Nel seguito appare la collezione dei temi d'esame, con risoluzione allegata, assegnati dal collega Giuseppe De Marco nel corso di Analisi Matematica 3 per la laurea in Fisica e Astronomia (la denominazione per il corso di laurea in Fisica all'epoca dell'ordinamento trimestrale era "Matematica 4F") negli aa.aa. 2005/06, 2004/05 e 2003/04. Sempre su gentile concessione dell'autore, metto anch'essi a disposizione degli studenti come preparazione alla prova d'esame. Parti di questi temi sono già state usate durante le lezioni o le esercitazioni assegnate durante l'insegnamento di quest'anno.

Corrado Marastoni

MATEMATICA 4F–TEMI 2005–2006

Precompitino– 28 ottobre 2005

Esercizio 1. Definire il raggio di convergenza di una serie di potenze. Sappiamo che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge per tutti i complessi $z \in \mathbb{C}$ con $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1$; sappiamo anche che non è vero che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dei coefficienti tende a 0 per n tendente all'infinito. Possiamo dire quanto vale il raggio di convergenza della serie?

Risoluzione. La serie converge, in particolare, per tutti i z reali con $|z| < 1$, e quindi il suo raggio di convergenza è almeno 1. D'altra parte la serie non converge per $z = 1$, dato che il termine generale non tende a 0. Quindi il raggio di convergenza è 1. □

Esercizio 2. Definire il logaritmo principale di un numero complesso. Se log denota il logaritmo principale, per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\log(x^2 + 1) = \log(x + i) + \log(x - i)$? e per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\log(x^2 + 1) = \log(1 + ix) + \log(1 - ix)$?

Risoluzione. Per la definizione si rinvia alle dispense. Si ha $\log(x+i) = \log\sqrt{x^2+1} + i \operatorname{arccotan} x$, essendo $\operatorname{Im}(x + i) = 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed anche $\log(x - i) = \log\sqrt{x^2 + 1} + i(\operatorname{arccotan}(-x) - \pi)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo $\operatorname{Im}(x - i) = -1 < 0$. Ne segue

$$\begin{aligned}
&\log(x + i) + \log(x - i) = \\
&\frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + i \operatorname{arccotan} x + \frac{1}{2}\log(x^2 + 1) + i(\operatorname{arccotan}(-x) - \pi) = \\
&\log(x^2 + 1) + i(\operatorname{arccotan} x + \operatorname{arccotan}(-x) - \pi) = \log(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

(ricordando l'identità $\operatorname{arccotan}(-x) = \pi - \operatorname{arccotan} x$)

L'uguaglianza vale quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Similmente $\log(1+ix) = \log\sqrt{1 + x^2} + i \arctan x$ e $\log(1-ix) = \log\sqrt{1 + x^2} + i \arctan(-x)$, essendo $\operatorname{Re}(1 \pm ix) = 1 > 0$. Si ha quindi ancora

$$\log(1 + ix) + \log(1 - ix) = \log(1 + x^2), \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 3. Siano $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ funzioni; si supponga che sia $a(0) = b(1) = 1$. Come devono essere a, b perché la forma $ya(x)\,dx + xb(y)\,dy$ sia esatta? Per tali a, b trovare le primitive.

Risoluzione. La forma è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, e su tale insieme semplicemente connesso è esatta se e solo se è chiusa; essendo $\partial_y(ya(x)) = a(x)$ e $\partial_x(xb(y)) = b(y)$ questo avviene se e solo se si ha

$$a(x) = b(y) \qquad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Posto $y = 1$ si deve quindi avere $a(x) = b(1) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi a deve essere costantemente 1. Similmente deve essere $a(0) = 1 = b(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e quindi b costantemente 1. La forma è quindi esatta se e solo se sia a che b sono costantemente 1, nel qual caso essa è la forma $y\,dx + x\,dy$, con primitive $xy + k$. □

Esercizio 4. Sia $a > 0$ una costante. Si considera l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a(\sqrt{x^2 + y^2} + x)\}.$$

(i) Mostrare che E è chiuso e (passando a coordinate polari) che è anche compatto.
(ii) Trovare l'area di E ed il baricentro di E.
(iii) Trovare il volume dei solidi ottenuti facendo fare ad E una rotazione completa attorno alle rette:
di equazione $x = 2a$;
di equazione $x + y = 4a$
mostrando anche che E sta in uno solo dei semipiani di tali rette.

Risoluzione. (i) L'insieme E è chiuso perché è il luogo dei punti che verificano una disuguaglianza in senso lato tra funzioni continue (x^2+y^2 e $a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$). Sostituendo r a $\sqrt{x^2+y^2}$ ed $r\cos\vartheta$ aad x si ottiene, se $r>0$, $r<a(1+\cos\vartheta)$; quindi si ha $r\le a(1+\cos\vartheta)\le a(1+1)=2a$; E è tutto contenuto nel disco di centro l'origine e raggio $2a$, e quindi è limitato.

(ii) Area:

$$\int_E dxdy=\int_D r\,drd\vartheta \quad \text{dove} \quad D=\{(r,\vartheta):\,0\le r\le a(1+\cos\vartheta)\}$$

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi}\left(\int_{r=0}^{r=a(1+\cos\vartheta)} r\,dr\right)d\vartheta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\vartheta)^2\,d\vartheta=$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta=\frac{3}{2}\pi\,a^2.$$

Cambiando y in $-y$ l'insieme E non muta; quindi $y_G=0$. Per x_G si ha

$$\int_E x\,dxdy=\int_D r\cos\vartheta\, r\,drd\vartheta=\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi}\cos\vartheta\left(\int_{r=0}^{r=a(1+\cos\vartheta)} r^2\,dr\right)d\vartheta=$$

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta(1+\cos\vartheta)^3\,d\vartheta=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\vartheta+3\cos^2\vartheta+3\cos^3\vartheta+\cos^4\vartheta)\,d\vartheta=$$

(gli integrali di $\cos\vartheta$ e $\cos^3\vartheta$ sono nulli perchè $\cos(\vartheta+\pi)=-\cos\vartheta$; per la formula di bisezione l'integrale di $\cos^2\vartheta$ vale π)

$$\frac{a^3}{3}\left(3\pi+\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos(2\vartheta))^2}{4}\,d\vartheta\right)=\frac{a^3}{3}\left(3\pi+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos(2\vartheta)+\cos^2(2\vartheta))\,d\vartheta\right)=$$

$$\frac{a^3}{3}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a^3}{12}(12+2+1)\pi=\frac{5}{4}\pi a^3.$$

L'ascissa del baricentro vale quindi

$$x_G=\frac{5/4\pi a^3}{\mathrm{Area}(E)}=\frac{5\pi a^3/4}{3\pi a^2/2}=\frac{5}{6}a.$$

(iii) Come sopra osservato nessun punto di E dista dall'origine piú di $2a$, in particolare $x\le 2a$ per ogni $(x,y)\in E$; quindi E è tutto alla sinistra della retta di equazione $x=2a$. Il baricentro di E dista da tale retta $2a-5a/6=7a/6$; il volume è quindi

$$\text{Volume1}=2\pi\frac{7}{6}a\,\mathrm{Area}(E)=\pi\frac{7}{3}a\frac{3}{2}\pi a^2=\frac{7}{2}\pi^2\,a^3.$$

Per la retta di equazione $x+y=4a$: la distanza di un punto del piano da tale retta è, come ben noto, $d(x,y)=|x+y-4a|/\sqrt{2}$; in particolare l'origine dista da tale retta $4a/\sqrt{2}>2a$. L'insieme E è quindi tutto al di sotto di tale retta (come sopra osservato E è contenuto nel disco di centro l'origine e raggio $2a$, tutto nel semipiano $x+y<4a$). La distanza del baricentro dalla retta è $(4a-5/6a)/\sqrt{2}=7\sqrt{2}a$; il volume è

$$\text{Volume2}=2\pi 7\sqrt{2}a\frac{3}{2}\pi a^2=21\sqrt{2}\pi^2\,a^3.$$

OSSERVAZIONE. A puro titolo di curiosità ricordiamo che l'insieme E è quello dei punti racchiusi una *cardioide*, curva di equazione polare $r=a(1+\cos\vartheta)$.

□

ESERCIZIO 5. (i) Mostrare che $(x,y)\mapsto(xy,y/x)$ stabilisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto in se stesso; trovare l'inverso.

(ii) Per ogni $a>0$ sia $E(a)=\{(x,y):\,x>0,y>0,\ xy<a\}$.

Calcolare $\int_{E(a)}\dfrac{e^{-x/y}}{y}\,dxdy$ sia direttamente, che ricorrendo al cambiamento di variabili descritto in (i).

Risoluzione. (i) Chiaramente se $x,y>0$ si ha anche $u=xy>0$ e $v=y/x>0$, quindi effettivamente $\psi(x,y)=(xy,y/x)$ mappa il primo quadrante in se stesso. Cerchiamo di invertire: dalla seconda si ha

$y = xv$, dalla prima $x = u/y$ e quindi $y = uv/y$, da cui $y = \sqrt{uv}$ e quindi $u = x\sqrt{uv}$ e quindi $x = \sqrt{u/v}$. L'inversa è quindi

$$\psi^{-1}(u,v) = \phi(u,v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}).$$

Lo jacobiano è

$$\det \phi'(u,v) = \det \begin{bmatrix} 1/(2\sqrt{uv}) & -\sqrt{u}/(2v^{3/2}) \\ \sqrt{v/u}/2 & \sqrt{u/v}/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

(è forse più conveniente trovare lo jacobiano di $\psi(x,y)$, che è

$$\det \begin{bmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{bmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2\frac{y}{x};$$

invertendo si ha lo jacobiano dell'inversa, e cioè $1/(2v)$)

(ii) Direttamente possiamo integrare solo in x; si ha

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y}\, dxdy = \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\int_{x=0}^{x=a/y} \frac{e^{-x/y}}{y}\, dx \right) dy =$$
$$\int_{y=0}^{y=\infty} \left[-e^{-x/y} \right]_{x=0}^{x=a/y} dy = \int_0^\infty (1 - e^{-a/y^2})\, dy$$

Per calcolare quest'integrale ricorriamo al cambiamento di variabili $1/y = t$; si ha

$$\int_0^\infty (1 - e^{-a/y^2})\, dy = \int_\infty^0 (1 - e^{-at^2}) \frac{-dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-at^2}}{t^2}\, dt =$$

(per parti, con dt/t^2 fattore differenziale)

$$\left[\frac{1 - e^{-at^2}}{-t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t}(2ate^{-at^2})\, dt =$$
$$= 2a \int_0^\infty e^{-at^2}\, dt;$$

come ben noto si ha $\int_0^\infty e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\pi/a}/2$ (gaussiana); quindi

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y}\, dxdy = \sqrt{\pi a}.$$

Con il cambiamento di variabili si ha $\phi^{\leftarrow}(E(a)) = \{(u,v) : 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le \infty\}$ e l'integrale diventa:

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y}\, dxdy = \int_{[0,a]\times[0,\infty[} \frac{e^{-1/v}}{\sqrt{uv}} \frac{dudv}{2v} = \int_{[0,a]\times[0,\infty[} \frac{e^{-1/v}}{2\sqrt{u}\, v^{3/2}}\, dudv =$$
$$\left(\int_0^a \frac{du}{2\sqrt{u}} \right) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-1/v}}{v^{3/2}}\, dv \right) =$$

(si pone $1/v = t^2$ nel secondo integrale, il primo è immediato e vale $\sqrt{a}$)

$$\sqrt{a} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t^2}}{1/t^3} \frac{-2\,dt}{t^3} = 2\sqrt{a} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = 2\sqrt{a}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi a}$$

□

Esercizio 6. La serie di potenze reali

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$$

converge per $|x| \le 1$, non converge per $|x| > 1$ (dimostrarlo). Detta $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la sua somma, calcolare $f'(x)$ per $|x| < 1$ e dedurne una formula (con un integrale definito) per $f(x)$ con $|x| < 1$. Mostrare (più arduo) che tale formula vale anche per $x = \pm 1$.

Risoluzione. Si ha $|x^n/n^2| = |x|^n/n^2 \le 1/n^2$ per $|x| \le 1$; essendo convergente la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ per il criterio del confronto la serie converge per ogni $x \in [-1,1]$. Se poi $|x| > 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} |x|^n/n^2 = \infty$, e la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la somma della serie. Derivando termine a termine si ha, all'interno dell'intervallo di convergenza:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \quad |x| < 1;\ \text{quindi } f'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\log(1-x)}{x} \quad |x| < 1.$$

La funzione a secondo membro è naturalmente continua in $]-1,1[$; si ha allora, integrando, ed osservando che $f(0) = 0$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1-t)}{-t}\,dt \qquad |x| < 1.$$

Si noti che $\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \log(1-t)/(-t)\,dt = \int_0^1 \log(1-t)/(-t)\,dt$ esiste finito; esiste finito anche il limite $\lim_{x\to -1^+} \int_0^x \log(1-t)/(-t)\,dt$; in altre parole, la funzione integrale a secondo membro si prolunga per continuità in $[-1,1]$; basta allora dimostrare che f, definita come somma della serie, è continua anche in ± 1. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(1)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right| = \\ &\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - 1}{n^2}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{m} \frac{x^n - 1}{n^2}\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x^n - 1|}{n^2} \le \\ &\left|\sum_{n=1}^{m} \frac{x^n - 1}{n^2}\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{n^2};\end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ esiste m tale che $\sum_{n=m+1}^{\infty} 2/n^2 \le \varepsilon/2$; inoltre $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{m} (x^n - 1)/n^2 = 0$; e quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in [1-\delta, 1+\delta]$ si ha $|\sum_{n=1}^{m}(x^n - 1)/n^2| \le \varepsilon/2$. Quindi f è continua in $x = 1$; analogamente per $x = -1$.

□

Matematica 4F per Fisica e Astronomia–Primo Compitino–5 novembre 2005

Esercizio 7. Enunciare il lemma di Abel. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze che converge su tutti i punti del quadrato $Q = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$. È vero che la serie converge per $z = (1-i)/2$? e per $z = (4/3)e^{5i\pi/8}$? Cosa si può dire sul raggio di convergenza?

Risoluzione. Il lemma di Abel recita:

Se una serie di potenze di punto iniziale l'origine converge per $w \in \mathbb{C}$, converge assolutamente su ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |w|$

Se la serie di potenze data converge sui punti del quadrato suddetto, il suo raggio di convergenza R_a è almeno pari a $\sup\{|w| : w \in Q\}$; tale estremo superiore è ovviamente pari a $\sqrt{2}$. Insomma $R_a \ge \sqrt{2}$, e su ogni complesso di modulo strettamente minore di $\sqrt{2}$ si ha convergenza assoluta. Essendo $|(1-i)/2| = 1/\sqrt{2} < \sqrt{2}$, la serie converge in$(1-i)/2$. Ed essendo $|(4/3)e^{5i\pi/8}| = 4/3 < \sqrt{2}$ (infatti $16 < 9 \cdot 2 = 18$) la serie converge anche in $(4/3)e^{5i\pi/8}$. Le informazioni che si hanno non permettono di concludere altro sul raggio di convergenza.

Osservazione. Dicendo che la serie converge per $z \in Q$ ovviamente *NON* si intende dire che la serie converge *SOLO* per $z \in Q$, cosa manifestamente impossibile per una serie di potenze, come salta all'occhio subito dal lemma di Abel! Per il lemma di Abel, si ha convergenza assoluta della serie almeno sul minimo disco aperto centrato nell'origine che contiene Q, e tale disco è $B(0, \sqrt{2}[$.

□

Esercizio 8. Siano $u, v \in C^1(\mathbb{R})$; si consideri la forma differenziale

$$\omega : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^* \quad \text{data da} \quad \omega(x,y) = yu(x)v(y)\,dx + e^x \cos y\,dy.$$

Trovare tutte le $u, v \in C^1(\mathbb{R})$ che rendono tale forma esatta.

Risoluzione. Daremo due risoluzioni, la seconda meno standard ma più breve.

Primo metodo Essendo $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso e la forma di classe C^1, essa è esatta se e solo se è chiusa; essa è chiusa se e solo se si ha

$$u(x)(v(y) + y\,v'(y)) = e^x \cos y \qquad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}; \tag{ch}$$

si può pensare che l'uguaglianza precedente, essendo x, y variabili reali indipendenti, ha luogo se solo se si ha

$$u(x) = e^x \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R};\ v(y) + y\,v'(y) = \cos y \quad \text{per ogni} \quad y \in \mathbb{R}$$

Vedremo poi se questo è vero; certamente comunque se la cosa accade la forma è chiusa e quindi esatta. La relazione $v(y) + y\,v'(y) = \cos y$ è un'equazione differenziale lineare di ordine 1; il primo membro è la derivata di $y\,v(y)$; integrando si ha $y\,v(y) = \sin y + k$, da cui $v(y) = \sin y/y + k/y$; volendo una funzione continua in $y = 0$ si deve supporre $k = 0$. Si trova quindi $v(y) = \sin y/y$, $u(x) = e^x$ e quindi la forma è

$$\omega(x, y) = e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy \quad \text{con primitiva} \quad e^x \sin y + c.$$

Secondo metodo Le primitive rispetto ad y del secondo membro sono tutte e sole le funzioni della forma $e^x \sin y + \phi(x)$, con $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Perchè questa sia una primitiva della forma si deve avere

$$e^x \sin y + \phi'(x) = y\,v(y)u(x) \qquad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R};$$

se in tale identità si pone $y = 0$ si ottiene $\phi'(x) = 0$, e quindi ϕ =costante. Le richieste funzioni u, v devono quindi essere tali che sia

$$e^x \sin y = y\,v(y)u(x) \qquad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R};$$

posto $x = 0$ si ottiene $\sin y = y\,v(y)u(0)$, da cui $v(y) = (1/u(0)) \sin y/y$, e quindi, risostituendo nella precedente $u(x) = u(0)e^x$. Le funzioni sono $u(x) = ke^x$, $v(y) = \sin y/(ky)$, con k costante moltiplicativa arbitraria ma non nulla.

Similmente si comprende come l'uguaglianza $u(x)(v(y) + y\,v'(y)) = e^x \cos y$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ non sia equivalente a $u(x) = e^x$ e $v(y) + y\,v'(y) = \cos y$, ma a $u(x) = ke^x$ e $v(y) + y\,v'(y) = \cos y/k$, sempre con $k \neq 0$ costante arbitraria. Le primitive sono invece tutte e sole le funzioni della forma $e^x \sin y + c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. □

Esercizio 9. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ 1 - x^2 \le y\}$.

(i) Disegnare E e calcolarne l'area.
(ii) Posto $E_+ = E \cap \{x \ge 0\}$, si trovino le coordinate del baricentro di E_+.
(iii) Senza calcolare altri integrali, trovare le cordinate del baricentro di $E_- = E \cap \{x \le 0\}$.
(iv) Trovare il volume del solido ottenuto ruotando E_+ attorno alla retta di equazione $x + y = 1$, mostrando anche che E_+ si trova in uno dei due semipiani di tale retta.
(v) Trovare il volume del solido ottenuto ruotando E attorna alla retta di equazione $x + y = 1$ (certamente E non sta in un semipiano soltanto, ma ...)

Risoluzione. (i) Chiaramente, essendo $|x| \le 1$, si ha $0 \le 1 - x^2 \le 1$ e quindi $1 - x^2 \le \sqrt{1 - x^2}$, per ogni $x \in [-1, 1]$; la parabola $y = 1 - x^2$ sta quindi tutta sotto la semicirconferenza $y = \sqrt{1 - x^2}$, e l'insieme E è come in figura.

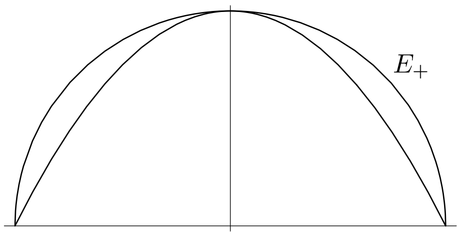


Figura 1. L'insieme E, tra la parabola ed il semicerchio; a destra E_+.

Il calcolo dell' area è immediato:

$$\lambda_2(E) = \int_E dxdy = \int_{x=-1}^{x=1} \left(\int_{y=1-x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1 - x^2} - 1 + x^2)\, dx =$$

$$\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} = \frac{3\pi - 8}{6}$$

(si usa il fatto che $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/2$ è l'area del semicerchio).

(ii) Per simmetria si ha chiaramente $\lambda_2(E_+) = \lambda_2(E)/2 = \pi/4 - 2/3 = (3\pi - 8)/12$. Si ha poi

$$\int_{E_+} x\,dxdy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=1-x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx = \int_0^1 x(\sqrt{1-x^2}+x^2-1)\,dx =$$
$$\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

mentre

$$\int_{E_+} y\,dxdy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=1-x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1((1-x^2)-(1-x^2)^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x^4)\,dx = \frac{1}{6}-\frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Dividendo per l'area otteniamo per l'ascissa ξ e l'ordinata η del baricentro di E_+:

$$\xi = \frac{1}{12}\,\frac{12}{3\pi-8} = \frac{1}{3\pi-8};\ \eta = \frac{1}{15}\,\frac{12}{3\pi-8} = \frac{4}{5(3\pi-8)}.$$

(iii) Essendo E_- il simmetrico di E_+ rispetto all'asse y il suo baricentro sarà il simmetrico del baricentro di E_+, e cioè $(-1/(3\pi-8),(4/(5(3\pi-8)))$.

(iv) Chiaramente si ha, per $x \in [0,1]$, $1-x \le 1-x^2 (\le \sqrt{1-x^2})$ e quindi E_+ sta tutto nel semipiano superiore della retta di equazione $x+y=1$. La distanza del baricentro di E_+ dalla retta è $d = \dfrac{|\xi+\eta-1|}{\sqrt{2}}$; poichè E_+ è nel semipiano superiore di tale retta, $x+y-1 \ge 0$, in tale semipiano sta anche il baricentro. La distanza è quindi

$$d = \frac{\xi+\eta-1}{\sqrt{2}} = \frac{5+4-5(3\pi-8)|}{5\sqrt{2}(3\pi-8)} = \frac{49-15\pi}{5\sqrt{2}(3\pi-8)};$$

Il volume è quindi

$$\text{Volume} = 2\pi d\lambda_2(E_+) = 2\pi\frac{49-15\pi}{5\sqrt{2}(3\pi-8)}\,\frac{3\pi-8}{12} = \pi\sqrt{2}\,\frac{49-15\pi}{60}.$$

(v) Posto $E_- = E \cap \{x \le 0\}$ il solido in questione può naturalmente essere pensato come l'unione del solido precedente con quello ottenuto facendo ruotare E_- di un giro completo attorno alla retta $x+y=1$. Tali solidi hanno in comune un solo punto, il punto $(0,1,0)$: infatti la retta di equazione $y = x+1$ lascia E_+ nel semipiano inferiore ed E_- in quello superiore, quindi il solido ottenuto ruotando E_- sta tutto nel semispazio $\{y \ge x+1\}$, quello ottenuto ruotando E_+ nell'altro semispazio $\{y \le x+1\}$). Il baricentro di E_-, di coordinate $(-\xi,\eta)$ dista dalla retta $x+y=1$ di

$$d_- = \frac{1-(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}} = \frac{5(3\pi-8)+5-4}{5\sqrt{2}(3\pi-8)} = \frac{15\pi-39}{5\sqrt{2}(3\pi-8)} = \frac{3(5\pi-13)}{5\sqrt{2}(3\pi-8)},$$

ed il volume è

$$2\pi d_-\lambda_2(E_-) + \pi\sqrt{2}\,\frac{49-15\pi}{60} = 2\pi\frac{3(5\pi-13)}{5\sqrt{2}(3\pi-8)}\,\frac{3\pi-8}{12} + \pi\sqrt{2}\,\frac{49-15\pi}{60} =$$
$$\pi\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

□

Esercizio 10. Fissato $a > 1$ sia $E(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/a \le xy \le 1,\ x^2 \le y \le ax^2\}$, e sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy \le 1,\ x^2 \le y\}$.

(i) Disegnare $E(a)$ (con $a = 2$, solo per il disegno) e dimostrare che è compatto.

(ii) Sia $\psi(x,y) = (xy, y/x^2)$. Mostrare che ψ induce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto in sè stesso, determinandone l'inversa $\phi(u,v)$; trovare $\psi(E(a))$ e $\psi(E)$

(iii) Mostrare che l'integrale

$$I(a) := \int_{E(a)} \frac{x^2}{y} e^{xy}\,dxdy$$

esiste finito e calcolarlo.

(iv) Calcolare $I = \lim_{k\to\infty} I(k)$. È vero che si ha

$$I = \int_E \frac{x^2}{y} e^{xy}\, dxdy \quad ?$$

(rispondere senza calcolare l'integrale su E)

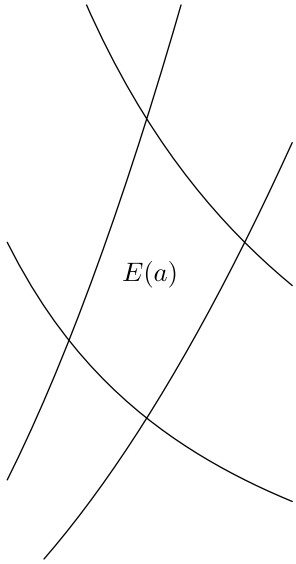


FIGURA 2. L'insieme $E(a)$, tra due iperboli e due parabole.

Risoluzione. (i) L'insieme $E(a)$, tra due iperboli e due parabole, si disegna subito (con $a = 2$). Che sia chiuso è chiaro (luogo di soluzioni di disuguaglianze in senso lato tra funzioni continue). Che sia limitato è immediato: se per $(x, y) \in E(a)$ fosse $x > 1$ sarebbe, essendo $x^2 \le y$, anche $y > 1$, ma allora $xy > 1$, contraddicendo la $xy \le 1$. Similmente, se $y > a$, da $y \le ax^2$ si trae $1 < x^2$ e quindi $x > 1$, impossibile per $(x, y) \in E(a)$, come visto. Si ha quindi $0 < x \le 1$ e $0 < y \le a$ per ogni $(x, y) \in E(a)$, e quindi $E(a)$ è limitato (la compattezza di $E(a)$ può anche essere vista osservando poi che $\psi(E(a)) = [1/a, 1] \times [1, a]$ è compatto).

(ii) Se si pone $u = xy$, $v = y/x^2$ si trova $y = vx^2$ e sostituendo nella $u = xy$ si ha $u = x^3 v$, da cui $x = (u/v)^{1/3}$, e quindi $y = u/(u/v)^{1/3} = u^{2/3}v^{1/3}$. L'inversa è quindi $\phi(u, v) = (u^{1/3}v^{-1/3}, u^{2/3}v^{1/3})$. Chiaramente si ha

$$\psi(E(a)) = \varphi^{-1}(E(a)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1/a \le u \le 1,\ 1 \le v \le a\} = [1/a, 1] \times [1, a],$$

un rettangolo compatto. Similmente $\psi(E) =]0, 1] \times [1, +\infty[$.

(iii) Poichè $E(a)$ è compatto, ed $f(x, y) = (x^2/y)e^{xy}$ è continua su $E(a)$, l'integrale $I(a)$ esiste finito. Per calcolarlo conviene usare il cambiamento di variabili $(x, y) = \phi(u, v)$, di cui ci occorre quindi lo jacobiano; calcoliamo

$$\det \psi'(x, y) = \det \begin{bmatrix} y & x \\ -2y/x^3 & 1/x^2 \end{bmatrix} = \frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^2} = 3\frac{y}{x^2};$$

ne segue $\det \phi'(u, v) = 1/(3v)$. L'integrale è

$$I(a) = \int_{E(a)} \frac{x^2}{y} e^{xy}\, dxdy = \int_{\phi^{-1}(E(a))} \frac{e^u}{v} \frac{dudv}{3v} = \int_{[1/a,1]\times[1,a]} \frac{e^u}{3v^2}\, dudv =$$
$$\left(\int_{1/a}^1 e^u\, du\right)\left(\int_1^a \frac{dv}{3v^2}\right) = (e - e^{1/a})\frac{1 - 1/a}{3}.$$

(iv) Ovviamente si ha $I = \lim_{k\to\infty} I(k) = (e - 1)/3$. Sia $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f_k(x, y) = (x^2/y)e^{xy}$ per $(x, y) \in E(k)$, ed $f_k(x, y) = 0$ altrimenti. Poichè si ha $E(k) \subseteq E(k+1)$ per ogni $k = 2, 3, \dots$ la successione è crescente, si ha cioè $f_k(x, y) \le f_{k+1}(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $k = 2, 3, \dots$: infatti, se $(x, y) \notin E(k+1)$ le funzioni sono entrambe nulle, se $(x, y) \in E(k)$ le funzioni valgono entrambe

$(x^2/y)e^{xy}$, se $(x,y) \in E(k+1) \setminus E(k)$ si ha $f_k(x,y) = 0 < f_{k+1}(x,y) = (x^2/y)e^{xy}$. La successione f_k converge inoltre puntualmente alla funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x,y) = (x^2/y)e^{xy}$ per $(x,y) \in E$, e $f(x,y) = 0$ altrimenti; infatti, se $(x,y) \in E$ si ha $0 < xy \leq 1$ e $x^2 \leq y$, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale che sia $1/k \leq xy$ e $k \geq y/x^2$ si ha $f_k(x,y) = (x^2/y)e^{xy}$. Il teorema della convergenza monotòna si applica per dire che I è esattamente l'integrale di $(x^2/y)e^{xy}$ esteso ad E.

□

Secondo Precompitino–3 dicembre 2005

Esercizio 11. È dato il problema di Cauchy:

$$y' = f(t,y) = t\frac{e^{ty^2}}{1+e^{ty^2}}\,y + e^t\,\sin y \quad y(0) = y_0$$

Dimostrare che tale probema ha soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Il problema verifica le ipotesi della versione forte del teorema di esistenza ed unicità globale (crescita sublineare). Infatti il dominio è tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; inoltre si ha $0 \leq e^{ty^2}/(1+e^{ty^2}) \leq 1$, per ogni $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Ne segue, se $K \subseteq [-a,a]$ è un intervallo compatto di $\mathbb{R}$:

$$|f(t,y)| \leq |t|\frac{e^{ty^2}}{1+e^{ty^2}}|y| + e^t|\sin y| \leq a \cdot 1 \cdot |y| + e^a \cdot 1, \quad \text{per ogni} \quad (t,y) \in [-a,a] \times \mathbb{R},$$

e le ipotesi del teorema sono verificate, con $A_K = a$ e $B_K = e^a$. La risoluzione è terminata.

□

Esercizio 12. Sono dati il segmento di paraboloide $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2+y^2, 1 \leq z \leq 4\}$ ed il campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\vec{F}(x,y,z) = (-y+1, x+1, z)$.

(i) Disegnare E, e calcolare con il teorema della divergenza il flusso di $\vec{F}$ uscente da E.

(ii) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente dalle tre porzioni di frontiera di E (scrivere E come somma di due campi opportuni ...).

(iii) Diciamo S la porzione di frontiera di E sul paraboloide $z = x^2+y^2$. Trovare il flusso di $\nabla \times \vec{F}(x,y,z)$ uscente da S, sia direttamente che con la formula di Stokes.

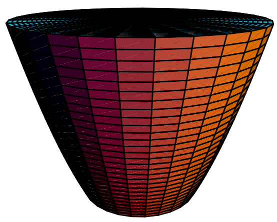


Figura 3. L'insieme E, segmento di paraboloide tra i piani $z = 1$ e $z = 4$.

Risoluzione. (i) Il disegno di E è facile; si ha poi $\nabla \cdot \vec{F} = 1$, e quindi l'integrale di volume della divergenza è esattamente il volume di E, che si calcola facilmente per "fette" (si noti che se $1 \leq z \leq 4$ la $z-$sezione di E è il disco di centro l'origine e raggio z):

$$\text{Volume}(E) = \int_{z=1}^{z=4} \lambda_2(E(z))\,dz = \int_1^4 \pi z\,dz = \pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15}{2}\pi.$$

(ii) Scriviamo $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,0) + (1,1,z)$. Il primo campo è parallelo al piano xy, e quindi il flusso di esso uscente dalle porzioni di frontiera sui piani $z = 1$ e $z = 4$ è nullo; inoltre le sue linee di flusso sono cerchi centrati sull'asse z, in piani paralleli al piano xy, e quindi il suo flusso attraverso S è pure nullo (si può anche dire che, essendo il campo $(-y,x,0)$ solenoidale, il suo flusso totale uscente da E è nullo, e quindi, essendo nullo il flusso che esce da due delle tre porzioni di frontiera, anche il flusso che esce dalla terza è nullo). Per l'altro campo, esso è costante sulle porzioni piatte della frontiera: su

$S_1 = \partial E \cap \{z = 1\}$ il versore normale esterno è $-\vec{e}_3$, il prodotto scalare è $(1, 1, z = 1) \cdot (0, 0, -1) = -1$, e quindi il flusso che esce da S_1 è $-\text{Area}(S_1) = -\pi$. Analogamente il flusso che esce da $S_4 = \partial E \cap \{z = 4\}$ è

$$(1, 1, z = 4) \cdot (0, 0, 1)\, \text{Area}(S_4) = 4\pi(2^2) = 16\pi.$$

Di conseguenza il flusso che esce da S è: Flusso totale$-(16\pi-\pi) = (15/2-15)\pi = -15\pi/2$. Riassumendo:
Flusso uscente da $S_1 = \partial E \cap \{z = 1\}$: $-\pi$.
Flusso uscente da $S_4 = \partial E \cap \{z = 4\}$: 16π.
Flusso uscente da $S = \partial E \cap \{z = x^2 + y^2\}$: $-15\pi/2$.
(iii) Una parametrizzazione di S è quella cartesiana

$$p : x = x, y = y, z = x^2 + y^2 \qquad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\},$$

cioè D è la corona circolare centrata nell'origine di raggio interno 1 e raggio esterno 2. La parametrizzazione orienta la superficie con una normale la cui terza componente è positiva (si ha $\partial_x p(x, y) \times \partial_y p(x, y) \cdot \vec{e}_3 = 1$, come è facile vedere), e quindi, rispetto ad E è la normale interna, anziché quella esterna. Basterà cambiare a posteriori tutti i segni; conduciamo il calcolo con questa parametrizzazione. Il rotore di $\vec{F}$ è $2\vec{e}_3$:

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -y+1 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x+1 \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & z \end{bmatrix} = \vec{e}_1(0-0) + \vec{e}_2(0-0) + \vec{e}_3(1+1).$$

Calcoliamo il flusso attraverso S:

$$\int_D \det[\nabla \times \vec{F}(x, y, z), \partial_x p(x, y), \partial_y p(x, y)]\, dxdy = \int_D \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2x & 2y \end{bmatrix} dxdy = \int_D 2\, dxdy = 6\pi.$$

Il bordo di S, coerentemente orientato, è formato dai due circoli immagine mediante p dei circoli centrati in $(0, 0)$ di raggio 1 e 2 rispettivamente, il primo α percorso in verso orario, il secondo β in verso antiorario. Insomma, i due circoli

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad \text{(orario)};\ \beta(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4) \quad \text{(antiorario)}; \qquad t \in [0, 2\pi];$$

Dobbiamo calcolare

$$\int_\beta \vec{F}(x, y, z) \cdot d(x, y, z) - \int_\alpha \vec{F}(x, y, z) \cdot d(x, y, z),$$

che deve coincidere con il flusso del rotore sopra trovato (6π); si noti che il campo $(1, 1, z)$ è conservativo, essendo a variabili separate, e quindi il suo contributo alle circuitazioni è nullo; resta il campo $(-y, x, 0)$:

$$\int_\beta (-y, x, 0) \cdot d(x, y, z) - \int_\alpha (-y, x, 0) \cdot d(x, y, z) = \int_\beta (-y\, dx + x\, dy) - \int_\alpha (-y\, dx + x\, dy) =$$
$$\int_0^{2\pi} ((-2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t)(2\cos t))\, dt - \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t))\, dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (4-1)\, dt = 6\pi.$$

Osservazione. Per chi preferisce un calcolo diretto è facile trovare il flusso di $(1, 1, z)$ uscente da S (domanda (ii)): esso vale (ricordando che la parametrizzazione cartesiana è orientatata col versore normale entrante):

$$-\int_D \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x^2+y^2 & 2x & 2y \end{bmatrix} dxdy = -\int_D (-2x + x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy =$$
$$2\int_D (x+y)\, dxdy - \int_D (x^2+y^2)\, dxdy = 0 - \int_{[1,2]\times[0,2\pi]} r^3\, dr d\vartheta =$$
$$-2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = -\frac{\pi}{2}(16-1) = -\frac{15}{2}\pi$$

□

Esercizio 13. (i) Trovare la matrice esponenziale e^{tA} dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Trovare l'integrale generale del sistema

$$(x,y)' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} (x,y).$$

(iii) Usando il metodo di variazione delle costanti trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 4x - 4y + e^{-2t} \\ \dot{z} &= 2x - y - 2z - e^{-2t} \end{cases} \qquad \text{soddisfacente alle condizioni iniziali} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

Risoluzione. (i) Il polinomio caratteristico è

$$\det(\zeta 1_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta & 1 & 0 \\ -4 & \zeta+4 & 0 \\ -2 & 1 & \zeta+2 \end{bmatrix} = (\zeta+2)(\zeta(\zeta+4)+4) = (\zeta+2)^3.$$

C'è un unico autovalore triplo, -2. Si scrive $A = A - (-2)1_2 + (-2)1_2 = N - 21_2$, dove $N = A + 2\,1_2$ è nilpotente e commuta con la matrice scalare $-2\,1_2$; si ha

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui

$$e^{tA} = e^{-2t\,1_3}\,(1_3 + tN) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ 4t & 1-2t & 0 \\ 2t & -t & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Chiaramente una risolvente, anzi la matrice esponenziale del sistema è (basta osservare che la z manca dalle prime due equazioni, e prendere le prime due componenti della risolvente tridimensionale trovata):

$$e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per cui l'integrale generale è} \quad e^{-2t}(c_1(1+2t) - c_2 t, -4c_1 t + c_2), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) Ricordiamo che la soluzione richiesta è (vedi Formulario):

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\theta)A}(0, e^{-2\theta}, -e^{-2\theta})\,d\theta = e^{-2t} \int_0^t \begin{bmatrix} 1+2(t-\theta) & \theta - t & 0 \\ 4t - 4\theta & 1 - 2t + 2\theta & 0 \\ 2t - 2\theta & \theta - t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\theta =$$

$$e^{-2t} \int_0^t (\theta - t, 1 - 2t + 2\theta, \theta - t - 1)\,d\theta = e^{-2t}(-t^2/2, t - t^2, -t^2/2 - t).$$

□

Esercizio 14. Si considera l'equazione differenziale:

$$(*) \qquad y'' = y^2 - y,$$

che evidentemente verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale (lo accettiamo).

(i) Trovare le soluzioni costanti di $(*)$.
(ii) Mostrare che se $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ è soluzione di $(*)$, allora anche $\psi : -I \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(t) = \varphi(-t)$ è soluzione.
(iii) Tra le soluzioni massimali del problema di Cauchy dato da $(*)$ con condizioni iniziali $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = b$ trovare quelle pari e quelle dispari.
(iv) Trovare un integrale primo non banale di $(*)$.
(v) D'ora in poi φ è la soluzione del problema di Cauchy dato da $(*)$ con $\varphi(0) = 2$, $\varphi'(0) = 2/\sqrt{3}$. Determinare esplicitamente φ, trovando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Risoluzione. (i) Da $0 = c^2 - c$ si trae $c = 0, 1$, che sono le uniche soluzioni costanti.

(ii) Si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$. Essendo $\varphi''(\theta) = (\varphi(\theta))^2 - \varphi(\theta)$ per ogni $\theta \in I$, posto $\theta = -t$ con $t \in -I$ si ha

$$\varphi''(-t) = (\varphi(-t))^2 - \varphi(-t) \quad \text{per ogni} \quad t \in -I \quad \text{cioè} \quad \psi''(t) = (\psi(t))^2 - \psi(t) \quad \text{perogni} \quad t \in -I,$$

che mostra che ψ è soluzione.

(iii) Se una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è pari, si deve avere $I = -I$ ed inoltre $\varphi'(0) = 0$ se $vf'(0)$ esiste. Ne segue che deve essere $b = 0$ se si vuole φ pari. Ma allora $\varphi : I \to \mathbb{R}$, soluzione massimale del problema con $b = 0$, e $\psi(t) = \varphi(-t)$, che per quanto appena visto è pure soluzione verificano lo stesso problema di Cauchy, e quindi coincidono; in altre parole φ è pari.

Se poi $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è dispari, deve essere $I = -I$, ed inoltre $\varphi(0) = 0$; condizione necessaria perché φ sia dispari è quindi che sia $a = 0$. Ma se $\chi : -I \to \mathbb{R}$ è definita da $\chi(t) = -\varphi(-t)$ si ha $\chi'(t) = \varphi'(-t)$ e $\chi''(t) = -\varphi''(-t)$. Imponendo che χ sia soluzione si trova:

$$-\varphi''(-t) = (-\varphi(-t))^2 - (-\varphi(-t)) \iff -\varphi''(-t) = (\varphi(-t))^2 + \varphi(-t) \qquad \forall t \in I = -I,$$

che posto $\theta = -t$ si scrive

$$-\varphi''(\theta) = (\varphi(\theta))^2 + \varphi(\theta) \ \forall \theta \in I;$$

ma noi sappiamo che φ è soluzione e che quindi si ha

$$\varphi''(\theta) = (\varphi(\theta))^2 - \varphi(\theta) \ \forall \theta \in I;$$

sommando membro a membro le ultime due relazioni si ottiene:

$$0 = 2(\varphi(\theta))^2 \ \forall \theta \in I,$$

e quindi l'unica soluzione dispari è quella identicamente nulla. Riassumendo: soluzioni pari sono quelle con $b = \varphi'(0) = 0$; l'unica soluzione dispari è quella nulla.

(iv) Moltiplicando per y' ed integrando si trova il consueto integrale dell'energia:

$$y'y'' = (y^2 - y)y' \quad \text{da cui} \quad \frac{(y')^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = k;$$

L'integrale primo è $E(y, y') = (y')^2/2 - y^3/3 + y^2/2$.

(v) Si ha $E(2, 2/\sqrt{3}) = 2/3 - 8/3 + 2 = 0$, da cui

$$(y')^2 = y^2\left(\frac{2}{3}y - 1\right) \quad \text{quindi} \quad y' = \pm y\sqrt{\frac{2}{3}y - 1},$$

ed essendo $, y(0) = 2 > 0$, $y'(0) = 2/\sqrt{3} > 0$ si tiene il segno $+$ (dato che per continuità sarà $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$, almeno in un intorno di 0); siamo quindi ricondotti all'equazione autonoma del primo ordine:

$$y' = y\sqrt{\frac{2}{3}y - 1} \qquad y(0) = 2.$$

Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\frac{y'}{y\sqrt{\frac{2}{3}y - 1}} = 1 \iff \int_0^t \frac{y'(\theta)}{y(\theta)\sqrt{\frac{2}{3}y(\theta) - 1}} = t,$$

che si scrive anche, posto $\eta = y(\theta)$:

$$(*) \qquad \int_2^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta - 1}} = t;$$

per integrare il primo membro si pone $2\eta/3 - 1 = \xi^2 \iff \eta = (3/2)(\xi^2 + 1)$ e si ha

$$\int \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta - 1}} = \int \frac{3\xi}{(3/2)(\xi^2 + 1)\xi}\, d\xi = 2\int \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = 2\arctan \xi + k,$$

cioè, a meno di costanti:

$$\int \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta - 1}} = 2\arctan\sqrt{\frac{2}{3}\eta - 1}.$$

Si ha quindi

$$\int_2^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta - 1}} = 2\arctan\sqrt{\frac{2}{3}y(t)-1} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\arctan\sqrt{\frac{2}{3}y(t)-1} - \frac{\pi}{3},$$

e sostituendo in $(*)$ si ottiene

$$2\arctan\sqrt{\frac{2}{3}y(t)-1} = t + \frac{\pi}{3} \iff \arctan\sqrt{\frac{2}{3}y(t)-1} = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{6},$$

poi

$$\sqrt{\frac{2}{3}y(t)-1} = \tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \iff \frac{2}{3}y(t) - 1 = \tan^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right),$$

e finalmente

$$y(t) = \frac{3}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3/2}{\cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

La soluzione trovata è definita sull'intervallo $-\pi/2 < t/2 + \pi/6 < \pi/2 \iff -4\pi/3 < t < 2\pi/3$, ed una semplice verifica mostra che essa è soluzione in tutto quest'intervallo:

$$\begin{aligned} y'(t) =& \frac{3}{2}\frac{\sin(t/2+\pi/6)}{\cos^3(t/2+\pi/6)}; \\ y''(t) =& \frac{3}{4}\frac{1}{\cos^2(t/2+\pi/6)} + \frac{9}{4}\frac{\sin^2(t/2+\pi/6)}{\cos^4(t/2+\pi/6)}, \end{aligned}$$

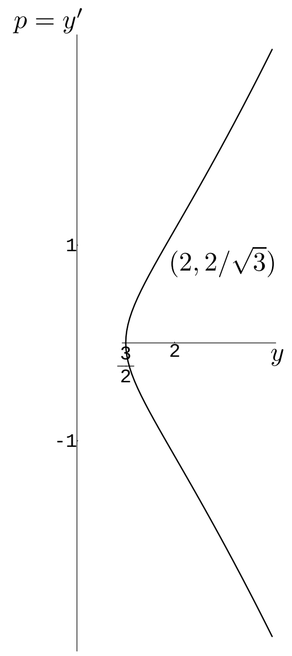


Figura 4. La soluzione del problema di Cauchy (traiettoria nel piano delle fasi).

Si ha ora (scriviamo per semplicità α in luogo di $t/2+\pi/6$)

$$y(t)(y(t)-1) = \frac{3}{4}\frac{3-2\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{3}{4}\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{9}{4}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} + \frac{3}{4}\frac{1}{\cos^2\alpha} = y''(t).$$

Tale soluzione di certo non è ulteriormente estendibile, visto che tende a $+\infty$ se t tende agli estremi dell'intervallo. La soluzione massimale è quindi

$$y(t) = \frac{3/2}{\cos^2(t/2+\pi/6)} \qquad -\frac{4}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi.$$

Osservazione. Quando abbiamo ricavato da $(y')^2 = y^2(2y/3-1)$, che è $y' = \pm y\sqrt{2y/3-1}$, scegliendo poi il segno $+$ per t prossimo a 0, questo era vero finché era $y(t) > 0$ e simultaneamente $y'(t) > 0$; per la soluzione trovata questo accade se $0 < t/2+\pi/6 < \pi/2 \iff -\pi/3 < t < 2\pi/3$ (infatti $y'(t) < 0$ per $-4\pi/3 < t < -\pi/3$). Volendo, da $(*)$ si ha che tale intervallo deve anche essere l'intervallo i cui estremi sono

$$\int_2^\infty \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta-1}} \quad \text{(estr.sup.)}; \qquad \int_2^{3/2} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\frac{2}{3}\eta-1}} \quad \text{(estr.inf.)},$$

essendo l'integranda definita se $0 < 2\eta/3-1 < \infty \iff 3/2 < \eta < \infty$. Dato che una primitiva è, come visto, $2\arctan\sqrt{2\eta/3-1}$ il primo integrale vale $\pi - 2\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$, mentre il secondo vale $0-\pi/3 = -\pi/3$.

Ma quando $y'(t)$ cambia segno, per $t = -\pi/3$, si deve passare alla forma $y' = -y\sqrt{2y/3-1}$. Risolvendo quest'equazione alla sinistra di $t = -\pi/3$, con condizione iniziale $y(-\pi/3) = 3/2$, si trova l'altro ramo della curva, $y(t) = (3/2)/\cos^2(t/2+\pi/6)$, per $-4\pi/3 < t < -\pi/3$.

□

Matematica 4F per Fisica e Astronomia–Secondo Compitino–10 dicembre 2005

Esercizio 15. Siano $u, v \in C^2(I,\mathbb{R})$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, soluzioni non identicamente nulle dell'equazione

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0 \qquad (p, q \in C^0(I,\mathbb{R}) \quad \text{funzioni note}).$$

Supponiamo che per un $c \in I$ si abbia $u(c) = 0$ e $v'(c) = 0$. Possiamo dire di conoscere l'integrale generale dell'equazione? (suggerimento: cosa si può anzitutto dire di $u'(c)$ e $v(c)$?)?

Risoluzione. Chiaramente deve essere $u'(c) \neq 0$: altrimenti u risolverebbe il problema di Cauchy con condizioni iniziali nulle in c e sarebbe quindi identicamente nulla su I, contro l'ipotesi. Per la stessa ragione deve essere $v(c) \neq 0$. Ma allora il determinante wronskiano in c delle due soluzioni è

$$\det\begin{bmatrix} 0 & v(c) \\ u'(c) & 0 \end{bmatrix} = -u'(c)\,v(c) \neq 0,$$

e le due soluzioni sono linearmente indipendenti. □

Esercizio 16. Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2(2-\sqrt{x^2+y^2}),\ 0 \le z \le 2\}$, e sia $\vec{F}(x,y,z) = ((x^2+y^2)y, -(x^2+y^2)x, z)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Disegnare E (che cos'è? il solido ha un nome in geometria elementare), ed usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso di $\vec{F}$ uscente da E.

(ii) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente dalle tre porzioni di frontiera di E, inferiore A, superiore B, laterale S (conviene decomporre opportunamente $\vec{F}$ nella somma di due campi ...).

(iii) Trovare il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ uscente da S, sia direttamente che con la formula di Stokes.

Risoluzione. (i) Chiaramente E è di rotazione attorno all'asse z: si ottene facendo ruotare attorno all'asse z il trapezio $T = \{(x,z) : 0 \le z \le 4-2x,\ 0 \le z \le 2,\ x \ge 0\}$; ne segue che E è un tronco di cono, la cui base A sul piano $z=0$ è il disco di centro l'origine e raggio 2, l'altra base B sul piano $z=2$ ha raggio 1; il cono ha altezza $h=4$. Si ha $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = 2xy - 2yx + 1 = 1$; il flusso uscente è quindi pari al volume di E, che si può trovare con la geometria elementare ed è (si pone $k = h-2 = 2$, altezza cono piccolo):

$$\text{Flusso uscente=Volume}(E) = \text{Volume cono grande–Volume cono piccolo} =$$
$$\text{Area}(A)\frac{h}{3} - \text{Area}(B)\frac{k}{3} = \pi 4\frac{4}{3} - \pi\frac{2}{3} = \frac{14}{3}\pi.$$

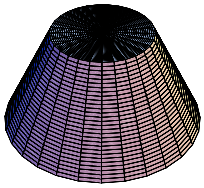


FIGURA 5. L'insieme E, tronco di cono.

Si può naturalmente ottenere il volume integrando l'area delle $z-$sezioni, che per $0 \le z \le 2$ è il disco di centro l'origine e raggio $(2 - z/2) = (4 - z)/2$; quindi

$$\text{Volume}(E) = \int_0^2 \frac{\pi}{4}(4-z)^2\,dz = \frac{\pi}{12}\left[(z-4)^3\right]_0^2 = \frac{\pi}{12}(-2^3 + 4^3) = \frac{14}{3}\pi.$$

(ii) Scriviamo $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$, dove $\vec{G}(x,y,z) = (x^2 + y^2(y,-x,0)$ è solenoidale e parallelo al piano xy, mentre $\vec{H}(x,y,z) = (0,0,z)$ è parallelo all'asse z ed è conservativo (primitiva $z^2/2$). Il flusso di $\vec{G}$ attraverso A e B è nullo, perché il campo è parallelo al piano xy, e quindi è nullo anche il flusso attraverso S , dato che il flusso totale di $\vec{G}$ uscente da E è nullo, essendo $\vec{G}$ solenoidale (ed in ogni caso è facile vedere che il campo $\vec{G}$ è parallelo ad S, in ogni punto). Il flusso di $\vec{H}$ attraverso A e B è immediato:

$$\int_A (0,0,0)\cdot(-\vec{e}_3)\,dxdy = 0; \qquad \int_B (0,0,2)\cdot\vec{e}_3\,dxdy = 2\pi;$$

ne segue che il flusso di $\vec{H}$ uscente da S è $14\pi/3 - 2\pi = 8\pi/3$. Riassumendo:

$$\text{Flussi uscenti di } \vec{F}\text{: da } A,\ 0;\ \text{da } B,\ 2\pi;\ \text{da } S,\ \frac{8}{3}\pi.$$

(iii) Il rotore è (si ricordi che $\vec{H}$ è irrotazionale perché conservativo)

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F}(x,y,z) =& \nabla\times\vec{G}(x,y,z) + \nabla\times\vec{H}(x,y,z) = \nabla\times(x^2+y^2)(y,-x,0) = \\ & \nabla(x^2+y^2)\times(y,-x,0) + (x^2+y^2)\nabla\times(y,-x,0) = \\ & 2(x,y,0)\times(y,-x,0) - (x^2+y^2)(0,0,2) = -4(x^2+y^2)(0,0,1).\end{aligned}$$

La più ovvia parametrizzazione di S è quella cartesiana, $p(x,y) = (x,y,2(2-\sqrt{x^2+y^2}))$, dove $(x,y) \in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$; come in tutte le parametrizzazioni cartesiane, il vettore normale associato $\partial_x p \times \partial_y p$ ha 1 come terza componente, e quindi punta verso l'alto, in questo caso verso l'esterno di E. L'orientazione è quindi quella giusta. Il flusso è:

$$\begin{aligned}\int_D \det\left[\nabla\times\vec{F} \quad \partial_x p \quad \partial_y p\right]dxdy =& \int_D \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4(x^2+y^2) & * & * \end{bmatrix} dxdy = -\int_D 4(x^2+y^2)\,dxdy = \\ & -\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} 4r^2\,r\,drd\vartheta = -2\pi\,[r^4]_1^2 = -30\pi.\end{aligned}$$

La frontiera positivamente orientata di D è composta dai due circoli $2(\cos t, \sin t)$, percorso nel verso positivo, e $(\cos t, \sin t)$, percorso nel verso negativo; essi sono da p trasformati nel circolo $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ e $(\cos t, \sin t, 2)$. La circuitazione richiesta è (trascuriamo $\vec{H}$ perché conservativo, e quindi a circuitazione nulla):

$$\begin{aligned}&\int_\alpha \vec{G}(x,y,z)\cdot d(x,y,z) - \int_\beta \vec{G}(x,y,z)\cdot d(x,y,z) = \int_\alpha (x^2+y^2)(y\,dx - x\,dy) - \int_\beta (x^2+y^2)(y\,dx - x\,dy) = \\ &\int_0^{2\pi} 4((2\sin t)(-2\sin t) - 2\cos t(2\cos t))\,dt - \int_0^{2\pi}((\sin t)(-\sin t) - \cos t(\cos t))\,dt = \\ &-16\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} dt = -30\pi.\end{aligned}$$

□

Esercizio 17. (i) Trovare l'integrale generale del sistema

$$(*)\qquad (x,y,z)' = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} (x,y,z)$$

(ii) Tutte le soluzioni del sistema $(*)$ hanno lo stesso limite per $t \to +\infty$, quale?
(iii) Dedurre da (ii) che il sistema $(*)$ non ha integrali primi non banali: cioè, se $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è continua e $H(\varphi(t))$ =costante per ogni soluzione del sistema, allora H è costante su $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è

$$\det(\zeta 1_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta+3 & 1 & 0 \\ -5 & \zeta+1 & 0 \\ 1 & 1 & \zeta+2 \end{bmatrix} = (\zeta+2)((\zeta+3)(\zeta+1)+5) = (\zeta+2)(\zeta^2+4\zeta+8) = 0$$

con radici $\zeta = -2$ e $\zeta = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$. Si vede subito che autovettore associato a -2 è $(0,0,1)$: dall'ultima colonna della matrice si deduce $A\vec{e}_3 = -2\vec{e}_3$. Cerchiamo un autovettore associato a $-2+2i$:

$$\begin{cases} (1+2i)x + y = & 0 \\ -5x + (-1+2i)y = & 0 \\ x + y + 2iz = & 0 \end{cases} ;\ y = -(1+2i)x;\ x = z, \quad \text{quindi si ha come autovettore:} \quad (1, -(1+2i), 1)$$

Una soluzione complessa è quindi

$$\begin{aligned} & e^{(-2+2i)t}(1, -(1+2i), 1) = e^{-2t}e^{2it}(1, -1-2i, 1) = \\ & e^{-2t}(\cos(2t) + i\sin(2t), (\cos(2t) + i\sin(2t))(-1-2i), \cos(2t) + i\sin(2t)) = \\ & e^{-2t}(\cos(2t), -\cos(2t) + 2\sin(2t), \cos(2t)) + ie^{-2t}(\sin(2t), -2\cos(2t) - \sin(2t), \sin(2t)). \end{aligned}$$

Una matrice risolvente è quindi:

$$e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\cos(2t) + 2\sin(2t) & -2\cos(2t) - \sin(2t) & 0 \\ \cos(2t) & \sin(2t) & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che l'integrale generale è:

$$\varphi(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ c_1(-\cos(2t) + 2\sin(2t)) + c_2(-2\cos(2t) - \sin(2t)) \\ c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + c_3 \end{bmatrix}$$

(ii) Da (i) sappiamo che ogni soluzione è della forma $e^{-2t}(u(t), v(t), w(t))$, con u, v, w limitate. Ne segue che $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = (0,0,0)$, per ogni soluzione φ del sistema.

(iii) Se H è costante sulle soluzioni $\varphi(t)$ del sistema, per continuità di H si ha $\lim_{t\to+\infty} H(\varphi(t)) = H(\lim_{t\to\infty} \varphi(t)) = H(0,0,0)$; ma se $H(\varphi(t)) = c$, costante, tale valore costante è anche $\lim_{t\to+\infty} H(\varphi(t))$; ne segue $c = H(0,0,0)$. Su tutte le soluzioni quindi H assume il valore che assume nell'origine delle coordinate. Per ogni punto dello spazio passano soluzioni; quindi H è costante su $\mathbb{R}^3$. □

Esercizio 18. Si considera l'equazione del secondo ordine

$$\text{(Eq)}\qquad y'' = 2y^3 - y$$

(i) Trovarne le soluzioni costanti.
(ii) Se $\varphi \in C^2(I, \mathbb{R})$ è soluzione di (Eq), allora $-\varphi$ e $\psi : -I \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(t) = \varphi(-t)$ sono ancora soluzioni di (Eq)?
(iii) Dato il problema di Cauchy dato da (Eq), con $y(0) = a$ ed $y'(0) = b$, dire al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ quali delle sue soluzioni massimali sono pari, e quali dispari.
(iv) Scrivere il sistema equivalente, e trovare un integrale primo non banale dell'equazione.
(v) Trovare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy dato da (Eq) con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, trovando anche l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

Risoluzione. (i) Le soluzioni costanti sono le soluzioni di $2c^3 - c = 0$ e cioè $c = 0$ e $c = \pm 1/\sqrt{2}$.

(ii) È immediato che anche $-\varphi$ è soluzione: basta cambiare i segni nell'uguaglianza $\varphi''(t) = 2(\varphi(t))^3 - \varphi(t)$ per ottenere $(-\varphi''(t)) = 2(-\varphi(t))^3 - (-\varphi(t)$, per ogni $t \in I$. Si ha poi $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) =$

$\varphi''(-t)$ per ogni $t \in -I$; imponendo che $\psi : -I \to \mathbb{R}$ sia soluzione si trova $\psi''(t) = 2(\psi(t))^3 - \psi(t)$ per ogni $t \in -I$, che corrisponde a

$$\varphi''(-t) = 2(\varphi(-t))^3 - \varphi(-t) \quad \text{per ogni } t \in -I,$$

che posto $t = -\theta$ diventa

$$\varphi''(\theta) = 2(\varphi(\theta))^3 - \varphi(\theta) \quad \text{per ogni } \theta = -t \in I,$$

vera perché per ipotesi φ è soluzione.

(iii) Perchè φ sia pari condizione necessaria è che sia $\varphi'(0) = b = 0$. Se questo accade, la simmetrizzata $\psi : -I \to \mathbb{R}$ di φ, $\psi(t) = \varphi(-t)$ verifica $\psi(0) = \varphi(-0) = a$ e $\psi'(0) = -\varphi'(-0) = b = 0$; come appena visto ψ è soluzione, quindi per unicità $\varphi = \psi$ dove entrambe sono definite (l'intervallo $I \cap (-I)$), ma per massimalità $-I = I$. Quindi φ è pari se e solo se $b = 0$.

Similmente, se φ è dispari si ha $\varphi(0) = a = 0$; e tutte le soluzioni massimali del problema di Cauchy con $\varphi(0) = 0$ sono dispari; infatti la simmetrizzata è soluzione, ed allora anche l'opposta della simmetrizzata, cioà $\chi(t) = -\varphi(-t)$, è ancora soluzione, come visto al punto precedente, e dello stesso problema di Cauchy, essendo $\chi(0) = -\varphi(-0) = 0$ e $\chi'(0) = \varphi'(-0) = b$: per unicità, $\chi(t) = \varphi(t)$ per $t \in I \cap (-I)$, dove entrambe sono definite, ma per massimalità si ha $I = -I$.

(iv) Il sistema equivalente è, posto $y' = p$:

$$\begin{cases} y' &= p \\ p' &= 2y^3 - y \end{cases}$$

l'integrale dell'energia si ha da questo sistema integrando la forma differenziale $-(2y^3 - y)\,dy + p\,dp$, a variabili separate, che porge $-y^4/2 + y^2/2 + p^2/2$ come primitiva, equivalentemente moltiplicando la data equazione per y' ed integrando, $y'y'' = (2y^3 - y)y' \iff (y')^2/2 = (y^4/2 - y^2/2) + k$. Moltiplicando per 2 si ha che un integrale primo è

$$H(y, p) = p^2 - y^4 + y^2.$$

(v) Per quanto visto in (ii) la soluzione richiesta è pari, e basta trovarla per $t \geq 0$. Si ha inoltre $y''(0) = 2y(0)^3 - y(0) = 2 - 1 = 1 > 0$, per cui $y'(t) > 0$ in un intorno destro di 0; si ha allora $y'(t) = y(t)\sqrt{(y(t))^2 - 1}$ in un intorno destro di 0 da cui

$$\frac{y'(t)}{y(t)\sqrt{(y(t))^2 - 1}} = 1;$$

un modo astuto per integrare $1/(y\sqrt{y^2 - 1})$ $(y > 1)$ è il seguente

$$\int \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}\,dy = \int \frac{1}{y^2\sqrt{1 - (1/y)^2}}\,dy = -\int \frac{d(1/y)}{\sqrt{1 - (1/y)^2}} = \arccos(1/y) + k;$$

si ha quindi dalla relazione precedente

$$\arccos(1/y(t)) - \arccos(1/y(0)) = t \iff \arccos(1/y(t)) = t \iff \frac{1}{y(t)} = \cos t \iff y(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

la soluzione è quindi la secante; il massimo intorno di $t = 0$ in cui tale funzione è definita è $]-\pi/2, \pi/2[$; in tale intorno essa è effettivamente soluzione:

$$y'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \quad ((\text{quindi } y'(0) = 0); \quad y''(t) = 2\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} + \frac{\cos t}{\cos^2 t} = \frac{2}{\cos^3 t} - \frac{1}{\cos t} = 2(y(t))^3 - y(t).$$

Un solutore meno astuto nell'integrazione può forse aver proceduto come segue: $\sqrt{y^2 - 1} = \xi$, da cui $y = \sqrt{1 + \xi^2}$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}\xi}\frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}\,d\xi = \int \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \arctan\xi + k,$$

che quindi porge

$$\arctan\sqrt{(y(t))^2 - 1} - \arctan\sqrt{(y(0))^2 - 1} = t \iff \sqrt{(y(t))^2 - 1} = \tan t,$$

da cui ancora

$$y(t)^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \iff y(t) = \frac{\pm 1}{\cos t},$$

ed essendo $y(0) = 1$ si sceglie il segno $+$; la soluzione non è quindi molto più lunga. □

Anche se non richieste dal tema, presentiamo alcune curve di livello dell'integrale primo.

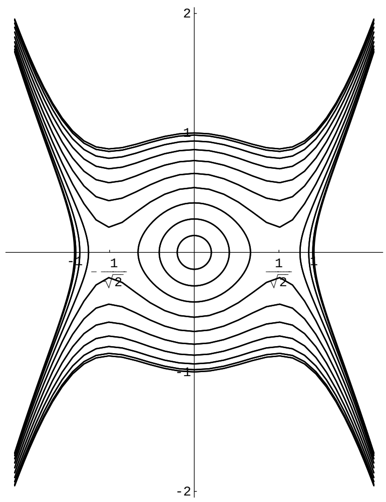


Figura 6. Alcune curve di livello dell'integrale primo; la soluzione trovata è la curva più a destra di tutte.

Matematica 4F per Fisica e Astronomia–Tema del 14 dicembre 2005

Esercizio 19. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, si sa che essa converge per $z = 2 + i$. È vero che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| 2^n$ è convergente?

Quale stima si può dare del raggio di convergenza?

E se suppone in più di sapere che per $z = 2 + i$ si ha convergenza semplice, ma non assoluta?

Risoluzione. Per il lemma di Abel, la serie converge assolutamente per ogni complesso z tale che $|z| < |2 + i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; essendo $|2| = 2 < \sqrt{5}$ la serie converge assolutamente se $z = 2$, cioè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| 2^n$ converge. Il raggio di convergenza, con quest'informazione, non è inferiore a $\sqrt{5}$, cioè si ha $R_a \geq \sqrt{5}$. Se invece si sa anche che la convergenza per $z = 2 + i$ è semplice e non assoluta, allora $R_a = \sqrt{5}$: se infatti la serie convergesse per un w con $|w| > \sqrt{5} = |2 + i|$ il lemma di Abel implicherebbe l'assoluta convergenza in $2 + i$.

□

Esercizio 20. (i) Calcolare l'integrale:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log x)\, x^a y^b \, dxdy \qquad (a, b > -1).$$

(ii) Dedurne gli integrali:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log y)\, x^a y^b \, dxdy; \qquad \int_{[0,1]\times[0,1]} \log(1/\sqrt{xy})\, x^a y^b \, dxdy \qquad (a, b > -1).$$

(iii) Dimostrare la formula

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\log(1/\sqrt{xy})}{1 - xy} \, dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} (= \zeta(3))$$

(ricordare che se $|q| < 1$ si ha $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$).

Risoluzione. (i) Con la formula di riduzione, applicabile di certo perchè l'integrando è positivo (teorema di Tonelli):

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log x)\, x^a y^b \, dxdy = \left(-\int_0^1 \log x \, x^a \, dx \right) \left(\int_0^1 y^b \, dy \right) =$$

$$\frac{1}{b+1} \left(\left[-\log x \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a+1} \, dx \right) = \frac{1}{b+1} \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{1}{(a+1)^2 (b+1)}$$

(si è usato il fatto che, essendo $a + 1 > 0$ si ha $\lim_{x \to 0^+} x^{a+1} \log x = 0$).

(ii) Il primo dei due integrali si ottiene dal precedente semplicemente scambiando fra loro a e b e vale quindi $1/((a+1)(b+1)^2)$. Per il secondo:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \log(1/\sqrt{xy})\, x^a y^b\, dxdy = \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log(xy))\, x^a y^b\, dxdy =$$
$$\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log x)\, x^a y^b\, dxdy + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times[0,1]} (-\log y)\, x^a y^b\, dxdy =$$
$$\frac{(1/2)}{(a+1)^2(b+1)} + \frac{(1/2)}{(a+1)(b+1)^2} = \frac{(a+b)/2+1}{(a+1)^2(b+1)^2}.$$

(iii) Si scrive, se $(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \smallsetminus \{(1,1)\}$:

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n,$$

di modo che nel quadrato $[0,1]\times[0,1]$, posto $N = \{(1,1)\} \cup ([0,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times[0,1])$ si ha

$$\frac{\log(1/\sqrt{xy})}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \log(1/\sqrt{xy}) x^n\, y^n, \quad \text{tranne che sull'insieme di misura nulla } N.$$

con la serie a secondo membro fatta di funzioni positive. Ne segue che se si pone

$$f_m(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \log(1/\sqrt{xy}) x^n\, y^n$$

la successione di funzioni f_m è monotona crescente e converge q.o nel quadrato alla funzione integranda. Per il teorema della convergenza monotòna si ha che la funzione limite è integrabile se e solo se il limite degli integrali delle f_m esiste finito, il suo integrale coincidendo allora con tale limite. Il limite degli integrali è ovviamente la somma della serie degli integrali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]\times[0,1]} \log(1/\sqrt{xy})\, x^n y^n\, dxdy =$$

(per quanto visto in (ii))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+n)/2+1}{(n+1)^2(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}.$$

□

Esercizio 21. Si considera la "clessidra" S ottenuta facendo ruotare l'insieme

$$E = \{(x,z) :\ 0 \le x \le 1-\cos z,\ -\pi \le z \le \pi\}$$

attorno all'asse z.

(i) Disegnare S; calcolare $\int_E x\, dxdz$ e dedurne il volume della clessidra.

La frontiera della clessidra si considera fatta da tre pezzi: inferiore A, superiore B, laterale C. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$.

(ii) Calcolare il flusso di $\vec{F}$ uscente da A, B e C.

(iii) Calcolare $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$ ed il flusso di $\vec{G}$ uscente da A, B, C.

Risoluzione. (i) Il disegno della curva meridiana $x = 1-\cos z$, con $z \in [-\pi,\pi]$, è facile, e quindi anche il disegno di S.

Per l'integrale si ha

$$\int_E x\, dxdz = \int_{z=-\pi}^{z=\pi} \left(\int_{x=0}^{x=1-\cos z} x\, dx \right) dz = \int_{z=-\pi}^{z=\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1-\cos z} dz =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2\cos z + \cos^2 z)\, dz = \frac{2\pi - 0 + \pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Per il teorema di Guldino il volume della clessidra è

$$\text{Volume}(S) = 2\pi \int_E x\, dxdz = 2\pi \frac{3}{2}\pi = 3\pi^2.$$

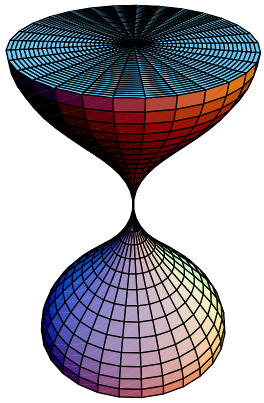


FIGURA 7. La clessidra S.

(ii) Il campo è solenoidale. Il flusso che esce dalla cima B si calcola subito (B si parametrizza come (x, y, π), con $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, versore normale $\vec{e}_3$, per cui il prodotto scalare $\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}_3$ vale $x^2 + y^2$ su B:)

$$\int_D (y^2 + x^2)\, dxdy = \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} r^2\, r\, dr d\vartheta = 2\pi \frac{(2)^4}{4} = 8\pi;$$

mentre quello che esce dalla base A è (versore normale $-\vec{e}_3$)

$$-\int_D (y^2 + x^2)\, dxdy = -8\pi.$$

Essendo il campo solenoidale, il flusso totale che esce da S è nullo; quindi il flusso che esce da C è pure nullo, essendo pari a $0 - (2\pi - 2\pi)$.

(iii) Il rotore è

$$\vec{G}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & y^2 + z^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & z^2 + x^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \vec{e}_1(2y - 2z) + \vec{e}_2(2z - 2x) + \vec{e}_3(2x - 2y).$$

Ancora, il flusso che esce dalla cima B è immediato, essendo pari a

$$\int_D 2(x - y)\, dxdy = 0, \qquad (D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\})$$

per cui anche quello che esce dalla base A è nullo. Come ogni rotore, $\vec{G}$ è solenoidale, quindi il flusso totale uscente è nullo, e quindi è nullo anche il flusso che esce da C. □

ESERCIZIO 22. Si considera il sistema differenziale

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= -x(x^2 + 3y^2 - 1) \\ \dot{y} &= y(3x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

(i) Trovarne le soluzioni costanti.
(ii) Trovare un integrale primo V per il sistema; disegnare l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = V(0, 0)\}$
(iii) Dimostrare che se $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, è la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da (S) con condizioni iniziali $\varphi(0) = (x_0, y_0)$, con $x_0, y_0 > 0$ allora si ha sempre $u(t) > 0$, $v(t) > 0$, per ogni $t \in I$ (in altre parole: se una soluzione parte dal primo quadrante aperto ci resta sempre, e ci era sempre stata).
(iv) Conoscendo le soluzioni con traiettoria nel primo quadrante, si conoscono anche le altre?

Risoluzione. (i) Si deve risolvere il sistema numerico:

$$\begin{cases} x(x^2 + 3y^2 - 1) &= 0 \\ y(3x^2 + y^2 - 1) &= 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ la seconda equazione diventa $y(y^2 - 1) = 0$, con soluzioni $0, \pm 1$. Se $y = 0$ la prima diventa $x(x^2 - 1) = 0$, con soluzioni $0, \pm 1$ (si potrebbe anche osservare che scambiando fra loro x ed y la prima equazione si scambia con la seconda). Se x, y sono entrambi non nulli si ha dalla prima $x^2 = 1 - 3y^2$, e sostituendo nella seconda si ottiene $3 - 9y^2 + y^2 - 1 = 0$, cioè $4y^2 = 1$, da cui $y = \pm 1/2$, e $x^2 = 1 - 3/4 = 1/4$, e quindi $x = \pm 1/2$. Riassumendo: le soluzioni costanti sono nove, e sono:

$$(0,0);\ (0,1);\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0),\ (1/2,1/2),\ (-1/2,1/2),\ (-1/2,-1/2),\ (1/2,-1/2).$$

(ii) Studiamo la forma $y(3x^2 + y^2 - 1)\, dx + x(x^2 + 3y^2 - 1)\, dy$, definita e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, per cui essa è esatta se e solo se è chiusa; si ha

$$\partial_y(y(3x^2 + y^2 - 1)) = 3x^2 + y^2 - 1 + 2y^3 = 3x^2 + 3y^2 - 1;$$
$$\partial_x(x(x^2 + 3y^2 - 1)) = x^2 + 3y^2 - 1 + 2x^2 = 3x^2 + 3y^2 - 1;$$

la forma è chiusa, e quindi esatta; una primitiva in x del primo coefficiente è $x^3y + xy^3 - xy$; derivando rispetto ad y tale funzione si ottiene $x^3 + 3xy^2 - x = x(x^2 + 3y^2 - 1)$. Quindi

$$V(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{è integrale primo non banale del sistema.}$$

Essendo $V(0,0) = 0$ è immediato vedere che il luogo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = 0\}$ consta dell'unione degli assi coordinati con il circolo unitario $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(iii) Se $(u(t), v(t))$, $t \in I$, è la soluzione massimale del problema con $u(0) = x_0 > 0$ e $v(0) = y_0 > 0$, essa può uscire dal primo quadrante aperto se e solo se attraversa uno degli assi coordinati (più precisamente il semiasse positivo delle x, o il semiasse positivo delle y). Consideriamo $V(x_0, y_0)$; se questo non è nullo, essendo V nullo sugli assi coordinati, ed essendo $V(u(t), v(t)) = V(x_0, y_0) \neq 0$ per ogni $t \in I$ certamente la soluzione non attraversa gli assi. Se invece $V(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) appartiene al circolo unitario, non appartenendo agli assi; la soluzione deve restare sul circolo unitario, dovendo essere costantemente $V(u(t), v(t)) = 0$, e potrebbe traversare gli assi solo nei punti $(1,0)$ oppure $(0,1)$, impossibile perchè tali punti sono equilibri (soluzioni costanti).

(iv) Vediamo che se $\varphi : t \mapsto (u(t), v(t))$ è soluzione, allora anche $\psi : t \mapsto (-u(t), v(t))$ è soluzione. Infatti, posto $-u$ al posto di u nel sistema (S) si ha:

$$(-u'(t)) = -(-u(t))((-u(t))^2 + 3(v(t))^2 - 1); \quad v'(t) = v(t)(3(-u(t))^2 + (v(t))^2 - 1),$$

che diventano

$$u'(t) = -u(t)((u(t))^2 + 3(v(t))^2 - 1); \quad v'(t) = v(t)(3(u(t))^2 + (v(t))^2 - 1),$$

vere perchè per ipotesi $(u(t), v(t))$ è soluzione. Similmente si vede che anche $(u(t), -v(t))$ è soluzione,e quindi anche che $(-u(t), -v(t))$ è soluzione. Conoscendo le soluzioni nel primo quadrante chiuso si conoscono quindi tutte le soluzioni. □

In figura alcune curve di livello dell'integrale primo.

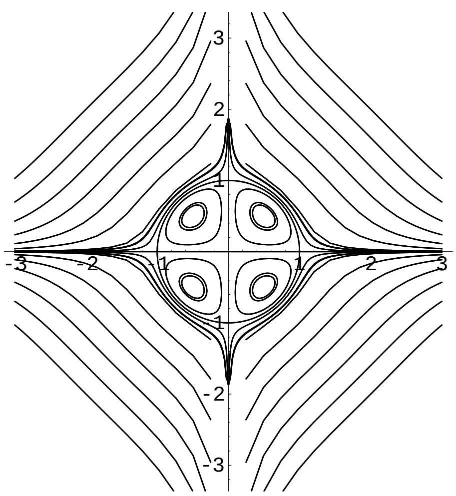


FIGURA 8. Traiettorie di (S)

Esercizio 23. È data l'equazione differenziale

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$$

(i) Scriverne l'integrale generale.
(ii) Scrivere il sistema equivalente $\dot{z} = Az$.
(iii) Trovare una risolvente reale per il sistema.
(iv) Trovare la soluzione η dell'equazione che verifica le condizioni iniziali $\eta(0) = \eta'(0) = 0$, $\eta''(0) = 1$; dedurne la soluzione dell'equazione $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-t}$ con condizioni iniziali nulle in $t = 0$.

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è $\chi(\zeta) = \zeta^3 + 3\zeta^2 + 4\zeta + 2 = 0$; cercando zeri interi, divisori del termine noto, si trova che -1 è radice; dividendo per $\zeta + 1$ si ottiene come quoziente $\zeta^2 + 2\zeta + 2$; si ha cioè $\chi(\zeta) = (\zeta + 1)(\zeta^2 + 2\zeta + 2)$; le altre radici sono $-1 \pm i$. Una base per lo spazio delle soluzioni è quindi la terna di funzioni e^{-t}, $e^{-t}\cos t$, $e^{-t}\sin t$, e l'integrale generale è quindi

$$c_1 e^{-t} + e^{-t}(c_2 \cos t + c_2 \sin t).$$

(ii) Come di consueto si pone $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$ ed il sistema equivalente è

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -2z_1 - 4z_2 - 3z_3 \end{cases} \qquad \text{in forma matriciale} \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} z.$$

(iii) Avendo già trovato l'integrale generale dell'equazione, disponendo cioè di una base per lo spazio delle soluzioni, il metodo più rapido è certamente quello di fare la matrice wronskiana di tale base:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t} & e^{-t}(-\cos t - \sin t) & e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ e^{-t} & 2e^{-t}\sin t & -2e^{t}\cos t \end{bmatrix},$$

che è una risolvente per il sistema.

(iv) Si cerca $\eta(t) = c_1 e^{-t} + e^{-t}(c_2 \cos t + c_2 \sin t)$; le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 - 2c_3 &= 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad c_1 + c_2 = c_3,\ c_1 + c_2 = 0,$$

e dalla terza si ha allora $c_1 = 1$. Quindi $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$; la soluzione richiesta è

$$\eta(t) = e^{-t}(1 - \cos t).$$

(iii) La formula di variazione delle costanti dice che la soluzione richiesta è

$$v(t) = \int_0^t \eta(t - \theta)\, e^{-\theta}\, d\theta = \int_0^t e^{-t+\theta}(1 - \cos(t - \theta))\, e^{-\theta}\, d\theta =$$
$$e^{-t}\int_0^t (1 - \cos(t - \theta))\, d\theta = e^{-t}\left(t + [\sin(t - \theta)]_{\theta=0}^{\theta=t}\right) = e^{-t}(t - \sin t)$$

□

Matematica 4F per Fisica e Astronomia–II appello–9 gennaio 2006

Esercizio 24. Sappiamo che si ha, se $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y; \qquad \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

(vedi ad esempio il Formulario).

(i) Dedurre formule analoghe per $\cosh(x + iy)$ e $\sinh(x + iy)$ (cioè, trovare funzioni reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tali che sia $\cosh(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ed analogamente per $\sinh(x + iy)$, ricordando che se $t \in \mathbb{C}$ si ha $\cos(it) = \dots$.
(ii) Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$|\cosh z|^2 - |\sinh z|^2 \le 1;$$

per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha uguaglianza?

Risoluzione. (i) Si ha $\cos(it) = \cosh t$ per cui

$$\cosh(x+iy) = \cos(i(x+iy)) = \cos(-y+ix) = \cos(-y)\cosh x - i\sin(-y)\sinh x = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y;$$

analogamente, da $\sin(it) = i\sinh t$ si ha $\sinh t = -i\sin(it)$ e quindi

$$\sinh(x+iy) = -\,i\sin(i(x+iy)) = -i\sin(-y+ix) = -i(\sin(-y)\cosh x + i\cos(-y)\sinh x) = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y.$$

(ii) Si ha

$$|\cosh(x+iy)|^2 - |\sinh(x+iy)|^2 = (\cosh^2 x\cos^2 y + \sinh^2 x\sin^2 y) - (\sinh^2 x\cos^2 y + \cosh^2 x\sin^2 y) = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)\cos^2 y - (\cosh^2 x - \sinh^2 x)\sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 y = \cos(2y).$$

Si ha quindi $-1 \le |\cosh z|^2 - |\sinh z|^2 \le 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e l'uguaglianza con 1 si ha se e solo se $\cos(2y) = 1$, e cioè se e solo se $2y = 2k\pi \iff y = k\pi$; quindi si ha uguaglianza su tutte le rette $\mathbb{R} + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, parallele all'asse reale.

□

Esercizio 25. (i) Calcolare l'integrale:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} x^a y^b\,dxdy \qquad (a,b > -1),$$

giustificando con cura l'esistenza dello stesso.

(ii) Calcolare, usando (i):

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,+\infty[} (xy)^z\,dxdydz.$$

(iii) Usando (ii), calcolare

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{-1}{\log x + \log y}\,dxdy.$$

Risoluzione. (i) L'integrando è positivo, e per il teorema di Tonelli l'integrale esiste se e solo se esiste finito l'integrale iterato:

$$\int_{x=0}^{x=1} x^a \left(\int_{y=0}^{y=1} y^b\,dy\right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x^a \left[\frac{y^{b+1}}{b+1}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{b+1}\int_0^1 x^a\,dx = \frac{1}{(a+1)(b+1)}.$$

(ii) Ancora, l'integrando è positivo, e l'integrale esiste se e solo se esiste finito l'integrale iterato, in qualsiasi modo:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,+\infty[} (xy)^z\,dxdydz = \int_{z=0}^{z=\infty} \left(\int_{[0,1]\times[0,1]} x^z y^z\,dxdy\right) dz =$$

(per quanto visto in (i), essendo $z \ge 0$)

$$\int_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{(z+1)^2}\,dz = \left[\frac{-1}{z+1}\right]_0^\infty = 1.$$

(iii) Integrando prima rispetto a z si ricava

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,+\infty[} (xy)^z\,dxdydz = \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(\int_{z=0}^{z=\infty} (xy)^z\,dz\right) dxdy =$$

(si ha $(xy)^z = e^{z\log(xy)}$, per cui una primitiva di $(xy)^z$ rispetto a z è $e^{z\log(xy)}/\log(xy)$)

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \left[\frac{e^{z\log(xy)}}{\log(xy)}\right]_{z=0}^{z=\infty} dxdy =$$

(essendo $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ si ha $0 < xy < 1$ quasi ovunque in $[0,1] \times [0,1]$, e quindi $\log(xy) < 0$; ne segue $\lim_{z \to +\infty} e^{z \log(xy)} = 0$ e allora:)

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{-1}{\log(xy)}\, dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{-1}{\log x + \log y}\, dxdy.$$

L'integrale richiesto vale quindi 1.

□

Esercizio 26. Sia $a > 0$ costante. Si considera l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

(i) Mostrare che S è solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare quale figura piana E? Disegnare tale figura E, e disegnare anche S. Senza fare integrali calcolare il volume di S, l'area di E, le coordinate del baricentro di E.

(ii) La frontiera di S ha due porzioni, superiore B ed inferiore A; trovare l'area di tali porzioni, sempre senza fare integrali.

(iii) Si considera il campo $\vec{W} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, a)\} \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$\vec{W}(x, y, z) = \frac{(x, y, z - a)}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{3/2}} \qquad \text{(campo ben noto!)}.$$

Trovare il flusso di tale campo uscente da A e da B.

Risoluzione. (i) Cerchiamo l'intersezione di S con il semipiano xz delle $x \geq 0$, che è

$$E = \{(x, z) : a - \sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

e quindi E è l'insieme dei punti del quarto di cerchio di centro $(0, a)$ e raggio a contenuto nel quadrante $\{x \geq 0,\ z \geq 0\}$ che stanno al di sotto della retta di equazione $x = z$; E è un segmento circolare. La rotazione di E attorno all'asse z genera S, differenza della mezza palla di centro $(0, 0, a)$ e raggio a, contenuta nel semispazio $\{z \leq a\}$, con il cono circolare retto che ha vertice nell'origine e base il disco $\{x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = a\}$.

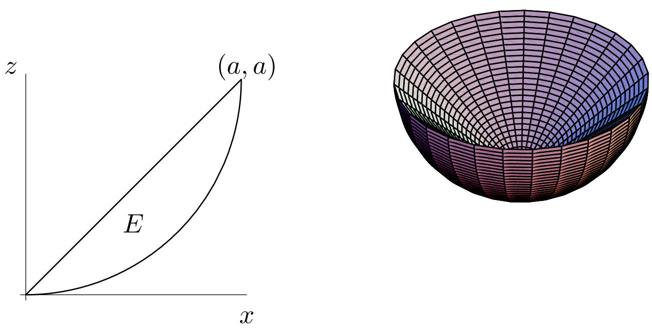


Figura 9. L'insieme E, segmento circolare, ed il solido S ottenuto ruotando E.

Il volume di S è il volume della mezza palla meno il volume del cono e quindi vale

$$\text{Volume}(S) = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^2 a = \frac{\pi}{3} a^3.$$

L'area di E è l'area del quarto di cerchio meno l'area del triangolo di vertici $(0, 0), (0, a), (a, a)$ (nel piano xz) e quindi vale

$$\text{Area}(E) = \frac{\pi}{4} a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{\pi - 2}{4} a^2.$$

Infine, si osserva che E è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x + z = a$ e quindi il baricentro sta su questa retta. Per il teorema di Guldino la $x-$coordinata ξ di tale baricentro è poi tale che

$$\text{Volume}(S) = 2\pi\xi \,\text{Area}(E) \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi}{3} a^3 = 2\pi\xi\, \frac{\pi - 2}{4} a^2,$$

da cui le coordinate (ξ, ζ) del baricentro di E:

$$\xi = \frac{2}{3(\pi - 2)} a; \quad \zeta = a - \xi = \frac{3\pi - 8}{3(\pi - 2)} a.$$

(ii) La porzione inferiore A è una semisfera di raggio a con area $2\pi a^2$; quella superiore è la superficie laterale di un cono circolare retto di raggio di base a e altezza a, quindi

$$\mathrm{Area}(B) = \frac{\text{circonf. di base} \times \text{apotema}}{2} = \frac{(2\pi a)\,(\sqrt{2}\,a)}{2} = \pi\sqrt{2}\,a^2.$$

(iii) Il campo è quello newtoniano–coulombiano di una massa o carica puntiforme situata in $(0,0,a)$; è ben noto che tale campo è solenoidale. Il flusso totale uscente da S è quindi nullo, dato che $(0,0,a)\notin S$; e quindi il flusso che esce dalla parte inferiore A è opposto a quello che esce da B. Il flusso che esce da A è la metà del flusso totale uscente dalla sfera di centro $(0,0,a)$ e raggio a; tale flusso vale 4π quindi:

$$\text{Flusso uscente da } A = 2\pi; \quad \text{Flusso uscente da } B = -2\pi.$$

□

Esercizio 27. Si considera il sistema differenziale autonomo:

$$\text{(Eq)} \qquad \begin{cases} \dot x &= -y\sin(x^2+y^2) \\ \dot y &= x\sin(x^2+y^2) \end{cases}$$

(i) Mostrare che il sistema verifica le ipotesi di un teorema di esistenza ed unicità globale.
(ii) Trovarne le soluzioni costanti.
(iii) Trovare un integrale primo non banale per il sistema, e disegnare le traiettorie delle soluzioni. Esistono curve di livello dell'integrale primo che contengono più di una traiettoria? se sì, quali?
(iv) Trovare la soluzione del problema di Cauchy dato da (Eq) con condizioni iniziali $x(0)=\sqrt{\pi/2}$, $y(0)=0$.

Risoluzione. (i) Detta $f(x,y)=(-y\sin(x^2+y^2), x\sin(x^2+y^2))$ la funzione a secondo membro, essa ha chiaramente crescita sublineare:

$$|f(x,y)| = \sqrt{y^2\sin^2(x^2+y^2)+x^2\sin^2(x^2+y^2)} \le \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)|.$$

Osservazione. La versione debole invece non è verificata: le derivate parziali di f non sono limitate, ad esempio si ha $\partial_x(-y\sin(x^2+y^2)) = -2xy\cos(x^2+y^2)$; se $x=y=\xi$ questa quantità è in modulo $2\xi^2|\cos(2\xi^2)|$, chiaramente illimitata (prendere $\xi=\sqrt{k\pi}$).

(ii) Chiaramente l'origine è un equilibrio. Inoltre sono equilibri anche tutti i punti $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tali che si abbia $\sin(a^2+b^2)=0$, e questi sono i punti dei circoli di equazione $x^2+y^2=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge 0$.

(iii) Se la forma differenziale

$$(-b(x,y))\,dx + a(x,y)\,dy = (-x\sin(x^2+y^2)\,dx + (-y\sin(x^2+y^2))\,dy$$

è esatta, una sua primitiva è integrale primo del sistema (Eq). È immediato vedere che $\cos(x^2+y^2)/2$ è una primitiva. Quindi $U(x,y)=\cos(x^2+y^2)$ è un integrale primo del sistema. Tutti gli insiemi di livello di questo integrale primo contengono più di una traiettoria: l'insieme $E_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : U(x,y)=c\}$ non è vuoto se e solo se $c\in[-1,1]$, ed in tal caso è

$$E_c = \bigcup_{k\ge 1} C_k^{\pm}(c) \qquad \text{dove} \quad C_k^{\pm}(c) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \pm\arccos c + 2k\pi\},$$

e ciascuno di tali circoli $C_k^+(c)$, $C_k^-(c)$ contiene almeno una traiettoria.

Interpretando la domanda in un senso più ristretto, e cioè quali componenti connesse degli insiemi di livello contengono più di una traiettoria, la risposta è

$$\{C_k : k\ge 1\} \qquad \text{dove} \quad C_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = k\pi\};$$

tali circoli infatti sono luogo di punti di equilibrio, come visto in (ii), e ciascuno dei loro punti è una traiettoria.

Osservazione. È facile vedere che anche $V(x,y)=x^2+y^2$ è un integrale primo per il sistema. Infatti $\nabla V(x,y) = 2(x,y)$, e chiaramente il prodotto scalare

$$(-y\,\sin(x^2+y^2), x\,\sin(x^2+y^2))\cdot(x,y) = -xy\,\sin(x^2+y^2) + yx\,\sin(x^2+y^2) = 0$$

è nullo. Per questo integrale primo gli insiemi di livello che contengono più di una traiettoria sono esattamente i circoli centrati nell'origine di raggio $k\pi$, con $k>0$ intero, formati tutti da equilibri.

(iv) Sulla traiettoria $(x(t), y(t))$ deve essere $\cos(x^2(t)+y^2(t)) = \cos(\pi/2+0) = 0$ e quindi $\sin^2(x^2(t)+y^2(t)) = 1$, costantemente. Ne segue $\sin(x^2(t)+y^2(t)) = \pm 1$, costantemente; ma $(x(t), y(t))$ deve restare su una componente connessa dell'insieme di livello, e quindi resta sul circolo di centro l'origine e raggio $\sqrt{\pi/2}$; ne segue che si ha $\sin(x^2(t)+y^2(t)) = 1$, costantemente. Si deve quindi risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{cases} \qquad x(0) = \sqrt{\pi/2},\ y(0) = 0,$$

e non è difficile vedere che la soluzione è $(\sqrt{\pi/2}\cos t, \sqrt{\pi/2}\sin t)$ (si può ad esempio passare al campo complesso e risolvere l'equazione lineare del primo ordine $\dot{z} = i\,z$, con condizione iniziale $z(0) = \sqrt{\pi/2}$).

□

Esercizio 28. Si considera il sistema differenziale $(x, y)' = A(x, y)$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Il sistema ha soluzioni reali non banali?
(ii) Trovare autovalori ed autovettori di A, ed una risolvente per il sistema.
(iii) Trovare la matrice esponenziale del sistema, usando la definizione di e^{tA} (si ha $A^2 = \ldots$).

Risoluzione. (i) No: se $(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$, con $t \in \mathbb{R}$, è soluzione non banale, quindi mai nulla, si ha $\dot{u}(t) = i\,v(t)$, e $\dot{v}(t) = -iu(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ è tale che $v(\bar{t}) \neq 0$ si ha $i = \dot{u}(\bar{t})/v(\bar{t})$, quantità reale, assurdo; similmente se $u(\bar{t}) \neq 0$ si ottiene $-i = \dot{v}(\bar{t})/u(\bar{t})$, ancora assurdo.

(ii) L'equazione caratteristica è

$$\zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 - 1 = 0 \quad \text{con radici} \quad \zeta = \pm 1.$$

Un autovettore associato a 1 si trova risolvendo il sistema $x - iy = 0$, $ix + y = 0$, una cui soluzione è $(i, 1)$; un autovettore associato a -1 è una soluzione non banale di $-x - iy = 0$, $ix - y = 0$, ad esempio $(-i, 1)$. Una risolvente è quindi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t\,i & -e^{-t}\,i \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(iii) Moltiplicando A con se stessa righe per colonne si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1_2,$$

per cui

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j} A^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1} A^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j} (A^2)^j}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1} (A^2)^j A}{(2j+1)!} =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}\,1_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\,A = \cosh t\,1_2 + \sinh t\,A.$$

Quindi

$$e^{tA} = \cosh t\,1_2 + \sinh t\,A = \begin{bmatrix} \cosh t & i\sinh t \\ -i\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

□

1. Matematica 4F–13 luglio 2006

Esercizio 29. (5) Sia a numero complesso non nullo. Si determini, al variare di $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\, z^{2^k}.$$

Discutere anche la convergenza della serie sulla circonferenza di convergenza.

Risoluzione. Usiamo il criterio del rapporto; se $z \neq 0$ si ha

$$\frac{|a|^{k+1}|z|^{2^{k+1}}}{|a|^k|z|^{2^k}} = |a||z|^{2^{k+1}-2^k} = |a||z|^{2^k}.$$

Si ha ora chiaramente

$$\lim_{k\to\infty} |a||z|^{2^k} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad |z| > 1 \\ |a| & \text{se} \quad |z| = 1 \\ 0 & \text{se} \quad |z| < 1. \end{cases}$$

Ne segue che la serie converge se $|z| < 1$ e non converge se $|z| > 1$; il raggio di convergenza è 1. Sulla circonferenza di convergenza, cioè se $|z| = 1$, il modulo del termine generale vale $|a|^k$; ne segue che la serie converge anche sulla circonferenza di convergenza se $|a| < 1$, non converge in alcun punto della stessa per $|a| \geq 1$, dato che in tal caso il termine generale non è infinitesimo.

□

Esercizio 30. Si considera nel piano xz il seguente insieme

$$E = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : h(1 - x/a) \leq z \leq h(1 - x^2/a^2) \quad \text{dove } h, a > 0 \text{ sono costanti}\}$$

(i) Disegnare E, e trovarne l'area.
(ii) Disegnare il solido T ottenuto facendo ruotare (di un giro completo) l'insieme E attorno all'asse z; descriverne le $z-$sezioni per ogni z, e calcolarne il volume.
(iii) Da (i) ed (ii) dedurre la $x-$coordinata del baricentro di E.
(iv) Si considera il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = (-y^4, x^6, z)$. Trovare il flusso di $\vec{F}$ attraverso D, dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$; si lascia al candidato la scelta del versore normale positivo, scelta che deve però essere precisata.
(v) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da T, e da ciascuna delle porzioni di frontiera di T.
(vi) Calcolare $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$, e la circuitazione di $\vec{F}$ sul bordo di D (la superficie di cui in (iv)), orientata coerentemente all'orientazione di D sopra scelta.

Risoluzione. (i) Chiaramente E è racchiuso tra la parabola di equazione $z = h(1 - (x/a)^2)$ e la retta di equazione $z = h(1 - x/a)$; retta e parabola si incontrano nei punti $(a, 0)$ e $(0, h)$; l'area è

$$\text{Area}(E) = \int_{x=0}^{x=a} \big(h(1 - x^2/a^2) - h(1 - x/a)\big) = \frac{h}{a}\int_{x=0}^{x=a} \left(x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{h}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right) = \frac{ha}{6}.$$

(ii) Il solido si ottiene togliendo il cono circolare retto che ha il disco di centro l'origine e raggio a nel piano xy come base, e come vertice il punto $(0, 0, h)$, al segmento di paraboloide rotondo $\{0 \leq z \leq h(1 - (x^2 + y^2/a^2))\}$. Per $0 \leq z \leq h$ le $z-$sezioni sono corone circolari:

$$T(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(1 - (z/h)) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\sqrt{1 - z/h}\};$$

se z è fuori di tale intervallo le $z-$sezioni sono vuote. Il volume è quindi

$$\text{Volume}(T) = \int_{z=0}^{z=h} \left(\pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) - \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2\right) dz = \pi a^2 \int_0^h \left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}\right) = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

Non faccio i disegni, molto facili

(iii) La $x-$coordinata del baricentro di E è la distanza del baricentro di E dall'asse di rotazione. Per il teorema di Guldino, se x_G è tale coordinata, si ha

$$\text{Volume}(T) = 2\pi x_G \,\text{Area}(E) \quad \text{da cui} \quad x_G = \frac{1}{2\pi}\frac{\text{Volume}(T)}{\text{Area}(E)} = \frac{a}{2}.$$

(iv) Chiaramente D è il disco di centro l'origine e raggio a nel piano xy; orientiamolo con il versore $-\vec{e}_3$ come normale positiva. Il flusso è

$$\int_D \vec{F}(x, y, z) \cdot (-\vec{e}_3)\, dxdy = \int_D (-z)_{z=0}\, dxdy \int_D 0\, dxdy = 0.$$

(v) Si ha $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 1$; per il teorema della divergenza, il flusso di $\vec{F}$ uscente da D è quindi pari al volume di D, e cioè a $\pi a^2 h/6$. Il flusso che esce dalla porzione di frontiera di T sul paraboloide è quindi pari a $\pi a^2 h/6 - \Phi_C$, dove Φ_C è il flusso uscente dalla porzione di frontiera di T sul cono. Il flusso totale uscente dal cono è poi uguale a $-\Phi_C$, dato che il flusso che esce dalla base D è nullo, come visto. Sempre per il teorema della divergenza, il flusso di $\vec{F}$ che esce dal cono è pari al volume del cono, e cioè a $\pi a^2 h/3$. Concludendo:

$$\text{Flusso che esce dalla porzione di frontiera sul cono} = \Phi_C = -\frac{\pi}{3}a^2 h;$$

$$\text{Flusso che esce dalla porzione di frontiera sul paraboloide} = \frac{\pi}{6}a^2 h - \Phi_C = \frac{\pi}{2}a^2 h.$$

(vi) Si ha

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -y^4 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x^6 \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & z \end{bmatrix} = \vec{e}_1(0-0) + \vec{e}_2(0-0) + \vec{e}_3(5y^5 + 4x^3) = (5y^5 + 4x^3)\,\vec{e}_3.$$

Se $\gamma(t) = a(\cos t, -\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ è una parametrizzazione del circolo bordo, percorso in verso orario, la formula di Stokes dice che si ha

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y,z) \cdot d(x,y,z) = \int_D \vec{F}(x,y,z) \cdot (-\vec{e}_3)\, dxdy = -\int_D (5y^5 + 4x^3)\, dxdy = 0,$$

grazie alla simmetria del dominio rispetto a $(0,0)$ ed al fatto che l'integranda è dispari. □

Esercizio 31. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = f(t,y), \quad , y(0) = y_0 \qquad \text{dove} \quad f(t,y) = t(y^2 - 1)\arctan y.$$

(i) Determinare il dominio naturale di $f(t,y)$, e dire se il problema precedente verifica le ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale, o almeno locale.
(ii) Trovare gli $y_0 \in \mathbb{R}$ per i quali il problema ha soluzione costante.
(iii) Disegnare le zone del piano (t,y) in cui le soluzioni sono crescenti e quelle in cui sono decrescenti.
(iv) Basta studiare le soluzioni per $y_0 \geq 0$, perché?

D'ora in poi $y_0 \geq 0$, e $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ è la soluzione massimale del problema di Cauchy assegnato.

(v) Mostrare che $\alpha = -\beta$ e che φ è pari (suggerimento: considerare $\psi :] - \beta, -\alpha[\to \mathbb{R}$ data da $\psi(t) = \varphi(-t) \ldots$).
(vi) È vero che per $y_0 > 0$ il punto $t = 0$ è di estremo assoluto per φ? discutere al variare di $y_0 > 0$.
(vii) Mostrare che se $0 < y_0 < 1$ allora $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$.
(viii) [facoltativo] Mostrare che se $y_0 > 1$ allora $\beta < \infty$, e dare una maggiorazione per β.

Risoluzione. (i) Il dominio naturale è chiaramente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ È immediato vedere che le ipotesi dei teoremi globali non sono verificate. Infatti, se $|y| \geq 1$ si ha $|\arctan y| \geq \pi/4$ e si ha allora

$$|f(t,y)| = |t||y^2 - 1||\arctan y| \geq \frac{\pi}{4}|t|(|y|^2 - 1),$$

con crescita chiaramente di tipo quadratico in $|y|$ (e quindi $\lim_{y \to \pm\infty} |f(t,y)|/(a|y|+b) = +\infty$, qualunque siano $a, b > 0$, se $t \neq 0$). A maggior ragione non può essere soddisfatta l'ipotesi di lipschitzianità globale, che come sappiamo implica la crescita sublineare, ed in ogni caso

$$|\partial_y f(t,y)| = |2ty \arctan y + t(y^2 - 1)/(y^2 + 1)| \geq |t|(|y||\arctan y| - |y^2 - 1|/(y^2 + 1)) \to +\infty$$

se $|y| \to +\infty$ e $t \neq 0$. Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, in particolare f è C^1, e quindi localmente lipschitziana, e le ipotesi del teorema locale sono verificate.

(ii) Chiaramente sono gli $y_0 \in \mathbb{R}$ tali che si abbia $f(t, y_0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e cioè $y_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$.

(iii) I segni della funzione $f(t,y)$ si determinano facilmente e sono come in figura.

(iv) È immediato mostrare che se φ è soluzione allora anche $\psi = -\varphi$ è soluzione:

$$\psi'(t) = t((\psi(t))^2 - 1)\arctan \psi(t) \iff (-\varphi'(t)) = t((-\varphi(t))^2 - 1)\arctan(-\varphi(t)) \iff$$
$$\varphi'(t) = t((\varphi(t))^2 - 1)\arctan \varphi(t),$$

vera perchè φ è soluzione.

(v) Mostriamo che la simmetrizzata $\psi :] - \beta, -\alpha[\to \mathbb{R}$ è ancora soluzione; dato che essa verifica la stessa condizione iniziale, $\psi(0) = y_0$, per unicità e massimalità si ha allora $\psi = \varphi$, e $] - \beta, -\alpha[=]\alpha, \beta[$.

$$\psi'(t) = t((\psi(t))^2 - 1)\arctan \psi(t) \iff -\varphi'(-t) = t((\varphi(-t))^2 - 1)\arctan \varphi(-t) \iff$$
$$\varphi'(-t) = (-t)((\varphi(-t))^2 - 1)\arctan \varphi(-t),$$

quest'ultima valendo per ogni $-t \in]\alpha, \beta[$ e quindi per ogni $t \in] - \beta, -\alpha[$.

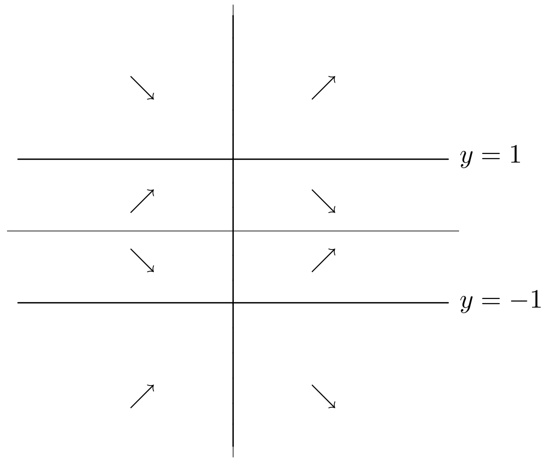


FIGURA 10. Monotonìa delle soluzioni.

(vi) Per unicità, le soluzioni non costanti non assumono mai i valori $0, 1$ delle soluzioni costanti; ne segue che se $0 < y_0 = \varphi(0) < 1$ allora si ha $0 < \varphi(t) < 1$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$, mentre se $y_0 = \varphi(0) > 1$ allora $\varphi(t) > 1$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$. Date le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni prima disegnate, si ha subito:

- Se $0 < y_0 < 1$ allora φ è strettamente crescente in $]\alpha, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, \beta[$; 0 è di massimo assoluto per φ.
- Se $y_0 > 1$, allora φ è strettamente decrescente in $]\alpha, 0]$ e strettamente crescente in $[0, \beta[$; 0 è di minimo assoluto per φ.

Naturalmente, se $y_0 = 0$ oppure $y_0 = 1$, allora la soluzione è costante e 0 è ad u n tempo di minimo e massimo assoluto per φ. □

(vii) Come sopra osservato, se $0 < y_0 < 1$ si ha $0 < \varphi(t) < 1$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$. Questo, ed il teorema sulla "fuga dai compatti" implicano subito che si ha $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$ (se fosse $\beta < \infty$ il punto $(t, \varphi(t))$ sarenne contenuto nel compatto $[0, \beta] \times [0, 1]$, per ogni $t \in [0, \beta[$).

(viii) Se $y_0 = \varphi(0) > 1$, come sopra osservato φ è strettamente crescente in $[0, \beta[$ e quindi $\varphi(t) > y_0 > 1$ se $t > 0$; separando le variabili si ha

$$\frac{\varphi'(t)}{((\varphi(t))^2 - 1) \arctan \varphi(t)} = t \quad \text{integrando fra 0 e } t \quad \int_0^t \frac{\varphi'(\theta)}{((\varphi(\theta))^2 - 1) \arctan \varphi(\theta)}\, d\theta = \frac{t^2}{2};$$

posto $\eta = \varphi(\theta)$ si ha, se $y = \varphi(t)$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{(\eta^2 - 1) \arctan \eta} = \frac{t^2}{2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\beta^2}{2} = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 - 1) \arctan \eta}.$$

l'integrale a secondo membro esiste finito dato che l'integrando è asintotico a $(2/\pi)1/y^2$ per $y \to +\infty$. Una stima grossolana, usando $\arctan \eta > \arctan y_0$ porge

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 - 1) \arctan \eta} < \frac{1}{\arctan y_0} \int_{y_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{\arctan y_0} [-\operatorname{settcotanh} \eta]_{\eta=y_0}^{\eta=+\infty} = \frac{\operatorname{settcotanh} y_0}{\arctan y_0} = \frac{1}{\arctan y_0} \log \sqrt{\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}}.$$

ESERCIZIO 32. È dato il sistema differenziale:

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= x - 5y \\ \dot{y} &= 2x - y \end{cases}$$

(i) Trovare un integrale primo per il sistema. Sapreste dire quali curve sono le traiettorie del sistema?
(ii) Determinare l'integrale generale del sistema (S), in forma reale.

(iii) Trovare l'integrale generale del sistema

$$\text{(SS)} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= x - 5y \\ \dot{y} &= 2x - y \\ \dot{z} &= \qquad\quad - z + e^{-t} \end{cases}$$

Risoluzione. (i) Se la forma $-(2x-y)\,dx+(x-5y)\,dy$ ammette una primitiva , tale primitiva è un integrale primo del sistema (S). La forma è chiusa, e quindi esatta perché definita su $\mathbb{R}^2$. Una primitiva deve essere della forma $F(x,y) = -x^2+xy+\phi(y)$, con $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Derivando rispetto ad y si ottiene $x+\phi'(y) = x-5y$, da cui $\phi(y) = -5y^2/2$, a meno di costanti additive. Si è trovato che $F(x,y) = -x^2 + xy - 5y^2/2$ è un integrale primo del sistema (S). Cambiandogli il segno, esso resta un integrale primo; la forma quadratica $G(x,y) = x^2 - xy + 5y^2/2$ è definita positiva (il determinante è $5/2 - 1/4 > 0$), e le curve di livello $G(x,y) = c$ sono, per $c > 0$, delle ellissi.

(ii) La matrice del sistema (S) è $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $\zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 9$, con radici $\pm 3i$. Cerchiamo un autovettore (x,y) associato all'autovalore $3i$:

$$\begin{cases} (3i-1)x + 5y &= 0 \\ -2x + (3i+1)y &= 0 \end{cases} \quad \text{dalla seconda} \quad x = \frac{3i+1}{2}\,y,$$

ed un autovettore è quindi $(3i+1, 2)$. Una soluzione è quindi

$$\begin{aligned} &(1+3i,2)e^{3it} = (1+3i,2)(\cos(3t) + i\sin(3t)) = \\ &(\cos(3t) - 3\sin(3t) + i(3\cos(3t) + \sin(3t), 2\cos(3t) + i2\sin(3t)) = \\ &(\cos(3t) - 3\sin(3t), 2\cos(3t)) + i(3\cos(3t) + \sin(3t), 2\sin(3t)); \end{aligned}$$

L'integrale generale in forma reale è cioè:

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) =& c_1(\cos(3t) - 3\sin(3t), 2\cos(3t)) + c_2(3\cos(3t) + \sin(3t), 2\sin(3t)) = \\ & \begin{bmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) & 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iii) Si vede subito che per la matrice del sistema (SS) si ha l'autovalore -1 con autovettore associato $(0,0,1)$; una soluzione è quindi $(0,0,e^{-t})$. È immediato l'integrale generale dell'omogenea associata, che ha come matrice risolvente

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) & 3\cos(3t) + \sin(3t) & 0 \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

un integrale particolare si trova subito, osservando che la terza equazione è slegata dalle altre: da $\dot{z} + z = e^{-t}$ moltiplicando ambo i membri per e^t si trova $\dot{z}e^t + ze^t = 1$, e cioè $D(z(t)e^t) = 1$, equivalente a $z(t)e^t = t + c$ e quindi a $z(t) = ce^{-t} + te^{-t}$. Un integrale particolare del sistema (quello nullo per $t = 0$) è quindi $(0,0,te^{-t})$; l'integrale generale è quindi

$$\begin{bmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) & 3\cos(3t) + \sin(3t) & 0 \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-t} \end{bmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

□

Matematica 4F per Fisica e Astronomia– Recupero–5 settembre 2006

Esercizio 33. Sul formulario è scritto che se $x, y \in \mathbb{R}$ allora si ha

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Dimostrare tale formula. Dire poi per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $\cos z \in \mathbb{R}$ e per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $\cos z \in [-1,1]$ (per definizione, $[-1,1]$ è il segmento di estremi $-1, 1$, cioè $[-1,1] = \{w \in \mathbb{C} : w \in \mathbb{R}, -1 \le w \le 1\}$).

Risoluzione. La formula di addizione vale anche se l'argomento del coseno è complesso. Questo è stato asserito, ed è stato detto che la verifica si può fare con le formule di Eulero:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} - \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} =$$

$$\frac{1}{4}(e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)})=$$
$$\frac{1}{4}(2e^{i(\alpha+\beta)}+2e^{-i(\alpha+\beta)})=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{2}=\cos(\alpha+\beta).$$

Quindi

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy);$$

ma sappiamo che

$$\cos(iy)=\cosh y;\quad \sin(iy)=i\sinh y,$$

come è immediato vedere dalle formule di Eulero; abbiamo concluso.

Da tale formula si ha subito che $\cos z$ è reale se e solo se $\sin x\sinh y=0$, con x,y reali; questo accade se $y=0$ (e cioè se $z=x$ è reale), oppure se $\sin x=0$, cioè sulle rette $\operatorname{Re} z=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Infine: perché sia $\cos z\in[-1,1]$ anzitutto $\cos z$ deve essere reale. Se $z\in\mathbb{R}$, sappiamo che $\cos z\in[-1,1]$; se z non è reale, deve essere $z=k\pi+it$, come visto sopra, se si vuole $\cos z\in\mathbb{R}$. ma allora si ha $\cos z=\cos(k\pi)\cosh t=(-1)^k\cosh t$; se $t\neq 0$, certamente si ha $\cosh t>1$ e quindi $|\cos z|=\cosh t>1$. Ne segue: si ha $\cos z\in[-1,1]$ se e solo se $z\in\mathbb{R}$.

□

Esercizio 34. Si considera il solido

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,x^2+y^2+z^2\le a^2,\,x^2+y^2\ge b^2\}\quad 0<b<a,\ a,b\text{ costanti}$$

(i) Descrivere a parole E; è vero che E è solido di rotazione? in caso affermativo, ottenuto facendo ruotare quale figura intorno a quale asse?
(ii) Descrivere le $z-$sezioni di E e trovarne l'area. Trovare il volume di E, in funzione della massima quota h dei punti di E (semialtezza di E).
(iii) Calcolare l'integrale
$$\int_E z^2\,dxdydz.$$
(iv) Trovare un insieme $T=\{(\rho,\varphi,\zeta):\ldots\ldots\}$ trasformato in E mediante un quasi-diffeomorfismo dalla trasformazione delle coordinate cilindriche $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=\zeta$, e servirsene per calcolare
$$\int_E x^2\,dxdydz$$

Risoluzione. (i) È una palla di raggio a a cui è stato sottratto un cilindro illimitato di raggio $b<a$. È evidente che E è ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il segmento di cerchio S di centro l'origine e raggio a formato dai punti che distano non meno di b dall'asse di rotazione. (ii) Le $z-$sezioni sono facili: sono vuote se $|z|>h=\sqrt{a^2-b^2}$, mentre se $|z|\le h$ si ha

$$E(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,b^2\le x^2+y^2;\,x^2+y^2\le a^2-z^2\},$$

e sono quindi corone circolari di raggio interno b e raggio esterno $\sqrt{a^2-z^2}$, con area $\lambda_2(E(z))=\pi(a^2-z^2-b^2)=\pi(h^2-z^2)$. Il volume è pertanto

$$\text{volume}(E)=\int_{-h}^{h}\pi(h^2-z^2)\,dz=2\pi\,h^3-\frac{2}{3}\pi\,h^3=\frac{4}{3}\pi h^3.$$

(iii) L'integrale è pure facile, integrando per "fette":

$$\int_E z^2\,dxdydz=\int_{z=-h}^{z=h}z^2\pi(h^2-z^2)\,dz=2\pi\frac{h^3}{3}h^2-2\pi\frac{h^5}{5}=\frac{4}{15}\pi\,h^5.$$

(iv) Si ha $T=\{(\rho,\varphi,\zeta):\varphi\in[0,2\pi],\,b^2\le\rho^2,\ \rho^2+\zeta^2\le a^2\}$ (si fa variare φ in un intervallo di lunghezza 2π in modo da avere un diffeomorfismo a meno di un insieme di misura nulla). L'integrale diventa

$$\int_E x^2\,dxdydz=\int_T\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\,d\rho d\varphi d\zeta;$$

usando ora la formula di riduzione

$$\int_T\rho^3\cos^2\varphi\,d\rho d\varphi d\zeta=\int_S\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\rho^3\,d\rho d\zeta,$$

dove $S = \{(\rho,\zeta) : b \le \rho,\ \rho^2+\zeta^2 \le a^2\}$ è il segmento di cerchio la cui rotazione genera E. Essendo $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi$ rimane

$$\pi \int_S \rho^3\, d\rho d\zeta = \pi \int_{\zeta=-h}^{\zeta=h} \left(\int_{\rho=b}^{\rho=\sqrt{a^2-\zeta^2}} \rho^3\, d\rho \right) d\zeta = \frac{\pi}{4} \int_{-h}^{h} ((a^2-\zeta^2)^2 - b^4)\, d\zeta,$$

che coincide con

$$\frac{\pi}{2} \int_0^h (a^4 - b^4 - 2a^2\zeta^2 + \zeta^4)\, d\zeta = \frac{\pi}{2} \left(h^3(a^2+b^2) - \frac{2}{3}a^2h^3 + \frac{h^5}{5} \right).$$

□

Esercizio 35. È dato il campo vettoriale:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus Z \to \mathbb{R}^3 \quad \text{definito da} \quad \vec{F}(x,y,z) = \frac{(px+qy, x+y, 0)}{x^2+y^2} \quad p, q \text{ costanti reali}, Z\text{=asse zeta.}$$

(i) Calcolare il rotore $\nabla \times \vec{F}(x,y,z)$ di $\vec{F}$ (ci si può servire della formula $\nabla \times (u\vec{G}) = \nabla u \times \vec{G} + u\, \nabla \times \vec{G}$, valida per ogni campo scalare u di classe C^1), e dire per quali valori delle costanti p, sq il campo è irrotazionale.

(ii) Il solido E di cui all'esercizio 2 ha la frontiera costituita da due porzioni; diciamo S quella sulla sfera, orientata con il versore normale esterno alla sfera. Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ sul bordo di tale superficie, orientato coerentemente alla superficie stessa, descrivendo prima con cura tale bordo.

(iii) Per quali valori di p, q è $\vec{F}$ conservativo?

Risoluzione. (i) Scriviamo $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(ax+by, cx+dy, 0)$, prendendo $u(x,y,z) = 1/(x^2+y^2)$ e $G(x,y,z) = (px+qy, x+y, 0)$. Si ha allora

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \frac{(-2x, -2y, 0)}{(x^2+y^2)^2} \times (px+qy, x+y, 0) + \frac{1}{x^2+y^2}(\partial_1(x+y) - \partial_2(px+qy))\vec{e}_3,$$

cioè

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-2(x(x+y) - y(px+qy))}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1-q}{x^2+y^2} \right) \vec{e}_3$$

e semplificando

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(-(1+q)\,x^2 + (1+q)\,y^2 + 2(p-1)\,xy)\vec{e}_3.$$

Perché $\vec{F}$ sia irrotazionale si deve avere

$$-(1+q)\,x^2 + (1+q)\,y^2 + 2(p-1)\,xy = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{\smallsetminus}\{(0,0)\};$$

prendendo $y=0$ si deve avere $-(1+q)x^2 = 0$, e quindi $q=-1$; se $q=-1$ si ottiene $2(p-1)xy = 0$, e quindi $p=1$. Il campo è irrotazionale se e solo se $p=1$ e $q=-1$, quindi

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x-y, x+y, 0)}{x^2+y^2} \quad \text{è irrotazionale.}$$

(ii) Il bordo consta dei due circoli alle quote $z = \pm h = \pm\sqrt{a^2-b^2}$; bisogna determinare l'orientazione coerente. Avendo noi fatto la teoria di questo solo con parametrizzazioni, cerchiamo una parametrizzazione del segmento sferico in cui la normale positiva sia quella esterna; sappiamo che una è quella delle coordinate sferiche, prendendo come prima coordinata la colatitudine e seconda la longitudine:

$$x = a\sin\vartheta\, \cos\varphi;\ y = a\sin\vartheta\, \sin\varphi;\ z = a\cos\vartheta, \qquad (\vartheta,\varphi) \in R = [\arccos(h/a), \arccos(-h/a)] \times \in [0, 2\pi];$$

Il bordo che ci interessa è ottenuto tenendo fisso ϑ, colatitudine, e facendo variare $\varphi \in [0,2\pi]$ (tenendo fisso φ e facendo variare ϑ si ottengono due archi di meridiano opposti l'uno dell'altro, che si cancellano a vicenda). Tenendo $\vartheta = \arccos(h/a)$ si ottiene il cerchio superiore:

$$x = b\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi,\ z = h,$$

dove però il segmento $\{\arccos(h/a)\} \times [0,2\pi]$ va percorso dall'alto in basso, essendo il lato sinistro del rettangolo R. Quindi tale cerchio va percorso in verso orario se visto dall'alto, in altre parole, è l'opposto del cerchio appena scritto. Similmente, il cerchio inferiore $(b\cos\varphi, b\sin\varphi, -h)$ va percorso invece nel verso antiorario se visto dall'alto. Poichè il campo $\vec{F}$ dipende solo dalle variabili x, y, le sue circuitazioni sui due circoli che formano il bordo della superficie considerata saranno opposte (trattandosi di circoli paralleli al piano xy percorsi in versi opposti), e quindi la circuitazione totale sul bordo della superficie sarà nulla.

(iii) $\mathbb{R}^3 \smallsetminus Z$ non è semplicemente connesso e quindi l'irrotazionalità di $\vec{F}$, pur necessaria, non è sufficiente ad assicurarne la conservatività. Calcoliamo la circuitazione di $\vec{F}$ su un circolo che allaccia l'asse Z, ad esempio quello superiore del bordo prima considerato: $(b\cos\varphi, b\sin\varphi, h)$, con $\varphi \in [0, 2\pi]$. Si trova

$$\int_0^{2\pi} \frac{b(\cos\varphi - \sin\varphi)(-b\sin\varphi) + b(\cos\varphi + \sin\varphi)b\cos\varphi}{b^2}\, d\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi = 2\pi.$$

Non esistono quindi valori p, q per cui il campo sia conservativo. $\square$

Esercizio 36. (i) Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$u'(t) = 1 + (u(t))^2, \quad u(0) = 0.$$

(ii) Spiegare come si risolve il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(t)x - b(t)y \\ \dot{y} &= b(t)x + a(t)y \end{cases},$$

ricorrendo al campo complesso ($a, b \in C(I, \mathbb{R})$, dove I è intervallo di $\mathbb{R}$).

(iii) Si considera ora il sistema differenziale

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= z\,x - y \\ \dot{y} &= x + z\,y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 \end{cases};$$

trovarne le soluzioni costanti, e dimostrare che $V(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ è un integrale primo di (S).

(iv) Determinare esplicitamente la soluzione massimale di (S) con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Tale soluzione è limitata?

Risoluzione. (i) Separando le variabili ed integrando fra 0 e t:

$$\frac{u'(t)}{1 + (u(t))^2} = 1,\ u(0) = 0 \iff \arctan u(t) - \arctan 0 = t \iff u(t) = \tan t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si considera la variabile dipendente complessa $w(t) = x(t) + i\,y(t)$; moltiplicando per i la seconda equazione ed aggiungendola alla prima si ottiene

$$\dot{x} + i\dot{y} = (a(t)x - b(t)y) + i\,(b(t)x + a(t)y = (a(t) + i\,b(t))(x + iy),$$

cioè, posto $c(t) = a(t) + i\,b(t)$:

$$\dot{w} = c(t)\,w,$$

equazione lineare omogenea, la cui soluzione che vale $w_0 = x_0 + i\,y_0$ in $t_0 \in I$ è data da

$$w(t) = w_0 \exp\left(\int_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta\right),$$

le cui parti reale ed immaginaria sono rispettivamente le soluzioni $x(t)$, $y(t)$ con $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

(iii) Dovendo essere per la terza equazione $x^2 + y^2 = 0$, ogni soluzione costante ha $x = y = 0$; ed in tale condizione anche le prime due sono verificate. Soluzioni costanti sono quindi tutti i punti dell'asse z, $(0, 0, c)$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

La funzione V è integrale primo se e solo se si ha

$$(z\,x - y, x + z\,y, x^2 + y^2) \cdot \nabla V(x, y, z) = 0 \iff (z\,x - y)(2x) + (x + z\,y)(2y) + (x^2 + y^2)(-2z) = 0.$$

Si ha

$$(z\,x - y)(2x) + (x + z\,y)(2y) + (x^2 + y^2)(-2z) = 2(z\,x^2 - xy + xy + z\,y^2 - x^2 z - y^2 z) = 0,$$

e quindi V è integrale primo.

(iv) La soluzione massimale $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in]\alpha, \beta[$, verifica

$$V(x(t), y(t), z(t)) = V(1, 0, 0) = 1 \iff (x(t))^2 + (y(t))^2 - (z(t))^2 = 1 \qquad \text{per ogni } t \in]\alpha, \beta[;$$

l'ultima equazione diventa quindi

$$\dot z(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2 = 1 + (z(t))^2,$$

che con la condizione iniziale $z(0) = 0$ è esattamente il problema di Cauchy sopra risolto, con soluzione $z(t) = \arctan t$, $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Le prime due equazione diventano:

$$\begin{cases} \dot x &= \tan t\, x - y \\ \dot y &= x + \tan t\, y \end{cases}, \ x(0) = 1,\ y(0) = 0,$$

esattamente il sistema di (ii), con $a(t) = \tan t$ e $b(t) = 1$, che come visto ha per soluzione (in forma complessa; $w_0 = 1$)

$$w(t) = \exp\left(\int_0^t (\tan\theta + i)\, d\theta\right) = \exp\left(-\log\cos t + it\right) = \frac{e^{it}}{\cos t} = 1 + i\tan t \quad t \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

La soluzione massimale richiesta è quindi

$$t \mapsto (1, \tan t, \tan t) \qquad t \in]-\pi/2, \pi/2[$$

(la cui traiettoria è una retta del piano parallelo al piano yz, passante per $(1, 0, 0)$).

□

Matematica 4F per Fisica e Astronomia–II Recupero–15 settembre 2006

Esercizio 37. (i) Definire il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Si vede facilmente (accettarlo) che le serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right) z^n,$$

hanno entrambe raggio di convergenza 1.

(ii) È vero che il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) z^n$$

è ancora 1?

(iii) Calcolare la somma della serie di cui in (ii).

Risoluzione. (i) Si rinvia al testo. (ii) Dato che il raggio è lo stesso, non è immediatamente deducibile che il raggio di convergenza sia 1; siamo soltanto certi che dev'essere ≥ 1. Tuttavia, se $|z| \geq 1$ si vede subito che la serie non converge dato che il termine generale tende all'infinito:

$$|n + (1-(-1)^n)/2|\,|z|^n \geq (n - |1-(-1)^n|/2)|z|^n \geq (n - 1/2)|z|^n,$$

quantità che se $|z| \geq 1$ chiaramente diverge a $+\infty$.

(iii) Se $|z| < 1$ entrambe le serie convergono per cui si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(z^n - (-1)^n) z^n);$$

per la prima serie si ha, osservando che la serie di termine generale nz^{n-1} è la serie derivata di quella con termine generale z^n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z}{(1-z)^2};$$

invece le altre serie sono geometriche e presto sommate:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z^n - (-1)^n) z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1+z} = \frac{2z}{1-z^2}.$$

Concludendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) z^n = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{z + z^2 + z - z^2}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{2z}{(1-z)^2(1+z)}.$$

□

Esercizio 38. Sia E il solido racchiuso tra il piano xy e le superficie di equazione $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$, contenuto nel semispazio $z \geq 0$.

(i) Descrivere a parole il solido E e disegnarlo.
(ii) Trovare il volume di E (si suggerisce l'uso delle coordinate cilindriche).
(iii) Diciamo D la porzione di frontiera di E sul piano xy, S quella sulla superficie di equazione $x^2 + y^2 = z^2$, T quella sulla superficie di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Trovare il flusso del campo $\vec{G}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ uscente da D, S, T.
(iv) Calcolare le aree di D, S.
(v) Calcolare l'area di T.

Risoluzione. (i) La superficie di equazione $z^2 = x^2 + y^2$ è, come ben noto, un cono (a due falde; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la falda superiore, superficie ottenuta facendo ruotare la semiretta $z = x$, $x \geq 0$, del piano xz attorno all'asse z)/ la superficie $x^2 + y^2 - 2y = 0$ è un cilindro con asse parallelo all'asse z: nel piano xy, l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

rappresenta il circolo di centro $(0, 1)$ e raggio 1; mancando la coordinata z i punti (x, y, z) verificano l'equazione se e solo se (x, y) verifica l'equazione del circolo. La superficie è quindi il cilindro di raggio 1 che ha per asse la retta $\{(0, 1, z) : z \in \mathbb{R}\}$. L'intersezione si disegna ora facilmente.

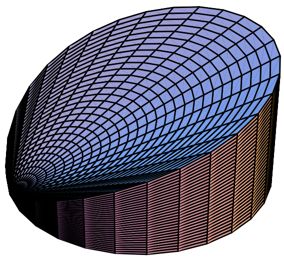


Figura 11. L'insieme E, visto dal punto di coordinate $(3, -1, 2)$.

(ii) Il volume di E può essere trovato anche senza aver pienamente compreso come è fatto E: un insieme $F = \{(r, \vartheta, \zeta) : \dots\dots\}$ che si trasforma in E è dato dalle disuguaglianze:

$$r^2 \geq \zeta^2, \quad r^2 - 2r \sin\vartheta \leq 0,\ \zeta \geq 0,$$

e semplificando, tenendo conto del fatto che deve essere $r \geq 0$ si trova

$$r \geq \zeta;\ r \leq 2\sin\vartheta,\ \zeta \geq 0;$$

sempre dato che $r \geq 0$, deve essere $\sin\vartheta \geq 0$, e questo implica $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Concludendo

$$F = \{(r, \vartheta, \zeta) :\ 0 \leq r \leq 2\sin\vartheta,\ 0 \leq \zeta \leq r,\ \vartheta \in [0, \pi]\}.$$

Si ha allora subito

$$\text{Volume}(E) = \int_E dxdydz = \int_F r\, drd\vartheta d\zeta;$$

applichiamo la formula di riduzione all'ultimo integrale:

$$\int_F r\, drd\vartheta d\zeta = \int_A \left(\int_{\zeta=0}^{\zeta=r} r\, d\zeta\right) drd\vartheta = \int_A r^2\, drd\vartheta,$$

dove $A = \{(r, \vartheta) :\ 0 \leq r \leq 2\sin\vartheta,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$, da cui, applicando ancora la formula di riduzione

$$\int_A r^2\, drd\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \left(\int_{r=0}^{r=2\sin\vartheta} r^2\, dr\right) d\vartheta = \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin\vartheta(1 - \cos^2\vartheta)\, d\vartheta =$$
$$\frac{8}{3}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta - \frac{8}{3}\int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{16}{3} + \frac{8}{9}[\cos^3\vartheta]_0^\pi = \frac{16}{3} - \frac{16}{9} = \frac{32}{9}.$$

(iii) Il flusso globalmente uscente da E è nullo, dato che il campo ha divergenza nulla. Inoltre il flusso attraverso D è nullo, dato che D giace su piano xy e la sua normale $-\vec{e}_3$ è ortogonale al campo $\vec{G}$. Il campo è anche tangente al cono, che è superficie di rotazione attorno all'asse z, e quindi anche il flusso uscente da S è nullo; ne segue che anche il flusso uscente da T è nullo.

(iv) L'area di D, cerchio di raggio 1, è ovviamente π. L'area di S è data da (S ha parametrizzazione cartesiana $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, con $(x, y) \in D$)

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \int_D \sqrt{2}\, dxdy = \pi\sqrt{2}.$$

(v) Parametrizziamo T in coordinate cilindriche: $r = 2\sin\vartheta$, visto che siamo sul cilindro, e $z = \zeta \le r$; una parametrizzazione è

$$x = r\cos\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta (= \sin(2\vartheta); \quad y = r\sin\vartheta = 2\sin^2\vartheta; z = \zeta \qquad (\vartheta, \zeta) \in P,$$

dove $P = \{(\vartheta, \zeta) : 0 \le \zeta \le 2\sin\vartheta,\ \vartheta \in [0, \pi]\}$, trapezoide della funzione $2\sin\vartheta$ al di sopra dell'intervallo $[0, \pi]$. La matrice jacobiana di tale parametrizzazione è

$$\begin{bmatrix} 2\cos(2\vartheta) & 0 \\ 2\sin(2\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con corrispondente elemento d'area $\sqrt{4\cos^2(2\vartheta) + 4\sin^2(2\vartheta)}\, d\vartheta d\zeta = 2\, d\vartheta d\zeta$.

Per l'area si ha allora

$$\text{Area}(T) = \int_P \sqrt{5}\, d\vartheta d\zeta = 2\text{Area}(P) = 8,$$

dato che facilmente si ha

$$\text{Area}(P) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \left(\int_{\zeta=0}^{\zeta=2\sin\vartheta} d\zeta \right) d\vartheta = 2\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = 4.$$

□

Esercizio 39. È dato il campo vettoriale:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{definito da} \quad \vec{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$$

(i) Dire se il campo è irrotazionale e se è conservativo, trovandone una primitiva in caso affermativo.
(ii) Trovare una risolvente per il sistema differenziale

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y \end{cases}$$

(iii) Trovare tutte le soluzioni $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ di (S) tali che $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ esiste finito.

Risoluzione. (i) Si ha per il rotore

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & y + z \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x + z \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & x + y \end{bmatrix} = \vec{e}_1(0 - 0) + \vec{e}_2(0 - 0) + \vec{e}_3(0 - 0) = 0.$$

Il campo è irrotazionale e quindi conservativo, dato che $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso. Per trovare una primitiva integriamo anzitutto la prima componente rispetto ad x ottenendo $xy + xz$; una primitiva si deve poter ottenere aggiungendo a questa funzione un'opportuna funzione con derivata parziale rispetto ad x nulla, e cioè una funzione del tipo $\alpha(y, z)$; deve essere

$$\partial_y(xy + xz + \alpha(y, z)) = x + z; \qquad \partial_z(xy + yz + \alpha(y, z)) = x + y,$$

e cioè

$$x + \partial_y\alpha(y, z) = x + z; \qquad x + \partial_z\alpha(y, z) = x + y,$$

ovvero

$$\partial_y\alpha(y, z) = z; \qquad \partial_z\alpha(y, z) = y,$$

da cui facilmente, a meno di costanti additive, $\alpha(y, z) = yz$. Ne segue che una primitiva è

$$u(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

(ii) L'equazione caratteristica è (chiamiamo A la matrice del sistema)

$$\det(\zeta\, 1_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta & -1 & -1 \\ -1 & \zeta & -1 \\ -1 & -1 & \zeta \end{bmatrix} = \zeta(\zeta^2-1) + (-\zeta-1) - (1+\zeta) =$$
$$\zeta(\zeta+1)(\zeta-1) - 2(\zeta+1) = (\zeta+1)(\zeta^2-\zeta-2) = (\zeta+1)^2(\zeta-2).$$

Si ha quindi un autovalore doppio, -1, ed uno semplice, 2. Un autovettore associato a 2 si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + 2z &= 0 \end{cases},$$

una cui soluzione (ad esempio si sottrae la seconda alla prima, e la terza alla seconda, ottenendo $3x-3y=0$, $3y-3z=0$) è $(1,1,1)$. Per trovare un autovettore associato a -1 si considera il sistema

$$\begin{cases} -x - y - z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \end{cases},$$

equivalente ad una sola equazione, $x+y+z=0$; ci sono quindi due autovettori linearmente indipendeti associati, ad esempio $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$. Abbiamo quindi una risolvente, che è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & -e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(iii) L'integrale generale si ottiene facendo combinazioni lineari delle colonne; cioè, ogni soluzione si scrive, in modo unico, come

$$\varphi(t) = (c_1e^{2t} + c_2e^{-t}, c_1e^{2t} - c_2e^{-t} + c_3e^{-t}, c_1e^{2t} - c_3e^{-t});$$

se $c_1 = 0$ chiaramente si ha $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = (0,0,0)$; se $c_1 \neq 0$, le tre componenti tendono all'infinito ($\pm\infty$, a seconda del segno di c_1). Le soluzioni cercate sono quindi

$$\varphi(t) = (c_2e^{-t}, -c_2e^{-t} + c_3e^{-t}, -c_3e^{-t}) \qquad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 40. Si considera il sistema differenziale:

(Diff) $$\begin{cases} \dot{x} &= 2y\,(y^2 - x^4) \\ \dot{y} &= -4x^3(y^2 - x^4) \end{cases}$$

(i) Dire se il sistema verifica le ipotesi di qualche teorema di esistenza locale o globale per il problema di Cauchy.
(ii) Trovare le soluzioni costanti di (Diff).
(iii) Trovare un integrale primo per il sistema, e provare che le sue soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
(iv) Disegnare qualche traiettoria del sistema, con anche il verso di percorrenza.
(v) Dimostrare che tutte le soluzioni del sistema hanno limite finito per $t \to \pm\infty$.

Risoluzione. (i) Le funzioni a secondo membro di questo sistema autonomo sono polinomi, quindi funzioni C^∞, e le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale sono ovviamente verificate. Poichè sono polinomi di grado 5 e 7, rispettivamente, non è verificata l'ipotesi di nessun teorema globale.

(ii) Come ben noto le soluzioni si trovano risolvendo il sistema

$$2y\,(y^2 - x^4) = 0, \ -4x^3(y^2 - x^4) = 0;$$

banalmente una soluzione è $(0,0)$; e tutti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che verificano $y^2 = x^4 \iff y = x^2$, oppure $y = -x^2$, sono soluzioni costanti. Insomma, tutti i punti delle due parabole $y = \pm x^2$ sono soluzioni costanti, e non ce ne sono altre.

(iii) Un integrale primo è un'eventuale primitiva della forma differenziale

$$4x^3(y^2 - x^4)\,dx + 2y\,(y^2 - x^4)\,dy,$$

o anche di (fattore integrante ovvio, si divide per $(y^2 - x^4)$)

$$4x^3\,dx + 2y\,dy;$$

essendo a variabili separate tale forma è esatta, con primitiva immediata $V(x,y) = y^2 + x^4$; V è un integrale primo. È evidente che tale funzione ha minimo assoluto in $(0,0)$, non ha altri punti critici, ed inoltre $\lim_{(x,y)\to\infty_2} V(x,y) = +\infty$. Ne segue che le curve di livello della funzione, $L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = c\}$, che sono non vuote quando $c \geq 0$, sono tutte compatte. Le soluzioni, essendo intrappolate nelle curve di livello, per il teorema della fuga dai compatti sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(iv) Per $c > 0$ la curva di livello L_c sopra descritta è unione delle due curve cartesiane $y = \pm\sqrt{c - x^4}$; il grafico di $x \mapsto \sqrt{c - x^4}$ è presto fatto (dominio $[-c^{1/4}, c^{1/4}]$, simmetrica con massimo per $x = 0$ di valore $\sqrt{c}$, ecc.ecc.). Le traiettorie sono gli archi di tale curva compresi tra le parabole luogo di punti di equilibrio prima trovate. Il segno di $\dot{x} = 2y\,(y^2 - x^4)$ e di $\dot{y} = -4x^3\,(y^2 - x^4)$ fornisce poi il verso di percorrenza.

(v) È chiaro che tutte le soluzioni tendono ad uno dei punti di intersezione delle parabole $y = \pm x^2$ con la curva di livello di $y^2 + x^4 = c$ su cui la soluzione sta. Facciamolo vedere per la soluzione di valore iniziale $(0, y_0)$, con $y_0 > 0$, che sta sulla curva di equazione $y^2 + x^4 = y_0^2$; essa parte nella regione $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ e per unicità ci rimane sempre. In tale regione si ha $\dot{x} = 2y(y^2 - x^4) > 0$, e quindi x è strettamente crescente; essendo $x(0) = 0$, si ha $x(t) > 0$ per $t > 0$, quindi se $t > 0$ si ha $\dot{y} = -4x^3(y^2 - x^4) < 0$, quindi y è strettamente decrescente. I limiti per $t \to +\infty$ di $x(t)$ e di $y(t)$ pertanto esistono, finiti perchè $x(t)$ ed $y(t)$ si mantengono limitate (obbediscono a $(y(t))^2 + x(t))^4 = y_0^2$). Il limite (x_∞, y_∞) deve stare sulla curva di livello ed essere un equilibrio, pertanto esso è l'intersezione con ascissa positiva di $y^2 + x^4 = y_0^2$ con $y = x^2$, e cioè $(\sqrt{y_0}/2^{1/4}, y_0/\sqrt{2})$.

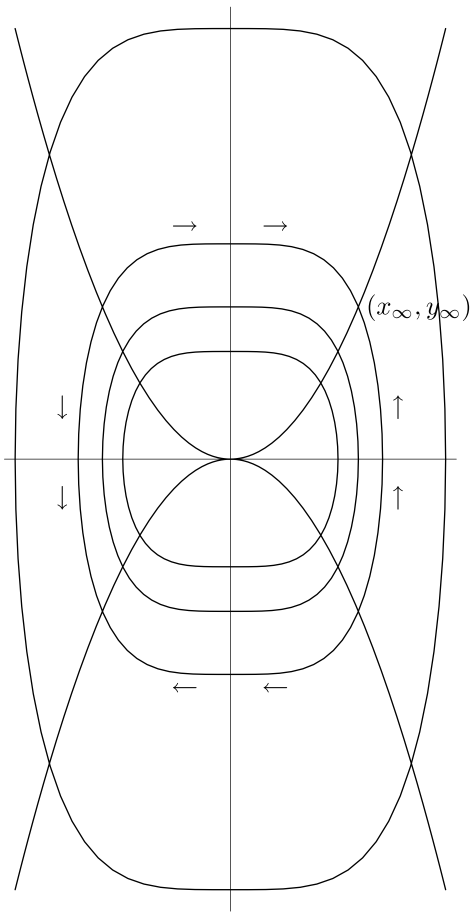


Figura 12. Traiettorie con versi di percorrenza; le due parabole sono luogo di equilibri; le traiettorie non costanti sono gli archi fra le parabole, percorsi come indicato.

□

MATEMATICA 4F–TEMI 2004–2005

Esercizio 1. Dare la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze. Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1};$$

Trovare la somma della serie derivata; trovare infine la somma della serie data per gli $z = x \in \mathbb{R}$ per cui esiste finita.

Risoluzione. Per la definizione di raggio di convergenza si vedano le dispense. Il criterio del rapporto porge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{2(n+1)+1}}{|z|^{2n+1}} \frac{2n+1}{2(n+1)+1} = |z|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n} = |z|^2;$$

la serie è assolutamente convergente se $|z|^2 < 1$, e quindi se $|z| < 1$, non convergente se $|z| > 1$; il raggio di convergenza è 1. La serie derivata è $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n$, serie geometrica di ragione z^2, che se $|z| < 1$ ha per somma $1/(1-z^2)$. Posto $z = x \in \mathbb{R}$, con $x \in]-1, 1[$, cerchiamo un primitiva di $1/(1-x^2)$; si può supporre di saper già che una primitiva è setttanh $x = \log\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, inversa della funzione tangente iperbolica tanh; in ogni caso, decomponendo $1/(1-x^2)$ in frazioni semplici si ha

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} \quad \text{da cui} \quad 1 = a(1-x) + b(1+x) \iff a = b = 1/2,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x) + k = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + k \qquad (|x| < 1).$$

Poiché la somma della serie è nulla per $x = 0$ si ha $k = 0$ e quindi

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{setttanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

□

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \sin z \right),$$

determinarne il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}^3$; calcolare poi ($a > 0$ costante):

$$\int_\alpha \vec{F}(x) \cdot dx \qquad \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, t) \quad t \in [0, 4\pi];$$

calcolare $\nabla \times \vec{F}$. Dire se $\vec{F}$ è conservativo , calcolandone una primitiva in caso affermativo.

Risoluzione. Il dominio naturale è $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ e cioè $E = \mathbb{R}^3 \setminus Z$, dove Z è l'asse z. Si ha

$$\int_\alpha \vec{F}(x) \cdot dx = \int_\alpha \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \sin z \right) \cdot d(x, y, z) = \int_\alpha \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy + \sin z\, dz \right) =$$

$$\int_0^{4\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t)\, dt + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\, dt + \sin t\, dt \right) = \int_0^{4\pi} (1 + \sin t)\, dt = 4\pi.$$

Il campo si può scrivere come somma:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2+y^2} + (0, 0, \sin z),$$

dove il primo $(-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ è il ben noto campo dell'induzione magnetica (a meno di costanti moltiplicative), irrotazionale ma non conservativo, e $(0, 0, \sin z)$ è conservativo, essendo a variabili separate (una primitiva è ad esempio $u(x,y,z) = -\cos z$). Ne segue: $\nabla \times \vec{F} = 0$, ma $\vec{F}$ non è conservativo. Chi non ricorda il campo del filo rettilineo può naturalmente fare il calcolo diretto:

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -y/(x^2+y^2) \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x/(x^2+y^2) \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & \sin z \end{bmatrix} =$$

$$\vec{e}_1(0-0) + \vec{e}_2(0-0) + \vec{e}_3\left(\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right) =$$

$$\vec{e}_3 \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Il campo è quindi irrotazionale; per vedere se è conservativo basta fare il calcolo della circuitazione su un circuito che allaccia l'asse z, ad esempio il circolo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; il calcolo è analogo a quello sopra fatto per calcolare $\int_\alpha$, ignorando la coordinata z che qui è nulla, e porge 2π; quindi il campo non è conservativo. □

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$

(i) Disegnare D e dimostrare che D è compatto.

(ii) Dopo aver enunciato il criterio del confronto, sia $f(x,y) = |y|/\sqrt{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Mostrare che f è limitata, e che f è integrabile su D.

(iii) Calcolare

$$\int_D f(x,y)\, dxdy$$

Risoluzione. (i) Si tratta dei punti del disco chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$, non interni ai dischi di centro $(\pm 1, 0)$ e raggio 1. È chiaramente chiuso (soluzioni di un sistema di disequazioni in senso lato tra funzioni continue) e limitato (contenuto in un disco). Si disegna facilmente come in figura.

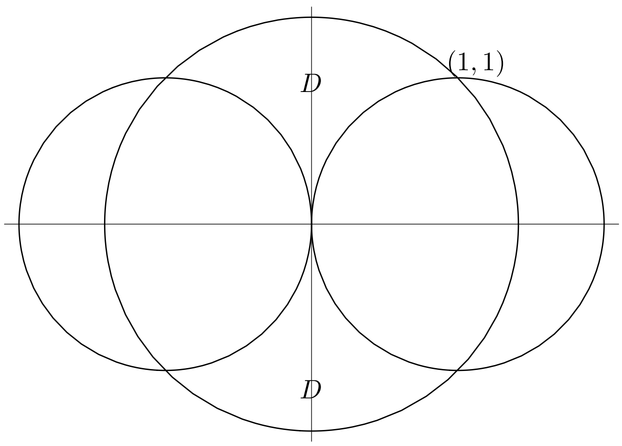


Figura 1. L'insieme D.

(ii) Per il criterio del confronto si vedano le dispense a pag. 29. È immediato mostrare che f è limitata:

$$f(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \qquad \text{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Poichè le costanti sono integrabili sui compatti per il criterio del confronto f è integrabile su D.

(iii) Per le simmetrie, se D_+ denota la parte di D nel primo quadrante si ha $\int_D f(x,y)\, dxdy = 4\int_{D_+} f(x,y)\, dxdy = 4\int_{D_+} y/\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$; usando coordinate polari si ottiene

$$\int_{D_+} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_E r \sin\vartheta\, dr d\vartheta,$$

dove

$$E = \{(r,\vartheta) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, (r\cos\vartheta - 1)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \geq 1,\ r \sin\vartheta \geq 0\};$$

la $(r\cos\vartheta - 1)^2 + r^2\sin^2\vartheta \ge 1$ equivale a $r^2 - 2r\cos\vartheta \ge 0$ e quindi ad $r \ge 2\cos\vartheta$, con $0 \le \vartheta \le \pi/2$, dovendo essere $\sin\vartheta \ge 0$ perché siamo nel primo quadrante. Ne segue $E = \{(r,\vartheta) : \vartheta \in [0,\pi/2], r \ge 2\cos\vartheta, r \le \sqrt{2}\}$. Tali disuguaglianze sono compatibili solo per $\vartheta \in [\pi/4,\pi/2]$ (il punto di coordinate polari $(\sqrt{2},\pi/4)$ è il punto $(1,1)$, intersezione nel primo quadrante dei due circoli). In definitiva $E = \{(r,\vartheta) : \vartheta \in [\pi/4,\pi/2], 2\cos\vartheta \le r \le \sqrt{2}\}$. Usando la formula di riduzione si ottiene

$$\int_E r\sin\vartheta\, drd\vartheta = \int_{\vartheta=\pi/4}^{\vartheta=\pi/2}\left(\int_{r=2\cos\vartheta}^{r=\sqrt{2}} r\,dr\right)\sin\vartheta\,d\vartheta = \int_{\vartheta=\pi/4}^{\vartheta=\pi/2}\sin\vartheta\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=2\cos\vartheta}^{r=\sqrt{2}} d\vartheta =$$
$$\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2-4\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = [-\cos\vartheta]_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{2}{3}[\cos^3\vartheta]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ne segue

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

□

Esercizio 4. Sia $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$; siano $f, g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ funzioni continue con $0 \le f(\vartheta) \le g(\vartheta)$, per ogni $\vartheta \in [\alpha,\beta]$. Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dei punti le cui coordinate polari (r,ϑ) verificano le relazioni

$$\vartheta \in [\alpha,\beta]; \qquad f(\vartheta) \le r \le g(\vartheta).$$

è vero che per l'area $\lambda_2(E)$ di E vale la formula:

$$\lambda_2(E) = \int_\alpha^\beta (g(\vartheta) - f(\vartheta))\,d\vartheta?$$

e se no, scrivere la formula corretta (fare anche un possibile disegno di E per mostrare che si è compreso il testo).

Risoluzione. La formula di cambiamento di variabili dice che si ha

$$\lambda_2(E) = \int_E dxdy = \int_D r\,drd\vartheta \qquad \text{dove} \quad D = \{(r,\vartheta) : \vartheta \in [\alpha,\beta]; \quad f(\vartheta) \le r \le g(\vartheta)\}.$$

L'insieme D è dominio normale rispetto all'asse ϑ; la formula di riduzione dice che si ha

$$\int_D r\,drd\vartheta = \int_{\vartheta=\alpha}^{\vartheta=\beta}\left(\int_{r=f(\vartheta)}^{r=g(\vartheta)} r\,dr\right)d\vartheta = \int_{\vartheta=\alpha}^{\vartheta=\beta}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=f(\vartheta)}^{r=g(\vartheta)} d\vartheta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (g^2(\vartheta) - f^2(\vartheta))\,d\vartheta;$$

la formula data per l'area era quindi errata.

□

Sempre in preparazione al compitino:

Esercizio 5. Trovare i valori di $z \in \mathbb{C}$ per cui l'equazione $\tan w = z$ ha soluzioni $w \in \mathbb{C}$. Data una di tali soluzioni, come si trovano le altre? In particolare, trovare esplicitamente le soluzioni nell'incognita w di $\tan w = ia$, al variare di $a \ge 0$ (a reale).

Risoluzione. L'equazione si scrive, con le formule di Eulero:

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z \iff e^{2iw} - 1 = iz(e^{2iw} + 1) \iff (1 - iz)e^{2iw} = 1 + iz,$$

naturalmente sotto la condizione $\cos w \ne 0$, cioè $w \notin \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$. Se $1 - iz = 0$, cioè se $z = 1/i = -i$ l'equazione non ha soluzioni; altrimenti essa equivale a $e^{2iw} = (1+iz)/(1-iz)$; se il secondo membro è nullo, cioè se $z = i$, allora l'equazione non ha soluzioni. Altrimenti essa ha per soluzioni

$$w = \frac{1}{2i}\left(\log\frac{1+iz}{1-iz} + 2k\pi i\right) = -\frac{i}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz} + k\pi,$$

dove log è il logaritmo principale. Assicuriamoci che tali soluzioni non rendano nullo $\cos w$; dovrebbe essere $e^{2iw} = -1$, e cioè $(1+iz)/(1-iz) = -1$, equivalentemente $1 + iz = -1 + iz$, impossibile. Insomma:

l'equazione $\tan w = z$ ha soluzioni $w \in \mathbb{C}$ se e solo se $z \ne \pm i$; e nota una soluzione le altre si ottengono aggiungendo $k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

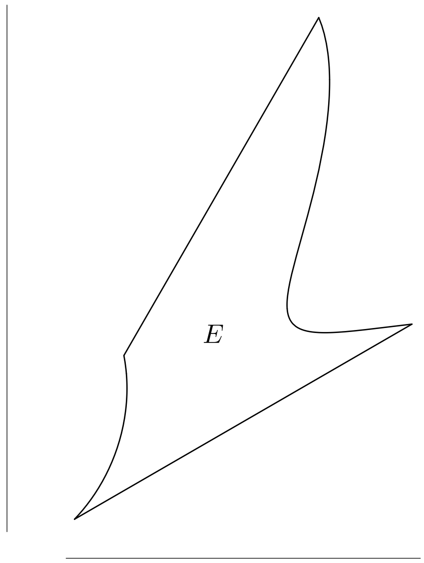


FIGURA 2. Un possibile E ...

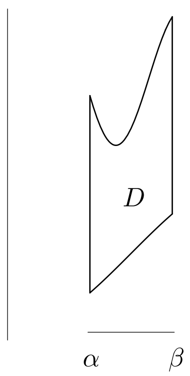


FIGURA 3. ...ed il corrispondente D.

Sostituendo ia nella formula prima trovata si ottiene:

$$w = -\frac{i}{2}\log\frac{1-a}{1+a} + k\pi;$$

se $0 \le a < 1$, queste sono parte reale ($k\pi$) ed immaginaria ($((-i/2))\log(1-a)/(1+a)$) della soluzione; se $a = 1$ non c'è soluzione, come prima visto; se $a > 1$ si ha $\log(1-a)/(1+a) = \log(a-1)/(a+1) + i\pi$, e le soluzioni sono

$$\frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{i}{2}\log\frac{a-1}{a+1}.$$

$\square$

Esercizio 6. Mostrare che la funzione $f(x, y) = e^{-sx}\sin(2xy)$ è sommabile sulla semistriscia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$, dove $s > 0$ è una costante, e calcolare

$$\int_E f(x, y)\,dxdy;$$

trovare poi anche

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

(viene $(1/4)\log(1 + 4/s^2)$)

Risoluzione. Usiamo il criterio del confronto: si ha $|f(x, y)| = e^{-sx}|\sin(2xy)| \leq e^{-sx}$; usiamo poi il teorema di Tonelli; integrando si ha

$$\int_E e^{-sx}\,dxdy = \int_{x=0}^{x=+\infty}\left(\int_{y=0}^{y=1} e^{-sx}\,dy\right)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s},$$

e quindi $g(x, y) = e^{-sx}$ è sommabile su E, e quindi anche f appartiene ad $L^1(E)$. Usiamo ora il teorema di Fubini; integrando prima in x e poi in y si ha

$$\int_E f(x, y)\,dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}\sin(2xy)\,dx\right)dy =$$

Una primitiva in x di $e^{-sx}\sin(2xy)$ è $(e^{-sx}/(s^2 + 4y^2))(-s\sin(2xy) - 2y\cos(2xy))$:

$$\int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{e^{-sx}}{s^2 + 4y^2}(-s\sin(2xy) - 2y\cos(2xy))\right]_{x=0}^{x=\infty} dy;$$

per $x \to +\infty$ il termine e^{-sx} è infinitesimo dato che $s > 0$, mentre le altre funzioni sono limitate; resta quindi solo il termine per $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{2y}{s^2 + 4y^2}\,dy = \frac{1}{4}\left[\log(s^2 + 4y^2)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log(1 + 4/s^2).$$

Integrando prima in y e poi in x si ottiene:

$$\int_E f(x, y)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}\left(\int_{y=0}^{y=1}\sin(2xy)\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-sx}\left[\frac{-\cos(2xy)}{2x}\right]_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1 - \cos(2x)}{2x}\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

Si ha quindi

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{4}\log(1 + 4/s^2).$$

□

Per trovare il volume del solido ottenuto ruotando di un angolo α attorno all'asse x la porzione dell'insieme D contenuta nel semipiano $y \geq 0$, dove D è l'insieme dell' es.3 del precompitino, si è a lezione calcolato in cordinate polari $2\int_{D_+} y\,dxdy$ (dove D_+ è la parte di D nel primo quadrante). A titolo illustrativo, svolgiamo lo stesso calcolo in coordinate cartesiane:

$$\int_{D_+} y\,dxdy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=\sqrt{1-(x-1)^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{1-(x-1)^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2 - x^2 - 1 + (x-1)^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2 - 2x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Il calcolo è assai più semplice che non in coordinate polari, in questo caso. Ma non sempre è facile decidere a priori quale metodo sarà più semplice.

Matematica 4F–Fisica–Primo compitino–6 novembre 2004

Esercizio 7. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ serie di potenze complesse; sia R_a il raggio di convergenza della prima, R_b quello della seconda.

(i) Se $R_a < R_b$ si può dire esattamente quanto vale il raggio di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n?$$
e se $R_a = R_b$ vale la stessa conclusione?

(ii) Trovare raggio di convergenza e somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((2n+1) + \frac{1}{(2n+1)!}\right)(-1)^n z^{2n}$$

Risoluzione. (i) È chiaro che il raggio di convergenza della serie somma è il minimo R_a; se $|z| < R_a$ infatti entrambe le serie convergono, e quindi così fa anche la serie somma; se invece $R_a < |z| < R_b$ allora la seconda serie converge, ma la prima non converge e quindi la serie somma non converge. Se $R_a = R_b = R$ si ha certamente $R_{a+b} \geq R$, ma può accadere che sia $R_{a+b} > R$; ad esempio data una serie qualsiasi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la serie opposta $\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)z^n$ ha lo stesso raggio di convergenza, ma la serie somma, che è identicamente nulla, ha sempre raggio di convergenza $+\infty$.

(ii) La serie si presenta come somma delle due serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n z^{2n}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n};$$
la prima ha raggio di convergenza 1, e la seconda $+\infty$, come facilmente si vede con il criterio del rapporto:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}|z|^2 = |z|^2; \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!}|z|^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$$
La serie ha quindi raggio di convergenza 1. La prima serie è la serie derivata della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} z(-z^2)^n = z\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \frac{z}{1+z^2} \qquad (|z| < 1);$$
ne segue
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n z^{2n} = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z^2}\right) = \frac{1+z^2-2z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \qquad (|z| < 1);$$
nella seconda serie si riconosce facilmente la serie del seno:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{\sin z}{z};$$
in definitiva
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((2n+1) + \frac{1}{(2n+1)!}\right)(-1)^n z^{2n} = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{\sin z}{z} \qquad (|z| < 1).$$
□

Esercizio 8. In $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si consideri il campo
$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2y^3 + y^2 + 2yx^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2x^3 - 2xy - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad \text{ed il campo} \quad \vec{B}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ sul circolo di centro l'origine e raggio 1, percorso in verso antiorario. Si dimostra (accettarlo) che $\vec{F}$ è irrotazionale. Trovare una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che il campo $\vec{F} - c\vec{B}$ sia conservativo. Trovare poi una primitiva di tale campo.

Risoluzione. Calcoliamo la circuitazione, riscrivendo prima il campo come
$$\vec{F}(x,y) = (2y(x^2+y^2) + (y^2 - x^2), -2x(x^2+y^2) - 2xy)/(x^2+y^2)^2;$$
se $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$:
$$\int_\alpha \vec{F}(x,y)\cdot d(x,y) =$$

$$\int_0^{2\pi} (2\sin t + \sin^2 t - \cos^2 t, -2\cos t - 2\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t - \sin^3 t + \sin t \cos^2 t - 2\cos^2 t - 2\cos^2 t \sin t\right) dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t - 2 + 2\sin^2 t - \sin^3 t - \cos^2 t \sin t\right) dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (-2 - \sin t)\, dt = -4\pi.$$

Sappiamo che, essendo $\vec{F} - c\vec{B}$ irrotazionale, perchè sia anche conservativo occorre e basta che la circuitazione di esso sul circolo α sia nulla; essa vale $-4\pi - 2\pi c$, quindi deve essere $c = -2$. Il campo è

$$\vec{F}(x,y) + 2\vec{B}(x,y) = \frac{(y^2 - x^2, -2xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Una primitiva rispetto ad y della seconda componente $-2xy/(x^2+y^2)^2$ è immediata, ed è $x/(x^2+y^2)$; cerchiamo quindi una primitiva del tipo

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \alpha(x),$$

con α funzione di classe C^1 incognita. Derivando in x ed imponendo l'uguaglianza con la prima componente si ottiene

$$\partial_x u(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \alpha'(x) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

da cui

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \alpha'(x) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

ne segue $\alpha'(x) = 0$. Le primitive sono quindi

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + k,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Osservazione. Più brevemente si poteva, per trovare una primitiva, osservare che il campo $\vec{F} + 2\vec{B}$ è positivamente omogeneo di grado -2, e che quindi una primitiva è data da

$$u(x,y) = \frac{1}{1-2}\left(x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{-2xy)}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{xy^2 - x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

□

Esercizio 9. Enunciare la formula di riduzione, o teorema di Fubini, per gli integrali multipli. Si consideri poi la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$. Per $a > 0$ sia $E_a = [0, +\infty[\times[a, +\infty[$. Provare che $f \in L^1(E_a)$; esprimere l'integrale $\int_{E_a} f(x,y)\, dxdy$ integrando in ambo i modi, e calcolarlo; dedurne

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Risoluzione. Per l'enunciato della formula di riduzione si rinvia alle dispense, pag. 15.

Per controllare la sommabilità usiamo il teorema di Tonelli. Integrando il modulo prima in y si ha

$$\int_{y=a}^{y=\infty} e^{-xy}|\sin x|\, dy = |\sin x| \left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_{y=a}^{y=\infty} = e^{-ax}\frac{|\sin x|}{x};$$

(tutto questo se $x > 0$; $x = 0$ è un valore solo, e non influisce sul risultato) questa funzione è maggiorata in modulo da e^{-ax} (si ricordi che $|\sin x| \le |x|$), chiaramente sommabile tra 0 e $+\infty$ (dato che $a > 0$), con integrale $1/a$. Il calcolo appena fatto, ripetuto senza il valore assoluto, mostra che si ha

$$\int_{E_a} f(x,y)\, dxdy = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\, dx,$$

integrale non elementarmente calcolabile. Nell'altro modo si ha più fortuna:

$$\int_{E_a} f(x,y)\, dxdy = \int_{y=a}^{y=\infty}\left(\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-xy}\sin x\, dx\right) dy = \int_{y=a}^{y=\infty}\left[-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}(y\sin x + \cos x)\right]_{x=0}^{x=\infty} dy =$$

(per $x \to +\infty$ la funzione e^{-xy} è infinitesima, mentre l'altro fattore si mantiene limitato; resta solo il contributo per $x = 0$, cioè:)

$$\int_a^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

Si è quindi trovato:

$$\int_{E_a} f(x,y)\,dxdy = \frac{\pi}{2} - \arctan a = \int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Osservazione. NON È VERO CHE $g(x,y) = e^{-xy}$ APPARTIENE AD $L^1(E_a)$, come molti sembrano credere: integrando si ottiene

$$\int_{x=0}^{x=\infty}\left(\int_{y=a}^{y=\infty} e^{-xy}\,dy\right)dx = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_{y=a}^{y=\infty} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = +\infty;$$

l'ultimo integrale infatti converge attorno a $+\infty$, ma per $x \to 0^+$ l'integrando è asintotico ad $1/x$ e l'integrale diverge; vicino a 0 il fattore $\sin x$ è essenziale. Naturalmente si ha $+\infty$ anche integrando nell'altro modo:

$$\int_{y=a}^{y=\infty}\left(\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-xy}\,dx\right)dy = \int_a^\infty \frac{dy}{y} = [\log y]_a^\infty = \infty.$$

□

Esercizio 10. Si consideri il solido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2;\ (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 + z^2 \ge 1\}.$$

(i) Osservare che S si può ottenere facendo ruotare di 2π attorno all'asse z un insieme E contenuto nel semipiano xz con $x \ge 0$; descrivere tale insieme E, e fare un disegno di E e un disegno di S.
(ii) Trovare il volume di S mediante il teorema di Guldino.
(iii) Descrivere la $z-$sezione di S, per ogni z nella proiezione di S sull'asse z, e ritrovare in altro modo il volume di S.

Risoluzione. (i) Le funzioni che individuano S sono funzioni solo di $\sqrt{x^2+y^2}$, distanza dall'asse z, e di z, e quindi S è di rotazione attorno a z. L' insieme piano che genera S con la sua rotazione è ovviamente l'intersezione di S con il semipiano del piano xz consistente delle $x \ge 0$; esso è

$$E = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \le 2,\ (\sqrt{x^2}-1)^2 + z^2 \ge 1,\ x \ge 0\}$$

Si ha $\sqrt{x^2} = |x| = x$ essendo $x \ge 0$; si tratta quindi dell'insieme E dei punti del primo e quarto quadrante entro il disco di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$, non interni al circolo $(x-1)^2 + z^2 = 1$ di centro $(1,0)$ e raggio 1 (stesso insieme del precompitino!).

(ii) Il teorema di Guldino dice che si ha

$$\text{Volume}(S) = 2\pi \int_E x\,dxdz = 4\pi \int_{E_+} x\,dxdz,$$

dove E_+ è la porzione di E nel primo quadrante. Si potrebbe calcolare tale integrale direttamente in coordinate cartesiane; integrando prima in x e poi in z di fatto questo equivarrebbe a calcolare il volume con il secondo metodo, quello delle $z-$sezioni. Integriamo quindi nell'altro modo per esercizio; alla fine c'è anche il calcolo in coordinate polari.

(iii) La $x-$sezione di E_+ è chiaramente, per $x \in [0,1]$,

$$E_+(x) = \{z \in \mathbb{R} : \sqrt{1-(x-1)^2} \le z \le \sqrt{2-x^2}\};$$

per cui

$$\int_{E_+} x\,dxdz = \int_{x=0}^{x=1} x\left(\int_{z=\sqrt{1-(x-1)^2}}^{z=\sqrt{2-x^2}} dz\right)dx =$$

$$\int_0^1 (x\sqrt{2-x^2} - x\sqrt{1-(x-1)^2})\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\left[-(2-x^2)^{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1+1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

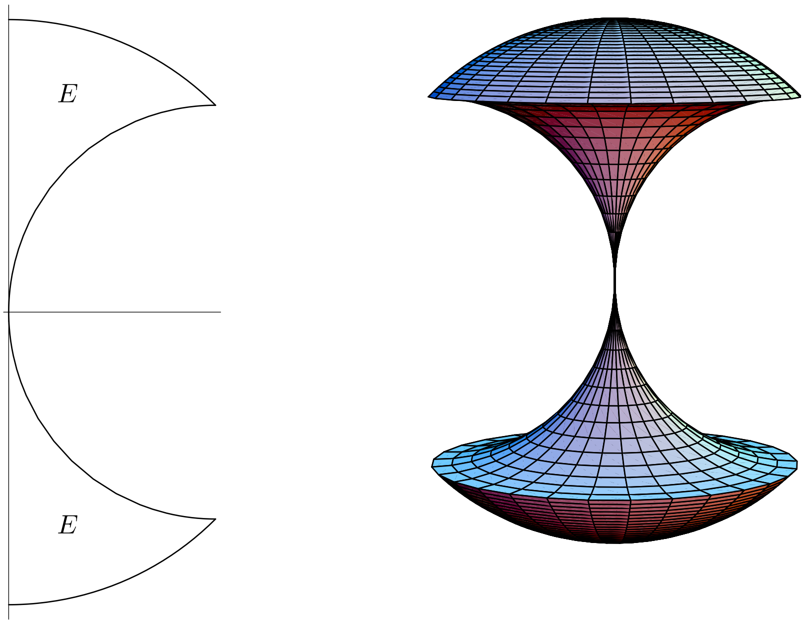


FIGURA 4. Disegni di E e di S.

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left[-(x-1)^{3/2}\right]_0^1-\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=$$
$$\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}.$$

(l'ultimo integrale vale $\pi/4$ ed è stato calcolato osservando che esso è un quarto dell'area del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1). Quindi

$$\text{Volume}(S)=\frac{\pi}{3}(8\sqrt{2}-3\pi).$$

(iii) La $z-$sezione non è vuota per $z\in[0,\sqrt{2}]$; è data dagli $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2\le 2-z^2$ ed inoltre, se $|z|\le 1$:

$$\sqrt{x^2+y^2}-1\ge\sqrt{1-z^2}\quad\text{oppure}\quad\sqrt{x^2+y^2}-1\le-\sqrt{1-z^2};$$

la prima di queste ultime relazioni equivale a $x^2+y^2\ge(1+\sqrt{1-z^2})^2=2-z^2+2\sqrt{1-z^2}$, che certamente è maggiore di $2-z^2$ se $|z|<1$ e quindi non verifica la $x^2+y^2\le 2-z^2$; la seconda equivale a $x^2+y^2\le(1-\sqrt{1-z^2})^2=2-z^2-2\sqrt{1-z^2}$, quantità certamente minore di $2-z^2$ se $|z|<1$. In definitiva:

$S(z)$ è il disco di centro l'origine e raggio $1-\sqrt{1-z^2}$ se $|z|\le 1$;

$S(z)$ è il disco di centro l'origine e raggio $\sqrt{2-z^2}$ se $1\le|z|\le\sqrt{2}$;

(tutto questo naturalmente si può controllare immediatamente ricorrendo al disegno di E fatto). Quindi:

$$\text{Volume}(S)/2=\int_{z=0}^{z=1}\pi(1-\sqrt{1-z^2})^2\,dz+\int_{z=1}^{z=\sqrt{2}}\pi(2-z^2)\,dz=$$
$$\pi\int_0^1(2-z^2-2\sqrt{1-z^2})\,dz+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)\,dz=$$
$$\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-z^2)\,dz-2\pi\int_0^1\sqrt{1-z^2}\,dz=$$
$$\pi\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-3\pi).$$

Si ritrova quindi $\text{Volume}(S)=\frac{\pi}{3}(8\sqrt{2}-3\pi)$. □

A titolo illustrativo, per calcolare l'integrale usiamo anche coordinate polari $x = r\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$, anche se il calcolo è un poco più lungo; l'insieme E_+, dopo alcuni calcoli (già fatti nel precompitino) diventa nelle coordinate ϑ ed r l'insieme

$$A = \{(\vartheta, r) : \vartheta \in [\pi/4, \pi/2],\ 2\cos\vartheta \le r \le \sqrt{2}\}.$$

Per cui:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Volume}(S)/(4\pi) = &\int_A r\cos\vartheta\, r\, dr d\vartheta = \\
&\int_{\vartheta=\pi/4}^{\vartheta=\pi/2}\left(\int_{r=2\cos\vartheta}^{r=\sqrt{2}} r^2\, dr\right)\cos\vartheta\, d\vartheta = \int_{\vartheta=\pi/4}^{\vartheta=\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=2\cos\vartheta}^{r=\sqrt{2}}\cos\vartheta\, d\vartheta = \\
&\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\sqrt{2} - 8\cos^3\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\vartheta\, d\vartheta - \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4\vartheta\, d\vartheta\, d\vartheta = \\
&\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4\vartheta\, d\vartheta.
\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int\cos^4\vartheta\, d\vartheta = &\int\cos^2\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \int\cos^2\vartheta\, d\vartheta - \int\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \\
&\frac{1}{2}\int(1+\cos(2\vartheta))\, d\vartheta - \frac{1}{4}\int\sin^2(2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4} - \frac{1}{8}\int(1-\cos(4\vartheta))\, d\vartheta = \\
&\frac{3}{8}\vartheta + \frac{\sin(2\vartheta)}{4} + \frac{\sin(4\vartheta)}{32} + k.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{32}\pi - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3};$$

ed in definitiva $\mathrm{Volume}(S) = 4\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}(8\sqrt{2} - 3\pi)$.

Matematica 4F per Fisica–Secondo precompitino–3 dicembre 2004

Esercizio 11. Si ha l'equazione (scalare) lineare omogenea

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \qquad p, q \in C(\mathbb{R}).$$

Supponiamo di conoscere due soluzioni $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ di tale equazione. Sappiamo che si ha $u(0) = u(1) = 1$, e sappiamo che $v'(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Possiamo dire di conoscere l'integrale generale dell'equazione?

Risoluzione. Le ipotesi poste implicano che nessuna delle due soluzioni è identicamente nulla. Se esse fossero linearmente dipendenti esisterebbe allora una costante $\lambda \ne 0$ tale che $v(t) = \lambda\, u(t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si avrebbe allora $v(0) = \lambda\, u(0) = \lambda$, ed anche $v(1) = \lambda\, u(1) = \lambda$, e quindi $v(0) = v(1)$, contraddicendo la stretta crescenza di v.

Alternativamente, da $v(t) = \lambda\, u(t)$ si trae, derivando, che è $v'(t) = \lambda\, u'(t)$. Per il teorema di Rolle, esiste $\tau \in]0, 1[$ tale che $u'(\tau) = 0$; ma allora $v'(\tau) = 0$, contro l'ipotesi fatta su v.

Ne segue che l'integrale generale è

$$c_1\, u(t) + c_2\, v(t) \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 12. Si considera il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 + y \end{cases}$$

(i) Trovare le soluzioni costanti. Mostrare che l'insieme delle soluzioni è simmetrico rispetto all'asse y. Mostrare che una soluzione che inizia in un punto dell'asse y rimane sull'asse y.
(ii) Disegnare le zone del piano (x, y) in cui è crescente la $x(t)$ e quelle in cui è crescente $y(t)$.
(iii) Scrivere l'equazione totale associata al sistema dato, cercare per la stessa un fattore integrante del tipo $\exp(g(x^2 + y^2))$, e trovare, nel semipiano $x > 0$, un integrale primo del sistema dato.
(iv) Quante traiettorie ci sono sull'asse y? disegnare il loro verso di percorrenza.

Risoluzione. (i) La costante (a, b) è soluzione se e solo se $0 = a$ e $0 = a^2+b^2+b$, da cui $b = 0$ oppure $b = -1$. Gli equilibri del sistema sono $(0, 0)$ e $(0, -1)$. Se poi $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ è soluzione, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, si controlla subito che $\psi(t) = (-u(t), v(t))$ è ancora soluzione ($-u'(t) = -u(t)$, $v'(t) = (-u(t))^2 + (v(t))^2 + v(t)$ sono ovviamenet verificate. Ne segue che la simmetrica rispetto all'asse y di una soluzione è ancora una soluzione, e quindi quanto voluto. Se poi una soluzione inizia in un punto dell'asse y si ha $x(0) = 0$; la prima equazione $\dot{x} = x$ è verificata dalla costante nulla; per unicità, se $x(0) = 0$, x deve essere costantemente nullo.

(ii) È ovvio che $x(t)$ è crescente nel semipiano $x > 0$, e decrescente nel semipiano $x < 0$. Per $y(t)$ si nota che $x^2 + y^2 + y = x^2 + y^2 + y + 1/4 - 1/4 = x^2 + (y - 1/2)^2 - 1/4$; ne segue che $y(t)$ è decrescente all'interno del disco di centro $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, ed è crescente esternamente a tale disco.

(iii) A meno del segno, l'equazione totale associata al sistema dato è $(x^2 + y^2 + y)\, dx - x\, dy = 0$; un fattore integrante della forma $\exp g(x^2 + y^2)$ impone che sia

$$e^g(g'\,(2y)(x^2 + y^2 + y) + 2y + 1) = -e^g(g'\,(2x^2) + 1) \iff g'\,(2x^2 + 2x^2y + 2y^2(y + 1) + 2y + 2) = 0$$

$$\iff g'\,(x^2 + y^2) + 1 = 0 \iff g'(x^2 + y^2) = \frac{-1}{x^2 + y^2} \iff g(x^2 + y^2) = -\log(x^2 + y^2) + k.$$

Il fattore integrante è quindi $e^{-\log(x^2+y^2)} = 1/(x^2 + y^2)$; l'equazione totale diventa

$$0 = \left(1 + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = dx - \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

La forma è dx, con primitiva x, meno la solita forma dell'argomento, che nel semipiano $x > 0$ è esatta con primitiva $\arctan(y/x)$. Un integrale primo nel semipiano $x > 0$ è quindi

$$F(x, y) = x - \arctan(y/x).$$

(iv) Sull'asse y ci sono due equilibri, per $y = 0$ e $y = -1$ come visto. Restano tre pezzi, la semiretta $]-\infty, -1[$, l'intervallo aperto $]-1, 0[$ e la semiretta $]0, +\infty[$, che sono traiettorie (sono le immagini delle soluzioni massimali dell'equazione a variabili separabili $y' = y^2 + y$, logistica, che sarebbe facilmente risolubile). Ci sono quindi 5 traiettorie (due equilibri e tre traiettorie non banali); come prima calcolato, le due semirette sono percorse nel verso delle y crescenti, l'intervallo nel verso delle y decrescenti. □

Esercizio 13. È dato il sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Trovare la matrice e^{tA}.

(ii) Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = x - 4y + e^{-t} \\ \dot{y} & = x + y - e^{-t} \end{cases},$$

(cercare, per il sistema non omogeneo, una soluzione particolare del tipo $e^{-t}(a, b)$).

(iii) Data la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

calcolare e^{tB} (conviene servirsi di quanto sopra fatto).

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è

$$\det(\zeta\, 1_2 - A) = \zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\, \zeta + \det(A) = \zeta^2 - 2\zeta + 5 = 0,$$

con radici $\zeta = 1 \pm 2i$; un autovalore associato a $1 + 2i$ è

$$\begin{cases} (1 + 2i - 1)\, u_1 + 4u_2 & = 0 \\ -u_1 + (1 + 2i - 1)u_2 & = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad u = (2i, 1)$$

Si ha quindi la soluzione complessa

$$\begin{aligned} \varphi(t) =& e^{(1+2i)t}(2i, 1) = e^t\, e^{2it}(2i, 1) = \\ & e^t(\cos(2t) + i \sin(2t))(2i, 1) = e^t(2i \cos(2t) - 2 \sin(2t), \cos(2t) + i \sin(2t)) = \\ & e^t(-2 \sin(2t), \cos(2t)) + ie^t(2 \cos(2t), \sin(2t)); \end{aligned}$$

una matrice risolvente reale è quindi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\varphi(t)) & \mathrm{Im}(\varphi(t))\end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

La matrice $\Phi(0)$ è $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ con inversa $\Phi(0)^{-1} = (-1/2)\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; si ottiene

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t)/2 & \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

(ii) Imponendo che $e^{-t}(a,b)$ sia soluzione si trova

$$\begin{cases} -a\,e^{-t} & = a\,e^{-t} - 4b\,e^{-t} + e^{-t} \\ -b\,e^{-t} & = a\,e^{-t} + b\,e^{-t} - e^{-t} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 2a - 4b & = -1 \\ a + 2b & = 1, \end{cases}$$

che ha per soluzione $a = 1/4$ e $b = 3/8$. Ne segue che l'integrale generale è

$$e^{tA}(c_1, c_2) + e^{-t}(1/4, 3/8) \quad \text{al variare di } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) L'ultima equazione è $\dot z = -z$, con integrale generale $z(t) = z_0 e^{-t}$; se $z_0 = 1$, si ottiene esattamente il sistema non omogeneo sopra risolto; ne segue che una risolvente è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) & -2e^t\sin(2t) & e^{-t}/4 \\ e^t\sin(2t)/2 & e^t\cos(2t) & 3e^{-t}/8 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Per ottenere la matrice esponenziale basta cambiare l'ultima colonna, scegliendo per le prime due componenti quella soluzione del precedente sistema non omogeneo che è nulla in 0; si ottiene $c_1 = -1/4$, $c_2 = -3/8$, e la soluzione è $(-e^t\cos(2t)/4 + 3e^t\sin(2t)/4 + e^{-t}/4, -e^t\sin(2t)/8 - 3e^t\cos(2t)/8 + 3e^{-t}/8)$. Ne segue che

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) & -2e^t\sin(2t) & -e^t\cos(2t)/4 + 3e^t\sin(2t)/4 + e^{-t}/4 \\ e^t\sin(2t)/2 & e^t\cos(2t) & -e^t\sin(2t)/8 - 3e^t\cos(2t)/8 + 3e^{-t}/8 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

□

Esercizio 14. (i) Disegnare il solido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\, 0 \le z \le 2 - y\},$$

e darne una descrizione a parole.

Si considera poi il campo vettoriale $\vec F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$.

(ii) Calcolare $\vec G(x,y,z) = \nabla \times \vec F(x,y,z)$.

(iii) Trovare il flusso di $\vec G$ uscente da S, e dalle singole porzioni di frontiera di S.

(iv) Parametrizzare la porzione di frontiera di S che sta su $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 2\}$ in modo che la normale associata sia quella esterna di S.

(v) Sia γ il circuito intersezione di $C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$ con P; parametrizzare γ, dire che curva è, e calcolare la circuitazione

$$\int_\gamma \vec F(x,y,z) \cdot d\gamma,$$

direttamente, ed anche scegliendo un'opportuna superficie bordata da γ, e calcolando un flusso attraverso di essa; spiegare con cura il procedimento.

Risoluzione. Il solido S è costituito dai punti entro il cilindro illimitato di raggio 1 che ha per asse l'asse z, compresi tra il piano xy ed il piano (parallelo all'asse x) di equazione $z = 2 - y$; per (x,y) nel disco di centro l'origine e raggio 1 si ha $2 - y > 0$, quindi il piano sta al di sopra del piano (x,y); S è un *tronco cilindrico*. Si disegna come in figura.

(ii) Il rotore è

$$\vec G(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \vec e_1 & \partial_1 & -y^2 \\ \vec e_2 & \partial_2 & x \\ \vec e_3 & \partial_3 & z^2 \end{bmatrix} = \vec e_1(0-0) + \vec e_2(0-0) + \vec e_3(1+2y) = \vec e_3(1+2y).$$

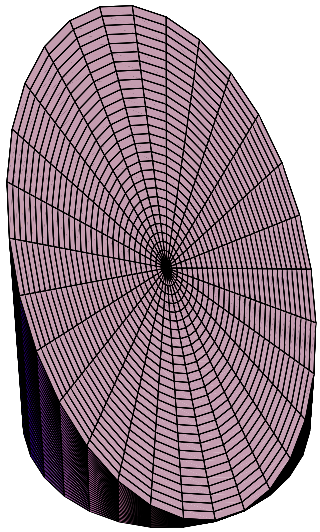


Figura 5. Il solido S.

(iii) Come ogni rotore, $\vec{G}$ è solenoidale, e quindi il flusso totale uscente da S è nullo. Il campo $\vec{G}$ è parallelo all'asse z e quindi il flusso uscente attraverso il cilindro è nullo. Il flusso entrante attraverso la base $D = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ sul piano (x, y) è

$$\int_D (\vec{e}_3(1 + 2y) \cdot \vec{e}_3 \, dxdy = \text{Area}(D) = \pi$$

(l'integrale di y su D è nullo, per simmetria). Tale flusso è quindi quello che esce dalla porzione superiore di frontiera, quella sul piano P, ed è opposto a quello che esce dalla base.

(iv) La frontiera si parametrizza in cartesiane come $p(x, y) = (x, y, 2 - y)$, con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Il vettore normale associato è

$$\partial_x p(x, y) \times \partial_y p(x, y) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 0 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1 \\ \vec{e}_3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

vettore che avendo terza componente positiva punta effettivamente verso l'esterno di S su $\partial S \cap P$.

(v) Una parametrizzazione di γ è ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Si tratta chiaramente di un'ellisse (è intersezione di una quadrica, il cilindro C, con un piano P, ed è compatta, quindi è un'ellisse). Calcoliamo la circuitazione

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}(x, y, z) \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \big((-\sin^2 t)(-\sin t)\, dt + (\cos t)(\cos t)\, dt + (2 - \sin t)^2(-\cos t)\, dt\big) = \\ &\int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t - 4\cos t + 4\cos t \sin t - \sin^2 t \cos t)\, dt = \\ &\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi \end{aligned}$$

Si noti che γ è esattamente la restrizione a ∂D (parametrizzato con $t \mapsto (\cos t, \sin t)$) di p. La formula di Stokes dice quindi che la circuitazione di $\vec{F}$ lungo γ deve coincidere con il flusso di $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$ attraverso p, ed infatti il flusso prima trovato è uguale a π.

□

Matematica 4F– Secondo Compitino–11 dicembre 2004

Esercizio 15. Enunciare il teorema di esistenza ed unicità locale di Cauchy–Lipschitz. Quante soluzioni (localmente distinte) di $y' = 2 \operatorname{sgn} y \, |y|^{1/2}$ verificano $y(0) = 0$? Tracciarne i grafici.

Risoluzione. Se $y(t) \neq 0$, per continuità questo accade in tutto un intorno. Finchè $y(t) \neq 0$ si ha

$$\operatorname{sgn} y \frac{y'(t)}{2\sqrt{|y(t)|}} = 1 \quad (\text{si ricordi che } 1/\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} y \text{ se } y \in \mathbb{R}),$$

da cui, integrando, e ricordando che la derivata del modulo è la funzione segno

$$\sqrt{|y(t)|} = t - c,$$

dove c è una costante reale. Avendo supposto $y(t) \neq 0$ deve essere $t > c$; si ha allora $|y(t)| = (t-c)^2$ $(t > c)$, ed infine $y(t) = (t-c)^2$, oppure $y(t) = -(t-c)^2$, per $t > c$. Le soluzioni non nulle dell'equazione sono quindi di questa forma. Ne segue che il problema di Cauchy posto ha, anche localmente, infinite soluzioni: oltre alla soluzione nulla, fissato comunque $c \geq 0$, ci sono come soluzioni le funzioni

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \leq c \\ (t-c)^2 & \text{per} \quad t > c, \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \leq c \\ -(t-c)^2 & \text{per} \quad t > c. \end{cases}$$

$\square$

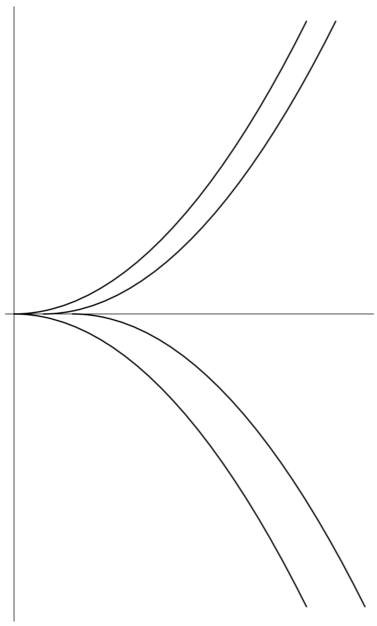


Figura 6. Soluzioni di $y' = \operatorname{sgn} y \sqrt{|y|}$.

Osservazione. Se si considerano equivalenti soluzioni del problema che coincidono in un intorno di $t = 0$, ci sono in tutto tre soluzioni non equivalenti, che sono la costante nulla, φ_0 e ψ_0.

Esercizio 16. Si considera il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y + \alpha\, e^t \\ \dot{y} &= -4x + y + \beta\, e^t \end{cases}, \quad \text{dove } \alpha, \beta \text{ sono costanti.}$$

(i) Trovare e^{tA}, dove A è la matrice del sistema.
(ii) Cercare per il sistema una soluzione particolare della forma $e^t(a, b)$; trovare la soluzione nulla per $t = 0$
(iii) Calcolare e^{tB}, dove

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

usando quanto fatto sopra; spiegare con cura.

Risoluzione. (i) Il polinomio caratteristico è

$$\det(\zeta\, 1_2 - A) = \zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 = (\zeta + 1)^2,$$

con $\zeta = -1$ come radice doppia. Ne segue

$$tA = t(A + 1_2) - t1_2 \quad \text{da cui} \quad e^{tA} = e^{-t}\left(1_2 + \begin{bmatrix} -2t & t \\ -4t & 2t \end{bmatrix}\right) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{bmatrix}$$

(ii) Sostituendo si trova

$$\begin{cases} a\,e^t & = -3a\,e^t + b\,e^t + \alpha\,e^t \\ b\,e^t & = -4a\,e^t + b\,e^t + \beta\,e^t \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 4a - b & = \alpha \\ 4a & = \beta \end{cases} \quad \text{quindi} \quad b = \beta - \alpha,\ a = \beta/4.$$

La soluzione è $e^t(\beta/4, \beta - \alpha)$. Cerchiamo ora $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $e^{tA}(c_1, c_2) + e^t(\beta/4, \beta - \alpha)$ sia nullo per $t = 0$; si ha $(c_1, c_2) + (\beta/4, \beta - \alpha) = 0$ da cui $c_1 = -\beta/4$ e $c_2 = \alpha - \beta$. La soluzione nulla per $t = 0$ del sistema non omogeneo è

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\beta}{4}e^{-t}(1-2t) + (\alpha - \beta)t\,e^{-t} + \dfrac{\beta}{4}\,e^t \\ \\ \beta\,t\,e^{-t} + (\alpha - \beta)(1+2t)\,e^{-t} + (\beta - \alpha)\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\left(-\dfrac{\beta}{4} + (\alpha - \beta/2)\,t\right) + \dfrac{\beta}{4}\,e^t \\ \\ e^{-t}(\alpha - \beta + (2\alpha - \beta)t) + (\beta - \alpha)e^t \end{bmatrix}$$

(iii) La matrice e^{tB} ha come prime due colonne le colonne di e^{tA}, completate con due zeri, dato che B ha lo spazio dei primi due vettori e_1, e_2 come sottospazio stabile. Per la terza colonna bisogna trovare la soluzione del sistema $(x, y, z)' = B.(x, y, z)$ che vale $(0, 0, 1)$ per $t = 0$, e le prime due componenti di questa sono esattamente quelle appena trovate, con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$; tale soluzione è quindi

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{e^{-t}}{4}(1+2t) + \dfrac{e^t}{4} \\ \\ -e^{-t}(1+t) + e^t \end{bmatrix}$$

Infine e^{tB} è

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-t} & t\,e^{-t} & -\dfrac{e^{-t}}{4}(1+2t) + \dfrac{e^t}{4} \\ -4t\,e^{-t} & (1+2t)e^{-t} & -e^{-t}(1+t) + e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

□

Esercizio 17. Si considera in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ il sistema autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} & = -2xy \\ \dot{y} & = (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2) + 2x^2. \end{cases}$$

(i) Trovare le soluzioni costanti.
(ii) Se C è una traiettoria, è vero che la sua simmetrica rispetto all'asse y è ancora traiettoria? ed è vero che se una soluzione parte dall'asse y rimane sull'asse y?
(iii) Scrivere l'equazione totale associata al sistema, e sapendo che $1/(x^2 + y^2)$ è un fattore integrante, trovare per il medesimo un integrale primo.
(iv) Quante traiettorie si trovano sulla circonferenza unitaria?
(v) Trovare la soluzione del problema di Cauchy dato dal sistema con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Risoluzione. (i) Si pone $0 = -2xy$ e $0 = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)+2x^2$; dalla prima, deve essere $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ la seconda diventa $y^2 \log y^2$, con soluzioni $y = \pm 1$. Due equilibri sono quindi $(0, \pm 1)$. Se $y = 0$ si ha $x^2 \log x^2 + 2x^2 = 0$, equivalente a $\log|x| = -1$, e quindi $|x| = 1/e$, ovvero $x = \pm 1/e$. Riassumendo: ci sono quattro equilibri, che sono $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1/e, 0)$.

(ii) Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è una soluzione massimale del sistema dato, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, si vede subito che $\psi(t) = (-u(t), v(t))$ è pure soluzione: basta sostituire, nella prima equazione si ha $(-u(t))' = -2(-u(t))(v(t))$, e nella seconda $v'(t) = ((-u(t))^2 + (v(t))^2 \log((-u(t))^2 + (v(t))^2) + 2(-u(t))^2$ chiaramente verificate perchè $(-u(t))^2 = (u(t))^2$, e $(-u(t))' = -u'(t)$.

Il sistema ha unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, essendo il campo di classe C^1. Chiaramente, se v è soluzione massimale dell'equazione $y' = y^2 \log y^2$, la funzione $\varphi(t) = (0, v(t))$ è soluzione dell'equazione. Se le condizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $y(0) = y_0 \neq 0$, e v è soluzione del problema di

Cauchy scalare $y' = y^2 \log y^2$, con $y(0) = y_0$, la funzione vettoriale $(0, v(t))$ è soluzione del problema di Cauchy, e per unicità si ha allora che effettivamente se una soluzione parte dall' asse y ci rimane.

(iii) L'equazione totale associata, a meno del segno, è

$$((x^2+y^2)\log(x^2+y^2)+2x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0; \quad \text{da cui} \quad \left(\log(x^2+y^2+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy = 0;$$

Una primitiva rispetto ad y di $2xy/(x^2+y^2)$ è immediata ed è $x\log(x^2+y^2)$; le primitive della forma devono quindi essere esprimibili come $x\log(x^2+y^2)+\alpha(x)$; derivando rispetto ad x tale funzione si ottiene

$$\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \alpha'(x),$$

che se $\alpha'(x) = 0$ coincide con il primo coefficiente della forma. Quindi un integrale primo è

$$F(x, y) = x\log(x^2+y^2).$$

(iv) Chiaramente il circolo è parte dell'insieme di livello 0 per F, insieme che è l'unione del circolo e dell'asse y; si ha cioè $F^{\leftarrow}(\{0\}) = \mathbb{S}^1 \cup (\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$, dove $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Ci sono due equilibri sul circolo, $(0, 1)$ e $(0, -1)$, e quindi due altre traiettorie, simmetriche l'una dell'altra, i semicerchi aperti $\mathbb{S}^1 \cap \{x > 0\}$ e $\mathbb{S}^1 \cap \{x < 0\}$.

(iv) Dobbiamo in pratica trovare la traiettoria sul semicerchio per $x > 0$. Dovendo essere lungo la soluzione costantemente $x^2 + y^2 = 1$ si ha il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2xy \\ \dot{y} &= 2x^2 = 2(1-y^2) \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Separando le variabili ed integrando, tenuto conto di $y(0) = 0$, si ha

$$\frac{\dot{y}}{1-y^2} = 2 \iff \operatorname{setttanh} y = 2t \iff y = \tanh(2t),$$

da cui $\dot{x} = -2\tanh(2t)\,x$, che integrata con $x(0) = 1$ diventa

$$x(t) = \exp\left(-2\int_0^t \tanh(2\theta)\,d\theta\right) = \exp\left(-2\int_0^t \frac{\sinh(2\theta)}{\cosh(2\theta)}\,d\theta\right) = \exp\left(-\log\cosh(2t)\right) = \frac{1}{\cosh(2t)}.$$

La soluzione trovata, $(1/\cosh(2t), \tanh(2t))$, è una parametrizzazione su $\mathbb{R}$ della semicirconferenza $\mathbb{S}^1 \cap \{x > 0\}$, una delle traiettorie sul circolo unitario. □

Anche se non richieste, aggiungo alcune curve di livello dell'integrale primo $x\log(x^2+y^2)$ (il calcolatore le fa in un attimo ...)

Esercizio 18. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0,\ z \leq 1 - (x^2+y^2)\}$.

(i) Disegnare S e descriverlo a parole; è vero che S è compatto?

Sia ora $\vec{G}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F}(x, y, z)$, dove $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z + x^2 + y^2)$.

(ii) Calcolare $\vec{G}$, e trovarne il flusso uscente da S, e dalle porzioni di frontiera di S che non stanno sui piani xz ed yz.

(iii) Parametrizzare la porzione di frontiera T di S che sta sulla varietà

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 + y^2 = 1\},$$

in modo che la normale associata sia quella esterna ad S.

(iv) Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ sul circuito che borda T; e confrontare il risultato con uno precedentemente ottenuto, quale? spiegare con cura.

Risoluzione. (i) Il solido è la parte di paraboloide P di equazione $z = 1 - (x^2+y^2)$ tra questo ed il piano xy, intersecato con il primo quadrante. È chiaramente chiuso, in quanto luogo di soluzioni di disequazioni late tra funzioni continue ($z + x^2 + y^2$, x, y, z), ed è limitato perchè dovendo essere $0 \leq z \leq 1 - (x^2+y^2)$ si trae $1 - (x^2+y^2) \geq 0$ e quindi $x^2 + y^2 \leq 1$, da cui $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

(ii) Si ha

$$\vec{G}(x, y, z) = \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -y \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & z + x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \vec{e}_1(2y - 0) + \vec{e}_2(0 - 2x) + \vec{e}_3(1 + 1) =$$

$$2(y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

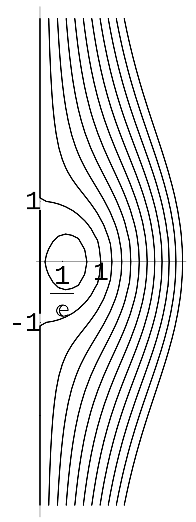


FIGURA 7. Curve di livello di F, traiettorie dell'equazione data.

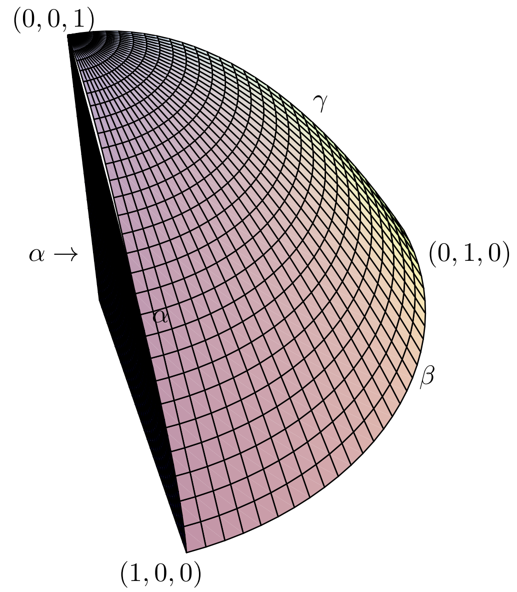


FIGURA 8. Il solido S e il circuito bordo di T, $\alpha.\beta.\gamma$.

Come ogni rotore $\vec{G}$ è solenoidale, quindi il flusso totale uscente da S è nullo. Il campo $\vec{G}$ si può scomporre in due addendi $2(y, -x, 0)$ e $2(0, 0, 1)$. Il primo ha chiaramente flusso nullo attraverso T, essendo sempre tangente a T su T (perchè P è paraboloide di rotazione, ed il vettore $(y, -x, 0)$ è ortogonale a $(x, y, 0)$), ed ha flusso nullo anche attraverso la base di S, che è il quarto di disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1;\ x, y \geq 0\}$; inoltre ha flusso uscente da S nullo, essendo anch'esso solenoidale. Resta quindi solo l'altro campo, che essendo parallelo all'asse z ha flusso nullo attraverso le porzioni di frontiera sui piani xz ed yz; ne segue che il flusso del campo che entra dalla base è pari a quello che esce da T. Il flusso che entra da D è

$$\int_D 2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \, dxdy = 2 \,\mathrm{Area}(D) = \frac{\pi}{2},$$

pari al flusso che esce da T, e all'opposto del flusso che esce da D.

(iii) La parametrizzazione ovvia è

$$p(x,y) = (x, y, 1-(x^2+y^2)) \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1;\, x, y \ge 0\};$$

il vettore normale associato è:

$$\partial_x p \times \partial_y p = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 0 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1 \\ \vec{e}_3 & -2x & -2y \end{bmatrix} = \vec{e}_1(2x) + \vec{e}_2(2y) + \vec{e}_3,$$

che "punta verso l'alto e quindi verso l'esterno di S su T" (discorso impreciso).

(iv) Il circuito che borda T si ha come restrizione di p al bordo di D, e consiste: dell'immagine del segmento $(t,0)$, con $t \in [0,1]$, l'arco di parabola $\alpha(t) = (t, 0, 1-t^2)$, dal punto $(0,0,1)$ al punto $(1,0,0)$; dell'immagine del quarto di cerchio $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$, che è lo stesso arco di cerchio $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, da $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$; dell'immagine del segmento $(0, 1-t)$, $t \in [0,1]$, l'arco di parabola $\gamma(t) = (0, 1-t, 1-(1-t)^2)$, da $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$. Si ha

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha + \int_\beta \vec{F} \cdot d\beta + \int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma =$$

$$\int_0^1 (0+0+1(-2t))\, dt + \int_0^{\pi/2} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t)\, dt + \int_0^1 (0+0+1(2(1-t)))\, dt =$$

$$[-t^2]_0^1 + \frac{\pi}{2} + [-(1-t)^2]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

coincidente col flusso di $\vec{G}$ uscente da T, come doveva essere per la formula di Stokes.

□

Matematica 4F–Fisica–primo appello–14 dicembre 2004

Esercizio 19. Data l'equazione, nell'incognita $w \in \mathbb{C}$

$$\tanh w = a \quad \text{cioè} \quad \frac{\sinh w}{\cosh w} = a,$$

dire per quali $a \in \mathbb{C}$ essa ammette soluzioni; trovare poi tutte le soluzioni dell'equazione. Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione reale?

Risoluzione. L'equazione si scrive

$$\frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = a \iff e^{2w} - 1 = a(e^{2w}+1) \iff (1-a)e^{2w} = 1+a.$$

Se $a = 1$ l'equazione non ha soluzioni, come anche se $a = -1$, dato che l'esponenziale anche complesso non è mai nullo. Se $a \ne \pm 1$ l'equazione diventa

$$e^{2w} = \frac{1+a}{1-a} \quad \text{con soluzioni} \quad w = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} + ik\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

e log il logaritmo principale. L'equazione ha una soluzione reale se e solo se l'argomento di $(1/2)\log(1+a)/(1-a)$ e multiplo intero di π, il che ovviamente accade se e solo se $(1+a)/(1-a)$ è reale e positivo; per ipotesi a è reale, e diverso da ± 1, quindi deve aversi $(1+a)/(1-a) > 0$, equivalente a $|a| < 1$. Quindi l'equazione ha soluzioni reali, con a reale, se e solo se $|a| < 1$.

□

Esercizio 20. Enunciare il teorema di esistenza ed unicità globale (forma debole) di Cauchy–Lipschitz (l'enunciato deve essere completo ed accurato). È possibile servirsi di tale teorema per dire che l'equazione $y'' = y' \cos^2 y$ ha soluzioni massimali definite su tutto $\mathbb{R}$? o serve un altro teorema? (scrivere il sistema equivalente). Consideriamo poi l'equazione

$$y'' = y' \cos^2 y$$

(i) Cercare le soluzioni costanti e provare che le soluzioni non costanti sono strettamente monotòne.
(ii) Trovare un integrale primo dell'equazione data.

Risoluzione. Per l'enunciato si rinvia al testo. Per l'equazione del secondo ordine assegnata il sistema equivalente è (si pone $p = \dot{y}$)

$$\begin{cases} \dot{y} &= p \\ \dot{p} &= p \cos^2 y \end{cases},$$

cioè $(\dot y,\dot p) = f(y,p) = (p, p\cos^2 y)$. Si ha $\partial_y f(y,p) = (0, -2p\cos y\sin y)$, $\partial_p f(y,p) = (1, \cos^2 y)$. Mentre $\partial_p f(y,p)$ è limitata, $\partial_y f(y,p) = (0, -2p\cos y\sin y)$ non lo è (si ha $\partial_y f(\pi/4, p) = -p$, che tende all'infinito per $p \to \pm\infty$). Il teorema di esistenza ed unicità globale nella sua forma debole non è quindi applicabile. Tuttavia la crescita di f è sublineare:

$$|f(y,p)| = \sqrt{p^2 + p^2\cos^4 y} = |p|\sqrt{1+\cos^4 y} \le |p|\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sqrt{p^2+y^2} = \sqrt{2}\,|(y,p)|,$$

quindi il teorema di esistenza ed unicità globale in forma forte è applicabile, e garantisce per ogni problema di Cauchy $y'' = y'\cos^2 y$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ un'unica soluzione esistente su tutto $\mathbb{R}$.

(i) È immediato vedere che ogni costante è soluzione dell'equazione. Ne segue che se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una soluzione non costante, allora $\varphi'(t)$ non può mai essere nullo: se fosse infatti $\varphi'(t_0) = 0$, il problema di Cauchy dato dall'equazione con condizioni $y(t_0) = \varphi(t_0)$, $y'(t_0) = 0$ ha la soluzione costante $y = \varphi(t_0)$, e per unicità φ deve coincidere con tale soluzione. Ma allora si ha $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, oppure $\varphi'(t) < 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, in ogni caso φ è strettamente monotòna.

(ii) Il secondo membro è la derivata di $\int \cos^2 y\,dy = \int((1+\cos(2y))/2)\,dy = y/2 + \sin(2y)/4 + k$; integrando ambo i membri si ha $y' = y/2 + \sin(2y)/4 + k$; pertanto

$$F(y,y') = y' - \frac{y}{2} - \frac{\sin(2y)}{4},$$

è un integrale primo.

Alternativamente, dal sistema equivalente si ha l'equazione totale associata

$$p\cos^2 y\,dy - p\,dp = 0 \quad \text{da cui } p = 0, \text{ oppure} \quad \cos^2 y\,dy - \,dp = 0,$$

quest'ultima forma, a variabili separate, è esatta ed ha come primitiva

$$\frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} - p,$$

e si ritrova col segno cambiato il precedente integrale primo. □

Esercizio 21. Si considera il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot x &= -3x + y + b_1(t) \\ \dot y &= -4x + y + b_2(t) \end{cases}, \quad \text{dove } b_1, b_2 \in C(\mathbb{R}).$$

(i) Trovare e^{tA}, dove A è la matrice del sistema.
(ii) Scrivere una formula integrale per la soluzione del sistema nulla per $t = 0$ (metodo di variazione delle costanti).
(iii) Calcolare e^{tB}, dove

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(a) Direttamente;
(b) Usando quanto fatto sopra; spiegare con cura.

Risoluzione. (i) Il polinomio caratteristico è

$$\det(\zeta\, 1_2 - A) = \zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 = (\zeta+1)^2,$$

con $\zeta = -1$ come radice doppia. Ne segue

$$tA = t(A + 1_2) - t1_2 \quad \text{da cui} \quad e^{tA} = e^{-t}\left(1_2 + \begin{bmatrix} -2t & t \\ -4t & 2t \end{bmatrix}\right) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{bmatrix}$$

(ii) Detto b il vettore colonna (b_1, b_2) la soluzione si cerca nella forma $\varphi(t) = e^{tA}u$; imponendo che essa sia soluzione si trova

$$Ae^{tA}u + e^{tA}u' = e^{tA}u + b \quad \text{da cui} \quad e^{tA}u' = b \iff \quad u' = e^{-tA}b;$$

si ricava

$$u(t) = \int_0^t e^{-\theta A} b(\theta)\,d\theta \quad \text{da cui} \quad \varphi(t) = e^{tA}\int_0^t e^{-\theta A}b(\theta)\,d\theta = \int_0^t e^{(t-\theta)A}b(\theta)\,d\theta,$$

che scritto per esteso diventa (attenzione, è un integrale vettoriale):

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-(t-\theta)}\left((1-2(t-\theta))b_1(\theta) + (t-\theta)b_2(\theta), -4(t-\theta)b_1(\theta) + (1+2(t-\theta))b_2(\theta)\right)\,d\theta.$$

(iii) Si nota che il sottospazio generato da $\vec{e}_2, \vec{e}_2$ è stabile per B, che ha A come submatrice. Il polinomio caratteristico di B si scrive allora subito ed è $\det(\zeta\, 1_3 - B) = (\zeta + 1)\det(\zeta\, 1_2 - A) = (\zeta + 1)^3$; quindi B ha -1 come unico autovalore triplo.

(a) Ne segue che $B + 1_3 = M$ è nilpotente; essendo $B = -1_3 + (B + 1_3) = -1_3 + M$, con -1_3 ed M ovviamente permutabili si ha

$$e^{tB} = e^{-t1_3}e^{tM} = e^{-t}\left(1_3 + tM + \frac{t^2}{2}M^2\right);$$

essendo

$$1_3 + B = M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si ottiene} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ne segue

$$e^{tB} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1-2t & t & t^2/2 \\ -4t & 1+2t & t+t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Come già osservato il sottospazio $\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2$ è stabile per B, e quindi le prime due colonne dell'esponenziale sono quella di e^{tA}, con zeri all'ultima componente. La terza colonna, come sempre, è quella soluzione del sistema $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = B.(x, y, z)$ che vale $\vec{e}_3$ per $t = 0$. L'ultima equazione è slegata dalle altre ed è $\dot{z} = -z$, con integrale generale $z(t) = z_0\, e^{-t}$. Ne segue che l'ultima colonna di e^{tB} è la soluzione del sistema non omogeneo di ordine due $(\dot{x}, \dot{y}) = A.(x, y) + (0, e^{-t})$ che vale 0 per $t = 0$; tale soluzione si può ricavare dalla formula prima trovata con $b_1(t) = 0$ e $b_2(t) = e^{-t}$; si ha

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-(t-\theta)}\left((t-\theta)e^{-\theta}, (1 + 2(t-\theta))e^{-\theta}\right)\, d\theta = e^{-t}\int_0^t (t-\theta, 1 + 2(t-\theta))\, d\theta =$$
$$e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}, t + t^2\right) = \left(\frac{t^2}{2}\, e^{-t}, (t + t^2)e^{-t}\right),$$

ritrovando esattamente il risultato trovato in (a).

□

Esercizio 22. Siano $a, h > 0$ costanti, e sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0,\ z \leq h(1 - (x^2 + y^2)/a^2)\}.$$

(i) Disegnare S e trovarne il volume, calcolando direttamente $\int_D h(1 - (x^2 + y^2)/a^2)\, dxdy$, dove D è la proiezione di S sul piano xy.

(ii) Usando la trasformazione delle coordinate cilindriche,

$$\kappa : (r, \vartheta, z) \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z), \quad \text{con} \quad (r, \vartheta, z) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

descrivere $E = \kappa^{\leftarrow}(S)$.

(iii) Dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito

$$\int_S z^{\alpha-1}\, dxdydz$$

e calcolarlo per tali α.

(iv) Calcolare

$$\int_S x\, dxdydz$$

(v) Quali coordinate ha il baricentro geometrico di S?

(vi) Trovare il flusso del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

uscente da ciascuna delle porzioni di frontiera di S.

Risoluzione. (i) È l'intersezione con il primo quadrante del segmento di di paraboloide $0 \leq z \leq h(1-(x^2+y^2)/a^2)$. La proiezione di S sul piano xy è il quarto di disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2,\ x, y \geq 0\}$. Si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S dxdydz = \int_D \left(\int_{z=0}^{z=h(1-(x^2+y^2)/a^2)} dz\right) dxdy = \int_D h(1 - (x^2 + y^2)/a^2)\, dxdy =$$

$$\int_{[0,a]\times[0,\pi/2]} h(1-r^2/a^2)r\,drd\vartheta = \frac{\pi}{2}\,h\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r\,dr = \frac{\pi}{4}\,h\,a^2\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{2r}{a^2}\,dr =$$
$$\frac{\pi}{4}\,h\,a^2\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2\right]_0^a = \frac{\pi}{8}\,h\,a^2.$$

Non faccio il disegno di S, identico a quello del solido S del secondo compitino (il vertice del paraboloide è però in $(0,0,h)$, e le intersezioni con gli assi x ed y in $(a,0,0)$ e $(0,a,0)$).

(ii) Si ha

$$k^{\leftarrow}(S) = \{(r,\vartheta,z)\in[0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} : 0\le z\le h(1-r^2/a^2),\ r\cos\vartheta\ge 0,\ r\sin\vartheta\ge 0\};$$

deve allora essere $0\le r\le a$, $0\le\vartheta\le\pi/2$ e l'insieme E è

$$E = \{(r,\vartheta,z)\in[0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} :\ 0\le z\le h(1-r^2/a^2),\ 0\le r\le a,\ 0\le\vartheta\le\pi/2\}.$$

Usando il teorema di cambiamento di variabili si ha che l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito

$$\int_E z^{\alpha-1}\,r\,drd\vartheta dz = \frac{\pi}{2}\int_F z^{\alpha-1}\,r\,dr \quad \text{dove} \quad F=\{(r,z):\ 0\le r\le a,\ 0\le z\le h(1-r^2/a^2)\}.$$

Essendo l'integrando positivo, per il teorema di Tonelli l'integrale esiste finito se e solo se l'integrale iterato seguente esiste finito:

$$\int_{r=0}^{r=a}\left(\int_{z=0}^{z=h(1-r^2/a^2)} z^{\alpha-1}\,dz\right) r\,dr =$$

(l'integrale in dz esiste finito se e solo se si ha $\alpha>0$)

$$\int_{r=0}^{r=a}\left[\frac{z^\alpha}{\alpha}\right]_{z=0}^{z=h(1-r^2/a^2)} r\,dr = \frac{h^\alpha}{\alpha}\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^\alpha r\,dr =$$
$$\frac{h^\alpha\,a^2}{2\alpha}\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^\alpha\frac{2r}{a^2}\,dr = \frac{h^\alpha\,a^2}{2\alpha}\left[-\frac{(1-r^2/a^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^a = \frac{h^\alpha\,a^2}{2\alpha(\alpha+1)}.$$

In definitiva: l'integrale esiste finito per ogni $\alpha>0$ e vale

$$\int_S z^{\alpha-1}\,dxdydz = \frac{\pi}{4}\,\frac{h^\alpha\,a^2}{\alpha(\alpha+1)}$$

(si noti che per $\alpha=1$ si riottene il valore prima calcolato del volume di S).

(iii) Usando ancora coordinate cilindriche l'integrale diventa

$$\int_S x\,dxdydz = \int_E r\cos\vartheta r\,drd\vartheta dz = \left(\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\right)\int_F r^2\,drdz =$$

(F è l'insieme sopra descritto)

$$\int_{r=0}^{r=a}\left(\int_{z=0}^{z=h(1-r^2/a^2)} dz\right) r^2\,dr = h\int_0^a\left(r^2-\frac{r^4}{a^2}\right)dr =$$
$$h\left(\frac{1}{3}\left[r^3\right]_0^a - \frac{1}{5a^2}\left[r^5\right]_0^a\right) = h\,a^3(1/3-1/5) = \frac{2}{15}\,h\,a^3.$$

(iv) Per simmetria le prime due coordinate del baricentro coincidono e sono

$$x_G = y_G = \frac{2}{15}\,\frac{8\,h\,a^3}{\pi h a^2} = \frac{16}{15\pi}\,a.$$

La terza coordinata è $\int_S z\,dxdydz$ diviso il volume, e quindi è (si pone $\alpha=2$ nel precedente integrale)

$$z_G = \frac{\pi}{4}\,\frac{h^2\,a^2}{6}\,\frac{8}{\pi h\,a^2} = \frac{h}{3}.$$

(v) Il campo è esattamente l'identità di $\mathbb{R}^3$ (raggio vettore dal'origine, se si preferisce). La divergenza è 3; il flusso totale uscente da S è quindi $3\,\mathrm{Vol}(S) = 3\pi\,h\,a^2/8$. Attraverso le porzioni di frontiera sui piani coordinati il flusso uscente è chiaramente nullo, dato che il campo giace su questi piani; il flusso uscente dalla porzione di frontiera sul paraboloide è quindi l'intero flusso uscente, $(3/8)\pi\,ha^2$. □

Matematica 4F per Fisica–10 gennaio 2005

Esercizio 23. In questo esercizio log denota la funzione logaritmo principale, $\log : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

(i) Quali valori assume log? cioè, che insieme è $\log(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\})$?

(ii) Per quali numeri complessi $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ si ha $\log(1/z) = -\log z$?

(iii) Per quali numeri complessi $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ si ha $\log(z^2) = 2\log z$?

Risoluzione. (i) Il logaritmo complesso è l'inversa della biiezione che l'esponenziale complesso induce tra la striscia semiaperta $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(w) \le \pi\}$ ed il piano bucato $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$; l'insieme dei valori che esso assume è pertanto $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(w) \le \pi\}$, striscia dei complessi il cui coefficiente dell'immaginario sta fra $-\pi$ e π.
Per quanto segue ricordiamo che se $z = r\, e^{i\alpha}$, con $r > 0$ ed $\alpha \in]-\pi, \pi]$ si ha $\log z = \log r + i\alpha$.

(ii) Si ha $1/z = (1/r)e^{-i\alpha}$. Se $-\alpha \in]-\pi, \pi]$, allora $\log(1/z) = -\log r - i\alpha = -\log z$; e se $\alpha \in]-\pi, \pi]$ si ha anche $-\alpha \in]-\pi, \pi]$ se e solo se $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Insomma, se z non è reale negativo si ha certamente $\log(1/z) = -\log z$. Se invece $z = -r \in \mathbb{R}_-$, con $r > 0$, allora il logaritmo principale di $-r$ è $\log(-r) = \log r + i\pi$, mentre quello di $1/(-r)$ è $\log 1/(-r) = -\log r + i\pi \ne -\log(-r)$. Concludendo: $\log(1/z) = -\log z$ se e solo se z non è reale negativo.

(iii) Si ha $z^2 = r^2\, e^{i(2\alpha)}$. Si ha $2\log z = 2\log r + 2i\alpha$; e si ha $\log(z^2) = \log(r^2) + i(2\alpha)(= 2\log r + 2i\alpha = 2\log z)$ se e solo se $2\alpha \in]-\pi, \pi]$. Si ha $-\pi < 2\alpha \le \pi$ se e solo se $-\pi/2 < \alpha \le \pi/2$. Ne segue: si ha $\log(z^2) = 2\log z$ se e solo se $\mathrm{Re}\, z > 0$, oppure z è immaginario puro con coefficiente positivo (nel piano complesso l'insieme è l'unione di un semipiano aperto con una semiretta aperta che è parte dell'origine del semipiano). □

Esercizio 24. Sia $a > 0$ fissato. Si considerano i solidi:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le a^2,\, 0 \le z \le a\}; \qquad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le a - \sqrt{x^2 + y^2}\};$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - a)^2 \le a^2,\, 0 \le z \le a\}.$$

(i) Dare un nome ai tre solidi e disegnarli; trovarne il volume (si può usare quanto noto dalla geometria elementare).

(ii) Il solido $S = C \smallsetminus E$ si chiama *scodella di Galileo*. Descrivere le $z-$sezioni di S e di K e trovarne l'area.

(iii) Il solido $K \cap S$ si può ottenere facendo ruotare attorno all'asse z un insieme F del piano xz; disegnare F, e trovare il volume di $K \cap S$.

(iv) Calcolare la circuitazione di $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, y^2z, xz^2)$ sul circuito $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, a)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(v) Trovare $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$; calcolandone direttamente il flusso attraverso una superficie bordata da γ verificare la validità della formula di Stokes.

Risoluzione. (i) Chiaramente C è il cilindro circolare retto che ha come base il disco del piano xy di centro l'origine e raggio $a > 0$, ed altezza a (pari al raggio di base); K è il cono circolare retto che ha vertice nel punto $(0, 0, a)$ e per base la stessa base di C; infine E è la semisfera di raggio a con piano diametrale il piano di equazione $z = a$, e vertice nell'origine. I volumi:

$$\lambda_3(C) = (\pi\, a^2)a = \pi\, a^3; \qquad \lambda_3(K) = \pi\, a^2\, a/3 = \pi\, a^3/3; \qquad \lambda_3(E) = 2\pi\, a^3/3.$$

(ii) Le $z-$sezioni di S e di K sono entrambe vuote se $z < 0$ oppure se $z > a$, dato che la proiezione sull'asse z di tutti i solidi considerati è ovviamente $[0, a]$. Per la $z-$sezione di K si trova, se $0 \le z \le a$:

$$K(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z \le a - \sqrt{x^2 + y^2}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \le a - z\},$$

disco di centro l'origine e raggio $a - z$, di area $\pi(a - z)^2$. Per la $z-$sezione di $K \smallsetminus S$, sempre con $0 \le z \le a$:

$$(K \smallsetminus S)(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2,\, x^2 + y^2 + (z - a)^2 > a^2\} =$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 - (z - a)^2 < x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

Si tratta di una corona circolare semiaperta di raggio esterno a e raggio interno $\sqrt{a^2 - (z - a)^2}$, di area $\pi(a^2 - (a^2 - (a - z)^2) = \pi(a - z)^2$ (pari all'area della $z-$sezione di K; questo fatto servì a Galileo per calcolare il volume della sfera, con calcolo diverso da quello fatto quasi 2000 anni prima da Archimede).

(iii) Tutti i solidi considerati sono di rotazione attorno all'asse z (le equazioni che li definiscono sono tra funzioni che dipendono da (x, y) mediante la distanza $\sqrt{x^2 + y^2}$ dall'asse z), quindi tale è anche $K \cap S$.

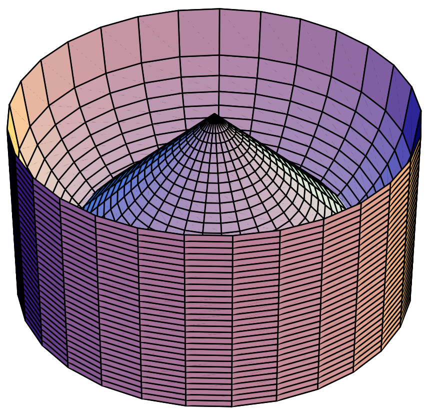


FIGURA 9. Cilindro C, cono K e semisfera E.

Esso quindi si ottiene facendo ruotare l'intersezione F di $K \cap S$ con il semipiano xz delle $x \geq 0$; tale intersezione è descritta da

$$\begin{aligned} F =& \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 0 \leq z \leq a - x,\, x^2 + (z-a)^2 > a^2,\, x \leq a\} = \\ & \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq z \leq a - x,\ x^2 + (z-a)^2 > a^2\}. \end{aligned}$$

Si tratta dei punti del primo quadrante esterni al disco di centro $(0,a)$ e raggio a, al di sotto della retta di equazione $z = a - x$; tale retta incontra la circonferenza del disco in $(\sqrt{2}/2, (2-\sqrt{2})/2)a$; pertanto F si disegna come in figura.

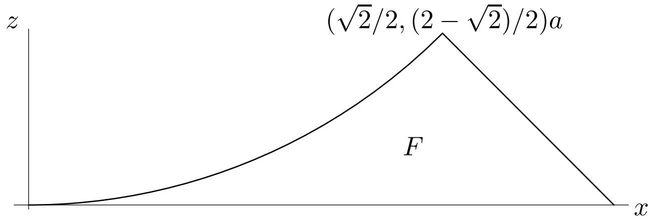


FIGURA 10. L'insieme F.

Volume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Volume}(K \cap S) =& 2\pi \int_F x\, dx dz = \int_{z=0}^{z=(2-\sqrt{2})a/2} \left(\int_{x=\sqrt{a^2-(z-a)^2}}^{x=a-z} x\, dx \right) dz = \\ & \pi \int_{z=0}^{z=(2-\sqrt{2})a/2} \left[x^2\right]_{x=\sqrt{a^2-(z-a)^2}}^{x=a-z} dz = \\ & \pi \int_0^{(2-\sqrt{2})a/2} ((a-z)^2 - (a^2 - (z-a)^2)\, dz = \\ & 2\pi \int_0^{(2-\sqrt{2})a/2} (z-a)^2\, dz - \pi \frac{2-\sqrt{2}}{2} a^3 = \\ & \frac{2\pi}{3} \left[(z-a)^3\right]_0^{(2-\sqrt{2})a/2} - \pi \frac{2-\sqrt{2}}{2} a^3 = \\ & -\frac{\sqrt{2}\pi}{6} a^3 + \frac{2\pi}{3} a^3 - \pi \frac{2-\sqrt{2}}{2} a^3 = \\ & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \pi\, a^3. \end{aligned}$$

(iv) La circuitazione è

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}(x,y,z)\cdot d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t\, a\sin t, a^2\sin^2 t\, a, a\cos t\, a^2)\cdot(-a\sin t, a\cos t, 0)\,dt = \\ &\int_0^{2\pi} a^4(-\cos^2 t\,\sin^2 t+\sin^2 t\cos t)\,dt = \\ &-a^4\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(2t)}{4}\,dt+\frac{a^4}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = \\ &-\frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos(4t))\,dt+0 = \\ &-\frac{a^4}{4}\pi.\end{aligned}$$

(v) Si ha

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \partial_1 & x^2y\\ \vec{e}_2 & \partial_2 & y^2z\\ \vec{e}_3 & \partial_3 & xz^2\end{bmatrix} = -y^2\,\vec{e}_1 - z^2\,\vec{e}_2 - x^2\,\vec{e}_3.$$

Una superficie bordata da γ è ad esempio il disco $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=a$, $(r,\vartheta)\in Q=[0,a]\times[0,2\pi]$, con parametrizzazione che sul bordo induce esattamente quella data per γ (a meno di un ciclo invisibile). Il flusso vale

$$\begin{aligned}&\int_Q \det\begin{bmatrix}-r^2\sin^2\vartheta & \cos\vartheta & -r\sin\vartheta\\ -a^2 & \sin\vartheta & r\cos\vartheta\\ -r^2\cos^2\vartheta & 0 & 0\end{bmatrix} drd\vartheta = \int_Q(-r^3\cos^2\vartheta)\,drd\vartheta = \\ &-\int_0^a r^3\,dr\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \\ &-\frac{a^4}{4}\pi.\end{aligned}$$

Osservazione. Si poteva naturalmente usare per il disco la parametrizzazione cartesiana $x=x$, $y=y$, $z=a$, con $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\}$; si otteneva

$$\int_D \det\begin{bmatrix}-y^2 & 1 & 0\\ -a^2 & 0 & 1\\ -x^2 & 0 & 0\end{bmatrix} dxdy = -\int_D x^2\,dxdy,$$

ma per il calcolo dell'ultimo integrale conviene ricorrere ora alle cordinate polari, e si ritrova il calcolo precedente.

□

Esercizio 25. Si considera il sistema differenziale

$$\begin{cases}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -4x-4y\end{cases}$$

(i) Detta A la matrice del sistema trovare e^{tA}.
(ii) Osservare che il sistema è il sistema equivalente ad un'equazione del secondo ordine; scrivere tale equazione, risolverla e ritrovare in tal modo e^{tA}.
(iii) Servendosi del metodo di variazione delle costanti trovare la soluzione nulla in $t=0$ del sistema

$$\begin{cases}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -4x-4y+\alpha\,e^{-2t}\end{cases}\qquad(\alpha\in\mathbb{R}\text{ costante}).$$

Risoluzione. La matrice A è

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -4\end{bmatrix}\quad\text{con polinomio caratteristico}\quad \zeta^2-\mathrm{Tr}(A)\zeta+\det(A)=\zeta^2+4\zeta+4=(\zeta+2)^2;$$

si ha quindi un unico autovalore doppio $\zeta=-2$; si scrive

$$tA=t(A+2\,1_2-2\,1_2)=2t\,1_2+tN\qquad\text{dove}\quad N=A+2\,1_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

è nilpotente, e commuta con la matrice scalare $-2\,1_2$. Quindi

$$e^{tA} = e^{-2t}\,(1_2 + tN) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix}.$$

(ii) Chiaramente l'equazione è

$$\ddot{x} = -4x - 4\dot{x} \iff \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0;$$

ovviamente il suo polinomio caratteristico è quello della matrice A, e le soluzioni sono quindi

$$x(t) = c_1\, e^{-2t} + c_2\, te^{-2t}, \quad \text{al variare di } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Le matrici risolventi del sistema associato sono le matrici wronskiane (a due righe) delle coppie di soluzioni; troviamo le soluzioni φ, ψ che verificano le condizioni iniziali $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ e $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ l'esponenziale e^{tA} sarà allora la la matrice $\begin{bmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{bmatrix}$. Si ha

$$\dot{x}(t) = -2c_1\, e^{-2t} + c_2\,(1-2t)e^{-2t};$$

se $x(0) = 1$ si ha $c_1 = 1$ e se anche $\dot{x}(0) = 0$ si ha $-2c_1 + c_2 = 0$, da cui $c_2 = 2$; quindi $\varphi(t) = e^{-2t}(1+2t)$, $\varphi'(t) = -4te^{-2t}$. Se invece $x(0) = 0$ si ha $c_1 = 0$, e se anche $\dot{x}(0) = 1$ allora $-2c_1 + c_2 = 1$, da cui $c_2 = 1$; quindi $\psi(t) = e^{-2t}t$, e $\psi'(t) = e^{-2t}(1-2t)$.

(iii) Si cerca la soluzione nella forma $\varphi(t) = e^{tA}u(t)$ e si ottiene (si pone $b(t) = (0, \alpha e^{-2t})$, vettore colonna):

$$Ae^{tA}u(t) + e^{tA}u'(t) = Ae^{tA}u(t) + b(t) \iff e^{tA}u'(t) = b(t) \iff u'(t) = e^{-tA}b(t),$$

da cui

$$u(t) = \int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds = \int_0^t (-\alpha s, \alpha(1+2s))\,ds = \alpha(-t^2/2, t+t^2),$$

ed infine

$$\varphi(t) = e^{tA}u(t) = \alpha\, e^{-2t}\begin{bmatrix} -(1+2t)t^2/2 + t^2 + t^3 \\ \\ 2t^3 + (1-2t)(t+t^2) \end{bmatrix} = \alpha\, e^{-2t}\begin{bmatrix} t^2/2 \\ \\ t - t^2 \end{bmatrix}.$$

□

Esercizio 26. Si considera l'equazione autonoma del secondo ordine

$$y'' = -\cos y \sin y$$

(i) Scrivere il sistema equivalente; un teorema assicura che il problema di Cauchy per tale sistema ha soluzione unica definita su tutto $\mathbb{R}$; enunciarlo e verificare che le ipotesi sono effettivamente soddisfatte.
(ii) Trovarne le soluzioni costanti. È vero che se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è soluzione allora anche $-\varphi$ è soluzione? e $\psi(t) = \varphi(-t)$?
(iii) Trovare per l'equazione l'integrale primo detto dell' energia.
(iv) Trovare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Risoluzione. (i) Il sistema equivalente è, posto $p = y'$:

$$\begin{cases} y' &= p \\ p' &= -\cos y \sin y \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (y', p') = f(y, p),$$

dove $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la funzione vettoriale $f(t, y, p) = (p, -\cos y \sin y)$. Tale funzione vettoriale è continua e globalmente lipschitziana nelle variabili (y, p): le derivate parziali sono infatti $\partial_p f(t, y, p) = (1, 0)$ e $\partial_y f(t, y, p) = (0, \sin^2 y - \cos^2 y) = (0, -\cos(2y))$, entrambe in modulo minori od uguali ad 1. La forma debole del teorema di esistenza ed unicità globale basta.

(ii) Le soluzioni costanti sono gli zeri di cos e di sin e sono quindi le costanti $k\pi/2$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. La funzione a secondo membro è dispari, e quindi se φ è soluzione anche $-\varphi$ lo è $((-\varphi(t))'' = -\varphi''(t) = -(-\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t))$ perchè φ è soluzione; e $-\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(t)) = \cos(-\varphi(t))\sin(-\varphi(t))$ per parità di cos e disparità di sin). Inoltre $\psi(t) = \varphi(-t)$ è ancora soluzione, dato che la funzione a secondo membro non dipende esplicitamente da y': si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$; ma si ha $\varphi''(-t) = -\cos\varphi(-t)\sin\varphi(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi ψ è soluzione.

(iii) "Moltiplicando per y' ed integrando" si ottiene $(y')^2/2 = \cos^2 y/2 + c$ da cui $(y')^2/2 - \cos^2 y/2 = c$; l'integrale dell'energia è

$$E(y, y') = \frac{(y')^2}{2} - \frac{\cos^2 y}{2}.$$

(iv) La soluzione essendo costante sull'integrale primo si deve avere

$$\frac{(y')^2}{2} - \frac{\cos^2 y}{2} = \frac{(y'(0))^2}{2} - \frac{\cos^2 y(0)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

quindi $(y')^2 = \cos^2 y$ da cui $y' = \pm \cos y$; dovendo essere $y'(0) = 1$ con $y(0) = 0$ si sceglie il segno $+$, e separando le variabili si ha

$$\frac{y'}{\cos y} = 1 \iff \frac{\cos y\, y'}{\cos^2 y} = 1 \iff \operatorname{setttanh} \sin y = t,$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo integrato fra 0 e t); ne segue $\sin y = \tanh t$ ed infine, ricordando che è $y(0) = 0$:

$$y = \arcsin \tanh(t).$$

Osservazione. L'equazione è sostanzialmente quella del pendolo semplice, potendosi scrivere come $y'' = -\sin(2y)/2$, e diventa esattamente quella del pendolo con la posizione $x = 2y$; si ha infatti $x'' = 2y''$ e quindi l'equazione nella variabile dipendente x è $x'' = -\sin x$. La soluzione particolare trovata è una delle separatrici del pendolo.

□

Matematica 4F–Fisica–Sessione estiva–12 luglio 2005

Esercizio 27. Si sente dire che "una serie di potenze è derivabile termine a termine". Precisare quest'enunciato grossolano (e, così com'è, privo di senso), dicendo quali teoremi valgono.

Calcolare poi la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2},$$

dicendo per quali $z \in \mathbb{C}$ vale il risultato. Infine, calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, z^n,$$

sempre dicendo per quali $z \in \mathbb{C}$ vale il risultato.

Risoluzione. Per l'enunciato si rinvia alle dispense. È evidente, a vista, che la serie data è ottenuta derivando due volte termine a termine la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. All'interno del disco di convergenza di tale serie, che è il disco unitario aperto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ si ha dunque, ricordando che è $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ per $|z| < 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2} = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) = \frac{2}{(1-z)^3} \qquad |z| < 1.$$

Si scrive poi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, z^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nz^n = \frac{z}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\, z^{n-1},$$

e se si pone $n-1 = k-2$, cioè $n = k-1$, l'ultima serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, z^{k-2} = \frac{2}{(1-z)^3} \qquad |z| < 1;$$

in definitiva si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, z^n = \frac{z}{(1-z)^3} \qquad |z| < 1.$$

□

Esercizio 28. Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ la palla chiusa di $\mathbb{R}^3$ con centro l'origine e raggio $a > 0$. Fissati p, q con $-a \le p < q \le a$ si considera il segmento sferico

$$B(p,q) = \{(x,y,z) \in B : p \le z \le q\}.$$

(i) Trovare il volume di $B(p,q)$.
(ii) Trovare l'area della porzione di frontiera di $B(p,q)$ che sta sulla superficie della sfera, mostrando che essa è funzione soltanto di $q-p$ (suggeriamo di usare coordinate sferiche).

Fissato ora α, con $0 < \alpha < \pi/2$, si considera il rettangolo R_α inscritto nel cerchio del piano xy con centro l'origine e raggio a, con i lati paralleli agli assi coordinati, che ha fra i suoi vertici $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ (fare un disegno). Sia Q_α la porzione di palla B nel semispazio $z \ge 0$ che si proietta su R_α, e sia S_α quella porzione di frontiera di Q_α che sta sulla superficie della sfera (vedi figura). Servendosi dei risultati prima

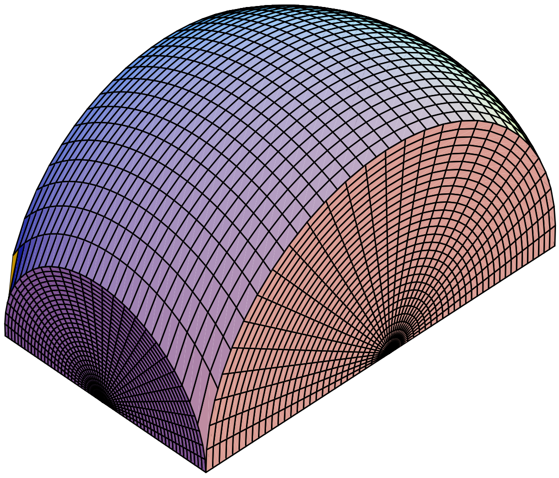


Figura 11. L'insieme Q_α.

ottenuti (non occorre calcolare nessun altro integrale!):

(iii) Trovare il volume di Q_α.
(iv) Trovare l'area di S_α
(v) Esplicitare i calcoli di (iii) ed (iv) nel caso particolare in cui R_α sia un quadrato.

Risoluzione. (i) Conviene integrare l'area delle $z-$sezioni $B(p,q)(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p \le z \le q,\ (x,y,z) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2 - z^2\}$, che sono dischi di raggio $\sqrt{a^2-z^2}$ e quindi hanno area $\pi(a^2-z^2)$

$$\text{Volume}(B(p,q)) = \int_{z=p}^{z=q} \lambda_2(B(p,q)(z))\,dz = \pi \int_p^q (a^2-z^2)\,dz =$$
$$\pi\left(a^2(q-p) - \left(\frac{q^3}{3} - \frac{p^3}{3}\right)\right) = \pi(q-p)\left(a^2 - \frac{p^2+pq+q^2}{3}\right).$$

(ii) Si comprende che la porzione in questione è quella tra le due colatitudini $\arccos(q/a)$ ed $\arccos(p/a)$: essendo $z = a\cos\vartheta$ sulla sfera si ha

$$p \le z \le q \iff p/a \le \cos\vartheta \le q/a \iff \alpha = \arccos(q/a) \le \vartheta \le \arccos(p/a) = \beta,$$

(si ricordi che l'arcocoseno è strettamente decrescente). L'elemento d'area in coordinate sferiche è $a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi$ per cui

$$\text{Area}(S(p,q)) = \int_{[\alpha,\beta]\times[0,2\pi]} a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi = 2\pi a^2 \int_\alpha^\beta \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi a^2[-\cos\vartheta]_\alpha^\beta = 2\pi a^2(\cos\alpha - \cos\beta) =$$
$$2\pi a^2\left(\frac{q}{a} - \frac{p}{a}\right) = 2\pi a(q-p).$$

(iii) L'insieme Q_α è la mezza palla a cui sono state tolte 4 mezze calotte sferiche. Le due mezze calotte sferiche con "vertice" sull'asse x hanno complessivamente volume pari a quello di un'unica calotta corrispondente ad un $B(p,q)$ con $q = a$ e $p = a\cos\alpha$, e quindi di volume

$$\pi(a - a\cos\alpha)\left(a^2 - a^2\frac{\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1}{3}\right) = \pi\frac{a^3}{3}(1-\cos\alpha)(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha));$$

analogamente le due mezze calotte con "vertice" sull'asse y hanno complessivamente volume pari a quello di un'unica calotta $B(p,q)$ con $q = a$ e $p = \sin\alpha$, di volume

$$\pi(a - a\sin\alpha)\left(a^2 - a^2\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha + 1}{3}\right) = \pi\frac{a^3}{3}(1-\sin\alpha)(2-\sin\alpha-\sin^2\alpha)).$$

Il volume richiesto è quindi

$$\begin{aligned}\text{Volume}(Q_\alpha) &= \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{\pi}{3}a^3(1-\cos\alpha)(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha)) - \frac{\pi}{3}a^3(1-\sin\alpha)(2-\sin\alpha-\sin^2\alpha)) = \\ &\frac{\pi}{3}a^3(2-(1-\cos\alpha)(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha)-(1-\sin\alpha)(2-\sin\alpha-\sin^2\alpha));\end{aligned}$$

che si scrive anche, dopo alcuni calcoli:

$$\text{Volume}(Q_\alpha) = \frac{\pi}{3}a^3((\cos\alpha+\sin\alpha)(2+\cos\alpha\sin\alpha)-2)$$

(iv) Analogo ragionamento per la superficie; si ha

$$\text{Area}(S_\alpha) = 2\pi a^2 - 2\pi a^2(1-\cos\alpha) - 2\pi a^2(1-\sin\alpha) = 2\pi a^2(\cos\alpha+\sin\alpha-1).$$

(v) Il quadrato è per $\alpha = \pi/4$; si ha

$$\text{Volume}(Q_{\pi/4}) = \frac{\pi}{3}a^3(\sqrt{2}(2+1/2)-2) = (5\sqrt{2}-4)\frac{\pi}{6}a^3,$$

e

$$\text{Area}(S_{\pi/4}) = 2(\sqrt{2}-1)\pi a^2.$$

□

Esercizio 29. Si considera l'equazione del secondo ordine

$$(*) \qquad \ddot{y} = -\frac{1}{y^2} \qquad (y > 0).$$

(i) Scrivere il sistema equivalente (porre $\dot{y} = v$).
(ii) Scrivere l'integrale dell'energia $E(y,v)$ per l'equazione data, scegliendo la costante in modo che sia $\lim_{y\to+\infty} E(y,0) = 0$.
(iii) Per ogni $y_0 > 0$ fissato, disegnare nel piano delle fasi (y,v) la traiettoria della soluzione $(\varphi,\dot{\varphi})$ del problema di Cauchy dato da (*) con condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$.
(iv) Detto $]\alpha,\beta[$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione φ di cui in (iii), calcolare $\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t)$.
(v) Calcolare β.

Risoluzione. (i) Posto $\dot{y} = v$ il sistema equivalente si scrive

$$\begin{cases}\dot{y} &= v\\ \dot{v} &= -\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$$

(ii) L'integrale dell'energia si trova "moltiplicando per $\dot{y}$ ed integrando":

$$\dot{y}\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{y^2} \iff \frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{1}{y} + k \iff \frac{v^2}{2} - \frac{1}{y} = k.$$

Quindi $E(y,v) = v^2/2 - 1/y$ è integrale dell'energia, per il quale la condizione $\lim_{y\to+\infty} E(y,0) = \lim_{y\to\infty}(-1/y) = 0$ è già verificata.

(iii) Per ogni $y_0 > 0$ fissato la traiettoria ha equazione

$$E(y,v) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{y_0} \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} + \frac{v^2}{2} \iff y = \frac{2}{2/y_0 + v^2};$$

si studia facilmente questa traiettoria come grafico della funzione $v \mapsto 2/(2/y_0 + v^2)$; è una curva a campana, simmetrica rispetto all'asse y, che ha limite nullo per $v \to \pm\infty$, e quindi ha l'asse v come asintoto. Il verso di percorrenza è dall'alto verso il basso.

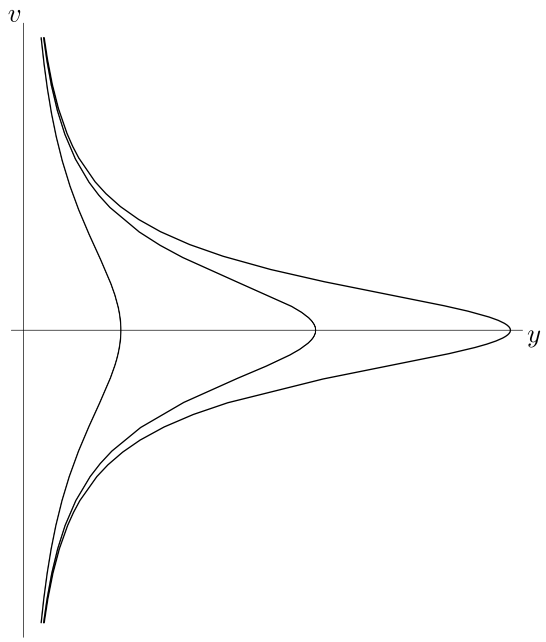


FIGURA 12. Alcune traiettorie di soluzioni con velocità iniziale nulla.

(iv) Dalla traiettoria disegnata è evidente che si avrà $\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t)=0$. Per dimostrarlo rigorosamente si può osservare che essendo $\dot\varphi(t)<0$ per $t>0$ (come risulta dall'integrale primo, o dal fatto che $\dot\varphi(0)=0$, e $\dot\varphi$ è strettamente decrescente perché $\ddot\varphi(t)<0$) la funzione φ è strettamente decrescente su $]0,\beta[$ ed essendo positiva ha limite y_β finito e non negativo. Anche $\dot\varphi(t)$, decrescente e negativa, ha limite $y'_\beta\ge-\infty$ per $t\to\beta^-$. Se i due limiti y_β, y'_β fossero entrambi finiti, (y_β, y'_β) sarebbe un equilibrio, che invece non esiste. Ma allora $y'_\beta=-\infty$, ed allora $y_\beta=0$.

(v) Dall'integrale primo si ottiene

$$(\dot\varphi(t))^2=\frac{2}{\varphi(t)}-\frac{2}{y_0},\quad \text{da cui}\quad \dot\varphi(t)=\pm\sqrt{\frac{2}{\varphi(t)}-\frac{2}{y_0}}.$$

Da quanto sopra visto è evidente che si deve scegliere il segno $-$; si ottiene, separando le variabili

$$\frac{\dot\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1/\varphi(t)-1/y_0}}=-\sqrt2,\quad \text{da cui}\quad \int_0^\beta\frac{\dot\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1/\varphi(t)-1/y_0}}=-\sqrt2\,\beta.$$

Posto $y=\varphi(t)$ si ottiene

$$\int_{y_0}^0\frac{dy}{\sqrt{1/y-1/y_0}}=-\sqrt2\,\beta,$$

e posto ancora $y=y_0\eta$ si ottiene

$$y_0^{3/2}\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1/\eta-1}}=\sqrt2\,\beta.$$

L'integrale si calcola subito:

$$\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1/\eta-1}}=\int_0^1\frac{\sqrt\eta}{\sqrt{1-\eta}}\,d\eta=(\text{posto }\eta=\cos^2\vartheta)=$$
$$\int_{\pi/2}^0\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(-2\cos\vartheta\sin\vartheta)\,d\vartheta=2\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2\vartheta))\,d\vartheta=\frac{\pi}{2}.$$

Si ottiene quindi

$$\beta=\sqrt2\,\frac{\pi}{4}\,y_0^{3/2}.$$

OSSERVAZIONE. L'equazione è quella del moto di un punto materiale che si muove su una retta, senza attrito, con accelerazione proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dall'origine, e diretta verso l'origine stessa (è il moto di un pianeta che non ha componenti trasversali di velocità).

□

Esercizio 30. (i) Risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0.$$

(ii) Mostrare come dalle soluzioni della precedente equazione si ottengano tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{cases}$$

e scrivere tutte queste soluzioni (se non si è capaci di ricondursi all'equazione precedente, risolvere il sistema al solito modo).

(iii) Da quanto fatto, ottenere tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 \end{cases}$$

(iv) Esistono soluzioni non banali del sistema precedente che hanno limite finito per $t \to +\infty$? se sì, quali sono?

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$, con radici $\zeta = (-1/2 \pm i\sqrt{3}/2)$ e quindi integrale generale (reale):

$$y(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos((\sqrt{3}/2)t) + c_2 \sin((\sqrt{3}/2)t)) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Sostituendo $\dot{x}_2$ a $-x_1$ nella prima equazione si ottiene $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + x_2$; derivando la seconda si ottiene $\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1$ di modo che la prima diventa $-\ddot{x}_2 = \dot{x}_2 + x_2$ e cioè $\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + x_2 = 0$, ovvero l'equazione di (i). Ne viene che se $u(t)$ è una soluzione dell'equazione in (i), una soluzione del sistema in (ii) è la coppia di funzioni $(-\dot{u}(t), u(t))$, e viceversa. Le soluzioni del sistema in (ii) sono quindi

$$e^{-t/2}\begin{bmatrix} (c_1/2 - c_2\sqrt{3}/2)\cos((\sqrt{3}/2)t) + (c_1\sqrt{3}/2 + c_2/2)\sin((\sqrt{3}/2)t) \\ c_1\cos((\sqrt{3}/2)t) + c_2\sin((\sqrt{3}/2)t)) \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

o meglio

$$\frac{e^{-t/2}}{2}\left(c_1\begin{bmatrix} \cos((\sqrt{3}/2)t) + \sqrt{3}\sin((\sqrt{3}/2)t) \\ 2\cos((\sqrt{3}/2)t) \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\cos((\sqrt{3}/2)t) + \sin((\sqrt{3}/2)t) \\ 2\sin((\sqrt{3}/2)t) \end{bmatrix}\right).$$

(iii) La terza equazione si scrive

$$\dot{x}_3 + x_3 = x_2 = e^{-t/2}(c_1\cos((\sqrt{3}/2)t) + c_2\sin((\sqrt{3}/2)t));$$

moltiplicando ambo i membri per e^t si ottiene

$$\frac{d}{dt}(e^t x_3(t)) = e^{t/2}(c_1\cos((\sqrt{3}/2)t) + c_2\sin((\sqrt{3}/2)t));$$

integrando ambo i membri si ha

$$e^t x_3(t) = \int (e^{t/2}(c_1\cos((\sqrt{3}/2)t) + c_2\sin((\sqrt{3}/2)t)))\,dt + c_3;$$

per l'integrale si guarda sulla tabella e si trova

$$\int e^{t/2}\cos((\sqrt{3}/2)t)\,dt = \frac{e^{t/2}}{1/4+3/4}((1/2)\cos((\sqrt{3}/2)t) + (\sqrt{3}/2)\sin((\sqrt{3}/2)t)) + k;$$
$$\int e^{t/2}\sin((\sqrt{3}/2)t)\,dt = \frac{e^{t/2}}{1/4+3/4}(-(\sqrt{3}/2)\cos((\sqrt{3}/2)t) + (1/2)\sin((\sqrt{3}/2)t)) + k,$$

e sostituendo nella precedente ed esplicitando x_3 si trova

$$x_3(t) = \frac{e^{-t/2}}{2}(c_1(\cos((\sqrt{3}/2)t) + \sqrt{3}\sin((\sqrt{3}/2)t)) + c_2(-\sqrt{3}\cos((\sqrt{3}/2)t) + \sin((\sqrt{3}/2)t))) + c_3 e^{-t}.$$

(iv) È immediato vedere che tutte le soluzioni del sistema hanno limite nullo per $t \to +\infty$. □

Matematica 4F per Fisica–I Recupero–31 agosto 2005

Esercizio 31. Data l'equazione, nell'incognita $w \in \mathbb{C}$

$$\tan w = a \quad \text{cioè} \quad \frac{\sin w}{\cos w} = a,$$

dire per quali $a \in \mathbb{C}$ essa ammette soluzioni; trovare poi tutte le soluzioni dell'equazione. È vero che se $a \in \mathbb{R}$ l'equazione ha solo soluzioni reali?

Risoluzione. Usando le formule di Eulero si ottiene

$$\tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1},$$

e l'equazione si scrive

$$e^{2iw} - 1 = ia(e^{2iw} + 1) \iff (1 - ia)e^{2iw} = 1 + ia.$$

Se $1 - ia = 0$ l'equazione non ha soluzioni, e così anche se $1 + ia = 0$, dato che l'esponenziale anche complesso non è mai nullo. Quindi se $a = \pm i$ non ci sono soluzioni. Altrimenti, l'equazione equivale a

$$e^{2iw} = \frac{1 + ia}{1 - ia} \iff 2iw = \log\frac{1 + ia}{1 - ia} + 2k\pi i \iff w = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + ia}{1 - ia} + k\pi,$$

dove log è il logaritmo principale. Se $a \in \mathbb{R}$ si osserva che $\operatorname{Im}(1 \pm ia) = \pm a$, mentre $\operatorname{Re}(1 \pm ia) = 1 > 0$, e $|1 \pm ia| = \sqrt{1 + a^2}$. Ne segue che $\arg(1 \pm ia) = \arctan(\pm a)$, e $|(1 + ia)/(1 - ia)| = 1$, ed inoltre, avendosi $-\pi < 2\arctan a < \pi$ si ha anche

$$\arg\left(\frac{1 + ia}{1 - ia}\right) = \arctan a - (\arctan(-a)) = 2\arctan a,$$

e quindi

$$\log\frac{1 + ia}{1 - ia} = \log 1 + i(2\arctan a) = 2i\arctan a,$$

e quindi le soluzioni sono

$$w = \arctan a + k\pi,$$

esattamente quelle che conoscevamo già, tutte reali.

□

Esercizio 32. (i) Calcolare l'integrale

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,1]} \frac{x}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)}\, dxdy.$$

(ii) Servirsi di (i) per calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\log y}{y^2 - 1}\, dy;$$

è utile sapere che si ha, per $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq \pm 1$:

$$\frac{x}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)} = \frac{1}{y^2 - 1}\left(\frac{xy^2}{1 + x^2y^2} - \frac{x}{1 + x^2}\right).$$

Risoluzione. (i) L'integrando è positivo; per il teorema di Tonelli l'integrale esiste finito se e solo se l'integrale iterato esiste finito; conviene integrare prima rispetto ad y:

$$\int_{[0,\infty[\times[0,1]} \frac{x}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)}\, dxdy = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{1 + x^2}\int_{y=0}^{y=1} \frac{x}{1 + x^2y^2}\, dy =$$

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{1 + x^2}\left[\arctan(xy)\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$\left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}.$$

(ii) Facendo l'integrale iterato in ordine inverso si trova

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,1]} \frac{x}{(1 + x^2)(1 + x^2y^2)}\, dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{y^2 - 1}\left(\frac{xy^2}{1 + x^2y^2} - \frac{x}{1 + x^2}\right) dx =$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{2(y^2-1)} \left[\log(1+x^2y^2) - \log(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=\infty} dy =$$
$$\int_0^1 \frac{\log(y^2)}{2(1-y^2)}\, dy = \int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1}\, dy,$$

dove si è usato il fatto che se $y > 0$ si ha:

$$\lim_{x\to\infty} (\log(1+x^2y^2) - \log(1+x^2)) = \lim_{x\to\infty} \log \frac{1+x^2y^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \log \frac{1/x^2+y^2}{1/x^2+1} = \log y^2 = 2\log y.$$

Si ottiene quindi

$$\int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1}\, dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

Esercizio 33. Si considera il solido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le a^2;\ 0 \le z \le h(1-(y/a)^2)\} \qquad h, a > 0 \quad \text{costanti.}$$

(i) Calcolare il volume di S.
(ii) Sia $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z/2)$; calcolare il flusso di $\vec{F}$ che esce dalle singole porzioni di frontiera di S.
(iii) Sia γ il circuito che borda la porzione di frontiera di S che sta sulla quadrica di equazione $z = h(1-(y/a)^2)$. Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo γ, sia direttamente che usando la formula di Stokes; discutere l'orientazione di γ.

Risoluzione. (i) Il solido S è normale rispetto al piano (x,y) e si ha allora subito, se indichiamo con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2\}$ la proiezione di S sul piano xy:

$$\text{Volume}(S) = \int_D h\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right) dxdy = h\,\text{Area}(D) - \frac{h}{a^2}\int_{[0,a]\times[0,2\pi]} r^2 \sin^2\vartheta\, r\, dr d\vartheta =$$
$$h\pi a^2 - \frac{h}{a^2}\int_0^a r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta = h\pi a^2 - \frac{h}{a^2}\frac{a^4}{4}\pi = \frac{3}{4}h\pi a^2.$$

(ii) La divergenza di $\vec{F}$ è $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = 1/2$; per il teorema della divergenza il flusso totale di $\vec{F}$ che esce da S è allora pari al volume di S diviso 2 e cioè a $3h\pi a^2/8$. La frontiera di S consta di tre parti: la base D sopra usata per integrare, la "superficie laterale" L, porzione di frontiera sul cilindro di equazione $x^2+y^2 = a^2$, e la parte P sul cilindro parabolico, la porzione a cui si allude in (iii).

Il campo si decompone come

$$\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,0) + (0,0,z/2);$$

il primo campo $(-y,x,0)$ è un ben noto campo piano le cui linee di flusso sono circoli centrati sull'asse z; il flusso di esso attraverso D ed L è chiaramente nullo, essendo il campo parallelo a tali superficie. Il flusso di $(0,0,z/2)$ attraverso L è nullo per la stessa ragione, mentre quello attraverso D è nullo perché su D tale campo è nullo. Resta quindi solo il flusso uscente da P, che è tutto il flusso uscente, e cioè $3h\pi a^2/8$.

(iii) La porzione di frontiera, che è stata chiamata P, ha un'ovvia parametrizzazione cartesiana come $x = x$, $y = y$, $z = h(1-(y/a)^2)$, con $(x,y) \in D$. Sul bordo si ha la parametrizzazione $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, h(1-\sin^2 t)) = (a\cos t, a\sin t, h\cos^2 t)$, $t \in [0,2\pi]$. La circuitazione è allora

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \left(-a\sin t(-a\sin t) + a\cos t(a\cos t) + \frac{h}{2}\cos^2 t(-2\cos t\sin t\right) dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \left(a^2 + h\cos^3 t(-\sin t)\right) dt = 2\pi a^2.$$

Il rotore di $\vec{F}$ viene $(0,0,2) = 2\vec{e}_3$. Il flusso attraverso P (orientata dalla parametrizzazione cartesiana, di cui γ è il bordo coerentemente orientato) viene

$$\int_D \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2hy/a^2 \end{bmatrix} dxdy = \int_D 2\, dxdy = 2\pi a^2.$$

Per maggiore chiarezza presentiamo un disegno di S: si tratta della porzione di cilindro illimitato di raggio a che ha l'asse z come asse, compresa fra il piano xy ed il cilindro parabolico di equazione $z = h(1 - y^2/a^2)$, che ha direttrici parallele all'asse x.

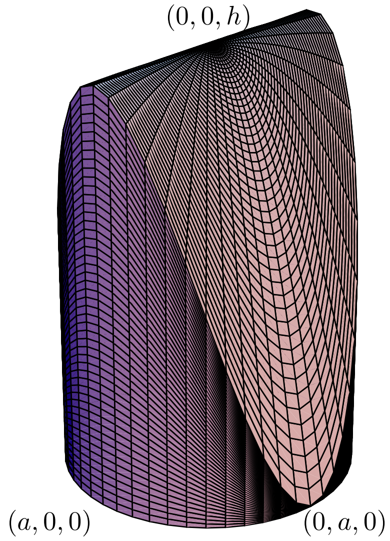


FIGURA 13. Il solido S.

□

ESERCIZIO 34. Si considera l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{y} = -\frac{2}{y^3} \qquad (y > 0).$$

(i) Scrivere il sistema equivalente (porre $\dot{y} = v$).
(ii) Scrivere l'integrale dell'energia $E(y, v)$ per l'equazione data, scegliendo la costante in modo che sia $\lim_{y\to+\infty} E(y, 0) = 0$.
(iii) Per ogni $y_0 > 0$ fissato, disegnare nel piano delle fasi (y, v) la traiettoria della soluzione $(\varphi, \dot{\varphi})$ del problema di Cauchy dato da (*) con condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$.
(iv) Detto $]\alpha, \beta[$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione φ di cui in (iii), calcolare $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t)$.
(v) Calcolare β.

Risoluzione. (i) Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= -\dfrac{2}{y^3} \end{cases}$$

(ii) Moltiplicando per $\dot{y}$ si ottiene

$$\dot{y}\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{y^3} \quad \text{ed integrando} \quad \frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{1}{y^2} + c \quad (c \text{ costante});$$

e quindi $v^2/2 - 1/y^2 = c$, lungo ogni traiettoria. Quindi l'integrale dell' energia è

$$E(y, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{y^2},$$

che chiaramente soddisfa anche alla condizione ulteriore richiesta.

(iii) La traiettoria ha equazione:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y_0^2} \iff \frac{1}{y^2} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{y_0^2} \iff y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v^2 + 2/y_0^2}}.$$

Si tratta di curve a campana facili da disegnare, che sono percorse dall'alto verso il basso.

(iv) Dalla traiettoria si comprende che dovrà essere $\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t) = 0$. Infatti si ha $\varphi''(t) < 0$, ed essendo $\varphi'(0) = 0$ si ha $\varphi'(t) < 0$ per ogni $t \in]0, \beta[$. Quindi φ è strettamente decrescente in $]0, \beta[$, ed essendo $\varphi(t) > 0$ il limite $y_\beta = \lim_{t\to\beta^-}\varphi(t)$ esiste ed è $y_\beta \geq 0$. Se fosse $y_\beta > 0$ anche $\varphi'(t)$ avrebbe un limite v_β finito; quindi (y_β, v_β) sarebbe un equilibrio, ma non esistono equilibri.

(v) Dall'integrale primo si ottiene, per $t \in]0, \beta[$:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2}\sqrt{1/y^2 - 1/y_0^2},$$

da cui, separando le variabili

$$\frac{dy}{\sqrt{1/y^2 - 1/y_0^2}} = -\sqrt{2} \quad \text{ed integrando} \quad \int_{y_0}^{0} dy\sqrt{1/y^2 - 1/y_0^2} = -\sqrt{2}\beta;$$

posto $\eta = y/y_0$ si ottiene

$$\sqrt{2}\beta = y_0^2 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1/\eta^2 - 1}} = y_0^2 \int_0^1 \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\, d\eta = y_0^2 \left[-\sqrt{1-\eta^2}\right]_{\eta=0}^{\eta=1} = y_0^2.$$

Quindi

$$\beta = \frac{y_0^2}{\sqrt{2}}.$$

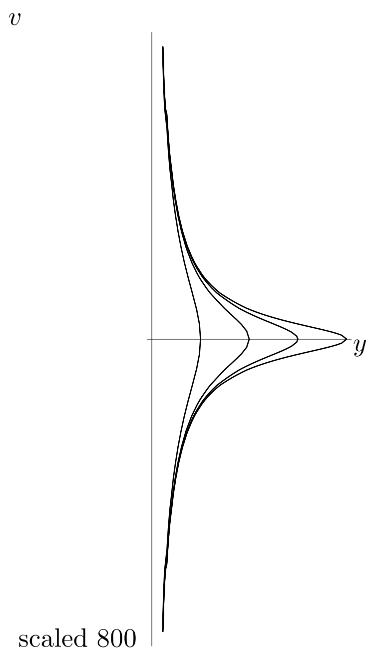


FIGURA 14. Traiettorie: sono percorse dall'alto verso il basso.

□

MATEMATICA 4F PER FISICA–II RECUPERO–19 SETTEMBRE 2005

ESERCIZIO 35. Si trovi l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Detta $f(x)$ la somma della precedente serie, dimostrare poi che per x interno all'intervallo di convergenza la funzione f è soluzione dell'equazione differenziale

$$x\,y'' + y' + x\,y = 0.$$

Risoluzione. Usando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2(n+1)}}{|x|^{2n}}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{((n+1)!)^2 2^{2(n+1)}}=\frac{|x|^2}{2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2n^2}=0,$$

si trova che la serie converge per ogni x, e quindi il raggio di convergenza è $+\infty$.

Le derivate di f si ottengono derivando termine a termine:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n-1}},\qquad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(2n-1)\,\frac{x^{2(n-1)}}{(n!)^2 2^{2n-1}}\qquad (x\in\mathbb{R});$$

Quindi

$$x\,f''(x)+f'(x)+x\,f(x)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(2n-1)\,\frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n!)^2 2^{2n}}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n-1}}(n(2n-1)+n)x^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n!)^2 2^{2n}};$$

Se nell'ultima somma si pone $2n+1=2k-1$, e cioè $n=k-1$, essa diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{((k-1)!)^2 2^{2k-2}},$$

e tornando a porre n in luogo di k, e sommando i monomi simili nella prima somma si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2}{(n!)^2 2^{2n-1}}-\frac{1}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}\right)x^{2n-1};$$

e chiaramente si ha $2n^2/((n!)^2 2^{2n-1})=1/(((n-1)!)^2 2^{2n-2})$. L'ultima serie di potenze scritta è quindi la serie nulla. □

Esercizio 36. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A y\,dydz\quad\text{dove}\quad A=\{(y,z):\,0\le z\le\cosh y,\ 0\le y\le 1\}$$

Nel piano yz si considera poi il grafico Γ della funzione $z=\cosh y$, con $y\in[0,1]$. Sia S la superficie ottenuta con una rotazione completa di Γ attorno all'asse z, e sia E il solido delimitato da tale superficie, dal piano $z=0$, e dal cilindro di equazione $x^2+y^2=1$. Disegnare E; calcolare il volume di E, e l'area della sua frontiera.

Risoluzione. Con la formula di riduzione si ottiene

$$\int_A y\,dydz=\int_{y=0}^{y=1}y\left(\int_{z=0}^{z=\cosh y}dz\right)dy=\int_0^1 y\cosh y=[y\sinh y]_0^1-\int_0^1\sinh y\,dy=$$
$$\sinh 1+1-\cosh 1=\left(=1-\frac{1}{e}\right);$$

Il solido E è esattamente quello ottenuto ruotando A attorno all'asse z. Per il teorema di Guldino si ha

$$\mathrm{Volume}(E)=2\pi\int_A y\,dydz=2\pi(\sinh 1-\cosh 1+1)=2\pi\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

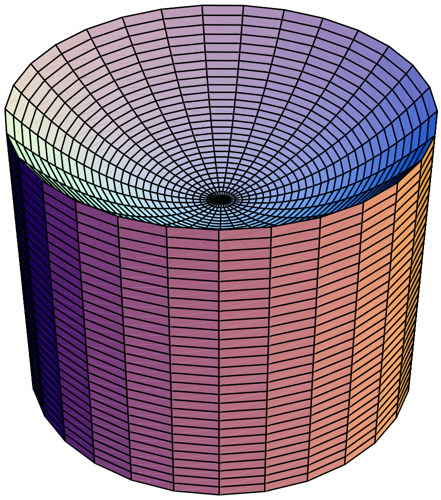
Il teorema di Guldino per le superficie dice che l'area di S è

$$\mathrm{Area}(S)=2\pi\int_\Gamma y\,ds_\Gamma=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+\sinh^2 y}\,dy=2\pi\int_0^1 y\cosh y\,dy,$$

(la curva cartesiana $z=\cosh y$ ha $\sqrt{1+\sinh^2 y}\,dy=\cosh y\,dy$ come elemento di lunghezza ds_Γ).

L'integrale è appena stato calcolato; quindi

$$\mathrm{Area}(S)=2\pi(\sinh 1-\cosh 1+1)=2\pi\left(1-\frac{1}{e}\right).$$



scaled 600

FIGURA 15. Il solido E.

(numericamente pari al volume di E). L'area complessiva della frontiera è quindi

$$\mathrm{Area}(\partial E) = \mathrm{Area}(S) + \text{Area base} + \text{Area laterale} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \pi + 2\pi\cosh 1.$$

□

ESERCIZIO 37. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{con associato sistema differenziale} \quad (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(x, y, z).$$

(i) Trovare le soluzioni costanti del sistema.
(ii) Trovare le coppie di vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ tali che la funzione $t \mapsto u + tv$ sia soluzione del sistema.
(iii) È vero che l'insieme delle soluzioni del sistema le cui componenti sono polinomi di grado non superiore ad 1 è uno spazio vettoriale? se sì, quale dimensione ha tale spazio?
(iv) Trovare gli autovalori di A, ed una matrice risolvente per il sistema.
(v) Calcolare e^{tA}.

Risoluzione. (i) Chiaramente la costante $u = (u_1, u_2, u_3)$ è soluzione se e solo se si ha $Au = 0$,e cioè se e solo se u risolve il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + 2u_3 & = 0 \\ 10u_1 - 5u_2 + 7u_3 & = 0 \\ 4u_1 - 2u_2 + 2u_3 & = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $(1, 2, 0)$ è una soluzione; e la matrice del sistema ha rango 2, come anche è immediato. Le soluzioni sono quindi $(k, 2k, 0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Imponendo che $\varphi(t) = u + t\,v$ sia soluzione si trova $v = A(u + tv) = A\,u + t\,A\,v$, vera qualunque sia $t \in \mathbb{R}$ se e solo se si ha $A\,v = 0$ e $v = A\,u$. Come visto, $A\,v = 0$ si ha se e solo se $v \in \mathbb{R}\,(1, 2, 0)$; imponendo $v = A\,u$ si trova (con $v = (1, 2, 0)$; poi basta moltiplicare per k):

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + 2u_3 & = 1 \\ 10u_1 - 5u_2 + 7u_3 & = 2 \\ 4u_1 - 2u_2 + 2u_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 + 2u_3 & = 1 \\ -3u_3 & = -3 \\ -2u_3 & = -2 \end{cases}$$

Se ne trae $u_3 = 1$ e $2u_1 - u_2 = -1$; le soluzioni sono $u = (0, 1, 1) + \alpha(1, 2, 0)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Quindi: le soluzioni richieste sono

$$\varphi(t) = (\alpha, 2\alpha + \beta, \beta) + t(\beta, 2\beta, 0) = \alpha(1, 2, 0) + \beta((0, 1, 1) + t(1, 2, 0)) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

è chiaro che si tratta di uno spazio vettoriale 2−dimensionale di funzioni (una sua base è ad esempio la coppia di funzioni $t \mapsto (1, 2, 0)$, costante, e la funzione $t \mapsto (0, 1, 1) + t(1, 2, 0) = (t, 1 + 2t, 1)$).

(iii) Le soluzioni di cui si parla sono proprio quelle appena trovate; la risposta è affermativa, e la dimensione è 2.

(iv) Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned}\det(\zeta\, 1_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta - 2 & 1 & -2 \\ -10 & \zeta + 5 & -7 \\ -4 & 2 & \zeta - 2 \end{bmatrix} = \\ (\zeta - 2)(\zeta^2 + 3\zeta - 10 + 14) - (20 - 10\zeta - 28) - 2(-20 + 4\zeta + 20) = \\ \zeta^3 + 3\zeta^2 + 4\zeta - 2\zeta^2 - 6\zeta - 8 + 8 + 10\zeta - 8\zeta = \\ \zeta^3 + \zeta^2 = (\zeta^2(\zeta + 1).\end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi $\zeta = 0$, doppio, e $\zeta = -1$, semplice. L'autospazio associato a $\zeta = 0$ è naturalmente lo spazio nullo di A, $\ker(A)$, corrispondente alle soluzioni costanti, e le soluzioni del tipo $u+tv$ sono legate all'autospazio generalizzato $\ker(01_3 - A)^2 = \ker A^2$. Ne abbiamo già due linearmente indipendenti; basta una terza, che sarà associata all'autovalore -1, e sarà $e^{-t}u$, dove $u \neq 0$, tale che $Au = -u$, è un autovettore dell'autovalore -1; risolviamo

$$\begin{cases} -3u_1 + u_2 - 2u_3 & = 0 \\ -10u_1 + 4u_2 - 7u_3 & = 0 \\ -4u_1 + 2u_2 - 3u_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad -2u_1 - u_3 = 0 \iff u_3 = -2u_1;$$

le prime due diventano $u_1 + u_2 = 0$ e $4u_1 + 4u_2 = 0$, e quindi $u_2 = -u_1$. Un autovettore è $(1, -1, -2)$, quindi un'altra soluzione, indipendente da quelle polinomiali trovate, è $e^{-t}(1, -1, -2)$.

(iv) Una matrice risolvente ha per colonne tre soluzioni linearmente indipendenti e quindi una è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & e^{-t} \\ 2 & 1 + 2t & -e^{-t} \\ 0 & 1 & -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

(v) La matrice esponenziale si calcola con la formula $\Phi(t)\, \Phi(0)^{-1}$ e risulta essere

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 4t - 1 + 2e^{-t} & 1 - 2t - e^{-t} & 3t - 1 + e^{-t} \\ 8t - 2 - 2e^{-t} & -4t + e^{-t} & 6t + 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & -2 + 2e^{-t} & 3 - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 38. Si considera l'equazione differenziale (di Gompertz)

$$y' = -y \log y \qquad (y > 0).$$

(i) Trovarne le soluzioni costanti, e disegnare sul semipiano $\{(t, y) : y > 0\}$ le zone in cui le soluzioni sono decrescenti e quelle in cui sono crescenti.

(ii) [6] Risolvere il problema di Cauchy dato dall'equazione di Gompertz con la condizione iniziale $y(0) = y_0$, determinando l'intervallo di esistenza $]\alpha, \beta[$ della soluzione massimale, e calcolando i limiti della soluzione agli estremi dell'intervallo di esistenza

Risoluzione. (i) Si ha $-y \log y > 0$ se $0 < y < 1$, $-y \log y = 0$ se $y = 1$, $-y \log y < 0$ se $y > 1$. La soluzione costante è $y = 1$.

(ii) Chiarmente si suppone $y_0 > 0$ ed $y_0 \neq 1$. Si può allora divedere per separare le variabili, ottenendo

$$\frac{y'(t)}{y(t) \log y(t)} = -1 \quad \text{integrando fra 0 e } t \quad \log|\log(y(t))| - \log|\log y_0| = -t,$$

da cui

$$\log|\log(y(t))| = \log|\log y_0| - t \iff |\log(y(t))| = |\log y_0|\, e^{-t};$$

si noti ora che se $y_0 > 0$ si ha $\log y_0 > 1$; per unicità, la soluzione non incontra la costante 1 e quindi si ha $y(t) > 1$ per ogni t nell'intervallo massimale di esistenza, quindi anche $|\log(y(t))| = \log(y(t))$ per ogni tale t; similmente, se $0 < y_0 < 1$ si ha $0 < y(t) < 1$ per ogni $t \in]\alpha, \beta[$ e quindi $|\log(y(t))| = -\log(y(t))$ per ogni tale t, come anche $|\log y_0| = -\log y_0$. Si possono quindi senza errore eliminare i valori assoluti, cioè si ha

$$\log(y(t)) = \log y_0\, e^{-t} \quad \text{da cui} \quad y(t) = e^{\log y_0\, e^{-t}},$$

che si scrive anche

$$y(t) = y_0^{e^{-t}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(nessuna restrizione è apparsa per l'intervallo di esistenza $]\alpha, \beta[$, che quindi coincide con $\mathbb{R}$). Limiti agli estremi dell'intervallo di esistenza:

$$\lim_{t \to +\infty} y_0^{e^{-t}} = 1 \quad (y_0 > 0),$$

ed escluso il caso banale della costante 1 si ottiene poi

$$\lim_{t \to -\infty} y_0^{e^{-t}} = 0 \quad (0 < y_0 < 1); \qquad \lim_{t \to -\infty} y_0^{e^{-t}} = +\infty \quad (y_0 > 1).$$

Alcuni grafici di soluzioni sono come in figura. □

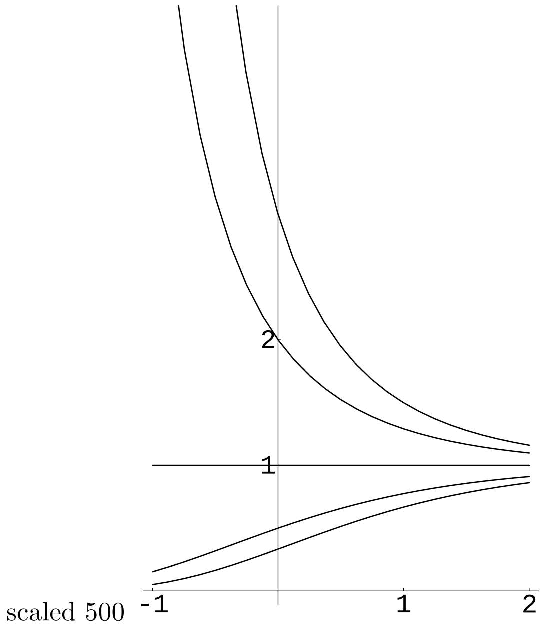


FIGURA 16. Alcune soluzioni dell'equazione di Gompertz.

PRECOMPITINO DI MATEMATICA 4F–23 OTTOBRE 2003

ESERCIZIO 1. Dare la definizione di p–suddivisione $\delta-$fine e di integrale calibrato esteso ad un intervallo compatto.

Per la risoluzione si rinvia alle dispense.

ESERCIZIO 2. Una cupola è rappresentata dal seguente insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h\big(1 - \big((x/a)^2 + (y/b)^2\big)\big),\ z \geq 0\} \quad a, b, h > 0 \text{ sono costanti.}$$

(i) Disegnare la cupola, nell'ipotesi $a = 2, b = 1, h = 3$; mostrare che S è compatto.

(ii) Sia E l'insieme racchiuso tra la cupola e il piano xy; descrivere la $z-$sezione di E e trovarne l'area; calcolare il volume di E.

(iii) Si suppone d'ora in poi $a = b$. La cupola ha spessore che diminuisce con l'altezza, per cui la sua densità superficiale segue una legge quale $\mu(1 - z/h)$, con μ costante. Trovare la massa totale della cupola.

(iv) Una forte pioggia investe la cupola; il campo delle velocità della pioggia è uniforme, ed è $\vec{V}(x, y, z) = -(v, v, v)$ con $v > 0$ costante. Quale volume d'acqua gronda dalla cupola?

Risoluzione. (i) È un paraboloide a sezioni ellittiche; chiaramente S è chiuso (è il luogo degli zeri della funzione continua $z - h(1 - ((x/a)^2 + (y/b))^2)$, intersecato con il semispazio chiuso $\{z \geq 0\}$), ed è limitato essendo $0 \leq z \leq h(1 - ((x/a)^2 + (y/b))^2) \leq h$, e quindi $0 \leq z \leq h$, ed anche $((x/a)^2 + (y/b))^2 \leq 1$, per cui $(x/a)^2 \leq 1$ ed anche $(y/b)^2 \leq 1$, da cui $|x| \leq a$ e $|y| \leq b$; S è racchiuso nel parallelepipedo $[-a, a] \times [-b, b] \times [0, h]$. Il disegno è come in figura.

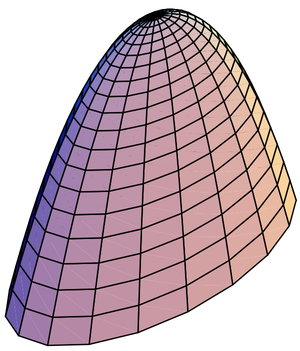


FIGURA 1. La cupola S, paraboloide ellittico.

(ii) Fissato $z \in [0, h]$ la z sezione $E(z)$ è

$$\begin{aligned} E(z) =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 - z/h\} = \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/(a\sqrt{1 - z/h}))^2 + (y/(b\sqrt{1 - z/h}))^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

ellisse di centro l'origine e semiassi $a\sqrt{1 - z/h}$, $b\sqrt{1 - z/h}$, che ha quindi area $\pi ab(1-z/h)$. Per il volume di E si ha

$$\lambda_3(E) = \int_{z=0}^{z=h} \lambda_2(E(z))\, dz = \int_0^h \pi ab \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \pi ab \left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{\pi}{2} abh.$$

(iii) L'elemento d'area (usiamo coordinate cartesiane) è

$$\sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2}\, dxdy = \sqrt{1 + h^2 \frac{4x^2}{a^4} + h^2 \frac{4y^2}{a^4}}\, dxdy = \sqrt{1 + (2h/a^2)^2(x^2 + y^2)}\, dxdy;$$

per cui la massa totale è

$$m = \int_S z\, d\sigma = \int_D \mu \frac{x^2 + y^2}{a^2} \sqrt{1 + (2h/a^2)^2(x^2 + y^2)}\, dxdy =$$

$(D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2\})$

$$\int_{[0,a]\times[0,2\pi]} \mu \frac{r^3}{a^2}\sqrt{1+(2h/a^2)^2 r^2}\, dr d\vartheta = \pi\mu\frac{4h}{a^4}\int_0^a \sqrt{(a^2/(2h))^2 + r^2}\, r^3\, dr.$$

Posto $k = a^2/(2h)$ si deve calcolare l'integrale

$$\int_0^a \sqrt{k^2+r^2}\, r^3\, dr = \frac{1}{2}\int_0^a r^2\sqrt{k^2+r^2}(2r)\, dr = (\text{per parti}) =$$
$$\frac{1}{3}\left[r^2(k^2+r^2)^{3/2}\right]_0^a - \frac{1}{3}\int_0^a (k^2+r^2)^{3/2}(2r)\, dr = \frac{a^2}{3}(k^2+a^2)^{3/2} - \frac{2}{15}\left[(k^2+r^2)^{5/2}\right]_0^a =$$
$$\frac{a^2}{3}(k^2+a^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(k^2+a^2)^{5/2} + \frac{2}{15}k^5 = (k^2+a^2)^{3/2}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{15}(k^2+a^2)\right) + \frac{2}{15}k^5 =$$
$$(k^2+a^2)^{3/2}\left(\frac{a^2}{5} - \frac{1}{15}k^2\right) + \frac{2}{15}k^5 = \frac{a^5}{5}\left((1+(a/2h)^2)^{3/2}(1-(a/2h)^2/3) + \frac{a^5}{48h^2}\right).$$

La massa totale è (non garantisco l' esattezza dei calcoli, ma grosso modo):

$$m = \frac{4}{5}\pi\mu h a\left((1+(a/2h)^2)^{3/2}(1-(a/2h)^2/3) + \frac{a^5}{48h^2}\right).$$

(iv) Il flusso attraverso la cupola è (con orientazione indotta dalla parametrizzazione cartesiana)

$$\int_D \det\begin{bmatrix} -v & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \\ -v & -2hx/a^2 & -2hy/a^2 \end{bmatrix} dxdy = \int_D ((-v)2hx/a^2 - (v2hy/a^2 + v))\, dxdy =$$
$$-v\int_D \left(\frac{2h}{a^2}(x+y)+1\right) dxdy = -v\pi a^2.$$

Il versore normale legato a questa parametrizzazione ha terza componente positiva, e quindi punta verso l' esterno della cupola; a noi serve l'altra orientazione per cui il volume d'acqua incidente è $\pi a^2 v$. □

Esercizio 3. Siano a, b, c, d, γ costanti con $0 < a < b$, $0 < c < d$ e $\gamma > 1$; si consideri l'insieme

$$E = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \colon\ a \le xy \le b,\ c \le x^\gamma y \le d\},$$

(racchiuso in un "ciclo di Carnot" fra due isoterme e due adiabatiche).

(i) Disegnare E supponendo $\gamma = 2$. È vero che E è compatto?
(ii) Mostrare che la trasformazione data da $xy = \xi$, $x^\gamma y = \eta$ stabilisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ su un insieme da precisare; usare tale diffeomorfismo per calcolare l'area di E.
(iii) Dire se l'integrale

$$\int_A x^\gamma y e^{-xy}\sin(xy)\, dxdy \qquad A = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \colon\ c \le x^\gamma y \le d\}$$

è convergente, calcolandolo in caso affermativo.

Risoluzione. (i) L'insieme E in generale è formato dagli y del primo quadrante fra le due iperboli a/x e b/x, e le altre due "iperboli" ad esponente γ, c/x^γ e d/x^γ. Si nota ora che date costanti positive p, q si ha $p/x > q/x^\gamma$ per $x^{\gamma-1} > q/p$ e quindi per $x > (q/p)^{1/(\gamma-1)}$; per $0 < x < (q/p)^{1/(\gamma-1)}$ si ha invece $p/x < q/x^\gamma$ Ne segue che non ci sono punti di E per $x > \beta = (d/a)^{1/(\gamma-1)}$ e nemmeno per $x < \alpha = (c/b)^{1/(\gamma-1)}$. Le prime coordinate di E sono quindi limitate tra α e β, si ha $\alpha \le x \le \beta$ per ogni $(x,y) \in E$ ed allo stesso modo si vede che lo sono le seconde, che in ogni caso non superano $\max\{1/\alpha, 1/\beta, 1/\alpha^\gamma, 1/\beta^\gamma\}$. Ma la verifica di compattezza può essere fatta più agevolmente poi. Per fare il disegno supponiamo anche $a = c = 1$, $b = d = 2$.

(ii) Stabilisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto in se stesso. Infatti ovviamente $\xi, \eta > 0$ se $x, y > 0$, per cui la funzione trasforma il primo quadrante aperto in se stesso; inoltre si ha $x^\gamma y/(xy) = \eta/\xi$, da cui $x^{\gamma-1} = (\eta/\xi)$ e quindi $x = (\eta/\xi)^{1/(\gamma-1)}$, se $\eta/\xi > 0$; da $xy = \xi$ si trae allora $y = \xi(\eta/\xi)^{-1/(\gamma-1)} = \xi^{1+1/(\gamma-1)}\eta^{-1/(\gamma-1)} = \xi^{\gamma/(\gamma-1)}\eta^{-1/(\gamma-1)}$, se $\xi > 0$, ed $\eta/\xi > 0$. Le inverse sono quindi

$$x = \xi^{-1/(\gamma-1)}\eta^{1/(\gamma-1)}; \qquad y = \xi^{\gamma/(\gamma-1)}\eta^{-1/(\gamma-1)}$$

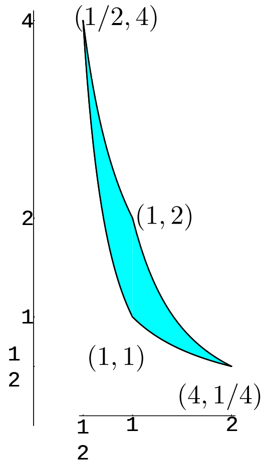


Figura 2. L'insieme E.

Se $\varphi(\xi,\eta) = (\xi^{-1/(\gamma-1)}\eta^{1/(\gamma-1)}, \xi^{\gamma/(\gamma-1)}\eta^{-1/(\gamma-1)})$, φ è quindi un diffeomorfismo del primo quadrante aperto in se stesso, con inversa $\varphi^{-1}(x,y) = (xy, x^\gamma y)$; e poiché ovviamente si ha

$$\varphi^{-1}(E) = \{(\xi,\eta) : \ a \le \xi \le b; \ c \le \eta \le d\} = [a,b] \times [c,d],$$

dato che $\varphi^{-1}(E)$ è compatto anche E è compatto. L'area di E è naturalmente

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} |\det \varphi'(\xi,\eta)| \, d\xi d\eta;$$

è più semplice calcolare lo jacobiano dell'inversa di φ, che è

$$\det \begin{bmatrix} y & x \\ \gamma x^{\gamma-1} y & x^\gamma \end{bmatrix} = (1-\gamma) x^\gamma y;$$

si ha quindi $|\det \varphi'(\xi,\eta)| = 1/|(1-\gamma)x^\gamma y| = 1/((\gamma-1)\eta)$; l'area è quindi

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{d\xi d\eta}{(\gamma-1)\eta} = \frac{1}{\gamma-1} \left(\int_a^b d\xi \right) \left(\int_c^d \frac{d\eta}{\eta} \right) = \frac{(b-a)\log(d/c)}{\gamma-1}.$$

(iii) Usando il precedente cambiamento di variabili φ, siamo ricondotti all'integrale

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \eta e^{-\xi} \sin\xi \frac{d\xi d\eta}{(\gamma-1)\eta} = \frac{1}{\gamma-1} \int_{[0,+\infty[\times[c,d]} e^{-\xi} \sin\xi \, d\xi d\eta$$

Integrando il valore assoluto prima in η e poi in ξ si trova

$$\int_0^\infty (d-c) e^{-\xi} |\sin\xi| \, d\xi < +\infty,$$

dato che l'integrando è maggiorato da $(d-c)e^{-\xi}$, che ha integrale convergente su $[0,+\infty[$. Per il teorema di Tonelli l'integrale è allora finito. Integrando ora senza valore assoluto si trova

$$\frac{d-c}{\gamma-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \sin\xi \, d\xi = \frac{d-c}{\gamma-1} \left[\frac{e^{-\xi}}{2} (\sin\xi - \cos\xi) \right]_0^\infty = \frac{d-c}{2(\gamma-1)}.$$

□

Esercizio 4. Ricordiamo l'operatore I_a che ad ogni funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fa corrispondere la sua funzione integrale di punto iniziale a, $I_a f(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ (vedi Analisi Uno, 15.11). Iterando tale operatore si ha, per $x \in [a,b]$:

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\, ds \right) dt;$$

scrivere l'integrale iterato come integrale 2–dimensionale esteso ad un insieme piano T_x da precisare e disegnare, di una funzione da precisare ed esprimere. Invertendo l'ordine di integrazione, esprimere poi $I_a^2 f$ con un solo integrale unidimensionale (vedi Analisi Uno, 17.8). Spiegare con cura.

Risoluzione. Fissato t fra a ed x si integra per s che varia fra a e t; supponendo di prendere nel piano $\mathbb{R}^2$ la s come prima coordinata e t come seconda, l'integrale iterato è allora sul triangolo $T_x = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le x,\ a \le s \le t\}$, triangolo rettangolo che ha per vertici (a,a), (x,x), (a,x); la funzione è $(s,t) \mapsto f(s)$.

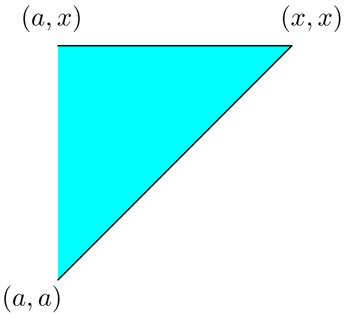


FIGURA 3. L'insieme T_x.

Si ha cioè

$$\int_a^x \left(\int_a^t f(s)\, ds \right) dt = \int_{T_x} f(s)\, ds dt =$$

(scambiando l'ordine di integrazione)

$$\int_{s=0}^{s=x} \left(\int_{t=s}^{t=x} f(s)\, dt \right) ds = \int_0^x (x-s) f(s)\, ds,$$

che è esattamente la formula per la primitiva del secondo ordine di f nulla in a insieme con la sua derivata prima. □

Commenti

Esercizio 2

(i) *La verifica del fatto che S è limitato va fatta con cura, esibendo esplicitamente costanti che maggiorano i moduli delle coordinate, e dando la semplice spiegazione, senza glissare. Io intendevo che i valori $1, 2, 3$ per a, b, h fossero da usare* **solo per il disegno**.

(ii) *Si può dare per noto il fatto che un'ellisse di semiassi p, q abbia area πpq. Se si incontrano figure ben note (rettangoli, cerchi, ellissi, etc.) si ha il pieno diritto di usare le formule note.*

(iii) *Molti credono di poter trovare la massa della cupola integrando in dz $\mu(1 - z/h)(2\pi\sqrt{1 - z/h})$. Questo è* **completamente sbagliato**. *L'elemento d'area su una superficie di rotazione (fatta ruotando attorno all'asse z, con φ come angolo di rotazione, $\rho(z)$ distanza dall'asse di rotazione alla quota z) non è $\rho(z) d\varphi dz$, è invece $\rho(z) d\varphi ds$, dove ds è l'elemento di lunghezza della curva meridiana; manca un fattore, dato che è $ds = dz/\sqrt{1 - \nu_3^2(z)}$, dove $\nu_3(z)$ è la terza componente del versore normale alla superficie in un punto (qualsiasi) sulla $z-$sezione; vedi anche Analisi Due, 7.36.9, a fine pagina.*

(iv) *Ho scritto quest'esercizio prima che facessimo il teorema della divergenza, quindi nella mia mente esso andava risolto in modo diretto, come ho fatto sopra. Ma ovviamente è più semplice calcolare il flusso attraverso la base e dire che in valore assoluto esso concide con il flusso cercato, essendo il flusso totale uscente da E nullo perché il campo ha divergenza nulla, essendo costante.*

Ho anche un po' imbrogliato sull'esercizio (cosa che uno di voi mi ha segnalato) cosciente di farlo. La pioggia cade obliqua, quindi non sempre tutto il flusso attraverso la cupola corrisponde a flusso *entrante effettivamente nella cupola; occorre limitarsi alla porzione di cupola per cui l'angolo fra il campo e la normale interna è acuto. Ora la cupola ha equazione $f(x,y,z) = (x^2+y^2)/a^2 + z/h = 0$, per cui un vettore normale è $\nabla f(x,y,z) = (2x/a^2, 2y/a^2, 1/h)$, che punta verso l'esterno avendo terza componente positiva; occorre trovare gli $(x,y,z) \in S$ per cui il prodotto scalare tra il campo e l'opposto di tale vettore è non negativo, cioè;*

$$v\left(\frac{2(x+y)}{a^2} + \frac{1}{h}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{-a^2/(2h)} + \frac{y}{-a^2/(2h)} \leq 1.$$

Si tratta della porzione di cupola nel semispazio individuato dal piano parallelo all'asse z di equazione $\dfrac{x}{-a^2/(2h)} + \dfrac{y}{-a^2/(2h)} = 1$; tale piano interseca il piano xy nella retta con la stessa equazione, che ha intercette $-a^2/(2h)$; se $a^2/(2h) \geq a$, equivalentemente $h/a \leq 1/2$, la cupola è tutta investita dalla pioggia; altrimenti lo è la parte di essa che si proietta nella porzione di disco di centro l'origine e raggio a che verificano la disuguaglianza $x + y \geq a^2/(2h)$; non è difficile trovare il flusso attraverso tale porzione di cupola.

Esercizio 3. (i) Anche qui la verifica che E è limitato va condotta con cura; ed è forse più semplice farla dopo che si è visto che $(x,y) \mapsto (xy, x^\gamma y)$ è diffeomorfismo di $]0,+\infty[^2$ in se stesso.

(ii) Molti calcolano lo jacobiano di $(x,y) \mapsto (xy, x^\gamma y)$, trovano che è $(1-\gamma)x^\gamma y$, mai nullo in $]0,+\infty[^2$, e concludono che la trasformazione è un diffeomorfismo; sembrano convinti che una trasformazione sia diffeomorfismo se e solo se lo jacobiano non è nullo. Questo è **gravemente errato***: il non annullarsi dello jacobiano è solo condizione necessaria perché una trasformazione sia diffeomorfismo, ed equivale all'essere diffeomorfismo locale; l'esempio delle coordinate polari, $(r,\vartheta) \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, il cui jacobiano è $r > 0$, ma che non sono diffeomorfismo di $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dovrebbe sempre essere ricordato in questo contesto. È molto più difficile verificare la condizione di biiettività, che è quella essenziale, ed allo scopo in generale l'unica risorsa è quella di esibire l'inversa.*

Molti dimenticano il valore assoluto dello jacobiano nella formula di cambiamento di variabili, e trovano un'area negativa!

(iii) Molti scordano il valore assoluto nell'applicare il teorema di Tonelli.

Non si può usare il criterio di Abel–Dirichlet per verificare che $\int_0^{+\infty} e^{-\xi}|\sin\xi|\,d\xi$ converge; la funzione $|\sin\xi|$ non ha primitive limitate, per ogni sua primitiva F si ha anzi $\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi) = +\infty$. Era molto più semplice usare il criterio del confronto: $e^{-\xi}|\sin\xi| \leq e^{-\xi}$,e $\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\,d\xi$ è finito!

Riguardo al trasformato di A: essendo γ reale generico > 1, per me era scontato che fosse $x > 0$, di conseguenza anche $y > 0$ e si restava nel primo quadrante. Se si prende γ intero, l'insieme A, se definito come $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x^\gamma y \leq d\}$, non è contenuto solo nel primo quadrante; diciamo A_+ la porzione nel primo quadrante. Sono da distinguere i casi di γ dispari e di γ pari.

Se γ è dispari si ha $A = A_+ \cup B$, dove B è nel terzo quadrante simmetrico di A_+ rispetto all'origine; in questo caso l'integrale converge ed è il doppio di quello su A_+.

Se γ è pari si ha ancora $A = A_+ \cup B$, dove però ora B è il simmetrico di A_+ rispetto all'asse y; in tal caso la funzione $(x,y) \mapsto (xy, x^\gamma y)$ stabilisce un quasi diffeomorfismo di $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ su se stesso, ed in tale quasi diffeomorfismo A diventa l'insieme $C = \mathbb{R} \times [c,d]$, la funzione diventa $e^{-\xi}\sin\xi/(\gamma-1)$ con integrale non convergente su C.

In ogni caso tutto ciò doveva essere discusso con cura; non era possibile semplicemente estendere al caso $x < 0$ senza ulteriore discussione quanto visto per $x > 0$!

MATEMATICA 4F per Fisica–Primo compitino–31 ottobre 2003

Esercizio 5. Enunciare il caso piano del teorema della divergenza e la formula di Green nel piano. Sapreste dedurre la seconda dal primo?

Esercizio 6. Una cupola viene costruita nel seguente modo: si rizzano due archi a forma di parabola, nei piani xz ed yz, di equazioni rispettive $z = h(1-(x/a)^2)$ e $z = h(1-(y/a)^2)$, dove $a, h > 0$ sono costanti; poi gli spazi al di sopra dei quattro quadranti del piano xy, fra i quattro semiarchi, vengono riempiti con sbarrette orizzontali che collegano punti di archi diversi alla stessa altezza. Si può mostrare che posto

$$f(x,y) = h\left(1-\left(\frac{|x|+|y|}{a}\right)^2\right),$$

la cupola è $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y),\ z \geq 0\}$.

(i) Disegnare la cupola supponendo per il disegno, **e solo per il disegno**, che sia $a = 1$ ed $h = 3$.

(ii) Dimostrare che S è limitata, esibendo una costante $k > 0$ tale che sia $\|(x,y,z)\|_\infty \leq k$ per ogni $(x,y,z) \in S$.

(iii) Dato l'insieme E racchiuso tra la cupola ed il piano xy, trovarne la $z-$sezione $E(z)$ e calcolarne l'area; trovare poi il volume di E.

La frontiera di E viene divisa in cinque parti; la base D, ed i quattro pezzi S_k, $k = 1,2,3,4$ negli ottanti per $z \geq 0$ corrispondenti ai quattro quadranti del piano xy.

(iv) Dato il campo $\vec{F}(x,y,z) = (-v,-v,0)$ ($v > 0$ costante), trovare il flusso di esso uscente da ciascuno dei cinque pezzi di frontiera di E.

(v) Sia γ il circuito così fatto: si parte da $(a,0,0)$, si va a $(0,0,h)$ lungo la parabola $z = h(1-(x/a)^2)$, si scende ad $(0,a,0)$ sulla parabola $z = h(1-(y/a)^2)$, e si torna ad $(a,0,0)$ lungo il segmento che congiunge questi due punti. Verificare la validità della formula di Stokes per questo circuito che borda S_1, per il campo $\vec{G}(x,y,z) = (-y,x,0)$.

(vi) Calcolare l'area di S (conviene usare una opportuna rotazione di coordinate).

(vi) Sapreste mostrare che la descrizione data implica che l'equazione della cupola è effettivamente quella sopra scritta?

Risoluzione. (i) Il disegno è come in figura.

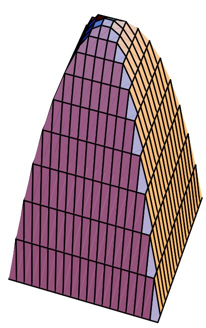


Figura 4. La cupola S.

(ii) Dovendo essere $z \geq 0$ e $z \leq h(1-((|x|+|y|)/a)^2)$ si ha $((|x|+|y|)/a)^2 \leq 1$, da cui $|x|+|y| \leq a$, e quindi $|x| \leq a$ ed anche $|y| \leq a$. Inoltre $z \leq h$, e quindi $z \in [0,h]$. Preso $k = \max\{a,k\}$, si ha $\max\{|x|,|y|,|z|\} \leq k$ per ogni $(x,y,z) \in S$.

(iii) Per la $z-$sezione: deve essere $0 \leq z \leq h$ altrimenti la $z-$sezione è vuota; per tali z si ha che la $z-$sezione consta degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$z \leq h(1-((|x|+|y|)/a)^2) \iff ((|x|+|y|)/a)^2 \leq 1-z/h \iff |x|+|y| \leq a\sqrt{1-z/h},$$

che è il quadrato centrato nell'origine con i vertici sugli assi coordinati a distanza $(a\sqrt{1-z/h}$ dall'origine; il lato di tale quadrato misura $\sqrt{2(1-z/h)}\,a$ e l'area vale quindi $\lambda_2(E(z)) = 2a^2(1-z/h)$. Il volume di E si trova allora subito

$$\lambda_3(E) = \int_0^h 2a^2\left(1-\frac{z}{h}\right)dz = 2a^2\left[z-\frac{z^2}{2h}\right]_0^h = a^2h$$

(si noti il fatto curioso che il volume è esattamente la metà del volume del prisma alto come la cupola che ha la stessa base della cupola).

(iv) Il flusso attraverso A è nullo, come pure quello attraverso S_2 ed S_4, perché il campo è ovunque parallelo a queste superficie. Il flusso attraverso S_1 è opposto a quello attraverso S_3; infatti il flusso complessivo che esce da E è nullo, dato che il campo è a divergenza nulla. Calcoliamo il flusso attraverso S_1, che si parametrizza cartesianamente come $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x+y \leq a\}$. Si trova

$$\int_T \det\begin{bmatrix} -v & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \\ 0 & -(2h/a^2)(x+y) & -(2h/a^2)(x+y)\end{bmatrix} dxdy = \int_T (-v)\frac{-2h}{a^2}(x+y)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} dxdy =$$
$$-4\frac{hv}{a^2}\int_T (x+y)\,dxdy = -4\frac{hv}{a^2}\int_{x=0}^{x=a}\left(\int_{y=0}^{y=a-x}(x+y)\,dy\right)dx = -4\frac{hv}{a^2}\int_{x=0}^{x=a}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=a-x} dx =$$
$$-2\frac{hv}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = -2hva + 2\frac{hva}{3} = -\frac{4}{3}hva.$$

Questo è il flusso uscente da S_1; il flusso uscente da S_3 è quindi $4hva/3$.

(v) Il campo $\vec{G}$ è banalmente ortogonale ai piani xz ed yz, e quindi l'integrale di cammino sugli archi di parabola è nullo. Resta l'integrale sul segmento che si parametrizza come $x = at$, $y = a - ta, z = 0$ con $t \in [0,1]$. L'integrale è quindi

$$\int_{[(0,a),(a,0)]}(-y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 (-(1-t)a\,a + at\,(-a))\,dt = \int_0^1 (-a^2)\,dt = -a^2.$$

La parametrizzazione di S_1 è quella cartesiana già detta. Resta da osservare che percorrendo il bordo di T nel verso positivo (antiorario) il circuito immagine viene percorso in modo opposto a quello descritto; il flusso $\nabla\times\vec{G}$ attraverso S_1 deve quindi venire a^2. Il rotore di $\vec{G}$ è $(0,0,2)$; si ha

$$\int_T \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -(2h/a^2)(x+y) & -(2h/a^2)(x+y)\end{bmatrix} dxdy = \int_T 2\,dxdy = 2\,\mathrm{Area}(T) = a^2.$$

(vi) L'elemento d'area di S_1 in coordinate cartesiane è

$$\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2} = \sqrt{1+2\left(\frac{2h}{a^2}(x+y)\right)^2};$$

per simmetria si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(S) =& 4\,\mathrm{Area}(S_1) = 4\int_T\sqrt{1+2\left(\frac{2h}{a^2}(x+y)\right)^2}\,dxdy = \\ & \frac{8\sqrt{2}h}{a^2}\int_T\sqrt{k^2+(x+y)^2}\,dxdy = \quad (\text{dove } k = a^2/(2\sqrt{2}h));\end{aligned}$$

ruotiamo le coordinate ponendo $x+y = u$ e $x-y = v$; si ha $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$, lo jacobiano è $1/2$, e T diventa il triangolo Δ di vertici $(0,0)$, (a,a), $(a,-a)$;

$$\begin{aligned}&\frac{8\sqrt{2}h}{a^2}\int_\Delta\sqrt{k^2+u^2}\,\frac{dudv}{2} = \frac{4\sqrt{2}h}{a^2}\int_{u=0}^{u=a}\sqrt{k^2+u^2}\left(\int_{v=-u}^{v=u}dv\right)du = \\ &\frac{4\sqrt{2}h}{a^2}\int_0^a 2u\sqrt{k^2+u^2}\,du = \frac{8\sqrt{2}h}{3a^2}\left[(k^2+u^2)^{3/2}\right]_0^a = \\ &\frac{8\sqrt{2}h}{3a^2}((k^2+a^2)^{3/2}-k^3) = \frac{8\sqrt{2}ah}{3}\left((a/(2\sqrt{2}h))^2+1)^{3/2}-(a/(2\sqrt{2}h))^3)\right) =\end{aligned}$$

$$\frac{a}{6h^2}((a^2+8h^2)^{3/2}-a^3).$$

(vii) Una possibile spiegazione è la seguente. Parametrizziamo il pezzo di cupola sopra il primo quadrante; quando il parametro u varia in $[0,a]$, i punti alla stessa quota da congiungere con un segmento sono $(u,0,h(1-(u/a)^2)$ e $(0,u,h(1-(u/a)^2))$; il segmento che li congiunge è

$$(1-v)(u,0,h(1-(u/a)^2))+v(0,u,h(1-(u/a)^2)=((1-v)u,vu,h(1-(u/a)^2));$$

ne segue che $(u,v)\mapsto((1-v)u,vu,h(1-(u/a)^2))$, con $(u,v)\in[0,a]\times[0,1]$ è una parametrizzazione di S_1. Per trovare l'equazione cartesiana basta eliminare u e v dalle equazioni

$$x=(1-v)u,\qquad y=vu,\qquad z=h(1-(u/a)^2);$$

dalle prime due si ha $x+y=u$ e sostituendo nella terza si ottiene $z=h(1-((x+y)/a)^2)$; il prolungamento per simmetria rispetto ad ambo gli assi introduce i valori assoluti. Questa parametrizzazione è anche vantaggiosa per il calcolo dell'area; l'elemento d'area viene infatti $u\sqrt{1+(2\sqrt{2}h/a^2)^2u^2}\,du dv$, da integrare su $[0,a]\times[0,1]$ per trovare l'area di S_1.

□

Esercizio 7. Siano a,b,c,d costanti con $0\le a<b$ e $0\le c<d$, e sia $E(a,b)=\{(x,y)\in[0,+\infty[^2\colon a\le xy\le b\}$, $F(c,d)=\{(x,y)\in[0,+\infty[^2\colon c\le x/y\le d\}$; sia $f:]0,+\infty[^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=e^{-x/y}/y$.

(i) Mostrare che f appartiene ad $L^1(E(a,b))$ (l'integrale si potrebbe calcolare, ma non è per ora richiesto; basta mostrare che è finito).
(ii) È vero che f appartiene ad $L^1(F(c,d))$?
(iii) Mostrare che la formula $\psi(x,y)=(xy,x/y)$ stabilisce un diffeomorfismo di $]0,+\infty[^2$ in se stesso; si chiede il diffeomorfismo inverso $\psi^{-1}(u,v)=\varphi(u,v)=\dots$.
(iv) Usare φ per ritrovare i risultati precedenti, e calcolare $\int_{E(a,b)}f(x,y)\,dxdy$

Risoluzione. (i) Si ha $f(x,y)\ge 0$, quindi basta vedere se l'integrale iterato esiste finito, chiaramente integriamo prima in x e poi in y, unica integrazione che sappiamo effettuare:

$$\int_{E(a,b)}f(x,y)\,dxdy=\int_{y=0}^{y=+\infty}\left(\int_{x=a/y}^{x=b/y}\frac{e^{-x/y}}{y}\,dx\right)dy=\int_{y=0}^{y=+\infty}\left[-e^{-x/y}\right]_{x=a/y}^{x=b/y}dy=$$
$$\int_0^{\infty}(e^{-a/y^2}-e^{-b/y^2})\,dy.$$

Studiamo ora la convergenza di questo integrale unidimensionale. Per $y\to0^+$ l'integrando è infinitesimo e non c'è problema. Si ha poi

$$\lim_{y\to+\infty}e^{-a/y^2}=\lim_{y\to+\infty}e^{-b/y^2}=1,$$

di modo che l'integrando è infinitesimo anche per $y\to+\infty$, cosa che però ovviamente non basta ad assicurare la convergenza dell'integrale. Ma è

$$e^{-a/y^2}=1-\frac{a}{y^2}+o(1/y^2);\quad e^{-b/y^2}=1-\frac{b}{y^2}+o(1/y^2)\quad\text{quindi}\quad e^{-a/y^2}-e^{-b/y^2}=\frac{b-a}{y^2}+o(1/y^2);$$

ne segue che l'integrando è, per $y\to+\infty$, asintotico a $(b-a)/y^2$ e quindi l'integrale su un intorno di $+\infty$ è finito.

Attenzione! Le funzioni e^{-a/y^2} ed e^{-b/y^2} non sono sommabili su $[0,+\infty[$; si ha infatti $\int_0^\infty e^{-a/y^2}\,dy=+\infty$ e $\int_0^\infty e^{-b/y^2}\,dy=+\infty$, dato che gli integrandi tendono ad 1 per $y\to+\infty$; la differenza $e^{-a/y^2}-e^{-b/y^2}$ però è in $L^1([0,+\infty[)$, come visto.

(ii) Usando ancora il teorema di Tonelli si ha

$$\int_{F(c,d)}\frac{e^{-x/y}}{y}\,dxdy=\int_{y=0}^{y=+\infty}\left(\int_{x=cy}^{x=dy}\frac{e^{-x/y}}{y}\,dx\right)dy=\int_{y=0}^{y=+\infty}\left[-e^{-x/y}\right]_{x=cy}^{x=dy}dy=$$
$$\int_0^{+\infty}(e^{-c}-e^{-d})\,dy=+\infty.$$

(la costante positiva $e^{-c}-e^{-d}$ ha ovviamente integrale $+\infty$ sulla semiretta $[0,+\infty[$).

(iii) Anzitutto, se $x, y > 0$ si ha $xy > 0$ ed $x/y > 0$, per cui effettivamente ψ trasforma $]0, +\infty[^2$ in se stesso. Per vedere che è diffeomorfismo dobbiamo intanto mostrare che è biiettivo. Dati $u, v > 0$ risolviamo l'equazione $xy = u$, $x/y = v$ nelle incognite x, y; moltiplicando membro a membro si ha $x^2 = u$ da cui $x = \sqrt{u}$ (unica soluzione, essendo $x > 0$); e dividendo membro a membro si ottiene $y^2 = u/v$, da cui $y = \sqrt{u/v}$, ancora unica soluzione, dato che è $y > 0$. Per ogni $(u, v) \in]0, +\infty[^2$ esiste quindi un'unica coppia $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tale che $(u, v) = \psi(x, y)$, e tale coppia è $(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$. Questo dice che ψ è biiettiva da $]0, +\infty[^2$ in se stesso, con inversa $\varphi(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$. È poi ovvio che sia ψ che φ sono di classe C^∞, quindi ψ e φ sono diffeomorfismi, inversi l'uno dell'altro.

(iv) La formula di cambiamento di variabili dice che $f \in L^1(E(a, b))$ se e solo se $f(\varphi(u, v)))|\det \varphi'(u, v)|$ appartiene a $\varphi^{-1}(E(a, b)) = \{(u, v) \in]0, +\infty[^2\colon\ a \le u \le b\} = [a, b] \times [0, +\infty[$, e che in tal caso si ha

$$\int_{E(a,b)} f(x, y)\, dxdy = \int_{[a,b]\times[0,+\infty[} f(\varphi(u, v)))|\det \varphi'(u, v)|\, dudv;$$

ci serve lo jacobiano, che si calcola meglio come inverso dello jacobiano di ψ; questo è

$$\det \psi'(x, y) = \det \begin{bmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{bmatrix} = -\frac{x}{y} - \frac{x}{y} = -2\frac{x}{y},$$

da cui $\det \varphi'(u, v) = -1/(2v)$, e quindi

$$\int_{[a,b]\times[0,+\infty[} f(\varphi(u, v)))|\det \varphi'(u, v)|\, dudv = \int_{[a,b]\times[0,+\infty[} \frac{e^{-v}}{\sqrt{u/v}}\frac{dudv}{2v} = \int_{[a,b]\times[0,+\infty[} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\, dudv =$$

$$\left(\int_0^{+\infty} v^{-1/2}e^{-v}\, dv\right)\left(\int_a^b \frac{du}{2\sqrt{u}}\right) = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\int_0^{+\infty} v^{1/2-1}e^{-v}\, dv = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\Gamma(1/2) =$$

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})\sqrt{\pi}.$$

È immediato mostrare che l'altro integrale non è finito:

$$\int_{F(c,d)} f(x, y)\, dxdy = \int_{[0,+\infty[\times[c,d]} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\, dudv,$$

e chiaramente $\int_0^{+\infty} du/\sqrt{u} = +\infty$ (la funzione $1/\sqrt{u}$ non è sommabile attorno a $+\infty$).

Osservazione. Non è troppo difficile il calcolo diretto dell'integrale della domanda (i); basta porre $y = 1/t$:

$$\int_0^\infty (e^{-a/y^2} - e^{-b/y^2})\, dy = \int_0^\infty (e^{-at^2} - e^{-bt^2})\frac{dt}{t^2} = (\text{per parti, } dt/t^2 \text{ fatt.diff.}) =$$

$$\left[\frac{e^{-at^2} - e^{-bt^2}}{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + 2\int_0^\infty (be^{-bt^2} - ae^{-at^2})\, dt = b\sqrt{\frac{\pi}{b}} - a\sqrt{\frac{\pi}{a}} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\sqrt{\pi};$$

infatti si ha $\lim_{t\to+\infty}(e^{-at^2} - e^{-bt^2})/t = \lim_{t\to0}(e^{-at^2} - e^{-bt^2})/t = 0$, e l'integrale $\int_0^\infty e^{-pt^2}\, dt$ vale $\sqrt{\pi/p}/2$ se $p > 0$ (si riconduce all'integrale della gaussiana, supposto noto, ponendo $s = \sqrt{p}\, t$).

$\square$

Esercizio 8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme compatto del piano, con area $\lambda_2(A) > 0$; supponiamo le coordinate centrate nel baricentro di A, che questo sia cioè l'origine $(0, 0)$. Sia $h > 0$; si prende un piano Π di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0, 0, h)$, non contenente l'asse z, e tale che A, identificato con il sottoinsieme $A\times\{0\}$ di $\mathbb{R}^3$, sia tutto contenuto in uno dei due semispazi individuati da Π (fare un disegno per mostrare che si è capito il testo). Resta allora individuato un tronco di cilindro K formato dai punti la cui proiezione sul piano xy sta in A, e che stanno tra il piano xy ed il piano Π. Trovare il volume di K, esprimendolo mediante h e l'area di A.

Supponiamo ora che il piano Π non sia parallelo al piano xy; sia S la porzione di Π che si proietta ortogonalmente su A, e siano B e C le proiezioni ortogonali di S sui piani yz ed xz; dimostrare che si ha il

Teorema di Pitagora per le aree $\qquad \operatorname{Area}(S)^2 = \operatorname{Area}(A)^2 + \operatorname{Area}(B)^2 + \operatorname{Area}(C)^2.$

(detto $\vec{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ un versore normale al piano, mostrare che si ha $\operatorname{Area}(A) = \operatorname{Area}(S)|\cos\gamma|$).

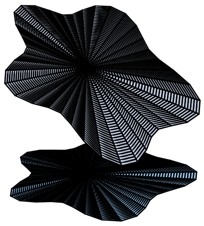


Figura 5. La superficie S che si proietta su A; il tronco cilindrico K sta fra le due.

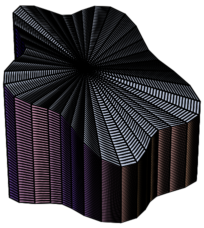


Figura 6. Il tronco cilindrico K.

Risoluzione. Il piano Π, non essendo parallelo all'asse z, ha un'equazione del tipo $z = ax + by + c$; imponendo il passaggio per $(0, 0, h)$ si ottiene $c = h$; il piano è quindi $z = ax + by + h$. I due semispazi individuati da Π sono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \le ax + by + h\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge ax + by + h\}$; poiché $(0, 0, 0) \in A \times \{0\}$ sta nel primo semispazio (si ha $h > 0$ per ipotesi), $A \times \{0\}$ sta tutto in tale semispazio; ne segue che $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ 0 \le z \le ax + by + h\}$, in altre parole K è il trapezoide sopra A della funzione $ax + by + h$, non negativa su A, e quindi

$$\lambda_3(K) = \int_A (ax + by + h)\, dxdy = a \int_A x\, dxdy + b \int_A y\, dxdy + h \int_A dxdy = h\lambda_2(A).$$

Infatti si ha $\int_A x\, dxdy = \int_A y\, dxdy = 0$, dato che il baricentro di A è per ipotesi nell'origine.

La porzione S di piano si parametrizza cartesianamente come $z = ax + by + h$, con $(x, y) \in A$ e quindi ha area:

$$\text{Area}(S) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla z(x, y)|^2}\, dxdy = \int_A \sqrt{1 + a^2 + b^2}\, dxdy = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\, \text{Area}(A).$$

Un vettore normale al piano Π è ad esempio $(a, b, -1)$ con versore associato $(a, b, -1)/\sqrt{1 + a^2 + b^2}$ e quindi $|\cos\gamma| = 1/\sqrt{1 + a^2 + b^2}$. La formula $\text{Area}(A) = \text{Area}(S)|\cos\gamma|$ (che l'area della proiezione ortogonale è pari all'area della superficie piana da proiettare per il coseno dell'angolo fra i due piani) è provata per il piano xy e quindi per tutti i piani (*legge del coseno*; vedi Mat4F, 6.3.5). Poiché poi ovviamente si ha $|\cos\alpha|^2 + |\cos\beta|^2 + |\cos\gamma|^2 = 1$, si conclude. □

Secondo precompitino–27 novembre 2003

Esercizio 9. Dare la definizione di campo conservativo e di campo irrotazionale. Dire quali legami ci sono fra le due nozioni.

Esercizio 10. Data la forma differenziale

$$3xy\, dx + (2y^2 - x^2)\, dy,$$

cercare per essa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un fattore integrante del tipo $\alpha(r) = \alpha(\sqrt{x^2 + y^2})$, dove $\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è di classe C^1, ed integrare la forma $\alpha(r)(3xy\, dx + (2y^2 - x^2)\, dy)$ così ottenuta.

Risoluzione. Imponiamo l'uguaglianza

$$\partial_2(\alpha(r)3xy) = \partial_1(\alpha(r)(2y^2 - x^2)),$$

ricordando anzitutto che $\partial_2(\alpha(r)) = \alpha'(r)\partial_2 r = \alpha'(r)\,(y/r)$ e che $\partial_1(\alpha(r)) = \alpha'(r)\,(x/r)$, per cui

$$\alpha'(r)\frac{y}{r}3xy + 3x\alpha(r) = \alpha'(r)\frac{x}{r}(2y^2 - x^2) - 2x\alpha(r) \iff \alpha'(r)\frac{3xy^2 - 2xy^2 + x^3}{r} = -5x\,\alpha(r),$$

che, supposto $x \neq 0$, e ricordando che $x^2 + y^2 = r^2$, equivale a

$$\alpha'(r)\frac{x(x^2+y^2)}{=}5x\,\alpha(r) \iff \alpha'(r) = \frac{-5}{r}\alpha(r);$$

quest'equazione lineare ha per soluzioni $\alpha(r) = ke^{-5\log r} = k/r^5$. Un fattore integrante è quindi $\alpha(r) = 1/r^5$; moltiplicando per esso la forma diventa

$$\frac{3xy}{r^5}\,dx + \frac{2y^2 - x^2}{r^5}\,dy.$$

Tale forma è chiusa, ma non è ovvio che sia esatta, dato che il dominio $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso. Tuttavia, una primitiva rispetto ad x di $3xy/r^5 = y(3/r^4)(x/r)$ è $-y/r^3$; un'eventuale primitiva è quindi della forma $-y/r^3 + \beta(y)$; derivando rispetto ad y si ottiene

$$\partial_2(-y/r^3 + \beta(y)) = \frac{-1}{r}^3 + 3y\frac{y}{r^5} + \beta'(y) = \frac{-r^2+3y^2}{r^5} + \beta'(y) = \frac{2y^2 - x^2}{r^5} + \beta'(y);$$

imponendo l'uguaglianza con $(2y^2 - x^2)/r^5$ si ottiene quindi $\beta'(y) = 0$. Ne segue che la forma è esatta, con primitiva

$$-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

(e questo anche se il dominio non è semplicemente connesso, e per trovare il fattore integrante si è di passaggio dovuto supporre che fosse $x \neq 0$). □

Esercizio 11. È dato il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{2}\,x - y \\ \dot{y} &= x - \sqrt{2}\,y \end{cases}$$

(i) Trovare un integrale primo per il sistema; che curve sono le traiettorie delle soluzioni?
(ii) Trovare una matrice risolvente.
(iii) Per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{2}\,x - y + 5 \\ \dot{y} &= x - \sqrt{2}\,y - 1 \end{cases}$$

trovare le soluzioni costanti e l'integrale generale.

Risoluzione. (i) Se la forma differenziale $(\sqrt{2}\,y - x)\,dx + (\sqrt{2}\,x - y)\,dy$ è esatta, ogni sua primitiva è integrale primo; la forma è chiusa perchè $\partial_2(\sqrt{2}\,y - x) = \sqrt{2} = \partial_1(\sqrt{2}\,x - y)$; essendo definita su $\mathbb{R}^2$ essa vi è anche esatta; integrando si ha che una primitiva deve essere della forma $\sqrt{2}\,xy - x^2/2 + \alpha(y)$; derivando rispetto ad y si trova $\sqrt{2}\,x + \alpha'(y)$, ed imponendo l'uguaglianza con $\sqrt{2}\,x - y$ si ottiene $\alpha'(y) = -y$, e quindi $\alpha(y) = -y^2/2$. In definitiva una primitiva è $-(x^2 + y^2)/2 + \sqrt{2}\,xy$; questa, od anche $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$, ottenuta dalla precedente moltiplicando per -2, sono integrali primi dell'equazione.

La frase seguente presuppone qualche conoscenza elementare sulle coniche; chi non le sa perde comunque pochi punti, al massimo 2

Le traiettorie sono rami di iperbole, oppure 4 semirette, o la costante 0: l'insieme di livello 0 è una coppia di rette, essendo

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,xy = (y - (\sqrt{2} - 1)x)(y - (\sqrt{2} + 1)x);$$

questa coppia di rette sono gli asintoti comuni alla famiglia di iperboli di equazione $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,xy = c$, che si ottiene al variare di $c \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$; sono iperboli perché la forma quadratica $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$ assume valori di ambo i segni, dato che il determinante $1 - 2 = -1 < 0$.

(ii) L'equazione caratteristica è $\zeta^2 - 1 = 0$, con radici ± 1; associato all'autovalore 1 è l'autovettore di componenti

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{2})x + y &= 0 \\ -x + (1+\sqrt{2})y &= 0 \end{cases} \qquad x = (1+\sqrt{2})y \qquad \text{da cui l'autovettore} \quad \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix};$$

similmente per l'autovalore -1:

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{2})x + y &= 0 \\ -x + (-1+\sqrt{2})y &= 0 \end{cases} \qquad x = (-1+\sqrt{2})y \qquad \text{da cui l'autovettore} \quad \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix};$$

Matrice risolvente è quindi

$$\begin{bmatrix} e^t(\sqrt{2}+1) & e^{-t}(\sqrt{2}-1) \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(iii) Soluzioni costanti sono quelle (a,b) per cui si ha

$$\begin{cases} 0 &= \sqrt{2}\,a - b + 5 \\ 0 &= a - \sqrt{2}\,b - 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad a = -\det\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = -5\sqrt{2}-1; \quad b = -\det\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -5-\sqrt{2}.$$

L'integrale generale si ottiene aggiungendo quest'integrale particolare della non omogenea all'integrale generale dell'omogenea, ed è quindi

$$y(t) = a\,e^t \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + b\,e^{-t} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\sqrt{2}-1 \\ -5-\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Osservazione. Aggiungiamo alcuni commenti. Come sopra detto, le soluzioni dell'omogenea sono rami di iperbole, che si ottengono come combinazioni lineari $a\,e^t(\sqrt{2}+1,1) + b\,e^{-t}(\sqrt{2}-1,1)$ con a, b entrambi non nulli. Con $a = b = 0$ si ha la soluzione nulla; con $b = 0$ si ha una delle semirette (che iniziano nell'origine) della retta $y = (\sqrt{2}-1)x$ per $a > 0$, per $a < 0$ l'altra semiretta; analogamente se $a = 0$ si hanno le semirette della retta di equazione $y = (\sqrt{2}+1)x$, a seconda che sia $b > 0$ o $b < 0$.

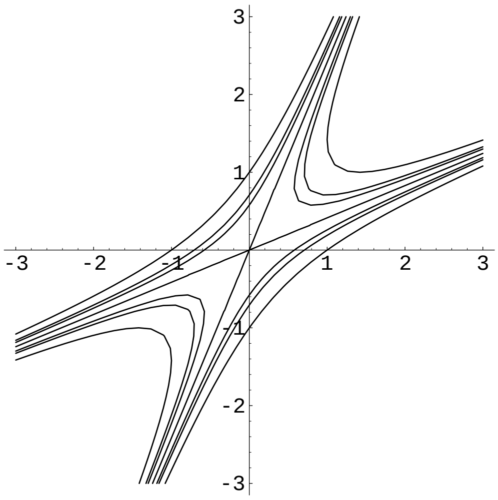


Figura 7. Traiettorie di soluzioni.

□

Esercizio 12. Si considera l'equazione differenziale

$$y'' = y' \sin y.$$

(i) Scrivere il sistema equivalente e mostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
(ii) Dimostrare che le soluzioni non costanti sono strettamente monotòne.
(iii) Trovare un integrale primo per l'equazione data.
(iv) Trovare esplicitamente la soluzione soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = \pi$, $y'(0) = 1$ (verificare anche che effettivamente quella trovata è una soluzione).
(v) Dare una condizione sulle condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $y'(0) = v$ che implichi la limitatezza della soluzione.

Risoluzione. (i) Il sistema equivalente è , posto $y' = p$

$$\begin{cases} y' &= p \\ p' &= p \sin y \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{bmatrix} y \\ p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p \\ p \sin y \end{bmatrix}$$

Chiaramente il secondo membro è di classe C^∞ e definito su tutto $\mathbb{R}^2$ (su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ se si tiene conto anche della variabile indipendente). Vediamo se sono verificate le ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale. Le derivate parziali rispetto ad y ed a p sono

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p\cos y \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \sin y \end{bmatrix};$$

di queste derivate la seconda è limitata, ma la prima non lo è (preso ad esempio $y = 0$ la derivata tende all'infinito se p tende all'infinito). Però la crescita è sublineare: la norma della funzione a secondo membro è

$$\sqrt{p^2 + p^2\sin^2 y} = |p|\sqrt{1+\sin^2 y} \le |p|\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sqrt{p^2+y^2}$$

(quindi la crescita sublineare è verificata con $A = \sqrt{2}$ e $B = 0$).

(ii) Per quanto appena visto l'equazione ha esistenza ed unicità globali per il problema di Cauchy. Banalmente tutte le costanti sono soluzioni. Ne segue che una soluzione non costante ha la derivata mai nulla: se $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è soluzione, e se fosse $\varphi'(t_0) = 0$ per un $t_0 \in \mathbb{R}$, la funzione φ e la costante $\varphi(t_0)$ verificano lo stesso problema di Cauchy, quello dato dall'equazione con le condizioni $y(t_0) = \varphi(t_0)$ ed $y'(t_0) = 0$; devono allora coincidere ovunque e quindi φ sarebbe costante. Allora φ', mai nulla, è sempre strettamente positiva o strettamente negativa, e quindi φ è strettamente crescente o decrescente.

(iii) "Integrando ambo i membri" si trova $y' = -\cos y + c$, e cioè $y' + \cos y = c$; quindi $p + \cos y$ è un integrale primo (alternativamente, si prende la forma $-p\sin y\,dy + p\,dp$; dividendo per p si trova la forma $-\sin y\,dy + dp$, che ha come primitiva $\cos y + p$, che quindi è integrale primo dell'equazione data). Integrale primo è quindi $y' + \cos y = p + \cos y$.

(iv) Integrando fra 0 e t e tenendo conto delle condizioni iniziali si trova

$$y'(t) - y'(0) = \cos y(0) - \cos y(t) \quad \text{cioè} \quad y'(t) - 1 = -1 - \cos y(t),$$

equivalente all'equazione a variabili separabili

$$y'(t) = -\cos y(t) \iff \frac{y'(t)}{\cos y(t)} = -1 \iff \frac{\cos y(t)}{1-\sin^2 y(t)}y'(t) = -1,$$

ed integrando fra 0 e t si ha ancora

$$\operatorname{setttanh}\sin(y(t)) - \operatorname{setttanh}\sin(y(0)) = -t,$$

da cui, essendo $\operatorname{setttanh}\sin(y(0)) = \operatorname{setttanh}\sin\pi = \operatorname{setttanh}\sin 0 = 0$:

$$\operatorname{setttanh}\sin(y(t)) = -t \quad \text{da cui} \quad \sin y(t) = \tanh(-t).$$

Attenzione ora: *Non è vero che da ciò segue* $y(t) = \arcsin\tanh(-t)$*!* Questa funzione è nulla per $t = 0$, ed inoltre è decrescente invece che crescente; è una soluzione dell'equazione data, ma non verifica le condizioni iniziali. Occorre ricordare che l'equazione $\sin\alpha = w$ ha (se $|w| \le 1$) come soluzioni $\alpha = \arcsin w + 2k\pi$, ed anche $\alpha = \pi - \arcsin w + 2k\pi$. Dovendo essere $y(0) = \pi$, si avrà

$$y(t) = \pi - (\arcsin\tanh(-t)) = \pi + \arcsin\tanh t.$$

Verifichiamo che questa $y(t)$ è quella richiesta: si ha $y(0) = \pi$, inoltre è

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 t}}\frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh t},$$

ricordando l'identità $1-\tanh^2 t = (\cosh^2 t - \sinh^2 t)/\cosh^2 t = 1/\cosh^2 t$; si noti che $y'(0) = 1/\cosh 0 = 1$. Si ha poi

$$y''(t) = -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \quad \text{mentre} \quad y'(t)\sin y(t) = \frac{1}{\cosh t}\sin(\pi + \arcsin\tanh t) = -\frac{\sin\arcsin\tanh t}{\cosh t} = -\frac{\tanh t}{\cosh t},$$

di modo che effettivamente $y(t)$ è soluzione.

(v) Dall'integrale primo si ha

$$y'(t) = v + \cos y_0 - \cos y(t);$$

se $v + \cos y_0 > 1$ (se $v + \cos y_0 < 1$) la derivata prima è sempre positiva (negativa) e la funzione è strettamente crescente (decrescente), ed allora ha limite per t tendente a $+\infty$. Se tale limite fosse finito, diciamolo y_∞, passando al limite nella relazione $y'(t) = v + \cos y_0 - \cos y$ si otterrebbe $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = v + \cos y_0 - \cos y_\infty$, quantità > 0 (oppure < 0, contraddicendo il criterio dell'asintoto. Ne segue che $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ non può essere finito, in particolare che $y(t)$ non è limitata. Vediamo cosa accade se

$-1 \le v + \cos y_0 \le 1$. In tal caso esistono infiniti zeri per la funzione $v + \cos y_0 - \cos y$, e i valori di tali zeri sono soluzioni costanti per l'equazione $y' = v + \cos y_0 - \cos y$; la soluzione in questione è necessariamente compresa fra due di queste costanti, e quindi è limitata. Ne segue che le soluzioni sono limitate se e solo se $|v + \cos y_0| \le 1$.

□

Matematica 4F–secondo compitino–5 dicembre 2003

Esercizio 13. Definire il raggio di convergenza di una serie di potenze. Trovare poi raggio di convergenza R e somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n+2} \qquad (|z| < R).$$

Risoluzione. Il raggio di convergenza di una serie di potenze (di punto iniziale 0) è l'estremo superiore dei moduli dei numeri $w \in \mathbb{C}$ per cui la serie converge. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{((n+1)+1)|z|^{(n+1)+2}}{(n+1)|z|^{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}|z|,$$

espressione che ha per limite $|z|$ per $n \to +\infty$. La serie converge quindi per $|z| < 1$, non converge per $|z| > 1$; il raggio di convergenza è 1. Si ha poi

$$\sum_{n=0}(n+1)z^{n+2} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n;$$

la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ è la serie derivata della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$, serie geometrica che ha per somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z\frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Si ha quindi, per il teorema di derivazione per serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{(1-z) - z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2};$$

la serie data ha infine per somma

$$\sum_{n=0}(n+1)z^{n+2} = \frac{z^2}{(1-z)^2}.$$

□

Esercizio 14. Data la forma differenziale

$$(x^2 - 2y^2)\,dx + 3xy\,dy$$

cercare per essa, nel semipiano $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, un fattore integrante del tipo $\alpha(x)$, dove $\alpha \in C^1(]0,+\infty[)$ è di classe C^1, ed integrare poi la forma $\alpha(x)((x^2 - 2y^2)\,dx + 3xy\,dy)$ così ottenuta.

Risoluzione. Imponendo la chiusura della forma $\alpha(x)((x^2 - 2y^2)\,dx + 3xy\,dy)$ si ottiene

$$-4y\alpha(x) = 3y\alpha(x) + 3xy\alpha'(x) \iff y(3x\alpha'(x) + 7\alpha(x)) = 0;$$

si ha l'equazione differenziale lineare $\alpha'(x) + (7/(3x))\alpha(x) = 0$; moltiplicando ambo i membri per $\exp(\int(7/(3x))\,dx) = \exp(7\log x/3) = x^{7/3}$ si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left(x^{7/3}\alpha(x)\right) = 0 \iff \alpha(x) = kx^{-7/3};$$

un possibile α è quindi $\alpha(x) = x^{-7/3}$. Dobbiamo ora integrare la forma chiusa

$$x^{-7/3}((x^2 - 2y^2)\,dx + 3xy\,dy);$$

Il semipiano è semplicemente connesso, essendo convesso; integrando in x la funzione $x^{-7/3}(x^2 - 2y^2)$ si ottiene $3x^{1/3}/2 - 3x^{-4/3}y^2/2 + \beta(y)$; derivando rispetto ad y si ha $3x^{-4/3}y + \beta'(y) = 3x^{-4/3}y$, da cui $\beta'(y) = 0$. Una primitiva è quindi

$$u(x,y) = \frac{3}{2}(x^{1/3} + x^{-4/3}y^2) = \frac{3}{2}x^{-4/3}(x^2 + y^2).$$

□

Esercizio 15. È dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - \sqrt{2}\, y \\ \dot{y} &= \sqrt{2}\, x - y \end{cases}$$

(i) Trovare un integrale primo per il sistema.
(ii) Determinare una matrice risolvente e mostrare che le soluzioni non costanti sono tutte periodiche, di quale periodo?
(iii) Trovare le soluzioni costanti del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - \sqrt{2}\, y + 1 \\ \dot{y} &= \sqrt{2}\, x - y - 1 \end{cases}$$

e scriverne l'integrale generale.
(iv) Che curve sono le traiettorie delle soluzioni?

Risoluzione. (i) La forma $-(\sqrt{2}\, x - y)\, dx + (x - \sqrt{2}\, y)\, dy$ è chiusa su $\mathbb{R}^2$ e quindi esatta; una primitiva è $-\sqrt{2}\, x^2/2 + xy + \alpha(y)$; derivando in y si ha $x + \alpha'(y) = x - \sqrt{2}\, y$, da cui $\alpha(y) = -\sqrt{2}\, y^2/2$. Concludendo, un integrale primo è

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - \sqrt{2}\, xy + y^2) \quad \text{quindi anche} \quad x^2 - \sqrt{2}\, xy + y^2.$$

(ii) L'equazione caratteristica è

$$\zeta^2 + 1 = 0 \quad \text{con soluzioni} \quad \zeta = \pm i.$$

Un autovettore associato ad i è soluzione del sistema

$$\begin{cases} (i-1)x + \sqrt{2}\, y &= 0 \\ -\sqrt{2}\, x + (i+1)y &= 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = \frac{1+i}{\sqrt{2}} y; \quad \text{un autovettore complesso è} \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Una soluzione è quindi

$$e^{it} \begin{bmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos t + i \sin t)(1+i) \\ \sqrt{2} \cos t + i\sqrt{2} \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t) \\ \sqrt{2} \cos t + i\sqrt{2} \sin t \end{bmatrix};$$

ne segue che una matrice risolvente reale è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ \sqrt{2} \cos t & \sqrt{2} \sin t \end{bmatrix}$$

(la prima colonna è formata dalle parti reali della soluzione complessa trovata, la seconda dai coefficienti dell'immaginario). Chiaramente le soluzioni sono tutte periodiche di periodo 2π.

Osservazione. *Purtroppo molti non hanno le idee chiare sul come estrarre soluzioni reali da autovalori ed autovettori complessi; li invito a leggere alla fine della risoluzione.*

(iii) Le soluzioni costanti (a, b) sono quelle tali che

$$\begin{cases} 0 &= a - \sqrt{2}\, b + 1 \\ 0 &= \sqrt{2}\, a - b - 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad a = \det \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 + \sqrt{2}; \quad b = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = 1 + \sqrt{2};$$

e l'integrale generale del sistema non omogeneo è quindi

$$\Phi(t) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} + a(\cos t - \sin t) + b(\cos t + \sin t) \\ 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\, a \cos t + \sqrt{2}\, b \sin t \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

(iv) Dall'integrale primo risulta che le traiettorie sono coniche; sono compatte perché periodiche e quindi sono ellissi. In ogni caso si scrive (per le traiettorie del sistema omogeneo, le altre sono queste traslate)

$$\begin{bmatrix} (b+a) \cos t + (b-a) \sin t \\ a\sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} b \sin t \end{bmatrix} = \vec{u} \cos t + \vec{v} \sin t,$$

dove $\vec{u} = (b+a, \sqrt{2}a)$ e $\vec{v} = (b-a, \sqrt{2}b)$; questa curva è ottenuta dal circolo unitario applicando la trasformazione lineare di matrice

$$[\vec{u},\, \vec{v}] = \begin{bmatrix} b+a & b-a \\ \sqrt{2}a & \sqrt{2}b \end{bmatrix},$$

ed è quindi un'ellisse se le colonne sono linearmente indipendenti, il che avviene se e solo se $b(b+a) - a(b-a) = b^2 + a^2 \neq 0$, e cioè se e solo se a e b non sono entrambi nulli.

Un commento: anche se non sapete le coniche, ci dovrebbero essere forti dubbi nel ritenere che le traiettorie di soluzioni periodiche, che chiaramente sono compatte, possano essere dei rami di iperbole! $\square$

Esercizio 16. Si considera l'equazione differenziale

$$y'' = y' \cos y.$$

(i) Scrivere il sistema equivalente e mostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
(ii) Dimostrare che le soluzioni non costanti sono strettamente monotòne.
(iii) Trovare un integrale primo per l'equazione data.
(iv) Trovare esplicitamente la soluzione soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = \pi/2$, $y'(0) = 1$ (verificare anche che effettivamente quella trovata è una soluzione, che verifica anche le condizioni iniziali).
(v) Si consideri la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = 0$ ed $y'(0) = v$; per quali v tale soluzione ha limite finito a $+\infty$? e quanto vale tale limite?

Risoluzione. (i) Osserviamo anzitutto che le derivate parziali del secondo membro rispetto ad y e ad y' esistono continue e quindi l'equazione ha esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy. Posto poi $y' = p$ il sistema equivalente è

$$\begin{bmatrix} y \\ p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p \\ p\cos y \end{bmatrix};$$

la derivata del secondo membro rispetto ad y è la funzione vettoriale

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -p\sin y \end{bmatrix},$$

chiaramente non limitata (prendere $y = \pi/2$ e far tendere p all'infinito). Ma la crescita è sublineare:

$$|(p, p\cos y)| = \sqrt{p^2 + p^2\cos^2 y} = |p|\sqrt{1+\cos^2 y} \le \sqrt{2}|p| \le \sqrt{2}\sqrt{p^2+y^2},$$

e basta prendere $A = \sqrt{2}$ e $B = 0$.

(ii) Per quanto appena visto l'equazione ha esistenza ed unicità globali per il problema di Cauchy. Banalmente tutte le costanti sono soluzioni. Ne segue che una soluzione non costante ha la derivata mai nulla: se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è soluzione, e se fosse $\varphi'(t_0) = 0$ per un $t_0 \in \mathbb{R}$, la funzione φ e la costante $\varphi(t_0)$ verificano lo stesso problema di Cauchy, quello dato dall'equazione con le condizioni $y(t_0) = \varphi(t_0)$ ed $y'(t_0) = 0$; devono allora coincidere ovunque e quindi φ sarebbe costante. Allora φ', mai nulla, è sempre strettamente positiva o strettamente negativa, e quindi φ è strettamente crescente o decrescente.

(iii) "Integrando ambo i membri" si trova $y' = \sin y + c$, e cioè $y' - \sin y = c$; quindi $p - \sin y$ è un integrale primo (alternativamente, si prende la forma $-p\cos y\, dy + p\, dp$; dividendo per p si trova la forma $-\cos y\, dy + dp$, che ha come primitiva $-\sin y + p$, che quindi è integrale primo dell'equazione data). Integrale primo è quindi $y' - \sin y = p - \sin y$.

(iv) Integrando fra 0 e t si ottiene

$$y'(t) - y'(0) = \sin(y(t)) - \sin(y(0)) \iff y'(t) = \sin y(t),$$

da cui

$$\frac{y'(t)}{\sin y(t)} = 1 \iff \frac{\sin y(t)}{1-\cos^2(y(t))}\, y'(t) = 1,$$

ed integrando fra 0 e t si ottiene

$$\operatorname{setttanh}(\cos(y(0)) - \operatorname{setttanh}(\cos(y(t)) = t \iff \cos(y(t)) = -\tanh t;$$

da cui infine

$$y(t) = \arccos(\tanh(-t)) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\tanh t).$$

Tale funzione vale ovviamente $\pi/2$ in 0; inoltre la sua derivata è

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 t}}\frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh t},$$

che vale 1 per $t=0$; la derivata seconda è

$$y''(t) = -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh t}(-\tanh t) = y'(t)(-\tanh t);$$

si ha ora

$$\cos y(t) = \cos(\pi/2 + \arcsin\tanh t) = -\sin\arcsin\tanh t = -\tanh t,$$

di modo che effettivamente $y(t)$ è soluzione dell'equazione data.

(v) L'integrale primo dice che deve essere

$$y'(t) = v + \sin y(t); \qquad y(0) = 0$$

se $|v| \le 1$, quest'equazione ha le soluzioni costanti $\arcsin(-v) + 2k\pi$ e $\pi - \arcsin(-v) + 2k\pi$; supposto, per fissare le idee, che sia $0 < v \le 1$, la soluzione è strettamente crescente (vedi (ii)), e non potendo incrociare la minima costante positiva che è soluzione resta al di sotto di questa; tale minima soluzione positiva è $\pi - \arcsin(-v) = \pi + \arcsin v$. Essendo crescente, tale soluzione ha limite per $t \to +\infty$, sia esso y_∞; passando al limite nell'integrale primo si trova

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = v + \sin y_\infty;$$

per il criterio dell'asintoto, tale limite deve essere nullo, e quindi $v + \sin y_\infty = 0$; essendo $0 < y(t) < \pi + \arcsin v$ per $0 < t < \infty$, si ha necessariamente $y_\infty = \pi + \arcsin v$. Similmente se $-1 \le v < 0$ si ha $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \arcsin v - \pi$. Se $v = 0$, la soluzione è identicamente nulla ed il limite vale 0. Se $v > 1$ la soluzione è strettamente crescente ed il limite y_∞ non può essere finito perché altrimenti sarebbe $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = v + \sin y_\infty > 0$, contraddicendo il criterio dell'asintoto; analogamente si esclude che sia $v < -1$.

Riassumendo: la soluzione ha limite finito all'infinito se e solo se $|v| \le 1$, ed il limite a $+\infty$ vale allora:

$$\pi \operatorname{sgn} v + \arcsin v \quad \text{se} \quad -1 \le v \le 1.$$

□

Aggiunta sulla risolvente reale in presenza di autovalori complessi per un sistema differenziale reale. Dato un sistema $y' = Ay$, con A matrice reale $n \times n$, se λ è autovalore non reale di A con autovettore associato $w \in \mathbb{C}^n$, allora si ha subito una coppia di soluzioni reali linearmente indipendenti, che sono

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda t}w); \qquad \mathrm{Im}(e^{\lambda t}w),$$

di modo che se $n = 2$ la matrice 2×2 che ha queste funzioni vettoriali come colonne è già una risolvente. La ragione è che se A è reale allora anche il coniugato $\bar\lambda$ di λ è autovalore (è il ben noto fatto che un polinomio reale se ha una radice complessa ha anche la coniugata, con la stessa molteplicità), ed inoltre il vettore $\bar w$ che ha come componenti le coniugate delle componenti di w è autovettore associato a $\bar\lambda$ (basta fare la verifica, ricordando che il coniugio conserva somme e prodotti); allora $e^{\lambda t}w$ ed $e^{\bar\lambda t}\bar w$ sono soluzioni $\mathbb{C}-$ linearmente indipendenti (w e $\bar w$ sono autovettori associati ad autovalori distinti). Ne segue che

$$u(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}w) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t}w + e^{\bar\lambda t}\bar w); \qquad v(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}w) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t}w - e^{\bar\lambda t}\bar w),$$

combinazioni lineari delle precedenti, sono ancora soluzioni, sono reali, e sono $\mathbb{C}-$ linearmente indipendenti, dato che anche le soluzioni precedenti sono combinazione lineare di queste,

$$e^{\lambda t}w = u(t) + iv(t); \qquad e^{\bar\lambda t}\bar w = u(t) - iv(t).$$

In questo modo le radici complesse semplici dell'equazione caratteristica danno coppie di soluzioni reali linearmente indipendenti. Questo fatto era stato spiegato a lezione ed è usato in alcuni esercizi risolti sulle dispense. Ma *non* si devono prendere le parti reali sia di $e^{\lambda t}w$ che di $e^{\bar\lambda t}\bar w$: esse coincidono ed in questo modo si ha una sola funzione!

MATEMATICA 4F–FISICA–9 DICEMBRE 2003

ESERCIZIO 17. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n,$$

trovarne il raggio di convergenza e la somma (si suppone nota la serie logaritmica, $-\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n/n$ per $|t| < 1$).

Risoluzione. Si ha con il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} |x| = |x|,$$

ed la serie converge per $|x| < 1$, non converge per $|x| > 1$; il il raggio di convergenza è quindi 1. Si ha poi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1};$$

La prima è una serie geometrica che parte da $n = 1$ ed ha quindi per somma $1/(1-x) - 1 = x/(1-x)$; per la seconda si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

serie logaritmica che parte da $n = 2$ e la cui somma vale quindi

$$\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right) = -\frac{\log(1-x)+x}{x};$$

in definitiva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{x}{1-x} + \frac{x+\log(1-x)}{x} = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} \qquad |x| < 1.$$

□

ESERCIZIO 18. Sia $A = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x + z/2 \le 1,\ x^2 + z^2 \ge 4/5,\ x,\ z \ge 0\}$; sia S il solido ottenuto da A facendolo ruotare di 2π attorno all'asse z.

(i) Disegnare A; descrivere S come differenza insiemistica di due ben noti solidi C e E.
(ii) Calcolare l'integrale

$$\int_S z^\alpha \, dxdydz,$$

per gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito (usare opportunamente la formula di riduzione; non cambiare coordinate).
(iii) Trovare il volume di S ed il baricentro di S.
(iv) Dato il campo $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$ trovare il flusso di esso uscente da S (1 punto) e dalle singole porzioni di frontiera di S (3 punti; con un po' di astuzia si evita ogni calcolo ...)

Risoluzione. (i) L'insieme A consta dei punti entro il triangolo fra gli assi coordinati e la retta di equazione $x + z/2 \le 1$, con intercette 1 e 2, non interni al disco di centro l'origine e raggio $2/\sqrt{5}$, che è esattamente la distanza della retta dall'origine ($|0 + 0/2 - 1|/\sqrt{1 + 1/4} = 2/\sqrt{5}$). Ne segue che S è il cono circolare retto C di altezza 2 e raggio di base 1, con vertice nel punto $(0,0,2)$, privato della mezza palla E nel semispazio $\{z \ge 0\}$, che ha centro l'origine e raggio $2/\sqrt{5}$, ed è tangente internamente al cono.

(ii) Si scrive

$$\int_S z^\alpha \, dxdydz = \int_C z^\alpha \, dxdydz - \int_E z^\alpha \, dxdydz;$$

Calcoliamo i due integrali separatamente. L'integrando è positivo; integrando per fette si ha

$$\int_C z^\alpha \, dxdydz = \int_{z=0}^{z=2} z^\alpha \, \lambda_2(C(z)) \, dz =$$

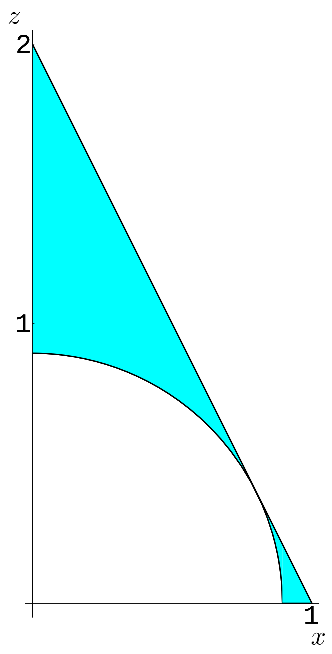


FIGURA 8. L'insieme A.

dove la $z-$sezione $C(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - z/2\}$, disco di centro l'origine e raggio $1 - z/2$:

$$\int_0^2 \pi z^\alpha (1-z/2)^2\, dz = \pi \int_0^2 (z^\alpha - z^{\alpha+1} + z^{\alpha+2}/4)\, dz =$$

(l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > -1$ e vale)

$$\pi \left[\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{z^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{z^{\alpha+3}}{4(\alpha+3)} \right]_0^2 = \pi 2^{\alpha+1} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} \right) =$$
$$\frac{2^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}.$$

Per calcolare l'integrale esteso ad E osserviamo che la $z-$sezione $E(z)$ è il disco di centro l'origine e raggio $\sqrt{4/5 - z^2}$; ancora integrando per fette si ha

$$\int_E z^\alpha\, dxdydz = \int_{z=0}^{z=2/\sqrt{5}} \pi z^\alpha (4/5 - z^2)\, dz =$$

(l'integrale è finito se e solo se $\alpha > -1$, e vale)

$$\pi \int_0^{2/\sqrt{5}} (4z^\alpha/5 - z^{\alpha+2})\, dz = \pi \left(\frac{4 \cdot 2^{\alpha+1}}{5^{(\alpha+1)/2}(\alpha+1)} - \frac{2^{\alpha+3}}{5 \cdot 5^{(\alpha+3)/2}(\alpha+3)} \right) =$$
$$\pi \frac{2^{\alpha+3}}{5^{(\alpha+3)/2}} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+3} \right) = \frac{\pi}{(\alpha+1)(\alpha+3)} \frac{2^{\alpha+4}}{5^{(\alpha+3)/2}}.$$

Se $\alpha > -1$, certamente l'integrale esteso ad S esiste finito e vale la differenza dei valori trovati, e cioè

$$I(\alpha) = \frac{\pi 2^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\pi}{(\alpha+1)(\alpha+3)} \frac{2^{\alpha+4}}{5^{(\alpha+3)/2}}.$$

Non accade che l'integrale sia finito per altri valori di α; se $\alpha \leq -1$ certamente l'integrale non esiste finito, infatti per z abbastanza vicino a 0 la $z-$sezione ha area $\pi(1 - z + z^2/4 - 5/4 + z^2)$, e l'integrale $\int_0^c z^\alpha (1/4 - z + 5z^2/4)\, dz$ non esiste finito, qualunque sia $c > 0$, se $\alpha \leq -1$, dato che l'integrando è asintotico a $z^\alpha/4$.

(iii) Il volume si ottiene con $\alpha = 0$:

$$I(0) = \frac{2\pi}{3} - \pi \frac{16}{15\sqrt{5}} = \pi \frac{10\sqrt{5} - 16}{15\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{75}(25 - 8\sqrt{5}).$$

La quota del baricentro è data da $I(1)/I(0)$; si ha

$$I(1) = \frac{\pi}{3} - \pi\frac{4}{25} = \pi\frac{13}{25}.$$

Si ha alfine

$$z_{\text{baricentro}} = I(1)/I(0) = \frac{13}{25}\frac{75}{2(25-8\sqrt{5})} = \frac{39}{2(25-8\sqrt{5})}.$$

(iv) La divergenza di $\vec{F}(x,y,z)$ è 1; il flusso di $\vec{F}$ uscente da S è quindi pari al volume di S, e cioè a $\pi(10\sqrt{5}-16)/(15\sqrt{5})$. Per il flusso attraverso le singole porzioni di frontiera, diciamo K il cono e T la semisfera, e detti Φ_K e Φ_T i rispettivi flussi uscenti, si ha ovviamente, abbreviato con V il volume di S:

$$V = \text{Flusso totale uscente} = \Phi_K + \Phi_T,$$

di modo che se troviamo Φ_T troviamo anche Φ_K. Ora, il flusso $-\Phi_T$ è quello uscente dalla mezza palla E, e se Φ_B è il flusso di $\vec{F}$ uscente dalla base di E (il disco che è la parte di frontiera di E sul piano xy) si ha

$$\text{Volume}(E) = -\Phi_T + \Phi_B.$$

Ma $\Phi_B = 0$ (si scrive $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,0)+(0,0,z)$; il primo campo è normale a B, il secondo è nullo su B), e quindi $\Phi_T = -\text{Volume}(E) = -\pi 16/(15\sqrt{5})$; ne segue

$$\Phi_K = V - \Phi_T = \frac{2}{3}\pi.$$

□

Esercizio 19. Dato il campo $\vec{F}_\alpha(x,y,z) = (x^2+y^\alpha)(-y,x,0)$, trovare i valori di $\alpha = 1,2,3,\ldots$ per cui esso è solenoidale. Per tali α, trovare poi un potenziale vettore $\vec{A}$ per il campo che sia della forma $\vec{A}(x,y,z) = (0,0,u(x,y))$, con $u \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Risoluzione. Calcoliamo:

$$\partial_x(x^2+y^\alpha)(-y) = -2xy; \qquad \partial_y(x^2+y^\alpha)x = \alpha y^{\alpha-1}x;$$

e si ha che la divergenza

$$\partial_x(x^2+y^\alpha)(-y) + \partial_y(x^2+y^\alpha)x = -2xy + \alpha y^{\alpha-1}x = x(\alpha-2)y^{\alpha-1},$$

è identicamente nulla se e solo se $\alpha = 2$. Imponendo che $\vec{A}$ sia potenziale vettore si trova

$$\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \partial_1 & 0 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & 0\vec{e}_3 \quad \partial_3 \quad u(x,y)\end{bmatrix} = \vec{e}_1\partial_2 u(x,y) - \vec{e}_2\partial_1 u(x,y) = \vec{e}_1(-(x^2+y^2)y) + \vec{e}_2(x^2+y^2)x;$$

quindi $\vec{A}$ è potenziale vettore se e solo se si ha

$$\partial_1 u(x,y) = -x(x^2+y^2); \qquad \partial_2 u(x,y) = -y(x^2+y^2),$$

e cioè se e solo se u è un potenziale del campo $(x(x^2+y^2), y(x^2+y^2))$. Tale campo è a simmetria circolare e quindi ha un potenziale u della forma $\alpha(r)$, dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$, e si ha

$$-\nabla\alpha(r) = -\alpha'(r)\nabla r = -\frac{\alpha'(r)}{r}(x,y).$$

Imponendo l'uguaglianza di tale campo con il campo $(x(x^2+y^2), y(x^2+y^2)) = r^2(x,y)$ si trova $-\alpha'(r)/r = r^2$, da cui $\alpha'(r) = -r^3$ e quindi $\alpha(r) = -r^4/4$, da cui $u(x,y) = -(x^2+y^2)^2/4$. In conclusione il potenziale vettore richiesto è

$$\vec{A}(x,y,z) = -\vec{e}_3\frac{(x^2+y^2)^2}{4}.$$

Osservazione. Naturalmente chi non si trova a suo agio con il metodo precedente per integrare la forma del campo può procedere come al solito: integrando in x la prima componente $x(x^2+y^2)$ si trova $x^4/4 + x^2y^2/2 + k(y)$, derivando in y si trova $x^2y + k'(y) = yx^2 + y^3$, da cui $k'(y) = y^3$, da cui $k(y) = y^4/4$; si trova quindi (ricordando il segno)

$$u(x,y) = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right) = -\frac{(x^2+y^2)^2}{4}.$$

□

Esercizio 20. Si considera l'equazione differenziale:

$$x\,y' = e^{-y} - 1 \qquad (x \text{ è la variabile indipendente})$$

(i) Disegnare le zone del piano xy in cui le soluzioni sono crescenti, e quelle in cui sono decrescenti; trovare le soluzioni costanti.
(ii) È vero che se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è soluzione allora $\psi : -I \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(x) = \varphi(-x)$ è soluzione (I è intervallo di $\mathbb{R}$)?
(iii) Trovare esplicitamente la soluzione massimale del problema di Cauchy dato dall'equazione con condizione iniziale $y(1) = a$, determinando in particolare l'intervallo di esistenza. Per quali a esso coincide con $]0, +\infty[$?
(iv) Quali soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$?

Risoluzione. (i) Si ha $e^{-y} - 1 > 0$ se $y < 0$, se $y > 0$ tale quantità è negativa, è nulla solo per $y = 0$. Le soluzioni sono crescenti nel secondo e quarto quadrante, decrescenti nel primo e nel terzo; unica soluzione costante è quella nulla.

(ii) Si ha $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$ per ogni $x \in -I$; si ha allora $x\psi'(x) = -x\varphi'(-x) = (-x)\varphi'(-x)$; dato che φ è soluzione su I si ha $\xi\varphi'(\xi) = e^{-\varphi(\xi)} - 1$ per ogni $\xi \in I$; se $x = -\xi$ si ha allora $(-x)\varphi'(-x) = e^{-\varphi(-x)} - 1$ per ogni $x \in -I$, che per l'appunto dice che è

$$x\psi'(x) = e^{-\psi(x)} - 1 \qquad \text{per ogni } x \in -I,$$

e quindi che effettivamente ψ è soluzione su $-I$.

Attenzione! Non è un'equazione lineare! Non ha senso parlare di omogenea associata!

(iii) Riducendo l'equazione a forma normale (possibile se $x \neq 0$) si ha

$$y' = \frac{e^{-y} - 1}{x}.$$

Tale equazione ha il secondo membro di classe C^1 e quindi verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale. Una soluzione non può quindi mai annullarsi se non è identicamente nulla. Ne segue che se $a = 0$ si ha la soluzione nulla; se $a \neq 0$ la soluzione non si annulla mai e si possono separare le variabili:

$$\frac{y'(x)}{e^{-y(x)} - 1} = \frac{1}{x} \iff \frac{e^{y(x)}\,y'(x)}{1 - e^{y(x)}} = \frac{1}{x};$$

integrando fra 1 ed x ambo i membri si ottiene

$$\log(1 - e^{y(0)}) - \log(1 - e^{y(x)}) = \log x \iff \log\frac{1 - e^a}{1 - e^{y(x)}} = \log x \iff \frac{e^{y(x)} - 1}{e^a - 1} = \frac{1}{x},$$

da cui

$$e^{y(x)} = \frac{x + (e^a - 1)}{x}, \qquad \text{per gli } x > 0 \text{ tali che sia } x + (e^a - 1) > 0, \text{ cioè per } x > 1 - e^a.$$

L'intervallo di definizione della soluzione massimale è quindi $I_a =]\max\{0, 1 - e^a\}, +\infty[$; si ha $I_a =]0, +\infty[$ se e solo se $a > 0$; su I_a la soluzione massimale è

$$y(x) = \log\frac{x + (e^a - 1)}{x} \qquad x \in I_a.$$

(iv) L'unica soluzione definita su tutta la retta reale è la costante nulla. Infatti, se una soluzione è definita su tutto $]0, +\infty[$, e non è la costante nulla, allora deve essere $y(1) = a > 0$, come sopra visto, e la soluzione deve coincidere, su $]0, +\infty[$, con $\log((x + (e^a - 1))/x)$; per $x \to 0^+$ tale soluzione tende a $+\infty$ se $a > 0$, come subito si vede, e non può prolungarsi per continuità in $x = 0$. □

Esercizio 21. (i) Per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y + e^t \\ \dot{y} &= \quad\;\; -y + e^t \end{cases}$$

trovare una soluzione particolare della forma $e^t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (a, b costanti reali).

(ii) Trovare e^{tM} se $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(iii) Trovare una risolvente del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} & = -x + y + z \\ \dot{y} & = \qquad -y + z \\ \dot{z} & = \qquad\qquad z \end{cases}$$

(usare (i) ed (ii), osservando prima che l'ultima equazione ha come soluzioni ...).

Risoluzione. (i) Imponendo che la funzione data sia soluzione si ottiene

$$\begin{cases} ae^t & = -ae^t + be^t + e^t \\ be^t & = \qquad -be^t + e^t \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b & = 1 \\ \quad 2b & = 1 \end{cases} \iff b = 1/2,\ a = 3/4.$$

La soluzione richiesta è quindi $e^t(1/2, 3/4)$.

(ii) Si scrive

$$tM = -t1_2 + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e la seconda matrice N è chiaramente nilpotente e commuta con la prima, che è scalare, per cui si ha

$$e^{tM} = e^{-t}\,(1_2 + tN) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) L'ultima equazione ha come soluzioni $z = z_0 e^t$, in particolare e^t; sostituendo nelle prime due si trova il sistema di (i), una cui soluzione particolare abbiamo trovato essere $e^t(3/4, 1/2)$. Una soluzione del sistema tridimensionale è quindi $e^t(3/4, 1/2, 1)$. La matrice esponenziale trovata in (i) fornisce altre due colonne soluzione, che sono $e^{-t}(1, 0, 0)$ e $e^{-t}(t, 1, 0)$. Una risolvente è quindi

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 3e^t/4 \\ 0 & e^{-t} & e^t/2 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix};$$

infatti le colonne sono soluzioni, e chiaramente sono linearmente indipendenti.

□

Matematica 4F– 7 gennaio 2004

Esercizio 22. (i) Mostrare che la forma differenziale

$$2xy\,dx + x^2\,dy$$

è esatta e trovarne una primitiva.

(ii) Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e sia $f(-1) = 0,\ f(1) = 1$. Si sa che se $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva $\gamma(t) = (t, f(t))$, allora

$$\int_\gamma ((2xy + y)\,dx + x^2\,dy) = 2.$$

Calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Risoluzione. (i) È immediato vedere che $F(x, y) = x^2 y$ è una primitiva della forma $2xy\,dx + x^2\,dy$.

(ii) Si ha per ipotesi

$$2 = \int_\gamma ((2xy + y)\,dx + x^2\,dy) = \int_\gamma (2xy\,dx + x^2\,dy) + \int_\gamma y\,dx;$$

si ha poi

$$\int_\gamma (2xy\,dx + x^2\,dy) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(-1)) = F(1, 1) - F(-1, 0) = 1;$$

se ne deduce $\int_\gamma y\,dx = 1$; quindi

$$1 = \int_\gamma y\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

□

Esercizio 23. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \le 1,\ \sqrt{x^2 + 2y^2} \le z \le 2\}$.

(i) Disegnare S e dimostrare che S è compatto.

(ii) Calcolare

$$\int_S |xyz|\, dxdydz$$

(si possono usare ad esempio coordinate ellittico–cilindriche, $x = ar\cos\vartheta$, $y = br\sin\vartheta$, $z = z$, con $a, b > 0$ convenienti costanti)

Risoluzione. (i) Se $x^2 + 2y^2 \le 1$ siamo entro il cilindro a sezione ellittica che ha l'asse z come asse, e che interseca il piano xy nell'ellisse di semiassi $1, 1/\sqrt{2}$; se $z \ge \sqrt{x^2 + 2y^2}$ siamo sopra il semicono ellittico; se $z \le 2$ siamo sotto il piano a quota $z = 2$. Si tratta del cono a sezione ellittica $\{\sqrt{x^2 + 2y^2} \le z \le 1\}$, sormontato dal cilindro a sezione ellittica con basi sui piani $z = 1$ e $z = 2$. In ogni caso da $x^2 + 2y^2 \le 1$ segue $|x| \le 1$ e $|y| \le 1/\sqrt{2}$; e da $\sqrt{x^2 + 2y^2} \le z \le 2$ segue $0 \le z \le 2$. Quindi S è limitato, ed è chiuso per la solita ragione (luogo delle soluzioni di disequazioni in senso lato tra funzioni continue); e quindi S è compatto.

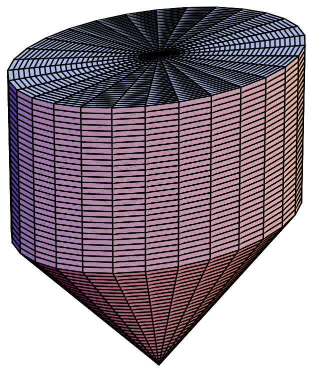


Figura 9. L'insieme S; le sue $z-$sezioni sono ellissi, i cui semiassi sono nel rapporto $1/(1/\sqrt{2})$.

(ii) Chiaramente si usano come a, b i semiassi dell'ellisse, e cioè 1 ed $1/\sqrt{2}$. Lo jacobiano è allora $r/\sqrt{2}$; l'insieme S diventa:

$$E = \{(r, \vartheta, z) : r^2 \le 1,\ 0 \le r \le z \le 2,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\};$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int_E |xyz|\, dxdydz &= \int_E \frac{r^2}{\sqrt{2}} |\cos\vartheta||\sin\vartheta| z\ \frac{r}{\sqrt{2}}\, drd\vartheta dz = \\
&\frac{1}{2}\left(\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} |\cos\vartheta||\sin\vartheta|\, d\vartheta\right)\left(\int_D zr^3\, drdz\right) = \\
&\frac{4}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_D zr^3\, drdz\right) = \\
&\left[\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2}\left(\int_D zr^3\, drdz\right) = \left(\int_D zr^3\, drdz\right)
\end{aligned}$$

Essendo $D = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \le 1,\ 0 \le r \le z \le 2\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_D zr^3\, drdz = \int_{z=0}^{z=1} z\left(\int_{r=0}^{r=z} r^3\, dr\right) dz + \int_{z=1}^{z=2} z\left(\int_{r=0}^{r=1} r^3\, dr\right) dz = \\
\int_0^1 \frac{z^5}{4}\, dz + \int_1^2 \frac{z}{4}\, dz = \frac{1}{24} + \frac{3}{8} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_S |xyz|\, dxdydz = \frac{5}{12}.$$

□

Esercizio 24. Siano a, b costanti, con $0 < a < b$; sia $E(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ ay^2 \le x \le by^2\}$.

(i) Disegnare $E(a,b)$; mostrare che il seguente integrale

$$\int_{E(a,b)} e^{-x/y}\, dxdy$$

esiste finito e calcolarlo.

(ii) Dimostrare che $u = x/y$, $v = x/y^2$ definisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ in un insieme da determinarsi; calcolare esplicitamente l'inverso di tale diffeomorfismo, disegnare il trasformato $F(a,b)$ di $E(a,b)$, e riottenere l'integrale calcolato in (i) con il cambiamento di variabili suggerito.

Risoluzione. (i) Il disegno di $E(a,b)$ è immediato:

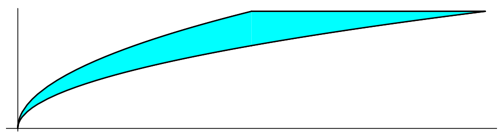


Figura 10. L'insieme $E(a,b)$.

L'integrando è positivo, quindi se l'integrale iterato esiste finito esso è l'integrale (teorema di Tonelli):

$$\int_{E(a,b)} e^{-x/y}\, dxdy = \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\int_{x=ay^2}^{x=by^2} e^{-x/y}\, dx \right) dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \left[-y\, e^{-x/y} \right]_{x=ay^2}^{x=by^2} dy = \int_0^{\infty} y(e^{-ay} - e^{-by})\, dy =$$

(una primitiva di $y\, e^{-cy}$ è $-e^{-cy}(y/c + 1/c^2)$)

$$\left[-e^{-ay} \frac{ay+1}{a^2} \right]_{y=0}^{y=\infty} - \left[-e^{-by} \frac{by+1}{b^2} \right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

(per $y \to +\infty$ i limiti sono entrambi nulli essendo $a, b > 0$).

(ii) Chiaramente $u, v > 0$ e quindi la trasformazione data mappa intanto il primo quadrante in se stesso. Inoltre, dividendo membro a membro si ha

$$(x/y)/(x/y^2) = u/v \iff y = u/v,$$

da cui subito $x = uy = u^2/v$. Se $u, v > 0$ esiste quindi un'unico $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ tal che $u = x/y$ e $v = x/y^2$, e tale coppia è $x = u^2/v$, $y = u/v$; ne segue che $(u,v) \mapsto \varphi(u,v) = (u^2/v, u/v)$ è un diffeomorfismo di $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ in se stesso, con inversa $\varphi^{-1}(x,y) = (x/y/x/y^2)$. Poiché $E(a,b) = \{(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[: a \le x/y^2 \le b\}$ si ha $F(a,b) = \{(u,v) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[: a \le v \le b\}$, semistriscia che non disegno. Osservato che si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{bmatrix} 2u/v & -u^2/v^2 \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}, \quad \text{per cui} \quad \det \varphi'(u,v) = -\frac{u^2}{v^3}$$

l'integrale diventa:

$$\int_{F(a,b)} e^{-u} |\det \varphi'(u,v)|\, dudv = \int_{F(a,b)} \frac{u^2}{v^3} e^{-u}\, dudv =$$

$$\left(\int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\, du \right) \left(\int_{v=a}^{v=b} \frac{dv}{v^3} \right) = \Gamma(3) \left[\frac{-1}{2v^2} \right]_{v=a}^{v=b} =$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

□

Esercizio 25. (i) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice esponenziale del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha\, x + 2y \\ \dot{y} &= -2x + \alpha\, y \end{cases}$$

(volendo ridurre i calcoli si può ricondurre il sistema ad una singola equazione usando la variabile complessa $z = x + iy \ldots$)

(ii) Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -2x + \cos(2t) \end{cases}$$

Risoluzione. (i) Se $z = x + iy$ e $c = \alpha - 2i$ il sistema si scrive $\dot{z} = c\, z$ che ha come soluzioni $z(t) = e^{ct} z_0$. La matrice esponenziale è quindi quella della moltiplicazione per $e^{ct} = e^{(\alpha - 2i)t} = e^{\alpha t}(\cos(2t) - i\sin(2t))$, e cioè , se $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$ è la matrice del sistema dato:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos(2t) & e^{\alpha t}\sin(2t) \\ -e^{\alpha t}\sin(2t) & e^{\alpha t}\cos(2t) \end{bmatrix}$$

(ii) Il metodo di variazione delle costanti dice che la soluzione del sistema che è nulla in $t = 0$ è data da

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2s) \end{bmatrix} ds.$$

Si ha

$$e^{-sA} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2s) & -\sin(2s) \\ \sin(2s) & \cos(2s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(2s)\cos(2s) \\ \cos^2(2s) \end{bmatrix}.$$

Integrando fra 0 e t si ha

$$\begin{bmatrix} (\cos^2(2t) - 1)/4 \\ t/2 + \sin(4t)/8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin^2(2t)/2 \\ t + \sin(4t)/4 \end{bmatrix};$$

e moltiplicando a sinistra per $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$ si ha alfine per la soluzione

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =& \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cos(2t)\sin^2(2t)/2 + t\sin(2t) + \sin(2t)\sin(4t)/4 \\ \sin^3(2t)/2 + t\cos(2t) + \cos(2t)\sin(4t)/4 \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t\sin(2t) \\ t\cos(2t) + \sin(2t)/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'integrale generale è quindi

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(2t) + b\sin(2t) \\ -a\sin(2t) + b\cos(2t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\sin(2t)/2 \\ t\cos(2t)/2 + \sin(2t)/4 \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R});$$

è la soluzione che verifica $x(0) = a$, $y(0) = b$. □

Esercizio 26. Si considera il problema di Cauchy:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0 \quad \text{dove} \quad f :]-\pi/2, \pi/2[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{è data da} \quad f(t, y) = (\tan t)(1 + \cos y).$$

(i) Un teorema assicura che tale problema ha esistenza ed unicità globali su tutto l'intervallo aperto $]-\pi/2, \pi/2[$; enunciare tale teorema, verificando che le sue ipotesi sono effettivamente soddisfatte dall'equazione data.

(ii) Trovare le soluzioni costanti, e verificare che le soluzioni non costanti hanno $t = 0$ come estremo assoluto; è vero che le soluzioni sono pari? o sono dispari?

(iii) Trovare esplicitamente le soluzioni del problema, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. (i) Il teorema di esistenza ed unicità globale nella sua forma debole dice che se $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, e se per ogni subintervallo compatto K di I esiste una costante $L_K > 0$ tale che sia

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L_K |y_1 - y_2| \qquad \text{per ogni } t \in K \text{ e } y_1, y_1 \in \mathbb{R},$$

allora il problema di Cauchy $y' = f(t,y)$, ed $y(t_0) = y_0$ ha soluzione unica su tutto I, qualunque sia $(t_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$. La costante L_K, se esiste, è una qualsiasi costante non minore di $\sup\{|\partial_2 f(t,y)| : (t,y) \in K \times \mathbb{R}\}$; essendo $\partial_2 f(t,y) = \tan t(-\sin y)$ si ha

$$|\partial_2 f(t,y)| = |\tan t||-\sin y| \le |\tan t|;$$

la funzione $\tan t$, continua sull'intervallo $K \subseteq]-\pi/2,\pi/2[$, ha in tale intervallo compatto un massimo modulo finito, che certamente maggiora $\sup\{|\partial_2 f(t,y)| : (t,y) \in K \times \mathbb{R}\}$.

(ii) Le soluzioni costanti sono ovviamente gli zeri della funzione $1+\cos y$, e cioè $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Se una soluzione $\varphi :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ non è costante, per unicità si ha sempre $1+\cos\varphi(t) \ne 0$, ed allora $1+\cos\varphi(t) > 0$ per ogni $t \in]-\pi/2,\pi/2[$. Ne segue che il segno di $\varphi(t) = \tan t(1+\cos\varphi(t))$ è quello di $\tan t$, e quindi è negativo per $t<0$, e positivo per $t>0$; $t=0$ è di minimo assoluto per tutte le soluzioni non costanti.

Se poi $\varphi :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ è soluzione, posto $\psi(t) = \varphi(-t)$ si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$; essendo

$$\varphi'(-t) = \tan(-t)(1+\cos\varphi(-t)) \qquad \text{si ha} \qquad -\varphi'(-t) = \tan t(1+\cos\varphi(-t)),$$

per ogni $t \in]-\pi/2,\pi/2[$, quindi $\psi'(t) = \tan t(1+\cos\psi(t))$, sempre per ogni $t \in]-\pi/2,\pi/2[$, e quindi anche ψ è soluzione. Dato che $\varphi(0) = \psi(0)$, per unicità si ha $\varphi(t) = \psi(t)$ per ogni $t \in]-\pi/2,\pi/2[$, e quindi le soluzioni sono pari.

(iii) Se la soluzione $y(t)$ non è costante si ha $1+\cos y(t) \ne 0$ per ogni $t \in]-\pi/2,\pi/2[$; si possono quindi separare le variabili, ottenendo

$$\frac{y'(t)}{1+\cos y(t)} = \tan t \quad \text{da cui} \quad \frac{y'(t)}{2\cos^2(y(t)/2)} = -\frac{-\sin t}{\cos t},$$

ed integrando fra 0 e $t \in]-\pi/2,\pi/2[$

$$\tan(y(t)/2) - \tan(y_0/2) = -\log(\cos t) \iff \tan(y(t)/2) = \tan(y_0/2) - \log(\cos t).$$

Sia ora $k(y_0) \in \mathbb{Z}$ tale che sia $y_0/2 \in]-\pi/2 + k(y_0)\pi, \pi/2 + k(y_0)\pi[$; si ha

$$y(t) = 2k(y_0)\pi + 2\arctan(\tan(y_0/2) - \log(\cos t)).$$

$\square$

MATEMATICA 4F–13 LUGLIO 2004

ESERCIZIO 27. Sia $a > 0$ costante; determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n}$$

e calcolarne la somma.

Risoluzione. Criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} \frac{na^n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{a} = \frac{|x|}{a}.$$

La serie converge per $|x| < a$, non converge per $|x| > a$; il raggio di convergenza è a.

Detta $f(x)$ la somma della serie, derivando termine a termine come sappiamo essere lecito, si ottiene se $|x| < a$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{a^n} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-(x/a)} = \frac{1}{a-x},$$

Essendo per $|x| < a$ $f'(x) = 1/(a-x)$, ed $f(0) = 0$ si ottiene, integrando

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{a-t} = [-\log(a-t)]_0^x = \log a - \log(a-x)(= -\log(1-(x/a)).$$

□

ESERCIZIO 28. (i) Dato $a > 0$ descrivere l'insieme $Q_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq a\}$.

Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \cos(|x| + |y|)$, e sia

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y),\ |x| + |y| \leq \pi/2\}.$$

(ii) Trovare il volume di$S$.

(iii) Trovare le coordinate del baricentro di S (supposto omogeneo).

(iv) Sia $\vec{F}(x,y,z) = (z, yz, x)$. Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da S, e dalle singole porzioni di frontiera di S.

(v) Sia E l'intersezione di S con il quadrante del piano coordinato $x = 0$ per cui si ha $y \geq 0$, $z \geq 0$, e sia γ il circuito bordo di E, orientato nel verso che appare antiorario dal semiasse $x > 0$; dare una parametrizzazione di γ e calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo γ, $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sia direttamente che con la formula di Stokes.

Risoluzione. (i) È ben noto che Q_a è il quadrato con i vertici nei punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm a)$ (la cosa si può verificare, ad esempio, nel seguente modo: è ovvio che Q_a è simmetrico rispetto ad entrambi gli assi coordinati, per cui basta trovare l'intersezione di Q_a con il primo quadrante, cioè l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq a\}$; e questo è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$, intersezione dei tre semipiani $\{x \geq 0\}$, $\{y \geq 0\}$, $\{x + y \leq a\}$).

(ii) Se $(x,y) \in Q_{\pi/2}$ si ha $0 \leq f(x,y) \leq 1$; la $z-$sezione di S è, per $0 \leq z \leq 1$:

$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z \leq \cos(|x| + |y|)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arccos z \geq |x| + |y|\} = Q_{\arccos z}.$$

L'area della $z-$sezione è quindi l'area di $Q_{\arccos z}$, e cioè $4(\arccos z)^2/2 = 2\arccos^2 z$; il volume è allora (si pone $z = \cos t$):

$$\text{Volume}(S) = \int_{z=0}^{z=1} 2\arccos^2 z\, dz = 2\int_{\pi/2}^{0} 2t^2(-\sin t)\, dt$$

$$2\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t\, dt = (\text{formulario}) = 2\left[-(t^2-2)\cos t + 2t\sin t\right]_0^{\pi/2} = 2\pi - 4.$$

(iii) Per la simmetria il baricentro è ovviamente sull'asse z. Per trovare z_G calcoliamo:

$$\int_S z\, dxdydz = \int_{z=0}^{z=1} z\lambda_2(S_z)\, dz = 2\int_0^1 z\arccos^2 z\, dz = 2\int_{\pi/2}^{0} \cos t\, t^2(-\sin t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \sin(2t)\, dt = (\text{formulario}) = \left[-(t^2/2 - 1/4)\cos(2t) + (t/2)\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$-(\pi^2/8-1/4)(-1)-1/4=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}.$$

Si ha quindi

$$z_G=\frac{\pi^2-4}{16(\pi-2)}=\frac{\pi+2}{16}.$$

(iv) La divergenza di $\vec{F}$ è $\nabla\cdot\vec{F}=z$; per il teorema della divergenza il flusso totale del campo uscente da S è pari a $\int_S z\,dxdydz$, sopra calcolato, che vale $(\pi^2-4)/8$. Il flusso uscente dalla base $Q_{\pi/2}$ vale, per definizione stessa di flusso, ricordndo che sulla base il versore normale esterno è $-\vec{e}_3$:

$$\int_{Q_{\pi/2}}\vec{F}(x,y,0)\cdot(-\vec{e}_3)\,dxdy=-\int_{Q_{\pi/2}}x\,dxdy=0$$

(l'integrale è nullo perchè $Q_{\pi/2}$ è simmetrico rispetto all'asse y, e l'integrando è dispari per questa simmetria). Il flusso uscente dalla cima è quindi pari all'intero flusso uscente.

(v) Si osserva che l'insieme $E=\{(y,z):\ 0\le y\le\pi/2,\ 0\le z\le\cos y\}$ è il trapezoide relativo alla funzione coseno al di sopra dell'intervallo $[0,\pi/2]$. Ne segue che partendo dall'origine γ è fatto di tre pezzi:

1) il segmento α di asse y da $(0,0,0)$ a $(0,\pi/2,0)$, parametrizzazione $(0,y,0)$, $y\in[0,\pi/2]$.

2) Il tratto di curva β di equazione cartesiana $z=\cos y$, percorso da $(0,\pi/2,0)$ a $(0,0,1)$; l'opposto si parametrizza come $(0,y,\cos y)$, con $y\in[0,\pi/2]$.

3) Il segmento σ di asse z da $(0,0,1)$ all'origine; l'opposto è $(0,0,z)$, $z\in[0,1]$.

La circuitazione è quindi

$$\int_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_\beta\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_\sigma\vec{F}\cdot d\vec{r}=$$
$$\int_0^{\pi/2}y0\,dy-\int_0^{\pi/2}(y\cos y+0)\,dy-\int_0^1 0\,dz=-\int_0^{\pi/2}y\cos y\,dy=$$
$$-[y\sin y]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\sin y\,dy=1-\frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo ora il rotore di $\vec{F}$:

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1&\partial_1&z\\ \vec{e}_2&\partial_2&yz\\ \vec{e}_3&\partial_3&x\end{bmatrix}=\vec{e}_1(-y)+\vec{e}_2(1-1)+\vec{e}_3 0=-y\vec{e}_1.$$

Il flusso di tale campo attraverso E, nella direzione della normale $\vec{e}_1$, è:

$$-\int_E y\,dydz=-\int_{y=0}^{y=\pi/2}y\left(\int_{z=0}^{z=\cos y}dz\right)dy=-\int_0^{\pi/2}y\cos y\,dy,$$

che è esattamente l'integrale sopra calcolato per la circuitazione.

Osservazione. Noi abbiamo integrato "per fette" per calcolare il volume ed il baricentro di S; si poteva altrettanto bene integrare "per fili", e l'integrale è forse anche più semplice: osservando che S è il trapezoide di f al di sopra del quadrato $Q_{\pi/2}$ ed usando le simmetrie si aveva

$$\mathrm{Vol}(S)=4\int_{x,y\ge0,\,x+y\le\pi/2}\cos(x+y)\,dxdy=4\int_{x=0}^{x=\pi/2}\left(\int_{y=0}^{y=\pi/2-x}\cos(x+y)\,dy\right)dx=$$
$$4\int_{x=0}^{x=\pi/2}[\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2-x}\,dx=4\int_0^{\pi/2}(\sin\pi/2-\sin x)\,dx=2\pi-4.$$

Similmente per il baricentro.

□

Esercizio 29. Trovare una risolvente per il sistema differenziale

$$\begin{cases}\dot{x}&=-x+3y\\ \dot{y}&=3x-y\end{cases}$$

trovare poi le condizioni iniziali $a=x(0)$, $b=y(0)$ a cui soddisfano le soluzioni del sistema che hanno limite nullo per t che tende a $+\infty$.

Risoluzione. L'equazione caratteristica è

$$\det\left(\zeta\,1_2 - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \zeta+1 & -3 \\ -3 & \zeta+1 \end{bmatrix} = (\zeta+1)^2 - 9 = 0,$$

con radici $\zeta = -4$, $\zeta = 2$. Cerchiamo un autovettore associato all'autovalore -4:

$$\begin{cases} -3x - 3y = & 0 \\ -3x - 3y = & 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = -y,$$

ed un autovettore è ad esempio $(1, -1)$. Cerchiamo poi un autovettore associato all'autovalore 2:

$$\begin{cases} 3x - 3y = & 0 \\ -3x + 3y = & 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = y,$$

ed un autovettore è ad esempio $(1, 1)$. Una risolvente è quindi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{2t} \\ -e^{-4t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Ogni soluzione si scrive quindi $\Phi(t).(c_1, c_2)$, al variare di $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Vediamo in termini delle condizioni iniziali: $(a, b) = \Phi(0).(c_1, c_2)$ quindi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = & a \\ -c_1 + c_2 = & b \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_2 = & a + b \\ 2c_1 = & a - b \end{cases} \quad c_1 = (a-b)/2,\ c_2 = (a+b)/2.$$

La soluzione che vale (a, b) per $t = 0$ è quindi:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a-b}{2} e^{-4t} + \dfrac{a+b}{2} e^{2t} \\ \dfrac{b-a}{2} e^{-4t} + \dfrac{a+b}{2} e^{2t} \end{bmatrix}.$$

È evidente che il limite per $t \to +\infty$ di tale soluzione è nullo se e solo se $a + b = 0$, cioè $a = -b$. □

Esercizio 30. È dato il sistema differenziale

(S) $$\begin{cases} \dot{x} & = y^2(1 + x^2) \\ \dot{y} & = y^2 \end{cases}.$$

(i) Trovare tutte le soluzioni costanti di (S).
(ii) Trovare un integrale primo per (S), e disegnare le traiettorie di alcune soluzioni.
(iii) Risolvere il problema di Cauchy $y' = y^2$, $y(0) = b$ al variare di $b \in \mathbb{R}$; mostrare che le uniche soluzioni di (S) definite su tutto $\mathbb{R}$ sono le costanti.
(iv) Trovare le soluzioni del problema di Cauchy dato da (S) con condizioni iniziali $x(0) = a$, $y(0) = b$.

Risoluzione. (i) da $0 = y^2(1 + x^2)$ e $0 = y^2$ si ottiene $y = 0$ ed $x = x_0$ costante. Tutti i punti dell'asse x sono soluzioni costanti.

(ii) Al solito si tratta di risolvere l'equazione totale $y^2\, dx - y^2(1 + x^2)\, dy = 0$, nella quale si possono separare le variabili ottenendo $dx/(1 + x^2) - dy = 0$, e cioè $\arctan x - y = c$; un integrale primo è quindi $y - \arctan x$. Ne segue che le traiettorie stanno tutte sui grafici delle funzioni $y = \arctan x + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$; dato che $\dot{x}$, $\dot{y} \geq 0$ sono percorse nel verso delle coordinate crescenti. Se il grafico di $y = \arctan x + c$ interseca l'asse delle ascisse (il che avviene per $c \in]-\pi/2, \pi/2[$) allora sul grafico c'è l'equilibrio che è il punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

(iii) Se $b = 0$ la soluzione è quella nulla, per unicità. Altrimenti si divide per $(y(t))^2$ ottenendo

$$\frac{\dot{y}(t)}{(y(t))^2} = 1 \quad \text{integrando fra 0 e } t \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{y(t)} = t \iff y(t) = \frac{b}{1 - bt},$$

tutto questo naturalmente nel massimo intervallo contenente 0 per cui le operazioni fatte hanno senso, e cioè per $t \in]-\infty, 1/b[$ se $b > 0$, per $t \in]1/b, +\infty[$ se $b < 0$. Ne segue che l'unica soluzione globalmente definita è $y = 0$, e questo ovviamente implica che le sole soluzioni del sistema globalmente definite sono le costanti.

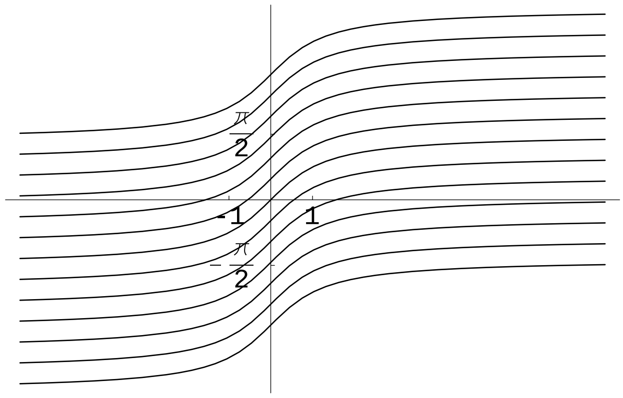


FIGURA 11. Traiettorie di alcune soluzioni; sono tutte percorse da sinistra a destra; le intersezioni con l'asse delle ascisse sono soluzioni costanti.

(iv) Se $b = 0$, y è costantemente 0, e quindi $\dot{x} = 0$, da cui $x = a$. Si ottengono gli equilibri $(a, 0)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$. Altrimenti si separano le variabili ottenendo

$$\frac{\dot{x}(t)}{1 + (x(t))^2} = \frac{b^2}{(1 - bt)^2}, \quad \text{da cui, integrando fra 0 e } t \text{ si ottiene}$$

$$\arctan x(t) - \arctan a = \frac{b}{1 - bt} - b \iff \arctan x(t) = \arctan a - b + \frac{b}{1 - bt}.$$

Si può ora scrivere $x(t) = \tan(\arctan a - b + b/(1 - bt))$ purché sia, per un intero $k \in \mathbb{Z}$

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < \arctan a - b + \frac{b}{1 - bt} < \frac{\pi}{2} + k\pi \iff$$
$$k\pi + b - \arctan a - \frac{\pi}{2} < \frac{b}{1 - bt} < b - \arctan a + \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

sia $I(a, b)$ il massimo intervallo contenente $t = 0$ in cui tali disuguaglianze sono verificate, ed $1 - bt > 0$. La soluzione è quindi

$$x(t) = \tan\left(\arctan a - b + \frac{b}{1 - bt}\right); \qquad y(t) = \frac{b}{1 - bt} \qquad (t \in I(a, b)).$$

OSSERVAZIONE. Non è difficile trovare esplicitamente $I(a, b)$, ma occorre distinguere vari casi (b positivo o negativo, $\arctan a - b \pm \pi/2 + k\pi$ positivo o negativo, ecc. Non facciamo la discussione.

$\square$

Matematica 4F–9 settembre 2004

Esercizio 31. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\,n!}$$

determinarne il raggio di convergenza e calcolarne la derivata della somma.

Risoluzione. Raggio di convergenza $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,n!}{(n+1)(n+1)!}|z| = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0,$$

per ogni $z \neq 0$. Derivando termine a termine si ha

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z}(e^z - 1) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

□

Esercizio 32. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, sia D il solido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0,\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 - z^2\}$$

(i) Disegnare D, e calcolare $I_\alpha = \int_D z^\alpha\, dxdydz$ al variare di $\alpha \geq 0$. In particolare, si dica quanto valgono il volume di D e la coordinata z_G del baricentro geometrico di D.
(ii) Considerati i punti $P(b, 0, 0)$ e $Q(0, a, \sqrt{b^2 - a^2})$ della frontiera S di D, si calcoli, nel modo più semplice possibile, l'integrale curvilineo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x-y, -x, z+z^2/b)$ lungo il segmento σ da P a Q, e lungo una poligonale π con i lati paralleli agli assi congiungente P e Q
(iii) Calcolare il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso tutta S, e attraverso i pezzi S_1 e S_2 di S che giacciono rispettivamente su $z = 0$ e su $x^2 + y^2 = a^2$.

Risoluzione. (i) L'insieme D consta dei punti del primo ottante non interni al cilindro illimitato di raggio $a > 0$ ed asse l'asse z, e non esterni alla palla di centro l'origine e raggio $b > a$. Il disegno è come in figura.

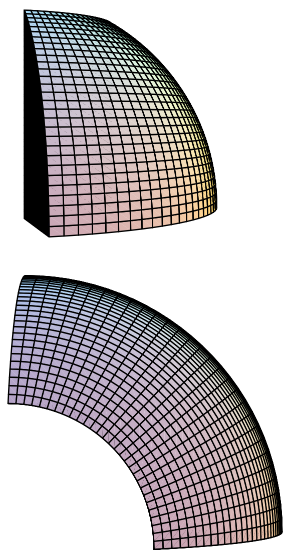


Figura 12. Il solido D, con $a = 1$ e $b = 2$, visto dal punto $(3, -1, 3)$ e (sotto) dal punto $(0, 0, 6)$

La $z-$sezione di D è

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 - z^2\},$$

quarto di corona circolare di area $\int_{D(z)} dxdy = \pi(b^2 - z^2 - a^2)/4$, per gli $z \geq 0$ per cui si ha $a^2 \leq b^2 - z^2$, e cioè per $0 \leq z \leq \sqrt{b^2 - a^2}$, mentre $D(z)$ è vuota per $z > \sqrt{b^2 - a^2}$. Ne segue

$$I(\alpha) = \int_{z=0}^{z=\sqrt{b^2-a^2}} z^\alpha \frac{\pi}{4}(b^2 - z^2 - a^2)\, dz = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2) \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} z^\alpha\, dz - \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} z^{\alpha+2}\, dz =$$
$$\frac{\pi}{4(\alpha+1)}(b^2 - a^2)^{(\alpha+1)/2+1} - \frac{\pi}{4(\alpha+3)}(b^2 - a^2)^{(\alpha+3)/2} =$$
$$\frac{\pi}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}(b^2 - a^2)^{\alpha/2+3/2}.$$

Il volume si ha per $\alpha = 0$:

$$\text{Volume}(D) = \frac{\pi}{6}(b^2 - a^2)^{3/2}.$$

Si ha poi

$$z_G = \frac{I(1)}{I(0)} = \frac{(\pi/(2 \cdot 2 \cdot 4))(b^2 - a^2)}{(\pi/6)(b^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{3}{8}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

(ii) Si vede subito che il campo è irrotazionale:

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x - y \\ \vec{e}_2 & \partial_y & -x \\ \vec{e}_3 & \partial_z & z + z^2/b \end{bmatrix} = \vec{e}_1(0 - 0) + \vec{e}_2(0 - 0) + \vec{e}_3(-1 - (-1)) = 0.$$

Essendo il campo definito su tutto $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso, $\vec{F}$ è conservativo; una primitiva si trova subito integrando, $U(x, y, z) = x^2/2 - xy + z^2/2 + z^3/(3b)$ (si controlla immediatamente che si ha $\nabla U(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$). Gli integrali curvilinei richiesti coincidono quindi entrambi con

$$U(Q) - U(P) = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{(b^2 - a^2)^{3/2}}{3b} - \frac{b^2}{2}.$$

(iii) Il teorema della divergenza permette subito il calcolo del flusso totale uscente da S; si ha per la divergenza $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 2z/b$ e quindi

$$\text{Flusso uscente totale} = \int_D (2 + 2z/b)\, dxdydz = 2\int_D dxdydz + \frac{2}{b}\int_D z\, dxdydz = 2I(0) + \frac{2}{b}I(1) =$$
$$\frac{\pi}{3}(b^2 - a^2)^{3/2} + \frac{\pi}{8b}(b^2 - a^2)^{3/2} = \frac{\pi}{24b}(8b + 3)(b^2 - a^2)^{3/2}.$$

Il flusso uscente da S_1 è nullo (scritto $\vec{F} = (x - y, -x, 0) + (0, 0, z + z^2/b)$ il primo campo è parallelo ad S_1, il secondo è nullo su S_1). Per calcolare il flusso uscente attraverso S_2 possiamo ancora usare la stessa decomposizione; stavolta il pezzo $(0, 0, z + z^2/b)$ è parallelo ad S_2; il contributo del primo pezzo si calcola parametrizzando S_2 come $x = a\cos t$, $y = a\sin t, z = z$, con $(t, z) \in R = [0, \pi/2] \times [0, \sqrt{b^2 - a^2}]$; si trova per il flusso $\Phi(S_2)$:

$$\Phi(S_2) = \int_R \det \begin{bmatrix} a(\cos t - \sin t) & -a\sin t & 0 \\ -a\cos t & a\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dtdz = a^2 \int_R (\cos^2 t - \cos t \sin t + \cos t \sin t)\, dtdz =$$
$$a^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt\right)\left(\int_0^{\sqrt{b^2-a^2}} dz\right) = a^2\sqrt{b^2 - a^2}\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}\, a^2\sqrt{b^2 - a^2}.$$

□

Esercizio 33. (i) Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 4y' + ay = e^t$ per $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Posto d'ora in poi $a = 5$, scrivere il sistema differenziale lineare associato $u' = Au + b$ e calcolare la matrice esponenziale e^{tA}.

(iii) Determinare infine le soluzioni $y(t)$ tali che $y(0) + y'(0) = 3$.

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è $\zeta^2 - 4\zeta + a = 0$, con soluzioni $2 \pm \sqrt{4 - a}$. Cerchiamo un integrale dell'omogenea associata della forma ce^t; si ottiene $c(1 - 4 + a)e^t = e^t$, da cui $c = 1/(a - 3)$ se $a \neq 3$. Per presentare i risultati in forma reale distinguiamo 4 casi:

$$(a < 4,\ a \neq 3); \quad \text{soluzioni} \quad c_1 e^{(2-\sqrt{4-a})t} + c_2 e^{(2+\sqrt{4-a})t} + \frac{e^t}{a - 3};$$

se $a = 3$ cerchiamo un integrale particolare della non omogenea nella forma cte^t; si ottiene

$$ce^t(2 + t - 4(t + 1) + 3t) = e^t \iff -2c = 1 \iff c = -1/2,$$

e le soluzioni sono

$$(a = 3): \quad \text{soluzioni} \quad c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \frac{t}{2} e^t;$$

poi

$$(a = 4): \quad \text{soluzioni} \quad (c_1 + c_2 t)e^{2t} + e^t;$$

ed infine

$$(a > 4): \quad \text{soluzioni} \quad e^{2t}(c_1 \cos(\sqrt{a-4}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{a-4}\, t)) + \frac{e^t}{a-3}.$$

(ii) Posto $u_1 = y$, $u_2 = y'$ il sistema associato è

$$\begin{cases} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -5u_1 + 4u_2 + e^t \end{cases}, \quad \text{in forma matriciale} \quad u' = Au + b \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \, b = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Per questo sistema le matrici risolventi sono, come sappiamo, le matrici wronskiane di coppie di soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$; la matrice e^{tA} è la wronskiana delle soluzioni che soddisfano alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (prima soluzione) e $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (seconda soluzione). Le soluzioni sono state trovate sopra, sono $y(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$; per la prima soluzione troviamo le condizioni $c_1 = 1$ e (osservato che è $y'(t) = e^{2t}((2c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 + 2c_2)\sin t))$ l'altra condizione $2c_1 + c_2 = 0$, da cui $c_2 = -2$. Per la seconda soluzione si ha $c_1 = 0$ e $2c_1 + c_2 = 1$, da cui $c_2 = 1$. Si ha quindi

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t}(\cos t - 2\sin t) & e^{2t}\sin t \\ -5e^{2t}\sin t & e^{2t}(\cos t + 2\sin t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t - 2\sin t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t + 2\sin t \end{bmatrix}.$$

(iii) Si ha $y(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \dfrac{e^t}{2}$ e quindi $y'(t) = e^{2t}((2c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 + 2c_2)\sin t) + \dfrac{e^t}{2}$; si ottiene

$$y(0) + y'(0) = c_1 + \frac{1}{2} + 2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 3 \iff 3c_1 + c_2 = 2 \iff c_2 = 2 - 3c_1;$$

le soluzioni richieste sono

$$y(t) = e^{2t}(k \cos t + (2 - 3k)\sin t) + \frac{e^t}{2},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 34. Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$\text{(Eq)} \qquad y'' = -\left(\frac{y}{2} + \frac{(y')^2}{y}\right) \qquad (y > 0);\ x \quad \text{denota la variabile indipendente.}$$

(i) È vero che se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è soluzione di (Eq), allora anche $k\varphi$, dove $k > 0$ è costante, è soluzione di (Eq)? e $\psi : -I \to \mathbb{R}$ definito da $\psi(x) = \varphi(-x)$?
(ii) Mostrare che se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è soluzione di (Eq), e $\varphi'(x_0) = 0$ con $x_0 \in I$ allora x_0 è di estremo assoluto per φ; x_0 è di massimo o di minimo?
(iii) Servendosi del cambiamento di variabile dipendente $y^2/2 = u$, trovare l'integrale generale dell'equazione data; determinare esplicitamente l'integrale particolare soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
(iv) Esistono integrali dell'equazione definiti su tutto $\mathbb{R}$? o su una semiretta di $\mathbb{R}$?

Risoluzione. (i) Si ha $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$ e $\psi''(x) = \varphi''(-x)$, per ogni $x \in -I$. Quindi ψ è soluzione se e solo se per ogn $x \in -I$ si ha

$$\varphi''(-x) = -\left(\frac{\varphi(-x)}{2} + \frac{(-\varphi'(-x))^2}{\varphi(-x)}\right) \qquad \text{per ogni} \quad x \in -I;$$

ma se $x \in -I$ allora $-x \in I$, e la precedente è verificata. Quindi ψ è soluzione. Analogamente si ha, se $\psi(x) = k\varphi(x)$, $\psi'(x) = k\varphi'(x)$ e $\psi''(x) = k\varphi''(x)$; si ha

$$k\varphi''(x) = -\left(\frac{k\varphi(x)}{2} + \frac{(k\varphi'(x))^2}{k\varphi(x)}\right) \iff \varphi''(x) = -\left(\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)}\right),$$

quindi se φ è soluzione anche $k\varphi$ è soluzione.

(ii) Essendo per ogni soluzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$

$$\varphi''(x) = -\left(\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)}\right) < 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in I,$$

le soluzioni sono strettamente concave; ogni punto critico è allora di massimo assoluto (ripetiamo l'argomentazione: se $\varphi'(x_0) = 0$, essendo φ' decrescente in senso stretto si ha $\varphi'(x) > 0$ per $x < x_0$, $x \in I$), ed anche $\varphi'(x) < 0$ per $x > x_0$, $x \in I$. Quindi φ cresce strettamente a destra di x_0, decresce strettamente alla sua sinistra, e questo prova che x_0 è di massimo assoluto per φ nell'intervallo I).

(iii) Se $u(x) = (y(x))^2/2$ si ha $u'(x) = y(x)y'(x)$ e $u''(x) = (y'(x))^2 + y(x)y''(x)$. Se nell'equazione data moltiplichiamo ambo i membri per $y(x)$ otteniamo

$$y(x)y''(x) = -\frac{(y(x))^2}{2} - (y'(x))^2 \iff (y'(x))^2 + y(x)y''(x) = -\frac{(y(x))^2}{2};$$

e l'equazione diventa

$$u''(x) + u(x) = 0,$$

ben nota equazione con soluzioni $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Per ritrovare $y(x)$ dobbiamo estrarre la radice quadrata di $2u(x)$; ci interessano gli intervalli dove $u(x) > 0$. L'equazione è autonoma e quindi l'insieme delle soluzioni è invariante per traslazioni. Per trovare gli intervalli di positività delle soluzioni conviene scrivere queste come $u(x) = a\cos(x + \xi)$, con $a > 0$ ampiezza di oscillazione; ne viene $y(x) = \sqrt{2a\cos(x + \xi)}$, con $a > 0$ e $-\pi/2 - \xi < x < \pi/2 + \xi$. In particolare con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ si trova $\sqrt{2a\cos\xi} = 1$ e $\sqrt{2a}(-\sin\xi)/(2\sqrt{\cos\xi}) = 0$; quindi $\sin\xi = 0$, e dovendo essere $2a\cos\xi = 1$ si ottiene $a = 1/2$ e $\xi = 0$ (oppure $2k\pi$), cioè $y(x) = \sqrt{\cos x}$.

(iv) Ogni soluzione massimale è definita su un intervallo limitato di ampiezza π, come sopra visto. □

Matematica 4F–21 settembre 2004

Esercizio 35. (i) Nel piano (x, z) si disegni

$$B = \left\{(x, z) : z \geq \frac{x^2}{2a} - a,\ |z| \leq \frac{x}{2}\right\},$$

(ove $a > 0$ è un parametro reale) e se ne calcolino l'area e le coordinate del baricentro geometrico G. Calcolare poi il volume del solido D ottenuto ruotando B di un angolo retto in senso antiorario attorno all'asse z.

(ii) Sia S la frontiera di D; tale frontiera si scompone naturalmente in cinque parti; sia T la parte di S che non incontra l'asse z. Calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x - z, y, 0)$ uscente attraverso S,B e T.

(iii) Calcolare l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo il circuito α bordo di B, percorso nel verso $(0, 0)$, $(a, -a/2)$, $(a, a/2)$.

Risoluzione. Nel piano xz, B consiste dei punti al di sopra della parabola di equazione $z = x^2/(2a) - a$, contenuti nell'angolo fra le due semirette di equazione $z = \pm x/2$, con $x \geq 0$. La parabola ha il vertice in $(0, -a)$; vediamo dove incontra le due semirette, risolvendo le due equazioni $\pm x/2 = x^2/(2a) - a$, di cui ci interessano le soluzioni positive; riscritte:

$$x^2 - a\,x - 2a^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + a\,x - 2a^2 = 0,$$

con soluzioni

$$x = \frac{a \pm 3a}{2}; \quad x = \frac{-a \pm 3a}{2};$$

i punti di intersezione cercati sono $(2a, a)$ e $(a, -a/2)$; l'insieme B è come in figura.

Possiamo scrivere l'insieme B come $B = E \cup F$, dove E è il triangolo isoscele di vertici $(0, 0), (a, a/2)$ ed $(a, -a/2)$, ed $F = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq 2a,\ x^2/(2a) - a \leq z \leq x/2\}$. L'area del triangolo E è chiaramente $a^2/2$; l'area di F è

$$\int_F dxdy = \int_{x=a}^{x=2a} \left(\int_{y=x^2/(2a)-a}^{y=x/2} dy\right) dx = \int_a^{2a} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2a} + a\right) dx =$$
$$\frac{1}{4}[x^2]_a^{2a} - \frac{1}{6a}[x^3]_a^{2a} + a^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{7}{6}a^2 + a^2 = \frac{7}{12}a^2.$$

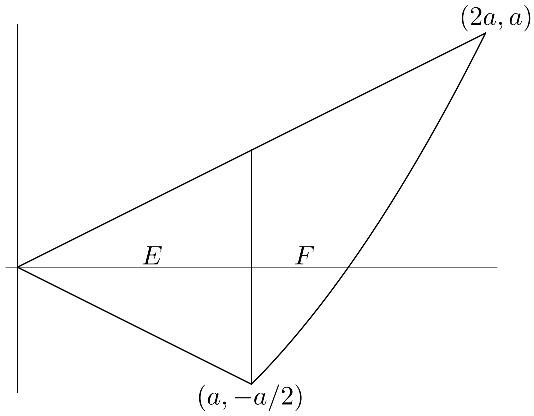


FIGURA 13. L'insieme $B = E \cup F$.

Si ha quindi

$$\mathrm{Area}(B) = \mathrm{Area}(E) + \mathrm{Area}(F) = \frac{7}{12}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{13}{12}a^2.$$

Il baricentro geometrico di E è naturalmente nel punto $(2a/3, 0)$. Troviamo quello di F.

$$\int_F x\,dxdz = \int_{x=a}^{x=2a} x\left(\int_{z=x^2/(2a)-a}^{z=x/2} dz\right) dx = \int_a^{2a} x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2a} + a\right) dx =$$
$$\frac{1}{6}[x^3]_a^{2a} - \frac{1}{8a}[x^4]_a^{2a} + \frac{a}{2}[x^2]_a^{2a} = \frac{7}{6}a^3 - \frac{15}{8}a^3 + \frac{3}{2}a^3 = \frac{19}{24}a^3.$$

Si ha poi

$$\int_F z\,dxdz = \int_{x=a}^{x=2a}\left(\int_{z=x^2/(2a)-a}^{z=x/2} z\,dz\right) dx = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{x=2a} \left[y^2\right]_{z=x^2/(2a)-a}^{z=x/2} dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_a^{2a}\left(\frac{x^2}{4} - \left(\frac{x^2}{2a} - a\right)^2\right) dx = \frac{1}{24}[x^3]_a^{2a} - \frac{1}{2}\int_a^{2a}\left(\frac{x^4}{4a^2} - x^2 + a^2\right) dx =$$
$$\frac{7}{24}a^3 - \frac{1}{40a^2}[x^5]_a^{2a} + \frac{1}{6}[x^3]_a^{2a} - \frac{a^3}{2} = \left(\frac{7}{24} - \frac{31}{40} + \frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right)a^3 = \frac{11}{60}a^3.$$

Per trovare il baricentro di B usiamo il fatto che esso è la media pesata con le aree dei baricentri di E ed F; si ha cioè

$$x_{\mathrm{baric.}B} = \frac{\lambda_2(E)\,x_{\mathrm{baric.}E} + \lambda_2(F)\,x_{\mathrm{baric.}F}}{\lambda_2(E) + \lambda_2(F)}; \qquad z_{\mathrm{baric.}B} = \frac{\lambda_2(E)\,z_{\mathrm{baric.}E} + \lambda_2(F)\,z_{\mathrm{baric.}F}}{\lambda_2(E) + \lambda_2(F)},$$

da cui, ricordando che è $\lambda_2(E) + \lambda_2(F) = \lambda_2(B)$:

$$x_{\mathrm{baric.}B} = \frac{1}{\lambda_2(B)}\left(\frac{a^2}{2}\frac{2}{3}a + \int_F x\,dxdz\right) = \frac{12}{13a^2}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{19}{24}a^3\right) = \frac{27}{26}a,$$

e

$$z_{\mathrm{baric.}B} = \frac{1}{\lambda_2(B)}\left(0 + \int_F z\,dxdz\right) = \frac{12}{13a^2}\,\frac{11}{60}a^3 = \frac{11}{65}a.$$

Per il teorema di Guldino il volume di D è uguale alla lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro di B nella rotazione, moltiplicata per l'area di B:

$$\mathrm{Volume}(D) = \frac{\pi}{2}\,x_{\mathrm{baric.}B}\,\lambda_2(B) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{19}{24}a^3\right) = \frac{27}{48}\pi a^3.$$

(ii) Il campo ha divergenza costante $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) = 2$, quindi il flusso totale uscente è pari al doppio del volume di D, e cioè a $(27/24)\pi\,a^3$.

La parte B di frontiera è piatta e sta sul piano xz; il versore normale esterno è costantemente $-\vec{e}_2$; il campo è $\vec{F}(x,0,z) = \vec{e}_1 x$, parallelo a B; il flusso attraverso B è nullo.

La porzione T di frontiera si parametrizza in coordinate cilindriche come $(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, (r^2/(2a) - a))$, con $(r,\vartheta) \in R = [a,2a]\times[0,\pi/2]$. Non è ancora chiaro se il versore normale associato a tale

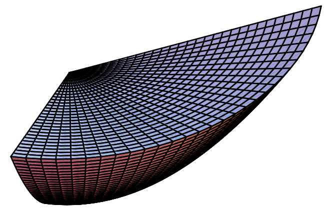


Figura 14. Il solido ottenuto facendo ruotare B di un quarto di giro.

parametrizzazione sia quello esterno o l'opposto. In ogni caso, a meno eventualmente del segno, il flusso uscente da T è

$$\pm\Phi(T) = \int_R \det \begin{bmatrix} r\cos\vartheta - r^2/(2a) + a & \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ r\sin\vartheta & \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ 0 & r/a & 0 \end{bmatrix} drd\vartheta =$$

$$-\int_R \frac{r}{a}\left(r^2\cos^2\vartheta - \frac{r^3}{2a}\cos\vartheta + ar\cos\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\right) drd\vartheta =$$

$$-\frac{1}{a}\int_a^{2a} r^3\,dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta + \frac{1}{a}\int_a^{2a}\left(\frac{r^4}{2a} - ar^2\right) dr \int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta =$$

(osservato che $\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta = 1$)

$$-\frac{1}{4a}[r^4]_a^{2a}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10a^2}[r^5]_a^{2a} - \frac{1}{3}[r^3]_a^{2a} = \left(-\frac{15\pi}{8} + \frac{31}{10} - \frac{7}{3}\right)a^3 = \left(\frac{23}{30} - \frac{15}{8}\pi\right)a^3.$$

Il vettore normale associato alla parametrizzazione punta verso l'interno, avendo come prime due componenti $-r^2\cos\vartheta/a$ e $-r^2\sin\vartheta/a$. Ne segue che si ha

$$\Phi(T) = \left(\frac{15}{8}\pi - \frac{23}{30}\right)a^3.$$

(iii) Usiamo la formula di Stokes. Si ha facilmente $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = -\vec{e}_2$. La normale al piano che vede la curva percorsa in verso antiorario è esattamente $-\vec{e}_2$. Il flusso del rotore è quindi

$$\int_B (-\vec{e}_2)\cdot(-\vec{e}_2)\,d\sigma = \int_B dxdz = \lambda_2(B) = \frac{13}{12}a^2.$$

□

Esercizio 36. Si consideri il sistema differenziale $\dot{\xi} = A\xi + b$ con $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$ e $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^t \end{bmatrix}$ (ove α è un parametro reale).

(i) Trovare una risolvente $\Phi(t)$ reale per il sistema omogeneo $\dot{\xi} = A\xi$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, e calcolare la matrice esponenziale e^{tA} nel caso $\alpha = 0$.

(ii) Per $\alpha = 0$, si determini la soluzione del sistema completo $\dot{\xi} = A\xi + b$ per cui $\xi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è

$$\det(\zeta\,1_2 - A) = \det\begin{bmatrix} \zeta - 1 & 4 \\ \alpha & \zeta - 1 \end{bmatrix} = \zeta^2 - 2\zeta + (1 - 4\alpha) = 0;$$

il discriminante è 4α. Occorre distinguere i casi $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$.

Caso $\alpha > 0$ Le radici sono $1 \pm 2\sqrt{\alpha}$; troviamo un autovettore (u, v) associato a $1 + 2\sqrt{\alpha}$ risolvendo:

$$\begin{cases} 2\sqrt{\alpha}\,u + 4v &= 0 \\ 4u + 2\sqrt{\alpha}\,v &= 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad u = 2,\ v = -\sqrt{\alpha}$$

ed un autovettore associato a $1 - 2\sqrt{\alpha}$ risolvendo

$$\begin{cases} -2\sqrt{\alpha}\,u + 4v &= 0 \\ 4u - 2\sqrt{\alpha}\,v &= 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad u = 2,\ v = \sqrt{\alpha}$$

Ne segue che una risolvente è

$$\Phi(t) = e^t \begin{bmatrix} 2e^{2\sqrt{\alpha}t} & 2e^{-2\sqrt{\alpha}t} \\ -\sqrt{\alpha}e^{2\sqrt{\alpha}t} & \sqrt{\alpha}e^{-2\sqrt{\alpha}t} \end{bmatrix} \qquad (\alpha > 0)$$

Nel caso $\alpha < 0$, posto $\beta = -\alpha = |\alpha|$ le radici sono $1 \pm 2i\sqrt{\beta}$; un autovalore complesso associato a $1+2i\sqrt{\beta}$ è $(2, i\sqrt{\beta})$, con soluzione associata $(2, i\sqrt{\beta})e^{(1+2i\sqrt{\beta})t}$; parte reale e coefficiente dell'immaginario di tale soluzione sono

$$e^t \begin{bmatrix} 2\cos(2\sqrt{\beta}t) \\ -\sqrt{\beta}\sin(2\sqrt{\beta}t) \end{bmatrix}; \quad e^t \begin{bmatrix} 2\sin(2\sqrt{\beta}t) \\ \sqrt{\beta}\cos(2\sqrt{\beta}t) \end{bmatrix}; \quad \text{quindi} \quad e^t \begin{bmatrix} 2\cos(2\sqrt{\beta}t) & 2\sin(2\sqrt{\beta}t) \\ -\sqrt{\beta}\sin(2\sqrt{\beta}t) & \sqrt{\beta}\cos(2\sqrt{\beta}t) \end{bmatrix}$$

è una risolvente per $\alpha = -\beta < 0$. Infine, nel caso $\alpha = 0$ si scrive $A = 1_2 + N$, dove la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha il quadrato nullo; si ha

$$tA = t1_2 + tN \quad \text{da cui} \quad e^{tA} = e^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 & -4t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Da $\dot{\xi} - A\xi = b$, moltiplicando per e^{-tA} ambo i membri si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\xi(t)\right) = b(t) \quad \text{integrando fra 0 e } t \quad e^{-tA}\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t e^{-sA}b(s)\,ds;$$

si ha ora

$$e^{-sA}b(s) = e^{-s}\begin{bmatrix} 1 & +4s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -e^s \end{bmatrix} = e^{-s}\begin{bmatrix} -4se^s \\ -e^s \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4s \\ 1 \end{bmatrix};$$

integrando tale vettore fra 0 e t si ha il vettore:

$$-\begin{bmatrix} 4\int_0^t s\,ds \\ \\ \int_0^t ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t^2 \\ \\ -t \end{bmatrix}.$$

Infine

$$\begin{aligned} \xi(t) =& e^{tA}\xi(0) + e^{tA}\begin{bmatrix} -2t^2 \\ \\ -t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 2t^2 \\ \\ -t \end{bmatrix} = \\ & e^t \begin{bmatrix} 2t^2 + 1 \\ \\ -t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

è la richiesta soluzione particolare del sistema non omogeneo. □

Esercizio 37. Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$\text{(Eq)} \qquad y''y + (y')^2 = \frac{y^2}{2}.$$

Denotiamo con x la variabile indipendente.

(i) Trovare le soluzioni costanti. È vero che se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è soluzione di (Eq), allora anche $k\varphi$, dove k è costante, è soluzione di (Eq)? e $\psi : -I \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(x) = \varphi(-x)$?

(ii) Servendosi del cambiamento di variabile dipendente $y^2/2 = u$, determinare esplicitamente la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da (Eq) con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, trovandone anche il dominio.

(iii) Esistono soluzioni non identicamente nulle che si annullano?

Risoluzione. (i) L'unica soluzione costante è quella nulla (se $y(x) = c$ si ha $y'(x) = y''(x) = 0$, e quindi $c \cdot 0 + (0)^2 = c^2/2$, da cui $c^2 = 0$, e quindi $c = 0$). Se $\psi(x) = k\varphi(x)$, $\psi'(x) = k\varphi'(x)$ e $\psi''(x) = k\varphi''(x)$; ne segue

$$\psi''(x)\psi(x) + (\psi'(x))^2 = k^2\varphi''(x)\varphi(x) + k^2(\varphi'(x))^2 = k^2(\varphi''(x)\varphi(x) + (\varphi'(x))^2);$$

dato che per ipotesi φ è soluzione si ha $\varphi''(x)\varphi(x) + (\varphi'(x))^2 = (\varphi(x))^2/2$; ne segue

$$\psi''(x)\psi(x) + (\psi'(x))^2 = k^2\frac{(\varphi(x))^2}{2} = \frac{(k\varphi(x))^2}{2} = \frac{(\psi(x))^2}{2},$$

e quindi $\psi = k\varphi$ è effettivamente soluzione. Analogamente, se $\psi(x) = \varphi(-x)$ si ha $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$ e $\psi''(x) = \varphi''(-x)$, per ogni $x \in -I$. Si ha

$$\psi''(x)\psi(x) + (\psi'(x))^2 = \varphi''(-x)\varphi(-x) + (-\varphi'(-x))^2 = \varphi''(-x)\varphi(-x) + (\varphi'(-x))^2;$$

se $x \in -I$ si ha $x \in -I$; dato che φ è per ipotesi soluzione, l'ultima espressione scritta coincide con $(\varphi(-x))^2/2 = (\psi(x))^2/2$ per ogni $x \in -I$. Quindi ψ è soluzione.

(ii) Se $u(x) = (y(x))^2/2$, si ha $u' = yy'$ e $u'' = (y')^2 + yy''$. L'equazione diventa quindi

$$u'' = u \quad \text{con integrale generale} \quad u(x) = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x.$$

le condizioni iniziali per y diventano $u(0) = 1/2$, $u'(0) = y(0)y'(0) = 0$; si ha quindi $c_1 = 1/2$, $c_2 = 0$; si ha $u(x) = \cosh x/2$ e quindi $y(x) = \sqrt{\cosh x}$, soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

(iii) Poiché l'insieme delle soluzioni è invariante per traslazioni, basta chiedersi se esiste una soluzione nulla per $x = 0$ che non sia identicamente nulla (si noti che l'equazione non è riducibile a forma normale attorno ad $y = 0$, e quindi nessun teorema generale è applicabile). Se y è soluzione nulla per $x = 0$, definita in un intervallo I contenente 0, allora $u(x) = (y(x))^2/2$ verifica $u''(x) = u(x)$, $u(0) = 0$ e quindi è necessariamente della forma $u(x) = c \sinh x$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ne segue che intanto y è definito solo alla destra di 0 (se $c > 0$) o alla sinistra (se $c < 0$). Ma $y(x)$ di fatto non esiste; se fosse $y(x) = \sqrt{2c \sinh x}$, con $c \neq 0$, per fissare le idee $c > 0$, $y'(0)$ non esiste; si ha infatti, eliminando l'inessenziale costante moltiplicativa $\sqrt{2c}$:

$$y'(x) = \frac{\cosh x}{2\sqrt{\sinh x}} \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \to 0^+} y'(x) = +\infty.$$

Non ci sono pertanto soluzioni nulle non identicamente nulle.

Osservazione. Anche se non richiesto, osserviamo che l'integrale generale è

$$k\sqrt{\cosh(x - c)}; \quad k\sqrt{\sinh(\pm(x - c))} \qquad (k, c \in \mathbb{R})$$

ovviamente se il segno $-$ è scelto nella seconda funzione si prende $x < c$ come dominio, altrimenti $x > c$; nella prima funzione x varia in tutto $\mathbb{R}$. Ci sono anche gli integrali $ke^{\pm x/2}$.

□