è possibile che si perda l'unicità. Quanto all'esistenza globale, essa può essere assicurata a priori solo nei casi $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ in cui l'equazione differenziale diventa lineare, con dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(b) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' = 6y^2$. Nel dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -2)$ l'integrale dell'energia $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 - \int 6y^2\, dy = \frac{1}{2}(y')^2 - 2y^3$ vale 0, da cui tenendo presente la condizione iniziale $y'(0) = -2 < 0$ si ottiene $y' = -2y^{\frac{3}{2}}$: separando le variabili si ha $y^{-\frac{3}{2}}\, dy = -2\, dt$, da cui integrando e tenendo presente la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ricava $-\frac{2}{\sqrt{y}} = -2t - 2$, da cui $y(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, definita per $t > -1$.

(c) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' + y = 6 + \frac{1}{\cos t}$, lineare a coefficienti costanti. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea sono generate da $\varphi_1(t) = \cos t$ e $\varphi_2(t) = \sin t$. Una soluzione particolare per il termine non omogeneo 6 è evidentemente la stessa costante 6. Invece per trovare una soluzione particolare per il termine non omogeneo $\frac{1}{\cos t}$ bisogna necessariamente passare per il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: essa sarà della forma $\tilde{y}(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ con $c_1'(t) = -\frac{\sin t}{1}\frac{1}{\cos t} = -\mathrm{tg}\, t$ e $c_2'(t) = +\frac{\cos t}{1}\frac{1}{\cos t} = 1$, da cui $c_1(t) = \log(\cos t)$ e $c_2(t) = t$. Riassumendo, la soluzione generale è $y(t) = (A + \log(\cos t))\cos t + (B + t)\sin t + 6$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando si ha $y(t) = -\mathrm{tg}\, t \cos t - (A + \log(\cos t))\sin t + \sin t + (B + t)\cos t$, pertanto da $y(0) = A + 6 = 1$ e $y'(0) = B = -2$ si trova la soluzione cercata $y(t) = (\log(\cos t) - 5)\cos t + (t - 2)\sin t + 6$.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (24/06/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2023/24

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Data la funzione $g(x,y,z) = z^2 - 2xy + x - z$ sia $S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = \alpha\}$.

(a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme S_α è una superficie regolare? Parametrizzare poi $S = S_2$ localmente attorno al suo punto $P(0,1,-1)$ determinandone in due modi il piano tangente affine.

(b) Dire se esistono punti di S di distanza localmente estremale dall'asse x.

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ \frac{1}{a}x^2 \le y \le a\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A x^\alpha\, dx\, dy$ e $\int_A y^\alpha\, dx\, dy$ convergono per $\alpha = -1$, in tal caso calcolandoli. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono tali integrali?

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (z, y, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per la componente paraboloidale P di ∂E e il campo F.

3. È data l'equazione $(y+t)y' + y - 3t = 0$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità, crescenza e convessità delle soluzioni?

(b) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione, in particolare quelle con dati $y(0) = -1$ oppure $y(1) = -1$ indicandone il dominio.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (24/06/2024) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Data $g(x,y,z) = z^2 - 2xy + x - z$ si ha $\nabla g = (1-2y, -2x, 2z-1) = (0,0,0)$ solo nel punto $A(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in cui $g(A) = -\frac{1}{4}$: dunque tutte le S_α sono regolari eccetto $S_{-\frac{1}{4}}$ in A. • Per $P(0,1,-1)$ vale $\nabla g(P) = (-1,0,-3)$, dunque il piano tangente affine a $S = S_2$ in P ha equazione $\nabla g(P)\cdot(x-0, y-1, z-(-1)) = (-1,0,-3)\cdot(x, y-1, z+1) = 0$, ovvero $x+3z+3 = 0$. Alternativamente, da $g(x,y,z) = 2$ all'intorno di P si può esplicitare $x(y,z) = 0 - \frac{0}{-1}(y-1) - \frac{-3}{-1}(z+1) + \cdots$, che troncata al 1o ordine dà nuovamente $x = -3(z+1)$.

(b) La domanda si può riformulare come ricerca di punti di estremo locale su S della funzione $f(x,y,z) = y^2+z^2$ (quadrato della distanza dall'asse x). La condizione di Lagrange (parallelismo tra ∇f e ∇g, più il vincolo $g = 2$) dà tre punti stazionari per f su S, ovvero $B(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -1)$, $C(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, 2)$ e $D(2,0,0)$, dei quali ora dovremo determinare la natura (punti di max-min locale o di sella). Per $D(2,0,0)$ in realtà possiamo rispondere subito: essendo l'unico punto d'intersezione tra S e l'asse x (dunque a distanza nulla dall'asse x), D sarà ovviamente il punto di minimo assoluto per f su S. Studiamo ora la natura di B parametrizzando localmente S: da $\nabla g(B) = (0, \frac{3}{2}, -3)$ si può esplicitare $z(x,y)$ con $z(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = -1$, e derivando due volte $g(x,y,z(x,y)) \equiv 2$ rispetto a x e y si ricava $\dot{z}_x(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = 0$, $\dot{z}_y(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\ddot{z}_{xx}(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = 0$, $\ddot{z}_{xy}(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$ e $\ddot{z}_{yy}(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$. Posta $F(x,y) = f(x,y,z(x,y)) = y^2 + z(x,y)^2$ si ha $\nabla F(x,y) = 2(z\dot{z}_x,\, y + z\dot{z}_y)$ e $\mathsf{H}_F(x,y) = 2\begin{pmatrix} (\dot{z}_x)^2 + z\ddot{z}_{xx} & \dot{z}_x\dot{z}_y + z\ddot{z}_{xy} \\ \dot{z}_x\dot{z}_y + z\ddot{z}_{xy} & 1 + (\dot{z}_y)^2 + z\ddot{z}_{yy} \end{pmatrix}$, da cui $\nabla F(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = (0,0)$ (come necessario) e $\mathsf{H}_F(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$ (indefinita): ciò mostra che B è di sella per f su S. Similmente si vede che anche C è di sella.

2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ \frac{1}{a}x^2 \le y \le a\}$ vale $\int_0^a (a - \frac{1}{a}x^2)\,dx = \frac{2}{3}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x^2}^a x\,dy = \int_0^a x(a - \frac{1}{a}x^2)\,dx = \frac{1}{4}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x^2}^a y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a (a^2 - \frac{1}{a^2}x^4)\,dx = \frac{2}{5}a^3$, perciò il baricentro di A risulta il punto $(\frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A x\,dx\,dy,\ \frac{1}{\text{Area}\,A}\int_A y\,dx\,dy) = (\frac{3}{8}a, \frac{3}{5}a)$.

(b) Le funzioni x^α e y^α sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo studiarne l'integrabilità su A tramite un integrale iterato. • Si ha $\int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x^2}^a x^\alpha\,dy = \int_0^a x^\alpha(a - \frac{1}{a}x^2)\,dx$: poiché la funzione integranda è $\sim_0^* x^\alpha$, la condizione d'integrabilità è che $\alpha > -1$. In particolare, $\frac{1}{x}$ non è integrabile su A. • Se $\alpha \ne -1$ si ha $\int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x^2}^a y^\alpha\,dy = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^a (a^{\alpha+1} - \frac{1}{a^{\alpha+1}}x^{2(\alpha+1)})\,dx$: la condizione d'integrabilità è dunque $2(\alpha+1) > -1$, ovvero $\alpha > -\frac{3}{2}$. Nel caso particolare $\alpha = -1$ si ha invece $\int_0^a dx \int_{\frac{1}{a}x^2}^a \frac{1}{y}\,dy = \int_0^a (\log a - \log(\frac{1}{a}x^2))\,dx = 2\int_0^a (\log a - \log x)\,dx = 2[x\log a - x(\log x - 1)]_0^a = 2a$, finito. Dunque $\frac{1}{y}$ è integrabile su A con valore $2a$.

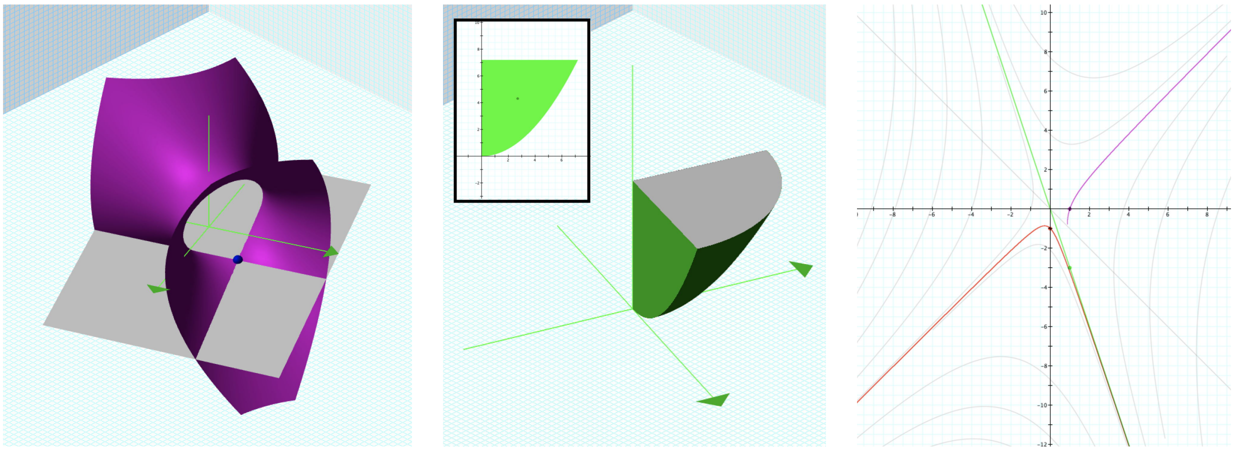
(c) Denotiamo le componenti di ∂E con C (piana superiore), A e A' (sui piani (x,z) e (y,z)) e P (paraboloidale). Il campo $F = (z,y,0)$ è orizzontale, dunque il flusso $\Phi_C(F)$ attraverso C è nullo; si ha poi $\Phi_A(F) = \int_A (z,0,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = 0$ e $\Phi_{A'}(F) = \int_{A'} (z,y,0)\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz = -\int_{A'} z\,dy\,dz = -\frac{2}{5}a^3$ (ricordando quanto calcolato in (a)). La componente P è parametrizzata da $\gamma(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \frac{1}{a}\rho^2)$ con $0 \le \rho \le a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante), dunque $\Phi_P(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\rho^2 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & \frac{2}{a}\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho(\frac{1}{a}\rho^3\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta)\,d\rho = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (\frac{1}{a}\rho^4\cos\theta + \rho^3\sin^2\theta)\,d\rho = 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{5}\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta)d\theta = 2a^3[\frac{1}{5}\sin\theta + \frac{1}{8}(\theta - \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{2}{5} + \frac{\pi}{8})a^3$. Il flusso totale uscente di F da ∂E vale dunque $0 + 0 - \frac{2}{5}a^3 + (\frac{2}{5} + \frac{\pi}{8})a^3 = \frac{\pi}{8}a^3$. D'altra parte essendo $\nabla\cdot F = 1$ si ha che $\int_E \nabla\cdot F\,dx\,dy\,dz$ è pari al volume di E, che per Guldino vale ancora $\frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4}a^3 = \frac{\pi}{8}a^3$: questo conferma il teorema di Gauss.

(d) Il rotore di F vale $\nabla\times F = (0,1,0)$, così $\Phi_P(\nabla\times F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 1 & \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & \frac{2}{a}\rho & 0 \end{pmatrix} d\rho = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{2}{3}a^2$. D'altra parte, percorrendo in senso antiorario il bordo di P partendo da O si ha $\oint_{+\partial P} F\cdot d\ell = \int_0^a (\frac{1}{a}y^2, y, 0)\cdot(0,1,\frac{2}{a}y)\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a, a\sin\theta, 0)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)\,d\theta + \int_a^0 (\frac{1}{a}x^2, 0, 0)\cdot(1, 0, \frac{2}{a}x)\,dx = \int_0^a y\,dy - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta - \int_0^a \frac{1}{a}x^2\,dx = \frac{1}{2}a^2 - a^2[-\frac{1}{4}\cos 2\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{1}{3a}x^3]_0^a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

3. (a) (Figura 3) L'equazione differenziale scalare $(y+t)y' + y - 3t = 0$ si presenta in forma non normale. Se per una soluzione $y(t)$ accade che $y(t) = -t$ si ottiene $0\cdot y'(t) - t - 3t = 0$, ovvero $t = 0$: pertanto per un dato iniziale del tipo $y(\alpha) = -\alpha$ con $\alpha \ne 0$ non esistono soluzioni, mentre se il dato è $y(0) = 0$ non possiamo dare al momento informazioni. Per dati iniziali di altro tipo, ovvero $y(t_0) = y_0$ con $y_0 \ne -t_0$ possiamo invece porre l'equazione in forma normale $y' = f(t,y) := \frac{3t-y}{t+y}$: poiché f è di classe C^1 è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale finché $y(t) \ne -t$), mentre sull'esistenza globale non possiamo dire nulla in generale. • La forma normale mostra che le soluzioni sono crescenti/decrescenti nelle zone del piano (t,y) ove $f \gtrless 0$, mentre sulla retta $y = 3t$ avranno punti di estremo relativo. Derivando ambo i membri rispetto a t si ha poi $y'' = \frac{(3-y')(t+y)-(3t-y)(1+y')}{(t+y)^2} = \frac{4(y-ty')}{(t+y)^2}$, e ricordando che $y' = \frac{3t-y}{t+y}$ si ha infine che $y'' = g(t,y) := \frac{4(y-t)(y+3t)}{(t+y)^3}$: ciò mostra che le soluzioni sono convesse/concave nelle zone del piano (t,y) ove $g \gtrless 0$, mentre sulle rette $y = t$ e $y = -3t$ avranno punti a convessità nulla (in effetti sono due soluzioni lineari).

(b) L'equazione totale associata $(y+t)\,dy + (y-3t)\,dt = 0$ è esatta; se $F(y,t)$ ne è una primitiva, da $\partial_y F = y + t$ si ricava $F(y,t) = \frac{1}{2}y^2 + ty + \varphi(t)$ per qualche funzione derivabile $\varphi(t)$ da determinare; poi da $\partial_t F = y + \varphi'(t) = y - 3t$ si ha $\varphi'(t) = -3t$, ovvero (a meno di costanti additive) $\varphi(t) = -\frac{3}{2}t^2$. Quindi $F(y,t) = \frac{1}{2}(y^2 + 2ty - 3t^2) = \frac{1}{2}(y-t)(y+3t)$ è un integrale primo dell'equazione, cioè lungo ogni soluzione $y(t)$ si avrà $(y-t)(y+3t) = k$ per qualche costante k

dipendente dal dato iniziale, ovvero dalla soluzione stessa. • Se il dato è $y(1) = -3$ si ha $k = 0$, il che mostra subito che la soluzione cercata è $y(t) = -3t$ (con dominio $\mathbb{R}$). • Se il dato è $y(0) = -1$ si ha $k = 1$, da cui $y^2 + 2ty - 1 - 3t^2 = 0$ che risolta rispetto a y dà $y = \pm\sqrt{1+4t^2} - t$: visto il dato andrà considerato il segno meno, perciò $y(t) = -\sqrt{1+4t^2} - t$ (con dominio $\mathbb{R}$). • Se infine il dato è $y(1) = 0$ si ha $k = -3$, da cui $y^2 + 2ty + 3(1-t^2) = 0$ che risolta rispetto a y dà $y = \pm\sqrt{4t^2-3} - t$ dove stavolta andrà considerato il segno più, da cui $y(t) = \sqrt{4t^2-3} - t$ (con dominio $]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$).



1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **2** Ex. 3.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (21/08/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2023/24

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si consideri la curva polare Γ data da $\rho(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$ con $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Disegnare Γ e calcolarne la retta tangente nel suo punto P ottenuto per $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(b) Determinare una forma cartesiana per Γ, usandola per ricalcolarne la retta tangente in P.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di $f(x,y) = 3x - y$ su $\Gamma' = \{(x,y) \in \Gamma : x^2 + y^2 \le 4\}$ (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2a - y\,,\ 0 \le y \le a\,,\ x^2 + y^2 \ge a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ e $\int_A \frac{1}{y^2}\,dx\,dy$ convergono, in tal caso calcolandoli.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z), e sia E il solido che si ottiene ruotando A di un quarto di giro nel primo ottante attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, y, 0)$.

3. È data l'equazione $(y'' + 4y)\sin t = 1$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Cosa si può dire a priori su esistenza e unicità delle soluzioni, e in particolare sul loro dominio?

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione, in particolare quella con $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (21/08/2024) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La curva polare Γ data da $\rho(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$ $(0 \le \theta < \frac{\pi}{2})$ è parametrizzata da $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) = (\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta})$; in essa la distanza dall'origine $\rho(\theta)$ cresce con θ verso $+\infty$ ma a divergere è in realtà la sola coordinata y, mentre la x cresce tendendo asintoticamente al valore $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$. Il punto ottenuto per $\theta = \frac{\pi}{4}$ è $P(1,1)$; da $\gamma'(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\frac{\sin\theta(1+\cos^2\theta)}{\cos^2\theta})$ si ha il vettore tangente $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (1,3)$, pertanto la retta tangente risulta $r = \{(1,1) + t(1,3) : t \in \mathbb{R}\}$, di equazione cartesiana $y = 3x - 2$.

(b) Ricordando le relazioni tra coordinate cartesiane e polari nel 1o quadrante, da $\rho = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$ si ricava $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\,\frac{y}{x}$, ovvero $g(x,y) = x^2(x^2+y^2) - 2y^2 = 0$ con $x, y \ge 0$. Si ha $\nabla g = (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y - 4y)$, pertanto la retta tangente in P è data anche da $\nabla g(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 6(x-1) - 2(y-1) = 0$, ovvero $y = 3x - 2$ come già visto.

(c) L'insieme $\Gamma' = \{(x,y) \in \Gamma : x^2 + y^2 \le 4\}$ oltre che ovviamente limitato è anche chiuso (coincide con l'intersezione del disco chiuso $x^2 + y^2 \le 4$ con una porzione chiusa di Γ abbastanza lunga, ad esempio quella con $0 \le \theta \le \mathrm{arctg}\,2$): dunque è compatto, e $f(x,y) = 3x - y$ vi assume estremi assoluti in base a Weierstrass. Per il calcolo usiamo pure la forma parametrica di Γ, cercando per iniziare eventuali punti stazionari di $F(\gamma) = f(\gamma(\theta)) = \sqrt{2}(3\sin\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta})$. Derivando si ottiene $F'(\gamma) = \sqrt{2}(3\cos\theta - \frac{2\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta}{\cos^2\theta}) = \sqrt{2}(\frac{3\cos^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta}{\cos^2\theta})$, pertanto vale $F'(\gamma) = 0$ quando $3\cos^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 0$, equazione omogenea in seno e coseno. Dividendo per $\cos^3\theta$ si ha $\mathrm{tg}^3\theta + 2\,\mathrm{tg}\,\theta - 3 = 0$; notata l'evidente soluzione $\mathrm{tg}\,\theta = 1$ (corrispondente al punto P, soluzione prevedibile vista che la retta tangente $y = 3x - 2$ trovata in precedenza è proprio $f(x,y) = 2$), il primo membro si fattorizza come $(\mathrm{tg}\,\theta - 1)(\mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{tg}\,\theta + 3) = 0$, in cui il secondo fattore non ha soluzioni reali. Da questa ricerca troviamo dunque che il già noto punto P è stazionario per f su Γ'. Dobbiamo però tener conto anche dell'origine $O(0,0)$ (punto di bordo di Γ') e anche di eventuali punti di Γ che cadono sul bordo del disco, ovvero tali che $\rho(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta = 2$, da cui $\theta = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$: si ricava dunque il punto $Q(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$. In sostanza, dall'analisi fatta ricaviamo che gli estremi assoluti di $f(x,y) = 3x - y$ su Γ' possono essere assunti solo nei punti O, P e Q: essendo $f(O) = 0$, $f(P) = 2$ e $f(Q) = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{6} \sim 1{,}8$ si ha che il minimo assoluto è 0 (assunto in 0) e il massimo assoluto è 2 (assunto in P).

2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2a - y,\ 0 \le y \le a,\ x^2 + y^2 \ge a^2\}$, trapezio rettangolo meno quarto di cerchio, è $\frac{1}{2}(2a+a)a - \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{6-\pi}{4}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{2a-y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a ((2a-y)^2 - (a^2-y^2))dy = \frac{5}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{2a-y} y\,dx = \int_0^a (2ay - y^2 - y(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}})\,dy = \frac{1}{3}a^3$, perciò il baricentro di A risulta $(\frac{10}{3(6-\pi)}a, \frac{4}{3(6-\pi)}a)$.

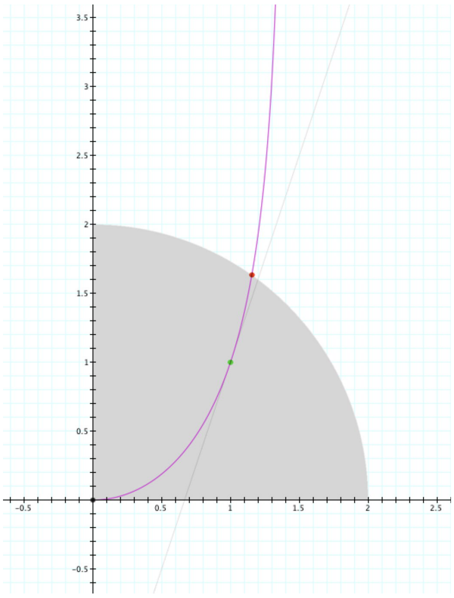
(b) Essendo $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2} > 0$ su A, per Fubini e Tonelli si può studiarne l'integrabilità con un integrale iterato. • Per $\int_A \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ esaminiamo $\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{2a-y} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^a (\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{1}{2a-y})\,dy = [\arcsin\frac{y}{a} + \log(2a-y)]_0^a = \arcsin 1 + \log a - \log 2a = \frac{\pi}{2} - \log 2$, valore finito: dunque $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su A con tale valore. • Per $\int_A \frac{1}{y^2}\,dx\,dy$ esaminiamo $\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{2a-y} \frac{1}{y^2}\,dx = \int_0^a \frac{(2a-y) - \sqrt{a^2-y^2}}{y^2}\,dy$: poiché la funzione integranda è $\sim^*_{0^+} \frac{1}{y^2} = y^{-2}$, l'integrale diverge a $+\infty$.

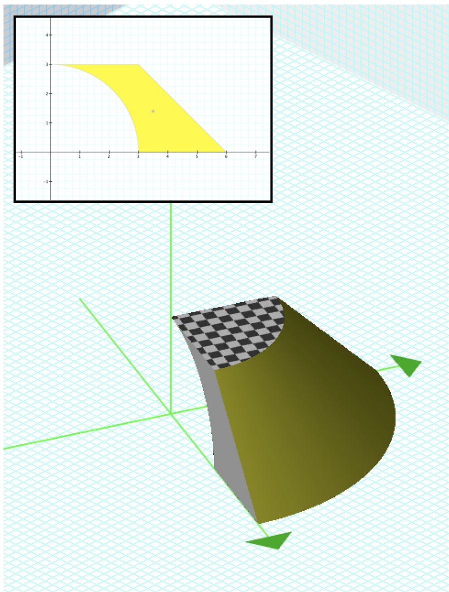
(c) Il campo $F = (0, y, 0)$ è parallelo all'asse y e nullo sul piano (x,z), pertanto gli unici suoi flussi uscenti da E non nulli sono quelli attraverso le componenti di ∂E sferica S e conica C. La componente sferica S si può parametrizzare tramite $\gamma(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta, \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata uscente da E), dunque il flusso uscente vale $\Phi_S(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -a\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2\theta\sin^3\varphi\,d\varphi = -a^3[\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6}a^3$; invece la componente conica C si può parametrizzare tramite $\gamma(\theta,z) = ((2a-z)\cos\theta, (2a-z)\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le a$ (normale associata uscente da E), dunque il flusso uscente vale $\Phi_C(F) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \det\begin{pmatrix} 0 & -(2a-z)\sin\theta & -\cos\theta \\ (2a-z)\sin\theta & (2a-z)\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^a (2a-z)^2\,dz = [\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{3}(2a-z)^3]_0^a = \frac{7\pi}{12}a^3$. Il flusso totale di F uscente da E vale dunque $\frac{5\pi}{12}a^3$. D'altra parte, poiché $\nabla \cdot F = 1$, usando Guldino e ricordando (a) si ha $\int_E \nabla \cdot F\,dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}\,E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{5\pi}{6}a^3 = \frac{5\pi}{12}a^3$: ciò conferma il teorema di Gauss.

3. (a) L'equazione $(y'' + 4y)\sin t = 1$ è lineare del 2o ordine ma non in forma normale; tuttavia di certo non vi possono essere soluzioni definite in $t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (infatti risulterebbe $0 = 1$), pertanto per un dato iniziale ammissibile (t_0, y_0, y_0') con $t_0 \ne k\pi$ possiamo dividere per $\sin t$ arrivando alla forma normale $y'' + 4y = \frac{1}{\sin t}$. Da quanto sappiamo sulle equazioni lineari possiamo dunque già affermare che la soluzione con un qualsiasi dato iniziale ammissibile (t_0, y_0, y_0') con $t_0 \in]k\pi, (k+1)\pi[$ sarà definita e unica su tutto l'intervallo aperto $]k\pi, (k+1)\pi[$.

(b) Le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y'' + 4y = 0$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa dobbiamo usare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: sarà del tipo $\tilde{y}(t) = c_1(t)\cos 2t + c_2(t)\sin 2t$ con $c_1'(t) = -\frac{\sin 2t}{2}\frac{1}{\sin t} = -\cos t$ e $c_2'(t) = \frac{\cos 2t}{2}\frac{1}{\sin t} = \frac{1 - 2\sin^2 t}{2\sin t} = \frac{1}{2\sin t} - \sin t$, da cui integrando si ha $c_1(t) = -\sin t$ e $c_2(t) = \frac{1}{2}\log|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}| + \cos t$. Le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A - \sin t)\cos 2t + (B + \frac{1}{2}\log|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}| + \cos t)\sin 2t$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando e calcolando in $t = \frac{\pi}{2}$ si ottiene $(y(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = (-(A-1), -2B)$, pertanto col dato di Cauchy assegnato

$(y(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = (1, 0)$ si ricava $A = B = 0$, da cui la soluzione cercata $y(t) = (\frac{1}{2}\log|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}| + \cos t)\sin 2t - \sin t\cos 2t$ che usando le formule goniometriche si può scrivere più semplicemente anche come $y(t) = (1 + \log|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}|\cos t)\sin t$, definita su tutto l'intervallo $]0, \pi[$ come già spiegato in precedenza.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (03/09/2024)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2023/24

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si abbia la funzione $g(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 3y$.

(a) Quali insiemi di livello di g sono curve regolari? Detta Γ la curva di livello passante per $P(3, -1)$, parametrizzare Γ attorno a P e calcolare in due modi la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Determinare eventuali punti di Γ di estremo locale per la quota y, specificandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $T = \{(x, y) : 0 \le y \le x \le 2\}$ (perché esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4a^2 , \ 0 \le y \le x\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro.

(b) Dire se gli integrali $\int_A \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ e $\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ convergono, in tal caso calcolandoli.

Si disegnino ora A nel piano verticale (x, z) e l'analoga figura A' nel piano verticale (y, z), e sia E il solido che si ottiene congiungendo con segmenti le coppie di punti corrispondenti di A e A'.

(c) Calcolare il volume di E.

(d) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, -x, 0)$.

(e) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per l'unica componente non piana S di ∂E e il campo F.

3. È data l'equazione $(2y + t)y' = y^2 - (1 - t)y$ nella funzione scalare $y(t)$.

(a) Che si può dire a priori su esistenza, unicità e crescenza delle soluzioni? Ve ne sono di lineari?

(b) Calcolare tutte le soluzioni, in particolare quelle con $y(0) = -1$ o $y(1) = -1$ o $y(2) = -\frac{1}{2}$ indicandone il dominio.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (03/09/2024) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) Il gradiente di $g(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 3y$ è $\nabla g = (2y(x-y), x^2 - 4xy + 3)$; da $\nabla g = (0,0)$ si ricavano i punti $A(1,1)$ e $B(-1,-1)$, dunque tutti gli insiemi di livello di g sono curve regolari tranne al più quelli di livello $g(A) = 2$ in A e $g(B) = -2$ in B. La curva passante per $P(3,-1)$ è $\Gamma = \{(x,y) : x^2y - 2xy^2 + 3y = -18\}$; vale $\nabla g(P) = (-8, 24) = -8(1,-3)$, dunque si può ad esempio esplicitare localmente $x(y) = 3 + (-\frac{24}{-8})(y+1) + \cdots = 3 + 3(y+1) + \cdots$, da cui arrestando al 1o ordine si ha la retta tangente $x = 3(y+1) + 6$ ovvero $y = \frac{1}{3}x - 2$; allo stesso risultato si arriva con $\nabla g(P) \cdot (x-3, y+1) = 0$.

(b) La domanda può essere riformulata come la ricerca di eventuali punti di estremo locale della funzione $f(x,y) = y$ su Γ. La condizione di Lagrange equivale a $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y(x-y) = 0$ più il vincolo $g(x,y) = -18$; da $y = 0$ non si ha nessuna soluzione, mentre da $x = y$ si ha $x^3 - 3x - 18 = 0$, che dà la sola soluzione reale $x = 3$ e dunque il punto stazionario $Q(3,3)$. Essendo $\nabla g(Q) = (0, -24)$, da $g(x,y) = -18$ si può esplicitare localmente $y(x)$ con $y(3) = 3$; derivando l'identità $g(x, y(x)) = -18$ rispetto a x si ottiene $2xy + x^2y' - 2y^2 - 4xyy' + 3y' = 0$, e calcolando per $x = 3$ si ha $18 + 9y'(3) - 18 - 36y'(3) + 3y'(3) = 0$ da cui come atteso $y'(3) = 0$; derivando di nuovo si ha poi $2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' - 4yy' - 4yy' - 4(y')^2 - 4xyy'' + 3y'' = 0$, e calcolando per $x = 3$ si ha $6 + 9y''(3) - 36y''(3) + 3y''(3) = 0$ da cui $y''(3) = \frac{1}{4} > 0$: pertanto la curva Γ attorno a Q si esprime localmente come $y = 3 + \frac{1}{8}(x-3)^2 + \cdots$, il che mostra che Q è un punto di quota minima locale.

(c) La funzione $g(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 3y$ è continua su tutto il piano e il triangolo $T = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 2\}$ ne è un sottoinsieme compatto (chiuso e limitato), dunque gli estremi assoluti di g su T esistono per Weierstrass. Per la ricerca dividiamo T nei suoi punti interni (fuori dai lati), nei suoi lati privi dei vertici e nei suoi tre vertici. • Come visto, i punti critici di g sono $A(1,1)$ e $B(-1,-1)$ e nessuno si trova nell'interno di T: dunque gli estremi assoluti di g su T non potranno essere assunti in punti interni di T. Sull'asse x con $0 < x < 2$ si ha $g(x,0) \equiv 0$, tutti punti stazionari. Sulla retta $x = 2$ con $0 < y < 2$ si ha $G(y) := g(2,y) = 7y - 4y^2$: da $G'(y) = 7 - 8y = 0$ si ricava il punto stazionario $C(2, \frac{7}{8})$. Sulla bisettrice $y = x$ con $0 < x < 2$ si ha $G(x) := g(x,x) \equiv 3x - x^3$: da $G'(x) = 3 - 3x^2 = 0$ si ricava il punto stazionario $A(1,1)$ (atteso perché già stazionario per g). Infine si hanno i vertici $O(0,0)$, $D(2,0)$ e $E(2,2)$. • Da quanto trovato, gli estremi assoluti di g su T potranno essere assunti solo nei punti C, A, E, O e D (più eventualmente tutti gli altri punti del lato sull'asse x): essendo $g(C) = \frac{49}{16} \sim 3{,}0$, $g(A) = 2$, $g(E) = -2$ e $g(O) = g(D) = 0$ (e idem su tutto il lato sull'asse x), si ha che il minimo assoluto è -2 (assunto in E) e il massimo assoluto è $\frac{49}{16}$ (assunto in C).

2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4a^2,\ 0 \le y \le x\}$, settore circolare di raggio $2a$ e apertura $\frac{\pi}{4}$, vale $\frac{1}{2}(2a)^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{3}\rho^3]_0^{2a} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{3}a^3$, perciò il baricentro di A risulta il punto $(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}a, \frac{8(2-\sqrt{2})}{3\pi}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x^2+y^2}$ e $\frac{1}{x}$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo studiarne l'integrabilità su A tramite un integrale iterato. • Per $\int_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ esaminiamo $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \frac{1}{\rho^2}\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \frac{1}{\rho}\,d\rho$, che evidentemente diverge a $+\infty$ in $\rho \sim 0^+$. • Per $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy$ esaminiamo $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a} \frac{1}{\rho\cos\theta}\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta \int_0^{2a} d\rho = 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$, che converge: per il calcolo poniamo $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, da cui $\theta = 2\operatorname{arctg} t$ e $d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, ottenendo così $2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = 2a\int_0^{\sqrt{2}-1} (\frac{1-t^2}{1+t^2})^{-1}\frac{2}{1+t^2}\,dt = 4a\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1-t^2}\,dt = 2a\int_0^{\sqrt{2}-1}(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t})\,dt = 2a\,[\log(\frac{1+t}{1-t})]_0^{\sqrt{2}-1} = 2a\,\log(\sqrt{2}+1)$. Dunque $\frac{1}{x}$ è integrabile su A con valore $2a\,\log(\sqrt{2}+1)$.

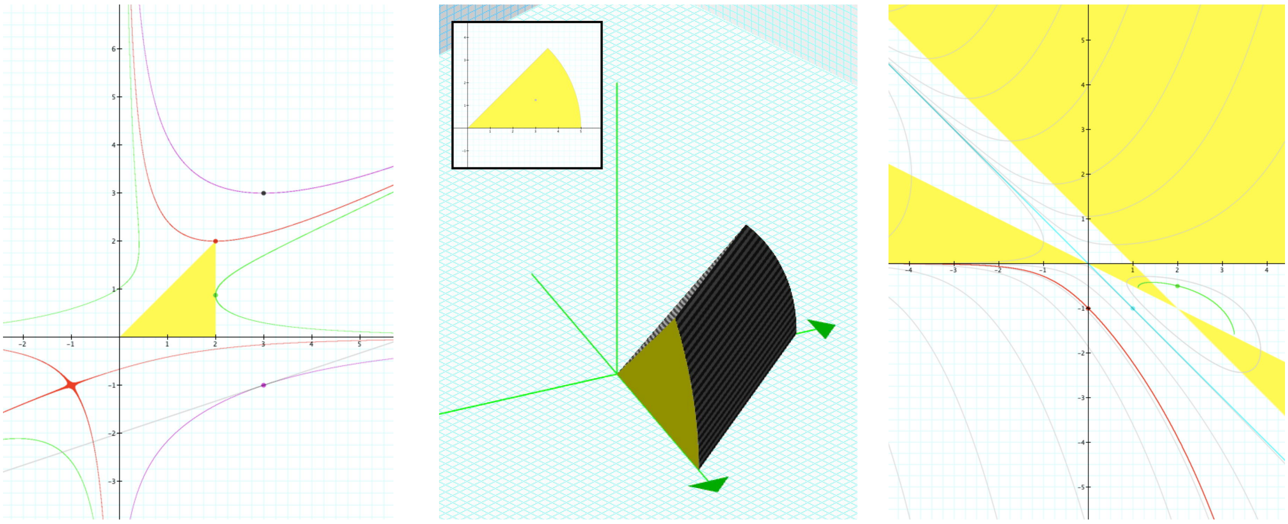
(c) Per calcolare il volume di E ragioniamo per z-fette. Per $0 \le z \le a\sqrt{2}$ la z-fetta è un trapezio isoscele ottenuto dalla differenza di due triangoli rettangoli isosceli di cateti $\sqrt{4a^2 - z^2}$ e z, dunque di area $\frac{1}{2}((4a^2 - z^2) - z^2) = 2a^2 - z^2$, pertanto il volume di E risulta $\int_0^{a\sqrt{2}}(2a^2 - z^2)\,dz = [2a^2z - \frac{1}{3}z^3]_0^{a\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$.

(d) Il campo $F = (x, -x, 0)$ è orizzontale, parallelo al vettore $(1,-1,0)$, e si annulla sul piano (y,z): ne deriva che l'unica componente di ∂E attraverso cui il flusso uscente di F è non nullo è A, e vale $\int_A (x,-x,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = \int_A x\,dx\,dz = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$, uguale al volume di E: poiché $\nabla \cdot F = 1$ e dunque $\int_E \nabla \cdot F\,dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol} E$, ciò conferma il teorema di Gauss.

(e) L'unica componente non piana S di ∂E è formata dai segmenti che congiungono le coppie di punti corrispondenti degli archi di circonferenza $(2a\cos\theta, 0, 2a\sin\theta)$ nei piano (x,z) e $(0, 2a\cos\theta, 2a\sin\theta)$ nel piano (y,z), ottenendo così una parametrizzazione di S data da $\gamma(\theta,t) = (1-t)(2a\cos\theta, 0, 2a\sin\theta) + t(0, 2a\cos\theta, 2a\sin\theta) = 2((1-t)\cos\theta, t\cos\theta, \sin\theta)a$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ e $0 \le t \le 1$ (normale associata entrante). Il rotore di F vale $\nabla \times F = (0,0,-1)$, così $\Phi_S(\nabla \times F) = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \det\begin{pmatrix} 0 & -(1-t)\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & -t\sin\theta & \cos\theta \\ -1 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} dt = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 4a^2[-\frac{1}{4}\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$. D'altra parte, percorrendo in senso orario il bordo di S da $(2a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial S} F \cdot d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a\cos\theta, -2a\cos\theta, 0)\cdot(-2a\sin\theta, 0, 2a\cos\theta)\,d\theta + \int_{a\sqrt{2}}^0 (x,-x,0)\cdot(1,-1,0)\,dx + 0 + \int_0^{2a}(x,-x,0)\cdot(1,-1,0)\,dx = -4a^2[-\frac{1}{4}\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + [x^2]_{a\sqrt{2}}^{2a} = -a^2 + 4a^2 - 2a^2 = a^2$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

3. (a) (Figura 3) L'equazione differenziale scalare $(2y + t)y' = y^2 - (1-t)y$ si presenta in forma non normale. Se per una soluzione $y(t)$ accade che $2y(t) + t = 0$, ovvero $y(t) = -\frac{1}{2}t$, si ottiene $0 = t(t-2)$, dunque $t = 0$ oppure $t = 2$; per dati iniziali di altro tipo, ovvero $y(t_0) = y_0$ con $2y_0 + t_0 \neq 0$ possiamo invece porre l'equazione in forma normale $y' = f(t,y) := \frac{y^2-(1-t)y}{2y+t}$: poiché f è di classe C^1 è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale finché $2y(t)+t \neq 0$), mentre sull'esistenza globale non possiamo dire nulla in generale. • La forma normale mostra che le soluzioni sono crescenti/decrescenti nelle zone del piano (t,y) ove $f(t,y) := \frac{y(y-1+t)}{2y+t} \gtrless 0$, mentre sulla retta $y = 1-t$ avranno punti di estremo relativo. Imponendo a $y(t) = at+b$ di risolvere l'equazione si ottiene $a(2a+1)t + 2ab = (a^2+a)t^2 + (2ab-a+b)t + b^2 - b$ per ogni t, e confrontando i coefficienti corrispondenti si trovano le soluzioni $(a,b) = (0,0)$ (soluzione costante $y \equiv 0$) e $(a,b) = (-1,0)$ (soluzione lineare $y = -t$).

(b) L'equazione totale associata $\omega = p\,dy + q\,dt = (2y+t)\,dy + ((1-t)y - y^2)\,dt = 0$ non è esatta, tuttavia notiamo che $-\frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial y}) = -\frac{1}{2y+t}(1-(1-t)+2y) = -1$ non dipende da y, dunque e^{-t} è un fattore integrante. Se $F(y,t)$ è una primitiva di $e^{-t}\omega$, da $\partial_y F = (2y+t)e^{-t}$ si ricava $F(y,t) = e^{-t}(y^2+ty) + \varphi(t)$ per qualche funzione derivabile $\varphi(t)$ da determinare; poi da $\partial_t F = e^{-t}(y-y^2-ty) + \varphi'(t) = e^{-t}((1-t)y - y^2)$ si ha $\varphi'(t) = 0$, ovvero (a meno di costanti additive) $\varphi(t) = e^{-t}(y^2+ty)$. Quindi $F(y,t) = e^{-t}(y^2+ty)$ è un integrale primo dell'equazione, cioè lungo ogni soluzione $y(t)$ si avrà $e^{-t}(y^2+ty) = k$ per qualche costante $k \in \mathbb{R}$ dipendente dal dato iniziale, ovvero dalla soluzione stessa: se ne ricava $y^2 + ty - ke^t = 0$, da cui $y(t) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{t^2+4ke^t} - t)$. Notiamo che per $k \geq 0$ la soluzione $y(t)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ (in particolare quando $k=0$ si ritrovano le soluzioni $y \equiv 0$ e $y = -t$ già notate nel punto precedente); mentre invece se $k < 0$ il dominio è dato dalla condizione $t^2 \geq 4|k|e^t$. • Se il dato è $y(0) = -1$ si ha $k = 1$, dunque $y(t) = -\frac{1}{2}(\sqrt{t^2+4e^t} + t)$ (dominio $\mathbb{R}$). • Se il dato è $y(1) = -1$ si ha $k = 0$, dunque $y(t) = -t$ (dominio $\mathbb{R}$). • Se infine il dato è $y(2) = -\frac{1}{2}$ si ha $k = -\frac{3}{4e^2}$, dunque $y(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t^2 - 3e^{t-2}} - t)$ (dominio dato dalla condizione $t^2 > 3e^{t-2}$, soddisfatta in un intervallo contenente $t = 2$ al suo interno: si noti che negli estremi di questo intervallo il radicando si annulla e dunque la soluzione tende asintoticamente alla retta $y = -\frac{1}{2}t$, ovvero $2y + t = 0$).



1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **2** Ex. 3.