

Quella che segue è la collezione dei temi d'esame, con risoluzione allegata, assegnati dal collega Giuseppe De Marco nel corso di Analisi Matematica 3 per la laurea in Fisica e Astronomia (corso che, per la laurea in Fisica, all'epoca dell'ordinamento trimestrale era chiamato "Matematica 4F") negli aa.aa. 2008/09, 2007/08 e 2006/07. Su sua gentile concessione li metto a disposizione degli studenti come eccellente preparazione alla prova d'esame; alcune parti di questi temi sono già stati usati durante le lezioni o le esercitazioni assegnate durante l'insegnamento di quest'anno.

Corrado Marastoni

ESERCIZIO 1. La funzione *secante* nell'ambito complesso è $\sec : \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $\sec z := 1/\cos z$. Determinare l'insieme dei valori assunti dalla secante.

Risoluzione. Sappiamo che la funzione coseno assume tutti i valori complessi. Quindi la secante, reciproca della funzione coseno sull'insieme dove il coseno non si annulla, assume tutti i valori complessi non nulli, cioè l'insieme richiesto è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Per confermare il risultato, per chi non ricorda che il coseno assume tutti i valori complessi, scriviamo con le formule di Eulero $\sec(z) = 2/(e^{iz} + e^{-iz})$ e vediamo per quali $w \in \mathbb{C}$ l'equazione

$$\sec(z) = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = w$$

ha soluzione nell'incognita z . L'equazione diventa

$$2 = w(e^{iz} + e^{-iz}),$$

di certo priva di soluzioni se $w = 0$; se $w \neq 0$ essa equivale a $e^{2iz} - (2/w)e^{iz} + 1 = 0$; l'equazione quadratica $t^2 - (2/w)t + 1 = 0$ ha due soluzioni, certamente non nulle; i loro logaritmi sono soluzioni dell'equazione $\sec(z) = w$; quindi la secante assume ogni valore complesso non nullo (infinite volte). $\square$

ESERCIZIO 2. Sia $\psi(x, y) = (u, v)$ dove $u = y - x^2$, $v = y + x^2$.

- (i) Dimostrare che ψ induce un diffeomorfismo del semipiano aperto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ delle ascisse positive su un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^2$ da descrivere; descrivere anche l'inversa $\phi : T \rightarrow S$.

Dato $b > 0$ sia ora $E_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < x^2, y < b\}$. Calcolare, dimostrando con cura che esiste finito:

$$\int_{E_b} x e^{y-x^2} dx dy,$$

- (a) Direttamente con la formula di riduzione.
(b) Con un cambiamento di variabili suggerito dalla prima domanda.

Risoluzione. (i) Si ha $u + v = 2y$ e $v - u = 2x^2$, da cui $v - u > 0$ e cioè $v > u$; si ottiene $x = \sqrt{(v - u)/2}$, $y = (v + u)/2$. Chiaramente $T = \{(u, v) : v > u\}$, punti del piano (u, v) strettamente al di sopra della retta $v = u$; e come appena visto $\phi : T \rightarrow S$ è data da $\phi(u, v) = (\sqrt{(v - u)/2}, (v + u)/2)$.

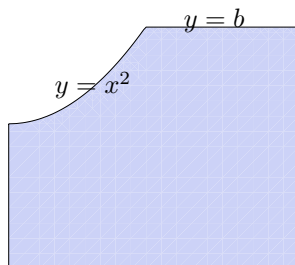


FIGURA 1. L'insieme E_b .

(a) L'integrando è positivo e quindi l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito l'integrale iterato. La proiezione di E_b sull'asse y è $]-\infty, b[$; conviene spezzare E_b in $E_b^+ = E_b \cap \{y > 0\}$ ed $E_b^- = E_b \cap \{y < 0\}$; si ha

$$\begin{aligned} \int_{E_b^+} x e^{y-x^2} dx dy &= \int_{y=0}^{y=b} e^y \left(\int_{x=\sqrt{y}}^{x=\infty} x e^{-x^2} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=b} e^y \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\infty} dy = \frac{1}{2} \int_0^b dy = \\ &= \frac{b}{2}; \end{aligned}$$

invece

$$\int_{E_b^-} x e^{y-x^2} dx dy = \int_{y=-\infty}^{y=0} e^y \left(\int_{x=0}^{x=\infty} x e^{-x^2} dx \right) dy = \int_{y=-\infty}^{y=0} e^y \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=\infty} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^y dy = \frac{1}{2},$$

per cui si ottiene

$$\int_{E_b} x e^{y-x^2} dx dy = \frac{b+1}{2}.$$

(b) Posto $F_b = \phi^{\leftarrow}(E_b)$ si ha $F_b = \{(u, v) : u < 0, u < v < 2b - u\}$ come facilmente si vede dalle formule trovate prima. Inoltre

$$\det \phi'(u, v) = \det \begin{bmatrix} -1/(4\sqrt{(v-u)/2}) & 1/(4\sqrt{(v-u)/2}) \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{(v-u)/2}};$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{F_b} \sqrt{(v-u)/2} e^u \frac{dudv}{4\sqrt{(v-u)/2}} &= \frac{1}{4} \int_{F_b} e^u dudv = \int_{u=-\infty}^{u=0} e^u \left(\int_{v=u}^{v=2b-u} dv \right) du = \\ \int_{-\infty}^0 \frac{2b-2u}{4} e^u du &= \frac{b}{2} \int_{-\infty}^0 e^u du - \frac{1}{2} \left([ue^u]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^u du \right) = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e cioè il risultato già ottenuto.

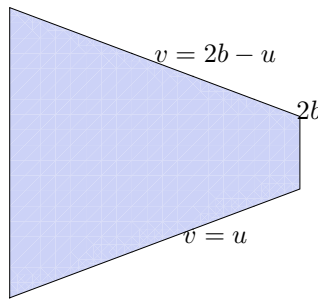


FIGURA 2. L'insieme F_b .

OSSERVAZIONE. In (a) si poteva naturalmente anche integrare prima in y e poi in x ; si otteneva:

$$\int_{x=0}^{x=\infty} x e^{-x^2} \left(\int_{y=-\infty}^{y=\min\{x^2, b\}} e^y dy \right) dx = \int_0^\infty x e^{-x^2} e^{\min\{x^2, b\}} dx;$$

Si ha poi $\min\{x^2, b\} = x^2$ per $0 < x \leq \sqrt{b}$, mentre $\min\{x^2, b\} = b$ per $x > \sqrt{b}$; quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x^2} e^{\min\{x^2, b\}} dx &= \int_0^{\sqrt{b}} x e^{-x^2} e^{\min\{x^2, b\}} dx + \int_{\sqrt{b}}^\infty x e^{-x^2} e^{\min\{x^2, b\}} dx = \\ \int_0^{\sqrt{b}} x e^{-x^2} e^{x^2} dx + \int_{\sqrt{b}}^\infty x e^{-x^2} e^b dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{b}} + e^b \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{\sqrt{b}}^\infty = \frac{b}{2} + e^b \frac{e^{-b}}{2} = \frac{b+1}{2}. \end{aligned}$$

□

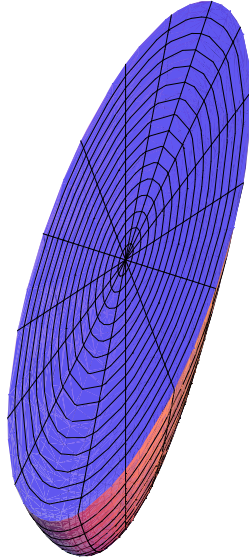
ESERCIZIO 3. Si considera il solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2x\}.$$

- (i) Fare un disegno di S ; determinare la proiezione di S sul piano xy , e calcolare il volume di S (per fili).
- (ii) La frontiera di S ha una parte superiore A e una "laterale" B . Parametrizzare la parte superiore in modo che la normale sia quella uscente da S , descriverne il bordo, trovarne l'area.
- (iii) Dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - y, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + x, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + z^5 e^{-z^2} \right),$$

calcolarne la circuitazione lungo il bordo di A .

FIGURA 3. Il solido S .

Risoluzione. (i) Il solido S consta dei punti al di sotto del piano di equazione $z = 3 - 2x$ (piano parallelo all'asse y) ed al di sopra del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Si disegna come in figura.

La proiezione di S consta degli $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che esiste $z \in \mathbb{R}$ con $x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2x$; tale z , per un fissato $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, esiste se e solo se

$$x^2 + y^2 \leq 3 - 2x \iff x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 4 \iff (x + 1)^2 + y^2 \leq 2^2,$$

disco D di centro $(-1, 0)$ e raggio 2.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \int_S dx dy dz = \int_D \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=3-2x} dz \right) dx dy = \int_D (3 - 2x - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \int_D (4 - ((x + 1)^2 + y^2)) dx dy = (\text{posto } x = -1 + r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta) = \\ &= \int_{[0,2] \times [0,2\pi]} (4 - r^2) r dr d\vartheta = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 8\pi. \end{aligned}$$

(ii) La porzione A di frontiera è chiaramente la parte del piano $z = 3 - 2x$ che si proietta in D sul piano (x, y) . Una parametrizzazione (cartesiana) è quindi $p(x, y) = (x, y, 3 - 2x)$ con $(x, y) \in D$. Il vettore normale associato è

$$\partial_x p(x, y) \times \partial_y p(x, y) = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1),$$

che punta verso l'alto, quindi esternamente ad S . Il bordo è chiaramente la curva chiusa di equazioni parametriche $\gamma(\vartheta) = (-1 + 2 \cos \vartheta, 2 \sin \vartheta, 5 - 2 \cos \vartheta)$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (un'ellisse). L'area è

$$\text{Area}(A) = \int_D |\partial_x p(x, y) \times \partial_y p(x, y)| dx dy = \int_D \sqrt{5} dx dy = \sqrt{5} \text{Area}(D) = 4\sqrt{5} \pi.$$

(iii) Il campo $\vec{F}$ può essere scritto come somma dei seguenti campi:

$$\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + (0, 0, z^5 e^{-z^2}) + (-y, x, 0);$$

il primo è il ben noto campo dell'angolo solido, che sappiamo essere conservativo (primitiva $-1/r$, con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$); il secondo è a variabili separate e quindi conservativo. Il contributo alla circuitazione di questi due campi è quindi nullo, e resta solo quello del terzo:

$$\int_{\gamma} \vec{F}(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_{\gamma} (-y, x, 0) \cdot d(x, y, z) = \int_{\gamma} (-y dx + x dy) =$$

$$\int_0^{2\pi} ((-2 \sin \vartheta)(-2 \sin \vartheta) + (-1 + 2 \cos \vartheta)(2 \cos \vartheta)) d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos \vartheta) d\vartheta = 8\pi.$$

Si poteva naturalmente anche ricorrere alla formula di Stokes; i campi conservativi essendo anche irrotazionali si ha $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \nabla \times (-y, x, 0) = 2(0, 0, 1)$, quindi la circuitazione è anche il flusso di $2\vec{e}_3$ attraverso A , e quindi (si noti che $\vec{\nu}_A = (2, 0, 1)/\sqrt{5}$ è costante, come sempre accade per superficie piane!):

$$\int_A 2\vec{e}_3 \cdot \frac{(2, 0, 1)}{\sqrt{5}} d\sigma_A = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{Area}(A) = \frac{2}{\sqrt{5}} 4\sqrt{5} \pi = 8\pi.$$

□

ESERCIZIO 4. Si considera l'equazione differenziale

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} + y \log y \quad (y > 0).$$

- (i) Scrivere il sistema equivalente e dire se sono o meno da esso verificate le ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale.
- (ii) Trovare le soluzioni costanti.
- (iii) Servendosi del cambiamento di variabile dipendente $\log y(t) = u(t)$, trovare tutte le soluzioni massimali dell'equazione data, verificando che sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. (i) Posto $y' = p$ il sistema equivalente si scrive

$$\begin{cases} \dot{y} = p \\ \dot{p} = \frac{p^2}{y} + y \log y \end{cases}.$$

La funzione vettoriale a secondo membro, $f(y, p) = (p, p^2/2 + y \log y)$ è definita sul semipiano aperto $\{(y, p) : y > 0\}$; ogni teorema globale richiede che le variabili y, p debbano poter liberamente variare in $\mathbb{R}$; quindi le ipotesi non sono verificate per nessun teorema globale.

(ii) Se $0 = 0/y^2 + y \log y$, deve essere $y = 1$. L'unica costante che è soluzione è la costante 1.

(iii) Se $u(t) = \log y(t)$ derivando si ha $u'(t) = y'(t)/y(t)$, ed un'ulteriore derivazione porge

$$u''(t) = \frac{y''(t)y(t) - (y'(t))^2}{(y(t))^2} = \frac{y''(t)}{y(t)} - \frac{(y'(t))^2}{(y(t))^2},$$

se dividiamo l'equazione originaria per y essa diventa $y''/y = (y'/y)^2 + y \log y \iff y''/y - (y'/y)^2 = y \log y$; quindi mediante u l'equazione si scrive

$$u''(t) = u(t) \quad \text{con integrale generale} \quad u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

e quindi

$$y(t) = \exp(c_1 e^t + c_2 e^{-t}) \quad t \in \mathbb{R},$$

chiaramente definita su tutto $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE. Si poteva anche esplicitare subito $y(t) = e^{u(t)}$, da cui $y'(t) = e^{u(t)} u'(t)$ e poi $y''(t) = e^{u(t)} (u'(t))^2 + e^{u(t)} u''(t)$, e sostituendo nell'equazione originaria si ottiene

$$e^{u(t)} (u'(t))^2 + e^{u(t)} u''(t) = \frac{e^{2u(t)} (u'(t))^2}{e^{u(t)}} + e^{u(t)} u(t),$$

e semplificando $e^{u(t)}$

$$(u'(t))^2 + u''(t) = (u'(t))^2 + u(t) \quad \text{cioè} \quad u''(t) = u(t),$$

come prima trovato.

□

ESERCIZIO 5. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 4z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -4x - y - 5z \end{cases}$$

calcolare la matrice e^{tA} , dove A è la matrice del sistema (5 punti). Dare poi una formula integrale per quella soluzione del sistema

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(x, y, z) + (0, 0, 1/(1+t^2))$$

che vale 0 per $t = 0$.

Risoluzione. La matrice del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{con equazione caratteristica} \quad \det(\zeta I_3 - A) = 0,$$

che si scrive

$$\det \begin{bmatrix} \zeta - 3 & -1 & -4 \\ -1 & \zeta + 1 & -1 \\ 4 & 1 & \zeta + 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \zeta + 1 & 0 & \zeta + 1 \\ -1 & \zeta + 1 & -1 \\ 4 & 1 & \zeta + 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta + 1 \\ 0 & \zeta + 1 & -1 \\ -\zeta - 1 & 1 & \zeta + 5 \end{bmatrix} = (\zeta + 1)^3.$$

Si ha quindi l'unico autovalore -1 con molteplicità 3; scritto $A = A - (-1)I_3 + (-1)I_3 = N - I_3$, la matrice N è nilpotente e commuta con $-I_3$, per cui si ha, da $tA = -tI_3 + tN$:

$$e^{tA} = e^{-tI_3} \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \right) = e^{-t} \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \right);$$

si ha poi

$$N = A + I_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(e naturalmente $N^3 = 0$), per cui

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 + 4t + t^2/2 & t & 4t + t^2/2 \\ t & 1 & t \\ -4t - t^2/2 & -t & 1 - 4t - t^2/2 \end{bmatrix}.$$

Quanto alla seconda domanda la formula di variazione delle costanti, posto $b(t) = (0, 0, 1/(1+t^2))$ dice che la soluzione richiesta è la funzione a valori vettoriali $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da:

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds = e^{-t} \int_0^t \frac{e^s}{1+s^2} \begin{bmatrix} 4(t-s) + (t-s)^2/2 \\ t-s \\ -4(t-s) - (t-s)^2/2 \end{bmatrix} ds.$$

□

ESERCIZIO 1.1. Dimostrare che se due serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ hanno raggi di convergenza R_a ed R_b diversi, allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ è il minimo fra i due. Servirsi di questo per trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2^{-n}) z^n$. Trovare poi la somma di questa serie.

Risoluzione. Per fissare le idee sia $R_a < R_b$. Se $|z| < R_a$ le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sono entrambe convergenti, e la serie somma di due serie convergenti,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

è come ben noto anch'essa convergente. Quindi $R_{a+b} \geq R_a$. Se poi $R_a < |z| < R_b$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è convergente, ma la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ non è invece convergente; ed allora la serie somma delle due certamente non converge su questo z . Ne segue $R_{a+b} \leq R_a$, e quindi $R_{a+b} = R_a$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ ha raggio di convergenza 1 (ad esempio per il criterio del rapporto), mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n$, serie geometrica di ragione $z/2$, ha raggio di convergenza 2. Quindi la serie somma delle due ha raggio di convergenza 1. La seconda serie converge a $(z/2)(1/(1 - z/2)) = z/(2 - z)$, la prima:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - z} \right) = \frac{z}{(1 - z)^2},$$

in definitiva la somma è

$$\frac{z}{(1 - z)^2} + \frac{z}{2 - z}.$$

□

ESERCIZIO 1.2. Data la forma differenziale $\omega_\alpha(x, y, z) = (x dx + y dy + z dz)/(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}$, dove $\alpha > 0$ è una costante, trovarne il dominio naturale e dire se è semplicemente connesso. Scrivere il campo vettoriale associato e trovare una primitiva, se questa esiste.

Risoluzione. Il denominatore è la distanza dall'origine elevata ad α , ed è nullo se e solo se $x = y = z = 0$. Il dominio naturale è quindi $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ed è semplicemente connesso, come ben noto. Il campo ovviamente è $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)/|(x, y, z)|^\alpha$, a simmetria sferica, quindi conservativo; posto $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si scrive:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{r^{\alpha-1}} \frac{(x, y, z)}{r},$$

e ricordando che $\nabla u(r) = u'(r) (x, y, z)/r$ si cerca una primitiva rispetto ad r di $1/r^{\alpha-1} = r^{1-\alpha}$, che è $r^{2-\alpha}/(2-\alpha)$ per $\alpha \neq 2$, $\log r$ per $\alpha = 2$, per cui una primitiva è

$$\frac{1}{2-\alpha} (x^2 + y^2 + z^2)^{1-\alpha/2} \quad \text{se } \alpha \neq 2; \quad \log(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{se } \alpha = 2.$$

□

ESERCIZIO 1.3. Si consideri il solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2y\}.$$

Trovare l'area della superficie laterale di E , cioè $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2y, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (usare coordinate cilindriche).

Risoluzione. Scritto $x^2 + y^2 - 2y = 0$ come $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ si scopre che S è la porzione di cilindro che ha per asse l'asse z e traccia sul piano xy uguale al circolo di centro $(0, 1, 0)$ a raggio 1 compresa fra il piano xy stesso ed il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le coordinate cilindriche $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ danno:

$$r^2 = 2r \sin \varphi \iff r = 2 \sin \varphi, \quad \text{quindi } 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

mentre $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ porge $0 \leq z \leq r$. Una parametrizzazione di S è quindi

$$x = 2 \sin \varphi \cos \varphi, y = 2 \sin \varphi \sin \varphi, z = z \quad (\varphi, z) \in D = \{(\varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq 2 \sin \varphi\}.$$

La matrice jacobiana è

$$\begin{bmatrix} 2 \cos 2\varphi & 0 \\ 4 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e quindi l'elemento d'area è

$$\sqrt{4 \cos^2(2\varphi) + 4 \sin^2(2\varphi)} d\varphi dz = 2 d\varphi dz,$$

e l'area stessa è

$$\text{Area}(S) = \int_D 2 d\varphi dz = 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \left(\int_{z=0}^{z=2 \sin \varphi} dz \right) d\varphi = 4 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 8.$$

(questo esercizio è parte di Temi 05–06, esercizio 38; là c'è anche una figura). $\square$

ESERCIZIO 1.4. Provare che mediante $u = xy$, $v = x/y$ si definisce un diffeomorfismo $(x, y) \mapsto (u, v)$ del primo quadrante aperto in se stesso, trovandone l'inverso $(x, y) = \phi(u, v)$. Sia poi $E(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, xy < a\}$, dove $a > 0$ è una costante.

(i) Calcolare, usando il cambiamento di variabili proposto:

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y} dx dy.$$

(ii) Calcolare l'integrale precedente direttamente con la formula di riduzione.

Risoluzione. Da $u = xy$ si ricava $x = u/y$, e sostituendo nella seconda si ha $v = u/y^2$, da cui $y = \sqrt{u/v}$ e quindi $x = u/\sqrt{u/v} = \sqrt{uv}$. Quindi $\phi(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$ è diffeomorfismo di $]0, +\infty[^2$ in se stesso, con inversa $\phi^{-1}(x, y) = (xy, x/y)$.

(i) Si ha naturalmente $\phi^{-1}(E(a)) = \{(u, v) : 0 < u < a, v > 0\} =]0, a[\times]0, +\infty[$ e quindi

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y} dx dy = \int_{]0, a[\times]0, +\infty[} \frac{e^{-v}}{\sqrt{u/v}} |\det \phi'(u, v)| du dv;$$

ora si ha

$$\det \phi'(u, v) = \frac{1}{\det(\phi^{-1})'(x, y)} \quad \text{se } (x, y) = \phi(u, v); \text{ si ha } \det(\phi^{-1})'(x, y) = \det \begin{bmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{bmatrix} = -2\frac{x}{y},$$

e quindi $\det \phi'(u, v) = -1/(2v)$. L'integrale richiesto è quindi

$$\int_{]0, a[\times]0, +\infty[} \frac{e^{-v}}{\sqrt{u/v}} \frac{du dv}{2v} = \int_{]0, a[\times]0, +\infty[} \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} du dv;$$

si tratta di un integrale su un rettangolo di un prodotto di funzioni positive a variabili separate, quindi il teorema di Tonelli è immediatamente applicabile e porge

$$\int_{]0, a[\times]0, +\infty[} \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} du dv = \left(\int_0^a \frac{du}{2\sqrt{u}} \right) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv \right)$$

la sostituzione $v = t^2$ porge

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t} 2t dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

ed in definitiva si ha

$$\int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y} dx dy = \sqrt{a} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi a}.$$

(ii) Siamo quasi obbligati ad integrare prima in x , essendo l'unico integrale che sappiamo fare:

$$\begin{aligned} \int_{E(a)} \frac{e^{-x/y}}{y} dx dy &= \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\int_{x=0}^{x=a/y} \frac{e^{-x/y}}{y} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\infty} \left[-e^{-x/y} \right]_{x=0}^{x=a/y} dy = \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-a/y^2}) dy = (\text{posto } \sqrt{a}/y = t) = \int_\infty^0 (1 - e^{-t^2}) \frac{-\sqrt{a} dt}{t^2} = \sqrt{a} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt = \\ (\text{per parti}) &= \sqrt{a} \left[\frac{1 - e^{-t^2}}{-t} \right]_0^\infty + \sqrt{a} \int_0^\infty \frac{(2t) e^{-t^2}}{t} dt = 2\sqrt{a} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{a} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$\square$

2. MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA– PRIMO COMPITINO–8 NOVEMBRE 2008

ESERCIZIO 2.1. Determinare l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=2}^{\infty} z^n/(n^2 - 1)$, dicendo se in tale insieme si ha anche convergenza assoluta o meno. Trovare poi la somma della serie (scrivere prima $1/(n^2 - 1) = a/(n - 1) + b/(n + 1)$ con opportune costanti $a, b \dots$).

Risoluzione. Il criterio del rapporto mostra subito che il raggio di convergenza è 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^2 - 1} \frac{n^2 - 1}{|z|^n} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1/n)^2}{(1 + 1/n)^2 - (1/n)^2} = |z|.$$

Se poi $|z| = 1$ la serie dei moduli diventa $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2 - 1)$, chiaramente convergente perché con termine generale asintotico ad $1/n^2$ per $n \rightarrow \infty$. Quindi l'insieme di convergenza è il disco unitario chiuso, dove si ha anche convergenza assoluta. Si ha poi

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1/2}{n - 1} - \frac{1/2}{n + 1} \quad \text{da cui} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n - 1} - \frac{z^n}{n + 1} \right);$$

ora, se $|z| < 1$ si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n - 1} = z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n - 1} = z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -z \log(1 - z),$$

mentre

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n + 1} = \frac{1}{z} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n + 1} = \frac{1}{z} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z - \frac{z^2}{2} \right) = -\frac{\log(1 - z)}{z} - 1 - \frac{z}{2}.$$

Si trova quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 - 1} = \frac{2(1 - z^2) \log(1 - z) + 2z + z^2}{4z},$$

per $|z| < 1$ (e per continuità anche per $|z| = 1$).

□

ESERCIZIO 2.2. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x + y}} dx - \frac{2y + x}{\sqrt{x + y}} dy,$$

trovarne il dominio naturale D , dicendo se è semplicemente connesso. Dire poi se la forma è esatta in D , trovandone una primitiva in caso affermativo.

Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x + y}}, -\frac{2y + x}{\sqrt{x + y}}, \sin z \right)$$

mostrare che è conservativo e trovarne una primitiva.

Risoluzione. Il dominio è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -y\}$, semipiano aperto dei punti al disopra della seconda bisettrice; è convesso e quindi semplicemente connesso. Integriamo in x il coefficiente di dx :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x + y}} dx = \int \frac{x + y - y}{\sqrt{x + y}} dx = \int \left(\sqrt{x + y} - \frac{y}{\sqrt{x + y}} \right) dx = \frac{2}{3} (x + y)^{3/2} - 2y\sqrt{x + y} + \alpha(y);$$

Derivando rispetto ad y otteniamo:

$$\sqrt{x + y} - 2\sqrt{x + y} - \frac{y}{\sqrt{x + y}} + \alpha'(y) = \alpha'(y) + \frac{x + y - 2(x + y) - y}{\sqrt{x + y}} = \alpha'(y) + \frac{-2y - x}{\sqrt{x + y}};$$

imponendo l'uguaglianza con il coefficiente di dy si ottiene $\alpha'(y) = 0$. Tutte le primitive sono allora date dalla formula:

$$V(x, y) = \frac{2}{3} (x + y)^{3/2} - 2y\sqrt{x + y} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Ovviamente si può scrivere:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, -(2y + x))}{\sqrt{x + y}} + (0, 0, \sin z),$$

e visto quanto sopra, è immediato osservare che $\vec{F}$ ha come primitiva

$$U(x, y, z) = \frac{2}{3} (x + y)^{3/2} - 2y\sqrt{x + y} - \cos z \quad \text{nel semispazio } S = \{(x, y, z) : x + y > 0\}.$$

□

ESERCIZIO 2.3. Trovare il volume del solido ottenuto facendo ruotare la figura piana:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a(\sqrt{x^2 + y^2} + x), y \geq 0\},$$

attorno all'asse x ; $a > 0$ è una costante (E è una mezza cardioide, v. figura).

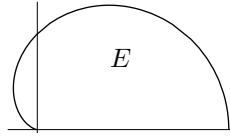


FIGURA 1. L'insieme E .

Risoluzione. In coordinate polari l'insieme E diventa $D = \{(r, \vartheta) : 0 \leq r \leq a(1 + \cos \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$; per il teorema di Guldino si ha, detto S il solido di rotazione:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Volume}(S)}{2\pi} &= \int_E y \, dx dy = \int_D r \sin \vartheta \, r \, dr d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \left(\int_{r=0}^{r=a(1+\cos \vartheta)} r^2 \, dr \right) = \\ &= \int_0^{\pi} \sin \vartheta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=a(1+\cos \vartheta)} d\vartheta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \vartheta)^3 \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{a^3}{3} \left[-\frac{(1 + \cos \vartheta)^4}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3} a^3, \end{aligned}$$

per cui

$$\text{Volume}(S) = \frac{8}{3} \pi a^3.$$

OSSERVAZIONE. Dato che solo il volume di S viene richiesto, è inutile calcolare prima l'area di E e poi l'ordinata del baricentro di E , si allunga il calcolo e si corrono maggiori rischi di errore.

Una quantità non piccola di persone sembra credere che per trovare il volume basti moltiplicare l'area di E per 2π : questo è anche dimensionalmente assurdo, un'area moltiplicata per un numero puro non può dare un volume.

□

ESERCIZIO 2.4. Per ogni $a > 0$ sia $E(a) = [0, a] \times [0, +\infty[$.

- (i) Provare che e^{-xy^2} appartiene ad $L^1(E(a))$ per ogni $a > 0$ e calcolare

$$\int_{E(a)} e^{-xy^2} \, dx dy.$$

- (ii) Dedurre da (i) che se $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è (misurabile e) limitata allora anche $e^{-xy^2} \varphi(x, y)$ appartiene ad $L^1(E(a))$.
 (iii) Ritrovare il risultato di (i) con il cambiamento di variabili $x = u$, $xy^2 = v$, dimostrando prima che questo induce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto con se stesso.
 (iv) Calcolare

$$\int_{[0, +\infty[^2} e^{-xy^2} e^{-\alpha x} \, dx dy \quad (\alpha > 0 \text{ costante}).$$

Risoluzione. (i) Con la formula di riduzione (l'integrando è positivo, quindi si può applicare il teorema di Tonelli):

$$\int_{E(a)} e^{-xy^2} \, dx dy = \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=\infty} e^{-xy^2} \, dy \right) dx = \int_0^a \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi a}.$$

(ii) Se $|\varphi(x, y)| \leq M$, si ha $|e^{-xy^2} \varphi(x, y)| \leq M e^{-xy^2}$, ed $M e^{-xy^2} \in L^1(E(a))$; e quindi $(x, y) \mapsto e^{-xy^2} \varphi(x, y)$ appartiene ad $L^1(E(a))$ per il criterio del confronto.

(iii) Si ottiene $x = u$, $y^2 = v/u$ da cui $y = \sqrt{v/u}$; quindi $\phi(u, v) = (u, \sqrt{v/u})$ è diffeomorfismo di $]0, +\infty[^2$ in se stesso, con inversa $\phi^{-1}(x, y) = (x, xy^2)$. Lo jacobiano è

$$\phi'(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{v}/u^{3/2} & 1/(2\sqrt{uv}) \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \det \phi'(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{uv}};$$

si ha poi $\phi^{\leftarrow}(E(a)) = [0, a] \times [0, \infty[$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{E(a)} e^{-xy^2} dx dy &= \int_{[0,a] \times [0,+\infty[} e^{-v} \frac{dudv}{2\sqrt{uv}} = \left(\int_0^a \frac{du}{2\sqrt{u}} \right) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv \right) = \\ &= \sqrt{a} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t} 2t dt = \sqrt{a\pi}. \end{aligned}$$

(iv) Direttamente con la formula di riduzione:

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty[^2} e^{-xy^2} e^{-\alpha x} dx dy &= \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x(y^2+\alpha)} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\infty} \left[\frac{e^{-x(y^2+\alpha)}}{-(y^2+\alpha)} \right]_{x=0}^{x=\infty} dy = \\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty \frac{d(y/\sqrt{\alpha})}{1+(y/\sqrt{\alpha})^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} [\arctan(y/\sqrt{\alpha})]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Oppure, usando ancora il cambiamento di variabili l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty[^2} e^{-xy^2} e^{-\alpha x} dx dy &= \int_{[0,+\infty[^2} e^{-v} e^{-\alpha u} \frac{dudv}{2\sqrt{uv}} = \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha u}}{2\sqrt{u}} du \right) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv \right) = \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha s^2}}{2s} (2s) ds = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}; \end{aligned}$$

(l'integrale $\int_0^\infty (e^{-v}/\sqrt{v}) dv = \sqrt{\pi}$ era stato calcolato sopra). $\square$

MATEMATICA 4F-13 DICEMBRE 2008

ESERCIZIO 2.5. Vogliamo calcolare in tre modi l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|+|y|)^3} dx dy.$$

- (i) Direttamente con la formula di riduzione.
- (ii) Osservato che l'integrale è $\lambda_3(T)$, dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1/(1+|x|+|y|)^3\}$, trovare la z -sezione di T e calcolare $\lambda_3(T)$ usando le z -sezioni.
- (iii) Dopo aver ricondotto l'integrale ad un integrale sul primo quadrante, usare il cambiamento di variabili $x+y=u$, $y=v$.

Risoluzione. (i) Si ha intanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|+|y|)^3} dx dy = 4 \int_{[0,+\infty[^2} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3},$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty[^2} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} &= \int_{x=0}^{x=\infty} \left(\int_{y=0}^{y=\infty} \frac{dy}{(1+x+y)^3} \right) dx = \int_{x=0}^{x=\infty} \left[\frac{-1}{2(1+x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=\infty} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale quindi 2.

(ii) Si ha, se $0 < z \leq 1$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z \leq 1/(1+|x|+|y|)^3\}; \quad \text{ma } z \leq \frac{1}{(1+|x|+|y|)^3} \iff (1+|x|+|y|)^3 \leq \frac{1}{z} \\ &\iff |x|+|y| \leq \frac{1}{z^{1/3}} - 1; \quad \text{cioè } S(z) \text{ è il quadrato di vertici } (\pm(z^{-1/3}-1), 0), (0, \pm(z^{-1/3}-1)). \end{aligned}$$

Ne segue che l'area di $S(z)$ è

$$\lambda_2(S(z)) = 2(z^{-1/3}-1)^2 = 2(z^{-2/3}-2z^{-1/3}+1),$$

e quindi il volume di T è

$$\lambda_3(T) = \int_{z=0}^{z=1} \lambda_2(S(z)) dz = 2 \int_0^1 (z^{-2/3} - 2z^{-1/3} + 1) dz = 2 \left[3z^{1/3} - 3z^{2/3} + z \right]_0^1 = 2,$$

confermando il precedente risultato.

(iii) Come già osservato in (i) l'integrale è 4 volte quello sul primo quadrante. Si ha $x = u - y = u - v$, $y = v$, ed il primo quadrante proviene, nella trasformazione $(x, y) = \phi(u, v) = (u - v, v)$ da $\Delta = \{u \geq v \geq 0\}$, triangolo illimitato. La matrice jacobiana è

$$\phi'(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con determinante} \quad 1.$$

Quindi l'integrale dato vale

$$\begin{aligned} 4 \int_{\Delta} \frac{dudv}{(1+u)^3} &= 4 \int_{v=0}^{v=\infty} \left(\int_{u=v}^{u=\infty} \frac{du}{(1+u)^3} \right) dv = 4 \int_{v=0}^{v=\infty} \left[\frac{-1}{2(1+u)^2} \right]_{u=v}^{u=\infty} dv = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v)^2} = 2 \left[\frac{-1}{1+u} \right]_0^{\infty} = 2. \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 2.6. Sia T il toro (solido) ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il disco del piano xz di centro $(R, 0, 0)$ e raggio a ; si suppone che sia $0 < a < R$; sia poi $S = T \cap \{z \geq 0\}$ la parte di toro nel semispazio $z \geq 0$.

(i) Disegnare S , trovarne il volume, e trovare l'area della frontiera ∂S (senza fare integrali!).

Diciamo A la porzione di frontiera di S che sta sulla superficie torica, B l'altra.

- (ii) Dato il campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - y/(x^2 + y^2), x + x/(x^2 + y^2), z + y)$, descriverne il dominio naturale e trovarne rotore e divergenza.
- (iii) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da S e dalle singole porzioni di frontiera di S .
- (iv) Parametrizzare A e descrivere il bordo della parametrizzazione.
- (v) Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo il bordo di A prima trovato, sia direttamente che con la formula di Stokes.

Risoluzione. (i) Il disegno di S viene omesso. Il volume, metà del volume del toro, è chiaramente $\text{Volume}(S) = (\pi a^2/2)(2\pi R) = \pi^2 a^2 R$. Detta B la porzione di frontiera di S sul piano xy , la corona circolare centrata nell'origine di raggio interno $R - a$ e raggio esterno $R + a$, la frontiera di S è unione di A e di B e l'area è

$$\text{Area}(\partial S) = \text{Area}(A) + \text{Area}(B) = 2\pi^2 a R + \pi((R + a)^2 - (R - a)^2) = 2\pi^2 a R + 4\pi a R.$$

(ii) Il dominio naturale del campo, cioè il massimo sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ su cui le formule assegnate per definire il campo hanno significato, è chiaramente $\mathbb{R}^3 \setminus Z$, dove $Z = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ è l'asse z . Per rotore e divergenza conviene scomporre il campo in una somma di campi su cui si può dire qualcosa:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, z) + \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2} + (0, x, y);$$

il primo, $(x^2, 0, z)$ è conservativo essendo a variabili separate, e quindi ha rotore nullo; la divergenza è $2x + 1$;

il secondo è il ben noto campo dell'induzione magnetica del filo, irrotazionale e solenoidale; che sia anche solenoidale è forse stato meno sottolineato dal corso (anche se è una delle equazioni di Maxwell!) ma è comunque immediato:

$$\partial_x \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \partial_y \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0;$$

infine, il terzo campo $(0, x, y)$ è chiaramente a divergenza nulla, ed il rotore è

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & 0 \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & y \end{bmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Riassumendo si ha

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 2x + 1; \quad \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (1, 0, 1).$$

(iii) Per il teorema della divergenza il flusso uscente è

$$\int_S \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \int_S (2x + 1) dx dy dz = 2 \int_S x dx dy dz + \int_S dx dy dz = \text{Volume}(S) = \pi^2 a^2 R$$

(per la simmetria di S , che ha il baricentro sull'asse z , si ha $\int_S x dx dy dz = 0$). Il versore normale a B esterno ad S è $-\vec{e}_3$; al flusso uscente da B contribuisce solo la terza componente $z + y$ del campo, si ha cioè

$$\int_B \vec{F}(x, y, z) \cdot (-\vec{e}_3) d\sigma_B = \int_B (0 + y) dx dy = 0$$

(anche qui, l'integrale $\int_B y dx dy = 0$ dato che il baricentro della corona circolare è l'origine). Tutto il flusso esce quindi solo da A :

Flusso uscente da $A = \pi^2 a^2 R$; Flusso uscente da $B = 0$.

(iv) Usiamo la solita parametrizzazione delle figure di rotazione, legata alle coordinate cilindriche: il semicerchio superiore nel piano xz è $x = R + a \cos \varphi$, $z = a \sin \varphi$ con $0 \leq \varphi \leq \pi$, e quindi si ottiene

$$p: \quad x = (R + a \cos \varphi) \cos \vartheta, \quad y = (R + a \cos \varphi) \sin \vartheta, \quad z = a \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Volendo il versore normale esterno (A è parte di frontiera di S); occorre prendere ϑ come prima coordinata e φ per seconda, come poi si vede; in ogni caso, con questa scelta di coordinate si ha che il bordo di S è composto da:

•

$$p(\vartheta, 0) = ((R + a) \cos \vartheta, (R + a) \sin \vartheta, 0) \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

il circolo positivamente orientato nel piano xy di raggio $R + a$ e centro l'origine.

•

$$p(2\pi, \varphi) = (R + a \cos \varphi, 0, a \sin \varphi) \quad \varphi \in [0, \pi],$$

la semirconfenza nel piano xz di centro $(R, 0, 0)$ e raggio a nel semipiano $z \geq 0$, percorsa da $(R + a, 0, 0)$ ad $(R - a, 0, 0)$.

• L'opposto di

$$p(\vartheta, \pi) = ((R - a) \cos \vartheta, (R - a) \sin \vartheta, 0) \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

cioè la circonferenza negativamente orientata di centro l'origine e raggio $R - a$ nel piano xy .

• L'opposto di

$$p(0, \varphi) = (R + a \cos \varphi, 0, a \sin \varphi) \quad \varphi \in [0, \pi],$$

opposto del semicerchio di cui al secondo punto.

Insomma: si ha un ciclo invisibile formato dalle due semicirconferenze percorse in verso opposto; il bordo è poi formato dalle due circonferenze bordo della corona circolare B , orientato coerentemente al piano xy .

Il versore normale positivo per questa orientazione della corona circolare è $\vec{e}_3$, che punta all'interno del solido; quindi sulla superficie A la normale è quella esterna, cosa che si può anche verificare per via diretta.

(v) Calcoliamo la circuitazione: Il campo $(x^2, 0, z)$ è conservativo e porta quindi contributo nullo alla circuitazione. La circuitazione di $(-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ sulla circonferenza esterna viene 2π , e sulla interna -2π , come ben noto e come si vede subito. Resta il campo $(0, x, y)$; la circuitazione è, se $\gamma_r(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{R+a}} x dy - \int_{\gamma_{R-a}} x dy &= \int_0^{2\pi} (R + a) \cos \vartheta (R + a) \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^{2\pi} (R - a) \cos \vartheta (R - a) \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= ((R + a)^2 - (R - a)^2) \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = 4\pi a R. \end{aligned}$$

Il flusso del rotore $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (1, 0, 1)$ sarebbe assai più comodamente calcolato attraverso la corona circolare, e sarebbe pari all'area di questa, e cioè $4\pi a R$ come trovato, ma forse questo è barare al gioco, dato che si chiede di applicare la formula di Stokes, presumibilmente alla superficie A . Si ha per il flusso

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \det \begin{bmatrix} 1 & -(R + a \cos \varphi) \sin \vartheta & -a \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 & (R + a \cos \varphi) \cos \vartheta & -a \sin \varphi \sin \vartheta \\ 1 & 0 & a \cos \varphi \end{bmatrix} d\vartheta d\varphi = \\ \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} ((R + a \cos \varphi) \cos \vartheta a \cos \varphi - (R + a \cos \varphi)(-a \sin \varphi) \sin^2 \vartheta - \\ (R + a \cos \varphi)(-a \sin \varphi) \cos^2 \vartheta) d\vartheta d\varphi = \\ \left(\int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^\pi (R + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \right) - \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} (R + a \cos \varphi)(-a \sin \varphi) d\vartheta d\varphi = \end{aligned}$$

$$0 + 2\pi \int_0^\pi (Ra \sin \varphi + a^2 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = 4\pi Ra.$$

OSSERVAZIONE. Dal calcolo fatto della matrice jacobiana di p si vede che la terza componente di $\partial \vartheta p \times \partial_\varphi p$ è (minore in alto a destra) $(R + a \cos \varphi) a \sin \varphi > 0$ per $0 < \varphi < \pi$; il vettore normale punta quindi verso l'alto, quindi anche verso l'esterno di S .

□

ESERCIZIO 2.7. Si considera il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x y^2 \\ \dot{y} &= x^2 y \end{cases}.$$

- (i) Trovarne le soluzioni costanti ed un integrale primo. Dimostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
- (ii) Disegnare le traiettorie con i versi di percorrenza. Dimostrare che una soluzione che all'istante 0 si trova in uno dei quadranti aperti resta per sempre in esso.

D'ora in poi studiamo le soluzioni nel primo quadrante.

- (iii) Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una soluzione nel primo quadrante aperto, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$. Dato $a > 0$ esiste $c_a \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi_a(t) = a\varphi(c_a t)$ sia ancora soluzione; trovare c_a .
- (iv) Trovare la soluzione massimale con condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 1/\sqrt{2}$.
- (v) Trovare il flusso del sistema, limitatamente al primo quadrante.

Risoluzione. (i) Le soluzioni del sistema $0 = -xy^2$, $0 = x^2y$ sono chiaramente tutti i punti della forma $(a, 0)$ o della forma $(0, b)$, cioè tutti i punti degli assi coordinati. Un integrale primo è una primitiva del campo $(xy^2, x^2y) = xy(x, y)$, o del campo (x, y) ad esso parallelo e quindi un integrale primo è $V(x, y) = x^2 + y^2$, le cui curve di livello sono cerchi centrati nell'origine. Tali curve di livello sono compatte e quindi le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, per il teorema di intrappolamento nei compatti.

(ii) Oltre agli equilibri le traiettorie sono i quarti di circolo nei vari quadranti: le intersezioni con gli assi sono equilibri e per unicità delle soluzioni essi non possono essere raggiunti, e meno ancora superati. I versi di percorrenza sono, dai segni di $\dot{x}$, $\dot{y}$: antiorario nel primo e terzo quadrante; orario nel secondo e quarto quadrante.

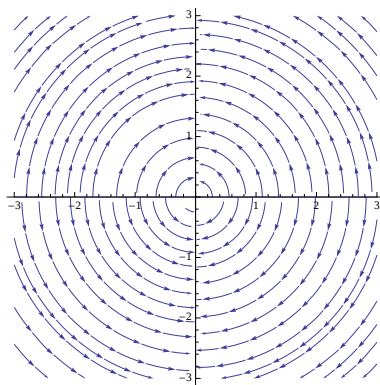


FIGURA 2. Traiettorie.

- (iii) Imponendo che $\varphi_a(t) = a\varphi(c_a t)$ sia soluzione si ricava

$$\begin{cases} a c_a u'(c_a t) &= -a^3 u(c_a t) v^2(c_a t) \\ a c_a v'(c_a t) &= a^3 v(c_a t) u^2(c_a t) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} c_a u'(c_a t) &= -a^2 u(c_a t) v^2(c_a t) \\ c_a v'(c_a t) &= a^2 v(c_a t) u^2(c_a t) \end{cases};$$

posto $c_a t = \theta$ le equazioni diventano

$$c_a u'(\theta) = a^2(-u(\theta) v^2(\theta)); \quad c_a v'(\theta) = a^2 v(\theta) u^2(\theta),$$

che essendo (u, v) soluzione sono verificate se e solo se $c_a = a^2$. Quindi: aumentando il raggio i tempi vanno riscattati con il quadrato del raggio.

(iv) Si ha $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1/2 + 1/2 = 1$; la seconda equazione si scrive

$$\dot{y} = (1 - y)^2 y \iff \frac{\dot{y}}{y(1 - y^2)} = 1;$$

Si ha ora

$$\frac{1}{y(1 - y^2)} = \frac{1 - y^2 + y^2}{y(1 - y^2)} = \frac{1}{y} + \frac{y}{1 - y^2},$$

quindi, integrando, si ottiene

$$\log \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = t - c;$$

per $t = 0$ si ottiene

$$\log \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1/2}} = 0 - c \quad \text{cioè} \quad c = 0;$$

proseguendo si ha

$$\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = e^t \iff y^2 = e^{2t}(1 - y^2) \iff y^2 = \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}},$$

e dovendo essere $y(t) > 0$ si ottiene

$$y(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1 + e^{2t}}} \quad \text{da cui} \quad x(t) = \sqrt{1 - y(t)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2t}}},$$

che in modo più simmetrico si scrivono

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2t}}}; \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2t}}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(v) Se $a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ si ottiene da (iii) che $x(t) = a/\sqrt{1 + e^{2a^2t}}$, $y(t) = a/\sqrt{1 + e^{-2a^2t}}$ è soluzione sul cerchio di raggio a ; per farla passare per (x_0, y_0) all'istante $t = 0$ basta traslare di una opportuna costante; la soluzione deve cioè essere della forma

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + e^{2a^2(t-c)}}}; \quad y(t) = \frac{a}{\sqrt{1 + e^{-2a^2(t-c)}}},$$

dove c è tale che

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + e^{-2a^2c}}}; \quad y_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + e^{2a^2c}}};$$

si ha da queste $c = \log(x_0/y_0)/(x_0^2 + y_0^2)$. Quindi (salvo errori...)

$$x(t) = \phi^t(x_0, y_0)_1 = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{1 + (y_0/x_0)^2 \exp(2(x_0^2 + y_0^2)t)}};$$

$$y(t) = \phi^t(x_0, y_0)_2 = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{1 + (x_0/y_0)^2 \exp(-2(x_0^2 + y_0^2)t)}}$$

□

ESERCIZIO 2.8. Si considera il sistema differenziale

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(i) Trovare una risolvente reale per il sistema.

(ii) Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + 3y \\ \dot{y} &= -3x - 2y + e^t, \end{cases}$$

cercando prima una soluzione particolare della forma $e^t(a, b)$, con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vettore costante.

(iii) Ricondursi ad (ii) per trovare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + 3y \\ \dot{y} &= -3x - 2y + z, \\ \dot{z} &= z \end{cases}$$

che per $t = 0$ vale $(0, 0, 1)$.

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è $\zeta^2 - \text{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 4\zeta + 13 = 0$, con soluzioni $\zeta = -2 \pm 3i$. Cerchiamo un autovettore associato a $2 + 3i$ risolvendo

$$\begin{cases} (-2 + 3i + 2)x - 3y = 0 \\ 3x + (-2 + 3i + 2)y = 0 \end{cases} \iff ix = y,$$

ed un autovettore è $(1, i)$. Quindi

$$e^{(-2+i)t}(1, i) = e^{-2t}(\cos(3t) + i \sin(3t))(1, i) = e^{-2t}(\cos(3t) + i \sin(3t), -\sin(3t) + i \cos(3t)) = e^{-2t}(\cos(3t), -\sin(3t)) + i(\sin(3t), \cos(3t))$$

è una soluzione complessa, e una risolvente reale è

$$\Phi(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -\sin(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}.$$

(tale risolvente, per caso, è esattamente la matrice e^{tA} , essendo la matrice identica per $t = 0$).

(ii) Imponendo che $e^t(a, b)$ sia soluzione si trova il sistema:

$$\begin{cases} e^t a = -2e^t a + 3e^t b \\ e^t b = -3e^t a - 2e^t b + e^t \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 3a - 3b = 0 \\ 3a + 3b = 1 \end{cases}$$

con soluzione unica $a = b = 1/6$. L'integrale generale è quindi

$$\begin{bmatrix} e^{-2t}(c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) + e^t/6 \\ e^{-2t}(-c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)) + e^t/6 \end{bmatrix}.$$

(iii) L'ultima equazione ha soluzione $z = z_0 e^t$, in particolare la soluzione del sistema la cui terza componente vale 1 per $t = 0$ non può che essere e^t . Basta allora cercare la soluzione del sistema in (ii) con condizioni iniziali nulle; tale soluzione fornisce le prime due componenti della soluzione richiesta, dato che le prime due componenti di essa varificano il sistema stesso. Si trova il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + 1/6 = 0 \\ c_2 + 1/6 = 0 \end{cases} \quad \text{con soluzione} \quad c_1 = c_2 = -1/6.$$

La soluzione richiesta è quindi

$$\begin{bmatrix} (e^t - e^{-2t}(\cos(3t) + \sin(3t)))/6 \\ (e^t - e^{-2t}(\cos(3t) - \sin(3t)))/6 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE. Di fatto, se B è la matrice del secondo sistema, quello tridimensionale, abbiamo trovato che la matrice esponenziale è

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \cos(3t) & e^{-2t} \sin(3t) & (e^t - e^{-2t}(\cos(3t) + \sin(3t)))/6 \\ -e^{-2t} \sin(3t) & e^{-2t} \cos(3t) & (e^t - e^{-2t}(\cos(3t) - \sin(3t)))/6 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 1. La cotangente iperbolica complessa è la funzione definita dalla formula

$$\operatorname{coth} z := \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ tale che } \sinh z \neq 0;$$

- (i) Trovare il dominio della cotangente iperbolica.
- (ii) Mostrare che la cotangente iperbolica assume tutti i valori complessi, eccetto due, quali?
- (iii) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\operatorname{coth}(z) = 1/2$.

Risoluzione. (i) Si ha

$$\sinh z = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = 1 \iff 2z = 2k\pi i \iff z = k\pi i, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il dominio è quindi $\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$.

(ii) I valori assunti dalla cotangente iperbolica sono i $w \in \mathbb{C}$ per cui l'equazione nell'incognita z data da $(e^z + e^{-z})/(e^z - e^{-z}) = w$ ha soluzione in $\mathbb{C}$. L'equazione equivale a

$$\frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = w \iff e^{2z} + 1 = w(e^{2z} - 1) \iff (w - 1)e^{2z} = w + 1;$$

Se $w = 1$ il primo membro vale 0 ed il secondo vale 2, qualunque sia $z \in \mathbb{C}$, e quindi per $w = 1$ non ci sono soluzioni. Se $w = -1$ il secondo membro è nullo, mentre il primo vale $-2e^{2z}$, che non è nullo per alcun valore di z ; quindi anche per $w = -1$ non ci sono soluzioni. Se $w \neq \pm 1$, l'equazione equivale a

$$e^{2z} = \frac{w + 1}{w - 1} \quad \text{con soluzioni} \quad z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{w + 1}{w - 1} \right) + k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

(esistenti perchè $(w + 1)/(w - 1) \neq 0$). Quindi: la cotangente iperbolica complessa assume tutti i valori complessi tranne 1, -1.

(iii) Se $w = 1/2$ nella formula prima trovata si ha

$$z = \frac{1}{2} \log(-3) + k\pi i = \frac{1}{2} \log 3 + i \frac{\pi}{2} + k\pi i = \frac{\log 3}{2} + i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

□

ESERCIZIO 2. (i) Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$, mostrare che $\vec{F}$ è conservativo, trovandone un potenziale.

Sia ora $u \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R})$; si considera il campo $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ (dove $Z = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ è l'asse z) dato da $\vec{G}(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2}) \vec{F}(x, y, z)$.

- (ii) Trovare la circuitazione di $\vec{G}$ sul circuito $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, k)$, $t \in [0, 2\pi]$, dove $R > 0$ e k sono costanti.
- (iii) Trovare, se ne esistono, le funzioni $u \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R})$ tali che il campo sia irrotazionale (si può usare la formula $\nabla \times (v \vec{F}) = (\nabla v) \times \vec{F} + v(\nabla \times \vec{F})$, valida per ogni campo scalare v e campo vettoriale $\vec{F}$), oppure conservativo.

Risoluzione. (i) Si vede immediatamente che una primitiva è $xy + z^2/2$; un potenziale è quindi $V(x, y, z) = -(xy + z^2/2)$.

(ii) la circuitazione è

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u(\sqrt{x^2 + y^2})(y dx + x dy + z dz) &= \int_0^{2\pi} u(R)(R \sin t(-R \sin t) + (R \cos t)(R \cos t) + 0) dt = \\ &= R^2 u(R) \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = 0. \end{aligned}$$

(iii) Se $v(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ si ha $\nabla v(x, y, z) = \frac{u'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$ per cui, essendo nullo il rotore di $\vec{F}$ perchè $\vec{F}$ è conservativo, si ha

$$\nabla \times \vec{G}(x, y, z) = \nabla \times (u(\sqrt{x^2 + y^2}) \vec{F}(x, y, z)) = \frac{u'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \times (y, x, z);$$

calcoliamo il prodotto vettoriale

$$(x, y, 0) \times (y, x, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & x & y \\ \vec{e}_2 & y & x \\ \vec{e}_3 & 0 & z \end{bmatrix} = \vec{e}_1 yz + \vec{e}_2 (-xz) + \vec{e}_3 (x^2 - y^2).$$

Il rotore è quindi:

$$\nabla \times \vec{G}(x, y, z) = \frac{u'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xz, -xz, x^2 - y^2),$$

e chiaramente è identicamente nullo su $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ se e solo se $u'(r) = 0$ per ogni $r > 0$, avendo posto $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; questo equivale a dire che u è costante. Se u è costante il campo $\vec{G}$, multiplo secondo una costante di un campo conservativo $\vec{F}$ è a sua volta conservativo. E poichè ogni campo conservativo è irrotazionale si ha:

$\vec{G}$ è irrotazionale, o conservativo, se e solo se u è costante. $\square$

ESERCIZIO 3. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2y, 0 \leq y \leq 2 - x^2/2, x \geq 0\}$.

- (i) Disegnare E e trovarne l'area.
- (ii) Trovare le coordinate del baricentro geometrico di E .
- (iii) Trovare il volume dei solidi S e T ottenuti facendo ruotare E attorno all'asse x ed attorno all'asse y , rispettivamente.
- (iv) Trovare l'area della frontiera del solido T .

Risoluzione. Si tratta dei punti del primo quadrante $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ fuori dal cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1 (infatti $x^2 + y^2 \geq 2y \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 \geq 1 \iff x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$) e al di sotto della parabola di equazione $y = 2 - x^2/2$. La parabola è tutta esterna al cerchio, infatti sostituendo $x^2 = 2(2 - y)$ in luogo di x^2 nella disequazione con il cerchio si ha

$$2(2 - y) + y^2 \geq 2y \iff y^2 - 4y + 4 \geq 0 \iff (y - 2)^2 \geq 0,$$

banalmente sempre verificata (come uguaglianza solo per $y = 2$). La parabola ha vertice in $(0, 2)$, dove tocca il cerchio, e passa per il punto $(2, 0)$; il disegno di E è come in figura.

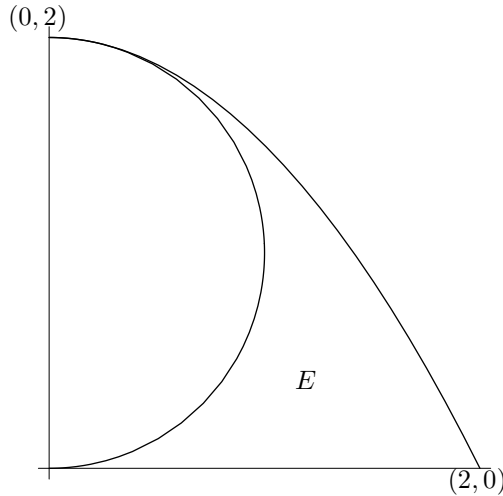


FIGURA 1. L'insieme E .

Per l'area di E possiamo fare la differenza tra l'area del mezzo segmento di parabola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x^2/2\}$ e l'area del semicerchio; dato che P è il trapezoide di $2 - x^2/2$ al di sopra di $[0, 2]$ si ha

$$\lambda_2(P) = \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 4 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3},$$

mentre l'area del semicerchio è $\pi/2$; quindi

$$\lambda_2(E) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Per l'ascissa del baricentro calcoliamo:

$$\begin{aligned}\int_E x \, dx \, dy &= \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{2(2-y)}} x \, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{2(2-y)}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2(2-y) - (2y-y^2)) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (y^2 - 4y + 4) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Per l'ordinata del baricentro calcoliamo $\int_E y \, dx \, dy$ come differenza $\int_E y \, dx \, dy = \int_P y \, dx \, dy - \int_D y \, dx \, dy$ dove D è il mezzo disco, e P , come sopra, il mezzo segmento di parabola. L'integrale $\int_D y \, dx \, dy$ è immediato, essendo l'ordinata del baricentro di D (1) per l'area di D ($\pi/2$) e cioè $\pi/2$. L'altro integrale è facile integrando prima in y e poi in x :

$$\begin{aligned}\int_P y \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2-x^2/2} y \, dy \right) dx = \int_0^2 \frac{(2-x^2/2)^2}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{16}{3} + \frac{32}{20} \right) = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\int_E y \, dx \, dy = \frac{32}{15} - \frac{\pi}{2};$$

e concludendo:

$$x_{\text{baric}} = \frac{(4/3)}{8/3 - \pi/2} = \frac{8}{16 - 3\pi}; \quad y_{\text{baric}} = \frac{32/15 - \pi/2}{8/3 - \pi/2} = \frac{64 - 15\pi}{80 - 15\pi}.$$

OSSERVAZIONE. Naturalmente si calcola anche per via diretta:

$$\int_E y \, dx \, dy = \int_{y=0}^{y=2} y \left(\int_{x=\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{2(2-y)}} dx \right) dy = \int_0^2 y \left(\sqrt{2(2-y)} - \sqrt{2y-y^2} \right) dy;$$

Calcoliamo il primo integrale: si pone $2-y = t^2$ e si ha

$$\begin{aligned}\int_0^2 y \sqrt{2(2-y)} \, dy &= \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^0 (2-t^2)t(-2t \, dt) = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} (2t^2 - t^4) \, dt = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - \frac{(\sqrt{2})^5}{5} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \right) = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

Secondo integrale: completando il quadrato interno:

$$\int_0^2 y \sqrt{2y-y^2} \, dy = \int_0^2 y \sqrt{1-1+2y-y^2} \, dy = \int_0^2 y \sqrt{1-(y-1)^2} \, dy =$$

(posto $y-1 = t$)

$$\int_{-1}^1 (t+1) \sqrt{1-t^2} \, dt = \int_{-1}^1 t \sqrt{1-t^2} \, dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}$$

(degli ultimi due integrali il primo è nullo per disparità, il secondo è l'area del semicerchio unitario. Si ritrova quindi $\int_E y \, dx \, dy = 32/15 - \pi/2$

(iii) Dette ξ ed η l'ascissa e l'ordinata del baricentro si ha

$$\text{Volume}(S) = 2\pi\eta\lambda_2(E) = 2\pi \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right); \quad \text{Volume}(T) = 2\pi\xi\lambda_2(E) = \frac{8}{3}\pi.$$

(iv) La frontiera di T consta della sfera ottenuta facendo ruotare il semicerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1, sfera di area 4π , di un disco di base sul piano xy , di raggio 2, e quindi area $\pi 4$, ed infine di un pezzo di paraboloide di rotazione L , ottenuto facendo ruotare l'arco di parabola α di equazione cartesiana $y = 2 - x^2/2$ (con $x \in [0, 2]$) attorno all'asse y . Per il teorema di Guldino si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(L) &= 2\pi \int_{\alpha} x |d\alpha| = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1+(-x)^2} \, dx = \pi \int_0^2 (2x) \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{2\pi}{3} \left[(1+x^2)^{3/2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\text{Area}(\partial T) = 8\pi + \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

OSSERVAZIONE. Importante! È un errore diffuso quello di ritenere che l'area di una superficie di rotazione (attorno all'asse z) possa essere ottenuta integrando rispetto a z le lunghezze dei cerchi sezione. Questo è *totalmente falso*, dà il risultato corretto solo nel caso banale di un cilindro, ed un attimo di riflessione dovrebbe anche convincere che non ci sono motivazioni, neanche intuitive, per tale asserzione. Il *volume* di un solido di rotazione si ottiene ovviamente integrando in dz le aree dei dischi sezione (metodo dei dischi), ma integrando in dz le lunghezze dei cerchi sezione si ottiene soltanto l'area di un cilindro che ha l'asse z come asse e raggio la distanza media della superficie dall'asse z : vedi Analisi Due, 7.30.9, ed anche Temi 2003–04, pagina 4.

Il teorema di Guldino può essere interpretato anche dicendo che l'area si ha integrando le lunghezze dei cerchi sezione, ma *rispetto a ds* , dove ds è l'elemento di lunghezza della curva meridiana, e non rispetto a dz , elemento di lunghezza dell'asse di rotazione!

□

ESERCIZIO 4. (i) Dire per quali reali α esiste finito:

$$\int_{[0,+\infty[^3} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$$

e calcolarlo per $\alpha = 3$.

(ii) Dire per quali reali α la funzione $f_\alpha(x, y, z) = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^3)$, e per tali valori trovarne l'integrale esteso ad $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. (i) Usiamo naturalmente coordinate sferiche; l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito (grazie al teorema di cambiamento di variabili) l'integrale:

$$\int_{[0,+\infty[\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \frac{r^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \cos \vartheta}{r^\alpha} e^{-r^2} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

(trattandosi di funzioni positive, il teorema di Tonelli dice che l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito l'integrale iterato)

$$\int_0^\infty r^{5-\alpha} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

Gli ultimi due sono integrali di funzioni continue su intervalli compatti e di certo esistono finiti. Per il primo: qualunque sia α l'integrando è integrabile attorno a $+\infty$, essendo $o(1/r^2)$ per $r \rightarrow +\infty$; per $r \rightarrow 0^+$ esso è asintotico a $r^{5-\alpha} = 1/r^{\alpha-5}$, sommabile vicino a 0 se e solo se $\alpha - 5 < 1 \iff \alpha < 6$. Si ha poi

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} [\sin^4 \vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}; \quad \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} [\sin^2 \varphi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2};$$

ed infine, se $\alpha = 3$:

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{-2} \int_0^\infty r(-2r e^{-r^2}) dr = \frac{-1}{2} [r e^{-r^2}]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Quindi

$$\int_{[0,+\infty[^3} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \frac{\sqrt{\pi}}{32}.$$

(ii) Ricordiamo che appartenere ad $L^1(\mathbb{R}^3)$ significa dire che $|f_\alpha|$ è integrabile su $\mathbb{R}^3$. La funzione $|f_\alpha(x, y, z)| = |xyz| e^{-(x^2+y^2+z^2)} / (x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}$ è simmetrica rispetto a tutti i piani coordinati (infatti si ha $|f_\alpha(-x, y, z)| = |f_\alpha(x, -y, z)| = |f_\alpha(x, y, -z)| = |f_\alpha(x, y, z)|$) e quindi è sommabile su $\mathbb{R}^3$ se e solo se è sommabile sul primo ottante, essendo anzi:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f_\alpha(x, y, z)| dx dy dz = 8 \int_{[0,+\infty[^3} f_\alpha(x, y, z) dx dy dz;$$

come appena visto il secondo integrale esiste finito se e solo se $\alpha < 6$; quindi $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^3)$ se e solo se $\alpha < 6$. Inoltre f_α è antisimmetrica rispetto ad ogni piano coordinato, si ha cioè $f_\alpha(-x, y, z) = -f_\alpha(x, y, z)$, ed analogamente per le altre coordinate. Quindi l'integrale su $\mathbb{R}^3$, quando esiste finito, è nullo.

OSSERVAZIONE. Vedi dispense, 5.14.1 per l'uso delle simmetrie negli integrali. Se la seconda domanda fosse stata:

(ii)' Dire per quali reali α la funzione $f_\alpha(x, y, z) = \frac{xyz}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{\alpha/2}} e^{-(ax^2 + by^2 + cz^2)}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^3)$, e per tali valori trovarne l'integrale esteso ad $\mathbb{R}^3$ ($a > 0, b > 0, c > 0$ sono tre costanti strettamente positive),

la risposta si poteva dare allo stesso modo, riconducendosi prima a (ii) con il seguente cambiamento lineare di variabili: $x = u/\sqrt{a}, y = v/\sqrt{b}, z = w/\sqrt{c}$; l'integrale su $\mathbb{R}^3$ esiste finito se e solo se esiste finito

$$\frac{1}{abc} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{uvw}{(u^2 + v^2 + w^2)^{\alpha/2}} e^{-(u^2 + v^2 + w^2)} du dv dw,$$

che a meno di un fattore costante è esattamente quanto chiesto in (ii). Esercizi relati: dispense 5.18.2.5

□

ESERCIZIO 5. Calcolare l'integrale:

$$\int_{[0, +\infty[^3} e^{-\sqrt{x+y+z}} dx dy dz,$$

usando il cambiamento di variabili $x = u^2, y = v^2, z = w^2$, poi ... (dovrebbe venire 1/120).

Si consiglia di fare tutti gli esercizi di precompitini e compitini degli anni precedenti

PRIMO COMPITINO-10 NOVEMBRE 2007

ESERCIZIO 6. La tangente iperbolica complessa è la funzione definita dalla formula

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ tale che } \cosh z \neq 0;$$

- (i) Trovare il dominio D della tangente iperbolica.
- (ii) Trovare l'insieme immagine $\tanh(D)$ (insieme dei valori complessi assunti dalla funzione $\tanh$).
- (iii) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\tanh z = 2$.

Risoluzione. (i) Deve essere $\cosh z \neq 0$, e quindi

$$e^z \neq -e^{-z} \iff e^{2z} \neq -1 \iff 2z \neq (2k+1)i\pi \iff z \neq i\frac{\pi}{2} + ki\pi.$$

Quindi $D = \mathbb{C} \setminus (i\pi/2 + \mathbb{Z}i\pi)$.

(ii) Si tratta di trovare l'insieme dei $w \in \mathbb{C}$ per cui l'equazione $\tanh z = w$ ha soluzione. Si ha

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = w \iff e^{2z} - 1 = w(e^{2z} + 1) \iff e^{2z}(1 - w) = 1 + w.$$

Se $w = 1$ il primo membro è nullo qualunque sia z , mentre il secondo vale 2; se $w \neq 1$ l'equazione si scrive

$$e^{2z} = \frac{1+w}{1-w},$$

che come ben sappiamo ha soluzioni se e solo se il secondo membro non è nullo, e cioè se $w \neq -1$; quindi $\tanh(D) = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

(iii) Le soluzioni della precedente equazione sono date dalla formula

$$2z = \log \frac{1+w}{1-w} + 2k\pi i \iff z = \frac{1}{2} \log \frac{1+w}{1-w} + ki\pi.$$

che per $w = 2$ porge $\log(-3)/2 + ki\pi = \log 3/2 + i\pi/2 + ki\pi$; cioè

$$z_k = \log \sqrt{3} + i\frac{\pi}{2} + ki\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

ESERCIZIO 7. Sia $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

- (i) Trovare $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$.

Sia ora $u \in C^1(]0, \infty[, \mathbb{R})$; si considera il campo $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da

$$\vec{G}(x, y, z) = u(\sqrt{x^2 + y^2}) \vec{F}(x, y, z).$$

- (ii) Trovare la circuitazione di $\vec{G}$ sul circuito $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, t(2\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$, dove $R > 0$ è costante.
- (iii) Trovare, se ne esistono, le funzioni $u \in C^1(]0, \infty[, \mathbb{R})$ tali che il campo $\vec{G}$ sia irrotazionale. Esistono delle u che rendono il campo anche conservativo?

Risoluzione. (i) Il calcolo è immediato:

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -y \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & x \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 0 + \vec{e}_2 0 + \vec{e}_3 2 = 2 \vec{e}_3.$$

(ii) Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{G}(x, y, z) \cdot d(x, y, z) &= \int_{\gamma} u(\sqrt{x^2 + y^2}) (-y dx + x dy) = \\ &= u(R) \int_0^{2\pi} ((-R \sin t)(-R \sin t) + (R \cos t)(R \cos t)) dt = \\ &= R^2 u(R) \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2 u(R). \end{aligned}$$

(iii) Si ha:

$$\nabla \times \vec{G}(x, y, z) = \nabla u(\sqrt{x^2 + y^2}) \times \vec{F}(x, y, z) + u(\sqrt{x^2 + y^2}) \nabla \times \vec{F}(x, y, z) =$$

(si pone $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\begin{aligned} u'(r) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0 \right) \times (-y, x, 0) + u(r) 2 \vec{e}_3 = \\ \frac{u'(r)}{r} \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & x & -y \\ \vec{e}_2 & y & x \\ \vec{e}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2u(r) \vec{e}_3 = \frac{u'(r)}{r} (x^2 + y^2) \vec{e}_3 + 2u(r) \vec{e}_3 = \\ (r u'(r) + 2u(r)) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Ne segue che $\vec{G}$ è irrotazionale se e solo se u verifica l'equazione differenziale $r u'(r) + 2u(r) = 0$; tale equazione equivale a $u'(r) = (-2/r) u(r)$, di integrazione immediata:

$$u(r) = K e^{-2 \log r} = K e^{\log(1/r^2)} = \frac{K}{r^2} \quad (K \text{ costante}).$$

Il campo

$$\vec{G}(x, y, z) = K \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

è quindi irrotazionale; è un campo ben conosciuto, quello dell'induzione magnetica del filo rettilineo. Visto che la circuitazione su γ è $2\pi R^2 u(R)$, essa invece è nulla se e solo se $u(R) = 0$, e quindi se il campo $\vec{G}$ è conservativo si deve avere $u(R) = 0$ per ogni $R > 0$, e cioè $u = 0$, identicamente. □

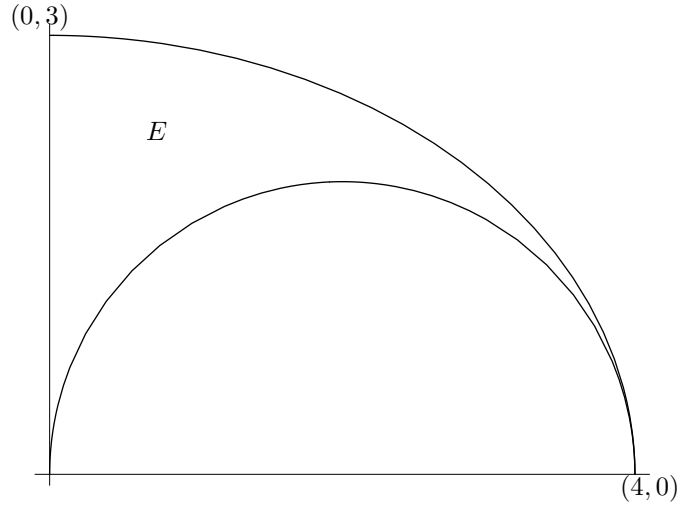
ESERCIZIO 8. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4x, x^2/16 + y^2/9 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

- (i) Disegnare E e trovarne l'area.
- (ii) Trovare le coordinate del baricentro geometrico di E .
- (iii) Trovare il volume dei solidi S e T ottenuti facendo ruotare E attorno all'asse y ed attorno alla retta di equazione $y = x - 4$, rispettivamente.
- (iv) Trovare l'area della frontiera del solido S .

Risoluzione. (i) Si tratta dei punti del primo quadrante entro l'ellisse di centro l'origine e semiassi 4, 3, con semiasse maggiore sull'asse delle ascisse, e non interni al disco di centro $(2, 0)$ e raggio 2.

L'area è quindi immediata ed è

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{4} \text{Area ellisse} - \frac{1}{2} \text{Area disco} = \frac{1}{4} \pi (4 \cdot 3) - \frac{1}{2} \pi 2^2 = 3\pi - 2\pi = \pi.$$

FIGURA 2. L'insieme E .

(ii) Calcoliamo

$$\int_E x \, dx \, dy = \int_A x \, dx \, dy - \int_B x \, dx \, dy,$$

dove A è il quarto di ellisse e B è il mezzo disco. Per il quarto di ellisse:

$$\begin{aligned} \int_A x \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=4} x \left(\int_{y=0}^{y=3\sqrt{1-x^2/16}} dy \right) dx = 3 \int_0^4 x \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx = \\ &= -24 \int_0^4 \frac{-2x}{16} \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx = -16 \left[(1 - x^2/16)^{3/2} \right]_0^4 = 16. \end{aligned}$$

Invece l'integrale su B è:

$$\int_B x \, dx \, dy = \text{ascissa baricentro semidisco} \cdot \text{Area semidisco} = 2\pi \cdot 2^2 / 2 = 4\pi.$$

In definitiva:

$$\int_E x \, dx \, dy = 16 - 4\pi; \quad \text{quindi} \quad \xi = \frac{16 - 4\pi}{\pi},$$

avendo indicato con ξ l'ascissa del baricentro di E . Per l'ordinata si calcola poi:

$$\begin{aligned} \int_E y \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=4} \left(\int_{y=\sqrt{4x-x^2}}^{y=3\sqrt{1-x^2/16}} y \, dy \right) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} [y^2]_{y=\sqrt{4x-x^2}}^{y=3\sqrt{1-x^2/16}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(9 \left(1 - \frac{x^2}{16} \right) - (4x - x^2) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(9 - 4x + \frac{7}{16}x^2 \right) dx = \\ &= 18 - 16 + \frac{7 \cdot 2}{3} = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

L'ordinata η del baricentro di E è quindi

$$\eta = \frac{20}{3\pi}.$$

(iii) Si ha per il teorema di Guldino:

$$\text{Volume}(S) = 2\pi\xi \text{Area}(E) = 2\pi \int_E x \, dx \, dy = 2\pi(16 - 4\pi) = 8\pi(4 - \pi).$$

Si osservi che E è tutto nel semipiano $y \geq x - 4$. La distanza dalla retta di equazione $x - y - 4 = 0$ si calcola con la formula $|x - y - 4|/\sqrt{2}$; la distanza del baricentro (ξ, η) da tale retta è quindi

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{16 - 4\pi}{\pi} - \frac{20}{3\pi} - 4 \right| = \frac{|48 - 12\pi - 20 - 12\pi|}{3\sqrt{2}\pi} = \frac{|28 - 24\pi|}{3\sqrt{2}\pi} = \frac{24\pi - 28}{3\sqrt{2}\pi}.$$

Sempre per il teorema di Guldino il volume di T è allora

$$\text{Volume}(T) = 2\pi d \text{Area}(E) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}(24\pi - 28).$$

OSSERVAZIONE. Le figure piane che si fanno ruotare sono ben conosciute, e danno luogo a solidi ben conosciuti. Possiamo quindi usare il teorema di Guldino a rovescio per trovare il baricentro di E senza calcolare integrali. Il volume di un ellissoide è, come ben noto $(4/3)\pi \times$ (prodotto dei tre semiassi). Facendo ruotare E attorno all'asse y si ha mezzo ellissoide privato di mezzo toro; il volume è quindi

$$\text{Volume}(S) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi(3 \cdot 4^2) - (2\pi \cdot 2)\pi(2^2) \right) = 8\pi(4 - \pi) \quad \text{da cui} \quad \xi = \frac{\text{Volume}(S)}{2\pi \text{Area}(E)} = \frac{4(4 - \pi)}{\pi}.$$

Il solido R ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse x è invece un mezzo ellissoide meno una palla e quindi:

$$\text{Volume}(R) = \frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi(4 \cdot 3^2) - \frac{4}{3}\pi 2^3 = 24\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{40}{3}\pi,$$

da cui

$$\eta = \frac{\text{Volume}(R)}{2\pi \text{Area}(E)} = \frac{20}{3\pi}.$$

Si ottengono in tal modo le coordinate del baricentro, senza aver calcolato nessun integrale.

(iv) La frontiera del solido S consta di un mezzo toro degenerare di raggio meridiano 2, pari alla distanza del centro dall'asse di rotazione, ottenuto facendo ruotare la semicirconferenza di centro $(2, 0)$ e raggio 2 attorno alla sua tangente in $(0, 0)$; l'area è quindi $(2\pi \cdot 2) \cdot (\pi \cdot 4/2) = 8\pi^2$, e del mezzo ellissoide rotondo (schiacciato) la cui area è data da

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\alpha} x |d\alpha|,$$

dove α è il quarto di ellisse che possiamo ad esempio parametrizzare con $\alpha(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$. L'elemento di lunghezza è allora

$$\sqrt{(-4 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt = \sqrt{16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = \sqrt{7 \sin^2 t + 9} dt = 3\sqrt{1 + (\sqrt{7}/3 \sin t)^2} dt;$$

per cui si ha

$$\text{Area} = 2\pi \int_0^{\pi/2} 12 \cos t \sqrt{1 + (\sqrt{7}/3 \sin t)^2} dt = \frac{72\pi}{\sqrt{7}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{7}}{3} \cos t \sqrt{1 + (\sqrt{7}/3 \sin t)^2} dt =$$

(si pone $(\sqrt{7}/3) \sin t = u$; si trova $(\sqrt{7}/3) \cos t dt = du$ e quindi)

$$\begin{aligned} \frac{72\pi}{\sqrt{7}} \int_0^{\sqrt{7}/3} \sqrt{1 + u^2} du &= \frac{36\pi}{\sqrt{7}} \left[u \sqrt{1 + u^2} + \text{settsinh } u \right]_0^{\sqrt{7}/3} = \\ \frac{36\pi}{\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \sqrt{1 + 7/9} + \text{settsinh}(\sqrt{7}/3) \right) &= \frac{36\pi}{\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \frac{4}{3} + \log(\sqrt{7}/3 + 4/3) \right) = \\ 16\pi + \frac{36\pi}{\sqrt{7}} \log(\sqrt{7}/3 + 4/3). \end{aligned}$$

L'area complessiva della frontiera di S è quindi

$$\text{Area} \partial S = 8\pi^2 + 16\pi + \frac{36\pi}{\sqrt{7}} \log(\sqrt{7}/3 + 4/3).$$

□

ESERCIZIO 9. (i) Dire per quali reali α esiste finito:

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{x^2 y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz$$

e calcolarlo per $\alpha = 12$.

(ii) Dire per quali reali α la funzione $f_{\alpha}(x, y, z) = \frac{x^2 y}{1 + (2x^2 + 4y^2 + 3z^2)^{\alpha/2}}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^3)$, e per tali valori trovarne l'integrale esteso ad $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. (i) Conviene anzitutto osservare che l'integrando non muta se si cambia x in $-x$ o z in $-z$, mentre cambia segno se si muta y in $-y$. Nel dominio assegnato esso è positivo ed esiste finito se e solo se esiste finito l'integrale della stessa funzione sul primo ottante, essendo

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{x^2 y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz = 2 \int_{[0, +\infty[\times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{x^2 y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz = 4 \int_{[0, +\infty[^3} \frac{x^2 y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz;$$

Usiamo naturalmente coordinate sferiche. L'integrale esiste se e solo se esiste l'integrale:

$$\int_{[0, +\infty[\times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]} \frac{r^3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta \sin \varphi}{1 + r^\alpha} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

(possiamo usare il teorema di Tonelli per dire che l'integrale esiste se e solo se gli integrali iterati esistono, essendo l'integrando positivo; le variabili sono inoltre separate, quindi si ha un prodotto di tre integrali, che devono tutti essere finiti)

$$\int_0^\infty \frac{r^5}{1 + r^\alpha} dr \int_0^{\pi/2} \sin^4 \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$$

Gli ultimi due integrali sono di funzioni continue su intervalli compatti e non creano problemi. Il primo è di una funzione continua (o prolungabile per continuità in 0 se $\alpha < 0$) su $[0, +\infty[$, e quindi si deve discutere solo la sommabilità attorno a ∞ ; per $r \rightarrow +\infty$ l'integrando è asintotico a $r^5/r^\alpha = 1/r^{\alpha-5}$ e quindi esiste finito se e solo se $\alpha - 5 > 1 \iff \alpha > 6$. Per $\alpha = 12$ si ha l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{r^5}{1 + r^{12}} dr = \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{6r^5}{1 + (r^6)^2} = \frac{1}{6} [\arctan r^6]_0^\infty = \frac{\pi}{12}.$$

Gli integrali in $d\vartheta$ e $d\varphi$ sono:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos(2\vartheta)}{2} \right)^2 d\vartheta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos(2\vartheta) + \cos^2(2\vartheta)) d\vartheta = \\ &= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(4\vartheta)}{2} d\vartheta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3}{16} \pi; \end{aligned}$$

mentre

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \left[\frac{-(\cos \varphi)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Per $\alpha = 12$ l'integrale è quindi

$$4 \frac{\pi}{12} \frac{3\pi}{16} \frac{1}{3} = \frac{\pi^2}{48}.$$

OSSERVAZIONE. Naturalmente non era affatto necessario ricondursi al primo ottante, Si poteva direttamente osservare che il semispazio $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} = \{y \geq 0\}$ proviene, nelle coordinate sferiche, da $[0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, \pi]$, cioè deve essere $\varphi \in [0, \pi]$ per la longitudine; si ha insomma:

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{x^2 y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz = \int_{[0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, \pi]} \frac{r^3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta \sin \varphi}{1 + r^\alpha} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi,$$

e si poteva poi procedere come sopra.

(ii) Facciamo anzitutto il cambiamento di variabili $\sqrt{2}x = u$, $2y = v$, $\sqrt{2}z = w$, per cui l'integrale su $\mathbb{R}^3$ diventa:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2 v}{1 + (u^2 + v^2 + w^2)^{\alpha/2}} \frac{du dv dw}{16} = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^3} g_\alpha(u, v, w) du dv dw$$

(identico al precedente salvo il fattore $1/16$, ma esteso ad $\mathbb{R}^3$); quindi $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^3)$ se e solo se $g_\alpha(u, v, w) \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Si nota che $g_\alpha(u, -v, w) = -g_\alpha(u, v, w)$, e quindi $|g_\alpha(u, -v, w)| = |g_\alpha(u, v, w)|$; ne segue che $g_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^3)$ se e solo se $g_\alpha \in L^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R})$; questo è stato visto prima nella domanda (i), e si verifica se e solo se $\alpha > 6$. Per $\alpha > 6$ l'integrale di g_α su $\mathbb{R}^3$ è ovviamente nullo, per la antisimmetria osservata rispetto alla seconda variabile. Quindi: $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^3)$ se e solo se $\alpha > 6$, e per tali α l'integrale di f_α su $\mathbb{R}^3$ è nullo. $\square$

A puro titolo di curiosità diamo l'aspetto della curva γ dell'esercizio 2), con $R = 3$; γ sta tutta sul cilindro di asse l'asse z e raggio 3.

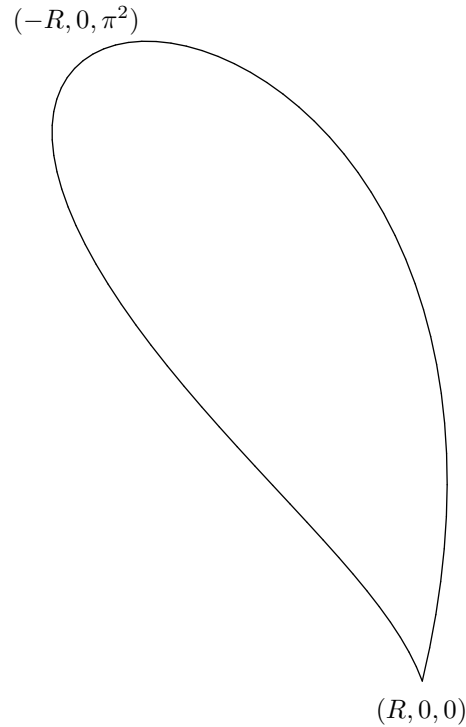


FIGURA 3. La curva γ ; $(-R, 0, \pi^2)$ è il punto di quota massima.

1. MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA—SECONDO PRECOMPITINO, DICEMBRE 2007

ESERCIZIO 10. Il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2; x^2 + y^2 \geq a^2\}$, dove $a > 0$ è una costante, ha una frontiera che consta di una parte cilindrica A e di una parte sferica B . Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x - yz, y + xz, z - e^x \sin y)$.

- (i) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da S , servendosi del teorema della divergenza.
- (ii) Trovare il flusso di $\vec{F}$ che esce attraverso A (con un po' di astuzia, il calcolo è semplicissimo ...).
- (iii) Trovare il flusso di $\vec{F}$ che esce attraverso B .
- (iv) La superficie A è orientata con la normale esterna ad S . Descriverne il bordo.

Risoluzione. (i) Si ha $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 3$, per cui il flusso uscente da S è pari al triplo del volume di S . Per trovare questo volume conviene integrare per fette, cioè prendere le z -sezioni di S , che sono corone circolari di raggio esterno $\sqrt{(2a)^2 - z^2}$ e raggio interno a , almeno finché $a \leq \sqrt{(2a)^2 - z^2}$ e cioè per $z^2 \leq 3a^2 \iff |z| \leq \sqrt{3}a$; per $|z| > \sqrt{3}a$ le z -sezioni sono vuote. Si ha pertanto

$$\text{Volume}(S) = \int_{z=-\sqrt{3}a}^{z=\sqrt{3}a} \pi((2a)^2 - z^2 - a^2) dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}a} (3a^2 - z^2) dz = 6\sqrt{3}\pi a^3 - \frac{2}{3}\pi 3\sqrt{3}a^3 = 4\sqrt{3}\pi a^3.$$

Quindi:

$$\text{Flusso uscente da } S = 12\sqrt{3}\pi a^3.$$

(ii) Anzitutto si vede che $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, -\sqrt{3}a \leq z \leq \sqrt{3}a\}$ (come insieme, non ancora parametrizzato).

Si può scomporre il campo in somma di pezzi, alcuni dei quali hanno palesemente flusso nullo attraverso la parte cilindrica di ∂S . Per cominciare:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - xz, y + xz, 0) + (0, 0, z - e^x \sin y);$$

il secondo campo ha flusso nullo attraverso A , essendo parallelo ad $\vec{e}_3$ e quindi parallelo alle direttrici del cilindro. Si osserva ora che il campo rimasto è parallelo al piano xy ; se si considera il cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, -\sqrt{3}a \leq z \leq \sqrt{3}a\}$ il flusso che esce dalla superficie laterale A è tutto il flusso che esce dal cilindro, dato che il flusso che esce dalle basi è nullo. E il flusso che esce da C si trova subito con il teorema della divergenza: si ha $\text{div}(x - xz, y + xz, 0) = 2$; il flusso uscente è allora il doppio del volume di C , e cioè $2\pi a^2(2\sqrt{3}a) = 4\sqrt{3}\pi a^3$. Questo è flusso uscente dal cilindro C , ma entrante in S ; quindi

$$\text{Flusso uscente da } S \text{ attraverso } A = -4\sqrt{3}\pi a^3.$$

(iii) Per differenza:

$$\text{Flusso uscente da } S \text{ attraverso } B = \text{Flusso uscente da } S - \text{Flusso uscente da } S \text{ attraverso } A =$$

$$12\sqrt{3}\pi a^3 - (-4\sqrt{3}\pi a^3) = 16\sqrt{3}\pi a^3.$$

(iv) Siamo in (iii) riusciti a calcolare il flusso uscente da A senza nemmeno parametrizzare A . La parametrizzazione di A comunque non presenta alcuna difficoltà:

$$x = a \cos \vartheta, y = a \sin \vartheta, z = z \quad \text{cioè} \quad p(\vartheta, z) = (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta, z) \quad \vartheta \in [0, 2\pi], z \in [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]$$

Vediamo la normale come viene:

$$\partial_{\vartheta} p(\vartheta, z) \times \partial_z p(\vartheta, z) = a(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) \times (0, 0, 1) = a(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0);$$

punta quindi all'esterno del cilindro, e quindi all'interno della palla. Si deve prendere l'altra orientazione, basta scambiare le coordinate e considerare come parametrizzazione di A :

$$q(z, \vartheta) = (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta, z) \quad (z, \vartheta) \in [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a] \times [0, 2\pi].$$

Basta ora seguire il bordo del rettangolo della parametrizzazione per avere il bordo di A , orientato coerentemente con la normale esterna:

- Lato in basso: si trova il segmento di estremi $(a, 0, -\sqrt{3}a)$ e $(a, 0, \sqrt{3}a)$, in quest'ordine
- Lato destro: cammino $q(\sqrt{3}a, \vartheta) = (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta, \sqrt{3}a)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$: è il cerchio di raggio a alla quota $\sqrt{3}a$, percorso in verso antiorario (visto dall'alto dell'asse z).
- Lato superiore: cammino $q(z, 2\pi) = (a, 0, z)$, $z \in [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]$, in cui va rovesciato l'ordine naturale; è quindi il segmento che congiunge i punti $(a, 0, \sqrt{3}a)$ e $(a, 0, -\sqrt{3}a)$, in questo ordine.
- Lato sinistro: ricordiamo che qui l'orientazione naturale delle coordinate (z, ϑ) andrà poi rovesciata; si ha $q(-\sqrt{3}a, \vartheta) = (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta, -\sqrt{3}a)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, quindi cerchio di raggio a alla quota $-\sqrt{3}a$, da percorrere in verso orario (visto dall'alto dell'asse z).

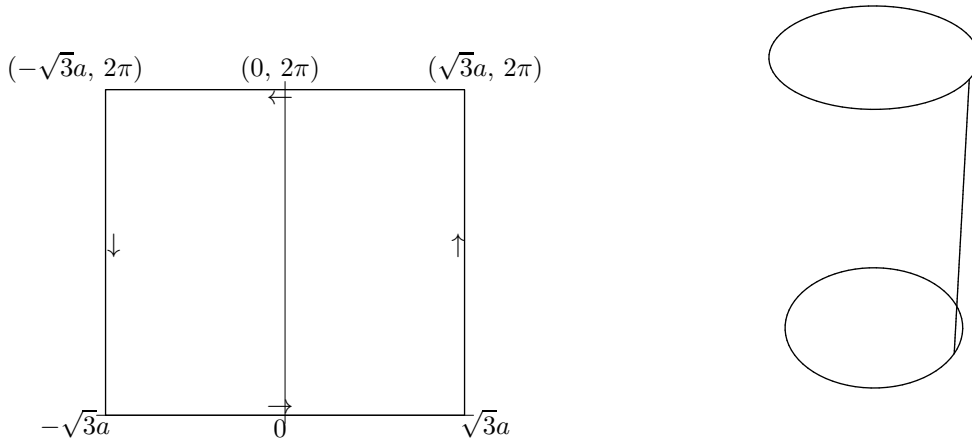


FIGURA 4. Rettangolo base e bordo.

Il bordo di A è quindi formato dai due cerchi centrati sull'asse z e di raggio a , alle quote $z = -\sqrt{3}a$ e $z = \sqrt{3}a$, percorsi il primo in verso orario ed il secondo in verso antiorario (se visti dall'alto dell'asse z), con un ciclo invisibile formato dal segmento di estremi $(a, 0, -\sqrt{3}a)$ e $(a, 0, \sqrt{3}a)$, percorso nei due versi.

OSSERVAZIONE. Ci sono naturalmente molti modi per calcolare il flusso uscente da A , e la scomposizione da noi fatta non è poi essenziale, semplifica solo le scritture. Volendo, si può fare un'ulteriore scomposizione

$$(x - yz, y + xz, 0) = (x, y, 0) + z(-y, x, 0),$$

ed osservare che in ogni punto il secondo campo è tangente ai cerchi centrati sull'asse z , in piani paralleli al piano xy , di raggio $\sqrt{x^2 + y^2}$, e quindi ha a sua volta flusso nullo attraverso A . Il campo rimasto $(x, y, 0)$ ha poi un flusso che è immediato calcolare direttamente, con la parametrizzazione trovata sopra:

$$\int_{[-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a] \times [0, 2\pi]} \det \begin{bmatrix} a \cos \vartheta & 0 & -a \sin \vartheta \\ a \sin \vartheta & 0 & a \cos \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} dz d\vartheta = \int_{[-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a] \times [0, 2\pi]} -a^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) dz d\vartheta = -4\sqrt{3}\pi a^3.$$

□

ESERCIZIO 11. Si consideri il sistema differenziale

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

- (i) Trovare le soluzioni costanti.
- (ii) Trovare un integrale primo non banale per il sistema.
- (iii) Disegnare le traiettorie delle soluzioni, con il loro verso di percorrenza.
- (iv) Dimostrare che se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ è soluzione massimale del sistema (S), allora per ogni $a \neq 0$ la funzione $\varphi_a : I/a \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\varphi_a(t) = a\varphi(at)$ è soluzione del sistema (S); naturalmente $I/a = \{t = s/a : s \in I\}$. È anche soluzione massimale?
- (v) Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da (S) con le condizioni iniziali $x(0) = 0, y(0) = 1$.
- (vi) Da (v), trovare la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = 0, y(0) = -5$

Risoluzione. (i) Il sistema $y^2 = 0, xy = 0$ ha come soluzioni $(x, 0)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$, cioè tutti i punti dell'asse x sono equilibri.

(ii) La forma associata è $-xy dx + y^2 dy = y(-x dx + y dy)$; la forma $-x dx + y dy$, a variabili separate, è esatta ed ha (a meno di costanti additive e moltiplicative) $x^2 - y^2$ come primitiva. Quindi $V(x, y) = x^2 - y^2$ è un integrale primo.

(iii) Si noti che $\dot{x} > 0$ sempre (tranne che sull'asse x , luogo di equilibri), mentre $\dot{y} > 0$ nel primo e terzo quadrante (aperto), negli altri due invece $\dot{y} < 0$. Le traiettorie sono porzioni di rami di iperboli equilateri, tutte con asintoti $y = \pm x$; le quattro semirette in cui questi asintoti sono divisi da $(0, 0)$ sono anche traiettorie. Più precisamente:

- Iperboli $x^2 - y^2 = k^2$, con asse focale l'asse x : su ciascuno dei due rami ci sono 2 traiettorie, divise dal punto di incontro con l'asse x , che è un equilibrio.
- Iperboli $x^2 - y^2 = -k^2 \iff y^2 = x^2 + k^2$, con asse focale l'asse y ; i due rami sono traiettorie.

Il caso $k = 0$ degli asintoti è stato visto sopra. I versi di percorrenza sono facili, dai segni di $\dot{x}, \dot{y}$ prima discussi.

(iv) Se φ ha componenti $u(t)$ e $v(t)$ allora le componenti di φ_a sono $au(at)$ e $av(at)$; introducendole in (S) si ha

$$\begin{cases} a^2 u'(at) & \stackrel{?}{=} a^2 v^2(at) \\ a^2 v'(at) & \stackrel{?}{=} a u(at) a v(at) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} u'(at) & \stackrel{?}{=} v^2(at) \\ v'(at) & \stackrel{?}{=} u(at) v(at) \end{cases},$$

certamente vere per ogni $t = s/a \in I/a$. Se la soluzione da cui siamo partiti era massimale, anche φ_a è massimale: se infatti essa fosse estendibile ad una soluzione ψ su un intervallo $J \supsetneq I/a$, la formula $\omega(t) = a^{-1}\psi(a^{-1}t)$ estenderebbe φ ad un intervallo $aJ \supsetneq I$, contraddicendo la massimalità di φ .

(v) Si ha sulla traiettoria $x^2 - y^2 = (x(0))^2 - (y(0))^2 = -1$ ed il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

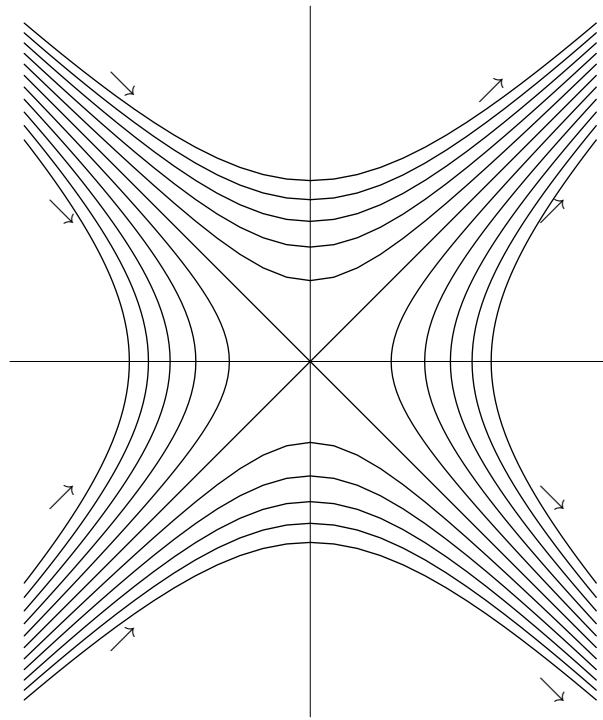


FIGURA 5. Traiettorie.

Risolviamo la prima separando le variabili:

$$\frac{\dot{x}}{1+x^2} = 1 \iff \arctan(x(t)) = t \iff x(t) = \tan t \quad t \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Essendo sulla traiettoria $(y(t))^2 = 1 + (x(t))^2$ e quindi $y(t) = \pm \sqrt{1 + (x(t))^2}$; ricordando $y(0) = 1$, che implica $y(t) > 0$, si sceglie il segno +; si ha quindi

$$y(t) = \sqrt{1 + (x(t))^2} = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{\cos t} \quad t \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

(vi) Per quanto visto in (iv) la funzione $\varphi_{-5}(t) = -5(\tan(-5t), 1/\cos(-5t)) = 5(\tan(5t), -1/\cos(5t))$, con $t \in]-\pi/10, \pi/10[$ è ancora soluzione (massimale) dell'equazione; chiaramente essa verifica $x(0) = 0$, $y(0) = -5$, ed è quindi quella richiesta. $\square$

ESERCIZIO 12. Data l'equazione differenziale:

$$(Eq) \quad y''' + y'' - y' - y = 0$$

- (i) Scrivere l'integrale generale.
- (ii) Scrivere il sistema equivalente $\dot{z} = Az$, e scrivere l'integrale generale.
- (iii) Trovare la soluzione φ del sistema che verifica la condizione $\varphi(0) = \vec{e}_3$.
- (iv) Scrivere la soluzione di

$$y''' + y'' - y' - y = e^{-t} \quad y(0) = 0,$$

nulla per $t = 0$ con le sue derivate prima e seconda, e dedurre l'integrale generale di questa equazione non omogenea. Quali sono (se ne esistono) le soluzioni di tale equazione che hanno limite nullo per $t \rightarrow +\infty$?

- (v) Trovare e^{tA} (di cui conosciamo già una colonna ...).

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è

$$\zeta^3 + \zeta^2 - \zeta - 1 = 0 \quad \text{fattorizzando} \quad \zeta^2(\zeta + 1) - (\zeta + 1) = (\zeta + 1)(\zeta^2 - 1) = (\zeta + 1)^2(\zeta - 1) = 0.$$

Le radici sono quindi $\zeta = 1$ (semplice) e $\zeta = -1$ (doppia). L'integrale generale è quindi

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Per il sistema equivalente al solito si pone $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$ e si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \text{cioè} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Basta derivare due volte l'integrale generale dell'equazione scalare prima trovato:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \\ z_2 &= c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}(1-t) \\ z_3 &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}(t-2); \end{aligned} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(una matrice risolvete è la wronskiana del sistema fondamentale di soluzioni e^t , e^{-t} , te^{-t} prima trovato).

(iii) Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 1 \end{cases}$$

L'ultima diventa $-2c_3 = 1 \iff c_3 = -1/2$; la seconda diventa $2c_1 = -c_3 = 1/2$, e quindi $c_1 = 1/4$, $c_2 = -1/4$, $c_3 = -1/2$. Corrispondentemente si ha

$$\varphi(t) = \left(\frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{t}{2} e^{-t}, \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{1}{2} e^{-t}(1-t), \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{1}{2} e^{-t}(t-2) \right);$$

(iv) Per la formula (171) del formulario la soluzione richiesta è data da

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{e^{t-s} - e^{-(t-s)}}{4} - \frac{t-s}{2} e^{-(t-s)} \right) e^{-s} ds &= \frac{1}{4} \int_0^t (e^t e^{-2s} - e^{-t}) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (t-s) e^{-t} dt = \\ \frac{e^t}{4} \left[\frac{e^{-2s}}{-2} \right]_0^t - \frac{t}{4} e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \left[-\frac{(t-s)^2}{2} \right]_{s=0}^{s=t} &= \\ \frac{e^t}{8} (1 - e^{-2t}) - \frac{t}{4} e^{-t} - \frac{t^2}{4} e^{-t} &= \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{t(1+t)}{4} e^{-t}. \end{aligned}$$

Ricordando che l'integrale generale della non omogenea si ottiene aggiungendo al precedente integrale particolare l'integrale generale dell'omogenea associata si ha che

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{t(1+t)}{4} e^{-t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

è l'integrale generale della non omogenea. Tutte le funzioni sono infinitesime per $t \rightarrow +\infty$, tranne e^t , che scompare per $c_1 = -1/8$. Quindi: le soluzioni della non omogenea infinitesime a $+\infty$ sono:

$$c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} - \frac{e^{-t}}{8} - \frac{t(1+t)}{4} e^{-t} \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

(v) La soluzione φ già trovata è la terza colonna di e^{tA} . La prima è la soluzione che vale $\vec{e}_1$ per $t = 0$ e si trova risolvendo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

La terza diventa $1 - 2c_3 = 0$ da cui $c_3 = 1/2$; e da $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 - c_2 = -1/2$ si trova $c_1 = 1/4$ e $c_2 = 3/4$. La seconda colonna si trova risolvendo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

La terza diventa $-2c_3 = 0$ e quindi $c_3 = 0$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$. In definitiva si ha

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t/4 + 3e^{-t}/4 + t e^{-t}/2 & e^t/2 - e^{-t}/2 & e^t/4 - e^{-t}/4 - t e^{-t}/2 \\ e^t/4 - 3e^{-t}/4 + (1-t) e^{-t}/2 & e^t/2 + e^{-t}/2 & e^t/4 + e^{-t}/4 - 1/2 e^{-t}(1-t) \\ e^t/4 + 3e^{-t}/4 + (t-2) e^{-t}/2 & e^t/2 - e^{-t}/2 & e^t/4 - e^{-t}/4 - 1/2 e^{-t}(t-2) \end{bmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 13. (i) Trovare una matrice risolvente per il sistema

$$(omog) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = -x + y \end{cases}.$$

(ii) Detta A la matrice del precedente sistema, mostrare che il sistema

$$(nonomog) \quad (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(x, y, z) + (0, 0, 1)$$

ha un'unica soluzione costante, e trovarla.

(iii) Trovare tutte le soluzioni del sistema (nonomog) che hanno limite finito per $t \rightarrow +\infty$.

Risoluzione. (i) La matrice del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(Si può osservare che A è matrice simmetrica reale, e che quindi avrà tutti i suoi autovalori reali, e sarà certamente diagonalizzabile (a norma del teorema spettrale esiste anche una base ortonormale formata da autovettori di A). Tale osservazione è utile per evitare errori).

Scriviamo il polinomio caratteristico:

$$\chi_A(\zeta) = \det(\zeta I_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta & -1 & 1 \\ -1 & \zeta & -1 \\ 1 & -1 & \zeta \end{bmatrix} = \zeta(\zeta^2 - 1) + (-\zeta + 1) + (1 - \zeta) = \zeta^3 - 3\zeta + 2$$

Si ha poi $\chi_A(1) = 1 - 3 + 2 = 0$; dividendo per $\zeta - 1$ si ottiene

$$\chi_A(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta^2 + \zeta - 2) = (\zeta - 1)(\zeta - 1)(\zeta + 2) = (\zeta - 1)^2(\zeta + 2).$$

Quindi ci sono gli autovalori 1, doppio, e -2, semplice. Cerchiamo un autovettore associato a 1:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{sistema equivalente alla sola equazione} \quad x - y + z = 0.$$

Quindi due autovettori indipendenti associati all'autovalore 1 sono $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Cerchiamo un autovettore associato all'autovalore -2:

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad 2x + y = -x - 2y \iff 3x = -3y \iff x = -y,$$

e dalla terza equazione si ha allora $2x - 2z = 0 \iff x = z$; un autovettore è $(1, -1, 1)$. La risolvente così ottenuta è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & e^{-2t} \\ e^t & e^t & -e^{-2t} \\ 0 & e^t & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(ii) Una costante (a, b, c) è soluzione di (nonomog) se e solo se verifica $A(a, b, c) + (0, 0, 1) = 0 \iff A(a, b, c) = (0, 0, -1)$, e cioè il sistema

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a + c = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad b = c, \quad a = -c, \quad \text{quindi} \quad a = -b,$$

e sostituendo nella terza equazione si ha $-2a = 1$, ovvero $a = -1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$, unica soluzione costante.

(iii) Tutte le soluzioni di (nonomog) si ottengono aggiungendo alla soluzione costante trovata le soluzioni dell'equazione omogenea associata, e quindi sono

$$\Phi(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + (-1/2, 1/2, 1/2) = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_3 e^{-2t} - 1/2 \\ c_1 e^t + c_2 e^t - c_3 e^{-2t} + 1/2 \\ c_2 e^t + c_3 e^{-2t} + 1/2 \end{bmatrix},$$

ed è immediato vedere che una tale soluzione ha limite finito a $+\infty$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$. Le soluzioni con limite finito a $+\infty$ sono quindi

$$(c_3 e^{-2t} - 1/2, -c_3 e^{-2t} + 1/2, c_3 e^{-2t} + 1/2) \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

□

ESERCIZIO 14. Si considera il sistema differenziale

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} = -yx \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}.$$

- (i) Trovarne le soluzioni costanti.
- (ii) Trovare un integrale primo non banale per il sistema; dimostrare che le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
- (iii) Disegnare le traiettorie delle soluzioni con i loro versi di percorrenza.
- (iv) Dimostrare che se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ è soluzione allora anche $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi_a(t) = a\varphi(at)$ è soluzione del sistema.
- (v) Trovare la soluzione massimale del sistema con le condizioni iniziali $x(0) = 1, y(0) = 0$.
- (vi) Trovare il flusso associato al sistema: in altre parole, scrivere la soluzione massimale del sistema con le generiche condizioni iniziali $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ (domanda lievemente meno standard del resto).

Risoluzione. (i) Se $x = 0$ entrambi i membri sono nulli: tutti i punti $(0, y)$ dell'asse y sono equilibri.

(ii) La forma associata al campo ortogonale è $-x^2 dx - yx dy = -x(x dx + y dy)$; la forma $x dx + y dy$ è esatta con $(x^2 + y^2)/2$ come primitiva. Quindi $V(x, y) = x^2 + y^2$ è un integrale primo. Le curve di livello di V sono cerchi centrati nell'origine; sono quindi compatte. Per il teorema di intrappolamento nei compatti le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(iii) Le traiettorie sono, oltre agli equilibri, i due mezzi cerchi in cui i cerchi centrati nell'origine sono divisi dalla loro intersezione con l'asse x . Sono percorsi nel verso in cui cresce y , dato che fuori dagli equilibri $\dot{y} = y^2 > 0$, e quindi in verso antiorario per $x > 0$, in verso orario per $x < 0$.

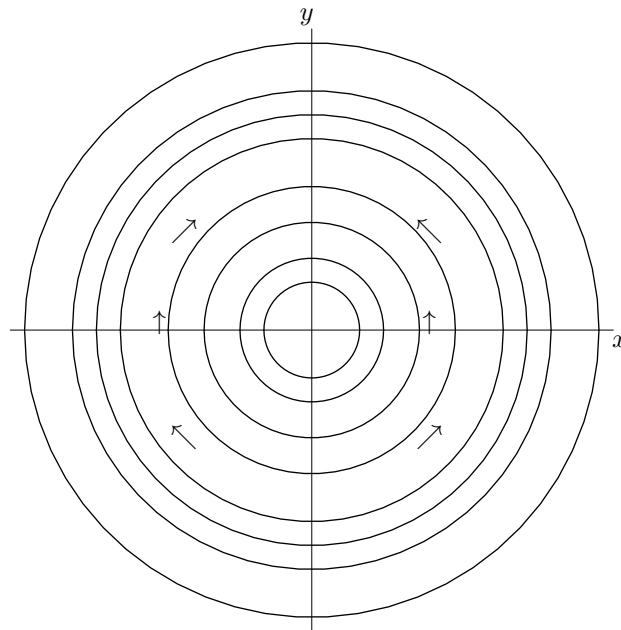


FIGURA 6. Traiettorie; l'asse y è luogo di equilibri.

(iv) Se $a = 0$ $\varphi_a = (0, 0)$ è soluzione. Sia quindi $a \neq 0$. Se φ ha componenti $u(t)$ e $v(t)$ allora le componenti di φ_a sono $a u(at)$ e $a v(at)$; introducendole in (S) si ha

$$\begin{cases} a^2 u'(at) & \stackrel{?}{=} a^2 v^2(at) \\ a^2 v'(at) & \stackrel{?}{=} a u(at) a v(at) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} u'(at) & \stackrel{?}{=} v^2(at) \\ v'(at) & \stackrel{?}{=} u(at) v(at) \end{cases},$$

certamente vere per ogni $s = at \in \mathbb{R}$.

(v) La traiettoria si trova sul cerchio di centro l'origine e raggio 1, per cui si ha $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La seconda equazione diventa allora

$$\dot{y} = 1 - y^2 \iff \frac{\dot{y}}{1 - y^2} = 1 \iff \text{setttanh } y(t) = t \iff y(t) = \tanh t \quad t \in \mathbb{R};$$

si ha poi $x(t) = \pm \sqrt{1 - \tanh^2 t} = \pm \sqrt{(\cosh^2 t - \sinh^2 t) / \cosh^2 t} = \pm 1 / \cosh t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$; si sceglie il segno + perchè $x(0) = 1 > 0$. La soluzione φ richiesta è quindi $\varphi(t) = (1 / \cosh t, \tanh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(vi) Le traiettorie sul cerchio di centro l'origine e raggio r sono chiaramente le immagini delle due soluzioni $r\varphi(rt)$ e $-r\varphi(-rt)$, la prima nel semipiano $x > 0$, la seconda nel semipiano $x < 0$. Traslando poi nel tempo queste soluzioni, si hanno tutte le soluzioni. Quindi: fissiamo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo dapprima $x_0 > 0$; posto $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che la soluzione che all'istante $t = 0$ vale (x_0, y_0) sia

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{r}{\cosh(r(t+c))}, r \tanh(r(t+c)) \right);$$

tale c ovviamente risolve le equazioni $x_0 = r / \cosh(rc)$ nonchè $y_0 = r \tanh(rc)$. Dalla seconda si ha subito $c = \text{setttanh}(y_0/r)/r$; si ha quindi

$$\begin{aligned} \phi(t, x_0, y_0) &= \left(\frac{\text{sgn } x_0 r}{\cosh(r(t+c))}, r \tanh(r(t+c)) \right) \quad \text{dove } x_0 \neq 0, \text{ e} \\ r &= r(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}; \quad c = c(x_0, y_0) = \frac{\text{setttanh}(y_0/r)}{r}, \end{aligned}$$

mentre $\phi(t, 0, y_0) = y_0$, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$. □

ESERCIZIO 15. Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} \geq 1, x^2 + y^2 \leq (2a)^2 \right\}$$

un solido.

- (i) S è ottenuto facendo ruotare un insieme del semipiano xz , $x \geq 0$ attorno all'asse z , quale insieme?
- (ii) La frontiera di S ha una parte cilindrica B ed un'altra parte A . Parametrizzare la parte cilindrica B in modo che la normale sia quella esterna ad S .
- (iii) Dato il (ben noto!) campo

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

trovare, direttamente con la definizione, il flusso di $\vec{F}$ uscente da S attraverso B .

- (iv) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da S e quello uscente da A .
- (v) Utilizzando la formula di Stokes e poi quello che si vuole calcolare la circuitazione del campo $\vec{G}(x, y, z) = (-yz, xz, 0)$ sul bordo di B .

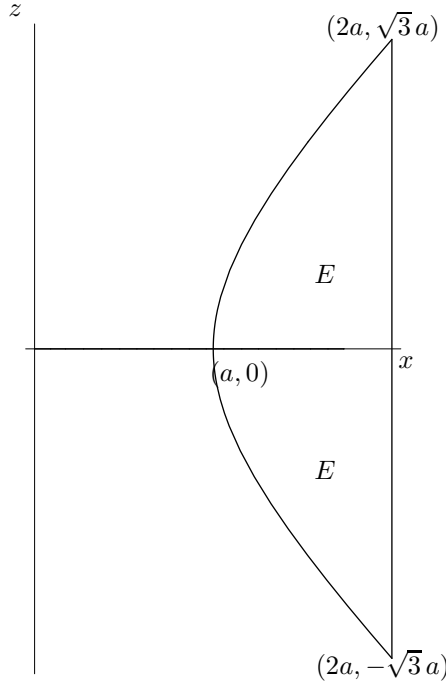
Risoluzione. (i) S consta dei punti entro il cilindro di raggio $2a$ che ha l'asse z come asse, esterni all'iperboloide ad una falda di equazione $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/a^2 = 1$; quindi S è ottenuto facendo ruotare il segmento di iperbole

$$E = \{(x, z) : x^2/a^2 - z^2/a^2 \geq 1, x \geq 2a\};$$

- (ii) La parte cilindrica B è, come insieme

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (2a)^2, (x^2 + y^2)/a^2 - z^2/a^2 \geq 1\}$; quindi $4 - (z/a)^2 \geq 1 \iff |z| \leq \sqrt{3}a$;
in definitiva:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (2a)^2, -\sqrt{3}a \leq z \leq \sqrt{3}a\}.$$

FIGURA 7. L'insieme E la cui rotazione attorno a z genera S .

La parametrizzazione standard è $p(\vartheta, z) = (2a \cos \vartheta, 2a \sin \vartheta, z)$, con $(\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]$. Con questa parametrizzazione il vettore normale viene

$$\partial_{\vartheta} p(\vartheta, z) \times \partial_z p(\vartheta, z) = 2a(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) \times (0, 0, z) = 2a z (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0),$$

che chiaramente punta verso l'esterno del cilindro, quindi verso l'esterno di S .

(iii) Sostituendo in S tale parametrizzazione si trova

$$\vec{F}(p(\vartheta, z)) = \frac{(2a \cos \vartheta, 2a \sin \vartheta, z)}{((2a)^2 + z^2)^{3/2}},$$

per cui il flusso vale

$$\begin{aligned} \text{Flusso uscente da } B &= \int_{[0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]} \det \begin{bmatrix} 2a \cos \vartheta / ((2a)^2 + z^2)^{3/2} & -2a \sin \vartheta & 0 \\ 2a \sin \vartheta / ((2a)^2 + z^2)^{3/2} & 2a \cos \vartheta & 0 \\ z / ((2a)^2 + z^2)^{3/2} & 0 & 1 \end{bmatrix} d\vartheta dz = \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]} \frac{(2a)^2}{((2a)^2 + z^2)^{3/2}} d\vartheta dz = 8\pi a^2 \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} \frac{dz / (2a)}{(2a)^2 (1 + (z/(2a))^2)^{3/2}} = \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Si ha ora

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} &= \int \frac{1 + u^2 - u^2}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} - \int u \frac{u}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} - \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} + k. \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\Phi_B = 4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \pi.$$

(iv) È ben noto che $\vec{F}$ è solenoidale nel suo dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dato che il solido S è contenuto in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, per il teorema della divergenza il flusso uscente da S è nullo. Il flusso uscente da A è quindi pari a $-\Phi_B$

(v) Calcoliamo anzitutto il rotore di $\vec{G}$:

$$\nabla \times \vec{G}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -yz \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & xz \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1(-x) + \vec{e}_2(-y) + \vec{e}_3(2z).$$

Si tratta di un campo solenoidale (certo: è un rotore!) per cui il flusso che esce dalla parete del cilindro è uguale all'opposto della somma dei flussi uscenti dalla base e dalla cima del cilindro. Su base e cima del cilindro il contributo della parte $-(x, y, 0)$ è nullo, resta quello di $(0, 0, 2z) = 2z \vec{e}_3$; su base e cima z si mantiene costante per cui il flusso si calcola subito; vale

$$\text{Flusso dalla cima} = 2a\sqrt{3} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \text{ Area cima} = 2a\sqrt{3} \pi (2a)^2 = 8\sqrt{3} \pi a^3;$$

$$\text{Flusso dalla base} = (-2a\sqrt{3} \vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_3) \text{ Area base} = 2a\sqrt{3} \pi (2a)^2 = 8\sqrt{3} \pi a^3;$$

In definitiva, il flusso che esce da cima e base è $16\sqrt{3} \pi a^3$. Quindi il flusso che esce dalla superficie laterale è $-16\sqrt{3} \pi a^3$, pari alla circuitazione richiesta.

OSSERVAZIONE. Un calcolo diretto del flusso di $\nabla \times \vec{G}$ uscente dalla superficie laterale è naturalmente tutt'altro che proibitivo:

$$\int_{[0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]} \det \begin{bmatrix} -2a \cos \vartheta & -2a \sin \vartheta & 0 \\ -2a \sin \vartheta & 2a \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\vartheta dz = \int_{[0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]} -4a^2 d\vartheta dz = -16\sqrt{3} \pi a^3.$$

OSSERVAZIONE. Esistono naturalmente vari altri metodi per calcolare

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}},$$

oltre a quello presentato prima, che è il più diretto e semplice. Si può porre $u = \sinh \xi$ ottenendo

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{(1+\sinh^2 \xi)^{3/2}} \cosh \xi d\xi = \int \frac{d\xi}{\cosh^2 \xi} = \tanh \xi + k;$$

inoltre

$$\tanh \xi = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi} = \frac{\sinh \xi}{\sqrt{1+\sinh^2 \xi}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Chi mastica male le funzioni iperboliche (e pare siano in tanti) può anche porre $u = \tan \xi$ (e supponiamo $-\pi/2 < \xi < \pi/2$); si ottiene

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{(1+\tan^2 \xi)^{3/2}} \frac{d\xi}{\cos^2 \xi} = \int \cos \xi d\xi = \sin \xi + k;$$

inoltre:

$$\sin \xi = \frac{\sin \xi}{\sqrt{\cos^2 \xi + \sin^2 \xi}} = \frac{\tan \xi}{\sqrt{1+\tan^2 \xi}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

OSSERVAZIONE. Alcuni hanno cercato di evitare il calcolo diretto del flusso, che era invece espressamente richiesto. Volendo evitare il calcolo diretto si poteva procedere in questo modo: il flusso attraverso B è la misura in steradiani dell'angolo solido sotteso da B ;

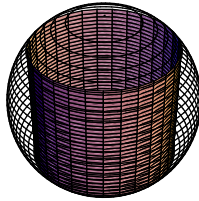


FIGURA 8. Superficie B inscritta nella sfera di raggio $\sqrt{7}a$ per il calcolo degli steradiani sottesi da B .

per calcolare tale misura si prende la sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{7}a$ (la sfera che passa per i cerchi base del cilindro), si calcola l'area del segmento di tale sfera compreso fra le quote $-\sqrt{3}a$ e $\sqrt{3}a$, e si divide per il quadrato del raggio, $7a^2$. Naturalmente non tutti ricordano l'area del segmento sferico fra due quote, peraltro facilmente calcolabile in coordinate sferiche; in 6.3.1 delle dispense tale calcolo è stato fatto, e porge $2\pi(\sqrt{7}a)(2\sqrt{3}a) = 4\pi\sqrt{21}a^2$; dividendo per $7a^2$ si ottiene $4\pi\sqrt{3/7}$.

□

ESERCIZIO 16. (i) Enunciare il lemma di Abel, e determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}.$$

(ii) Determinare la somma della serie, per $z = x \in \mathbb{R}$ (attenzione: ci sono due diverse espressioni per $x > 0$ e per $x < 0$).

Risoluzione. (i) Rimandando al testo per l'enunciato del lemma di Abel si ha con il criterio del rapporto

$$\frac{|z|^{n+1}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{|z|^n} = \frac{|z|}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty;$$

la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$, ed il raggio di convergenza è quindi $+\infty$.

(ii) Supponiamo dapprima $x \geq 0$; allora $x = (\sqrt{x})^2$ e ci possiamo ricondurre alla serie del coseno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{((\sqrt{x})^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{x});$$

se invece $x < 0$ scriviamo $x = (i\sqrt{-x})^2$ ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n} (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{-x}). \end{aligned}$$

La somma f della serie è quindi

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}) \quad \text{per } x \geq 0; \quad f(x) = \cosh(\sqrt{-x}) \quad \text{per } x \leq 0.$$

□

MATEMATICA 4F-8 GENNAIO 2008

ESERCIZIO 17. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ che relazione c'è tra insieme di convergenza C_a e raggio di convergenza R_a della serie?

Per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$, determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza. Trovare poi, limitandosi per questo ai reali, insieme di convergenza e somma della serie derivata.

Risoluzione. Il raggio di convergenza è l'estremo superiore dei moduli degli elementi di C_a . Se C_a si riduce al solo $\{0\}$ il raggio di convergenza è 0; se $C_a = \mathbb{C}$ il raggio di convergenza è $+\infty$. Altrimenti C_a sta fra un disco aperto e la sua chiusura, ed R_a è il raggio del disco stesso.

Avendosi $|z^n/n^2| = |z|^n/n^2 \leq 1/n^2$ per $|z| \leq 1$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ essendo convergente, la serie converge se $|z| \leq 1$. Se $|z| > 1$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n/n^2 = +\infty$, e la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Quindi l'insieme di convergenza è il disco unitario chiuso, ed il raggio di convergenza è allora 1. La serie derivata è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

Nell'intervallo reale $[-1, 1]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/n$ converge per $z = -1$ (serie armonica a segni alterni), non converge per $z = 1$ (serie armonica).

□

ESERCIZIO 18. Un insieme compatto E nel piano (x, z) ha per frontiera il (sostegno del) circuito γ ottenuto percorrendo di seguito i seguenti cammini:

- Il quarto di circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1, da $(0, 0)$ a $(1, 1)$;
- il quarto di circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio 1, dal punto $(1, 1)$ al punto $(0, 2)$;
- il segmento di origine $(0, 2)$ ed estremo $(0, 0)$.

(i) Disegnare E , e calcolarne l'area (senza fare integrali!).

(ii) Calcolare le circuitazioni

$$\int_{\gamma} x^2 dz \quad \int_{\gamma} z^2 dx.$$

(iii) Dedurre da (ii) gli integrali

$$\int_E x dx dz; \quad \int_E z dx dz.$$

(iv) [3] Trovare le coordinate del baricentro di E , e calcolare il volume dei solidi S e T ottenuti facendo ruotare E attorno all'asse z ed alla retta di equazione $x + z = 2$.

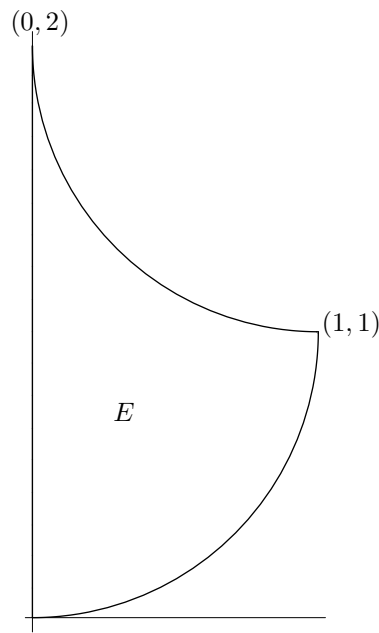


FIGURA 9. L'insieme E .

Risoluzione. (i) Chiaramente l'area è

Area quarto di cerchio unitario + (Area Quadrato unitario - Area quarto di cerchio unitario) =
Area Quadrato unitario = 1.

(ii) Il primo quarto di cerchio si parametrizza come $\alpha(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$, $t \in [-\pi/2, 0]$; il secondo come $\beta(t) = (1 + \cos t, 2 + \sin t)$, $t \in [\pi, 3\pi/2]$, percorso nel verso opposto; il segmento è poi $\sigma(t) = (0, t)$, con $t \in [0, 2]$, percorso però nel verso opposto. Si ha quindi

$$\int_{\gamma} x^2 dz = \int_{\alpha} x^2 dz - \int_{\beta} x^2 dz - \int_{\sigma} x^2 dz; \quad \int_{\gamma} z^2 dx = \int_{\alpha} z^2 dx - \int_{\beta} z^2 dx - \int_{\sigma} z^2 dx$$

Calcoliamo il primo:

$$\int_{\alpha} x^2 dz = \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 t (\cos t dt) = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = [\sin t]_0^{\pi/2} - \frac{1}{3} [\sin^3 t]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(il secondo passaggio ha usato la parità della funzione coseno)

$$\begin{aligned} \int_{\beta} x^2 dz &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 + \cos t)^2 (\cos t dt) = \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 + 2 \cos t + \cos^2 t) \cos t dt = \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (2 - \sin^2 t + 2 \cos t) \cos t dt = 2 \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos t dt - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^2 t \cos t dt + 2 \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2 t dt = \end{aligned}$$

$$-2 - \frac{1}{3} [\sin^3 t]_{\pi}^{3\pi/2} + \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{\pi}^{3\pi/2} = -2 + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} = -\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Infine l'integrale su σ è nullo, dato che $x = 0$ su tutto σ . Si ottiene quindi

$$\int_{\gamma} x^2 dz = \frac{7}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo il secondo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} z^2 dx &= \int_{-\pi/2}^0 (1 + \sin t)^2 (-\sin t dt) = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t)^2 \sin t dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t (1 - 2\sin t + \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin t (2 - \cos^2 t - 2\sin t) dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t (-\sin t dt) - 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 2 + \frac{1}{3} [\cos^3 t]_0^{\pi/2} - \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

poi

$$\begin{aligned} \int_{\beta} z^2 dx &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (2 + \sin t)^2 (-\sin t dt) = \int_{\pi}^{3\pi/2} (4 + 4\sin t + \sin^2 t) (-\sin t dt) = \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (5 - \cos^2 t + 4\sin t) (-\sin t dt) = \\ &= 5 \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\sin t dt) - \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2 t (-\sin t dt) - 4 \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 5 - \frac{1}{3} [\cos^3 t]_{\pi}^{3\pi/2} - 2 \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{\pi}^{3\pi/2} = 5 - \frac{1}{3} - \pi = \frac{14}{3} - \pi; \end{aligned}$$

l'integrale su σ è nullo perchè su σ è nullo dx . Si ottiene quindi

$$\int_{\gamma} z^2 dx = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{14}{3} + \pi = \frac{\pi}{2} - 3.$$

(iii) Si osservi che $\gamma = +\partial E$; per ogni forma differenziale $P(x, z) dx + Q(x, z) dz$ con i coefficienti di classe C^1 su un intorno di E si ha allora:

$$(\text{FORMULA DI GREEN}) \quad \int_{\gamma} (P(x, z) dx + Q(x, z) dz) = \int_E (\partial_x Q(x, z) - \partial_z P(x, z)) dx dz.$$

Applicata alla forma $x^2 dz$ essa porge

$$\int_{\gamma} x^2 dz = \int_E 2x dx dz \quad \text{da cui} \quad \int_E x dx dz = \frac{7}{6} - \frac{\pi}{4};$$

ed applicata alla forma $z^2 dx$ dà invece

$$\int_{\gamma} z^2 dx = - \int_E 2z dx dz \quad \text{da cui} \quad \int_E z dx dz = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

(iv) Dato che l'area totale di E vale 1, gli integrali precedenti sono le coordinate del baricentro di E :

$$\text{Baricentro}(E) = \left(\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4}; \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Il volume di S è

$$\text{Volume}(S) = 2\pi \int_E x dx dz = \frac{7}{3}\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

mentre il volume di T , osservato che E sta in uno dei due semipiani di origine la retta data, vale

$$\text{Volume}(T) = 2\pi \frac{|7/6 - \pi/4 + 3/2 - \pi/4 - 1|}{\sqrt{2}} \text{Area}(E) = \frac{10 - 3\pi}{3\sqrt{2}} \pi.$$

□

ESERCIZIO 19. Per ogni $a > 0$ si pone $T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$.

- (i) Disegnare T_a e l'insieme Δ_a che ad esso corrisponde nel cambiamento di variabili $x+y = u$, $y = v$.
(ii) Calcolare, servendosi di (i), e dimostrando prima che l'integrale esiste:

$$\int_{T_a} e^{-(x^2+2xy+y^2)} dx dy.$$

- (iii) Dimostrare che per ogni $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ si ha

$$\int_{T_a} f(x+y) dx dy = \int_0^a u f(u) du.$$

Sia ora $T = [0, +\infty]^2$ il primo quadrante.

- (iv) Dimostrare che se $f \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ allora si ha

$$\int_T f(x+y) dx dy = \int_0^{+\infty} u f(u) du,$$

(spiegare in quale senso vale tale uguaglianza; non sempre i due membri esistono!) e calcolare

$$\int_T e^{-(x^2+2xy+y^2)} dx dy.$$

Risoluzione. (i) Chiaramente T_a è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, a)$. E si ha $x = u - y = u - v$, per cui il cambiamento di variabili è $\phi(u, v) = (u - v, v)$ e Δ_a è dato dalle disuguaglianze $\{u - v \geq 0, v \geq 0, u \leq a\}$ e quindi è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) .

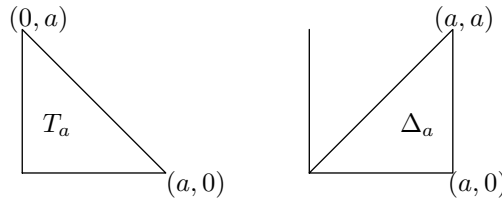


FIGURA 10. T_a e Δ_a .

- (ii) Si noti che la funzione è continua su T_a e questo è compatto, quindi di certo l'integrale esiste; si può quindi applicare il teorema di cambiamento di variabili. Si ha $\det \phi'(u, v) = 1$, quindi

$$\int_{T_a} e^{-(x^2+2xy+y^2)} dx dy = \int_{T_a} e^{-(x+y)^2} dx dy = \int_{\Delta_a} e^{-u^2} du dv =$$

(con la formula di riduzione)

$$\int_{u=0}^{u=a} \left(\int_{v=0}^{v=u} e^{-u^2} dv \right) du = \int_0^a u e^{-u^2} du = \left[\frac{-e^{-u^2}}{2} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}.$$

- (iii) Se f è continua su $[0, +\infty[$ allora $(x, y) \mapsto f(x+y)$ è continua su T_a , quindi l'integrale esiste e come sopra si può quindi applicare il teorema di cambiamento di variabili; sempre come sopra

$$\int_{T_a} f(x+y) dx dy = \int_{\Delta_a} f(u) du dv = \int_{u=0}^{u=a} \left(\int_{v=0}^{v=u} f(u) dv \right) du = \int_0^a u f(u) du.$$

- (iv) Nel diffeomorfismo lineare ϕ di cui sopra si ha $\phi^{-1}(T) = \Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq u\}$. Per il teorema di cambiamento di variabili si ha:

$$(x, y) \mapsto f(x+y) \text{ appartiene a } L^1(T) \text{ se e solo se } u \mapsto f(u) \text{ appartiene a } L^1(\Delta),$$

ed in tal caso si ha $\int_T f(x+y) dx dy = \int_{\Delta} f(u) du dv$. Se questo è il caso si applica il teorema di Fubini al secondo integrale, ottenendo

$$\int_{\Delta} f(u) du dv = \int_{u=0}^{u=\infty} f(u) \left(\int_{v=0}^{v=u} dv \right) du = \int_0^{\infty} u f(u) du.$$

D'altra parte il teorema di Tonelli dice che $(u, v) \mapsto f(u)$ sta in $L^1(\Delta)$ se e solo se $u \mapsto u f(u)$ sta in $L^1([0, \infty[)$. Si può quindi dire:

• La funzione $(x, y) \mapsto f(x+y)$ sta in $L^1(T)$ se e solo se $u \mapsto u f(u)$ sta in $L^1([0, +\infty[)$ ed in tal caso si ha l'uguaglianza sopra scritta.

(v) Si ha, per quanto sopra visto

$$\int_T e^{-(x^2+2xy+y^2)} dx dy = \int_0^\infty u e^{-u^2} du = \left[\frac{-e^{-u^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

□

ESERCIZIO 20. Si considera il sistema differenziale:

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}.$$

- (i) Trovare un integrale primo per (S), e disegnare le traiettorie delle soluzioni, con il loro verso di percorrenza
- (ii) Detta A la matrice del precedente sistema, calcolare e^{tA} , ricorrendo direttamente alla definizione (notare che $A^2 = \dots$)
- (iii) Trovare un'equazione del secondo ordine che ha (S) come sistema del primo ordine associato, e ritrovare in tal modo e^{tA} .

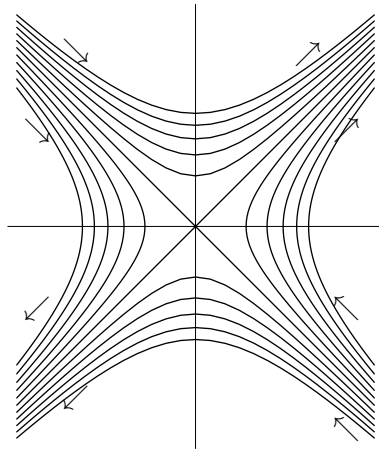


FIGURA 11. Traiettorie.

Risoluzione. (i) Ogni primitiva di $-x dx + y dy$ è un integrale primo; quindi (a meno di una costante moltiplicativa) $V(x, y) = x^2 - y^2$ è integrale primo. Traiettorie:

- $x^2 - y^2 = k > 0$: sono iperboli equilateri, con l'asse x come asse focale; il ramo con $x > 0$ è percorso nel verso delle ordinate crescenti ($\dot{y} = x > 0$), l'altro nel verso delle ordinate decrescenti.
- $x^2 - y^2 = 0$: sono le due rette $y = \pm x$; $(0, 0)$ è un equilibrio; le quattro semirette sono traiettorie; sulla retta $y = x$ sono percorse allontanandosi dall'origine per $t \rightarrow +\infty$, sulla retta $y = -x$ sono invece percorse avvicinandosi all'origine per $t \rightarrow +\infty$
- $x^2 - y^2 = k < 0$: sono iperboli equilateri, con l'asse y come asse focale; il ramo con $y > 0$ è percorso nel verso delle ascisse crescenti ($\dot{x} = y > 0$), l'altro nel verso delle ascisse decrescenti.

(ii) Essendo $A^2 = 1_2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} A^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} A^{2j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} 1_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} A = \cosh t \, 1_2 + \sinh t \, A = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) La prima equazione è $\dot{x} = y$, e quindi il sistema è quello canonicamente associato all'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = x$, le cui soluzioni sono $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ o, equivalentemente, $k_1 \cosh t + k_2 \sinh t$. La matrice wronskiana della coppia $\cosh t, \sinh t$ è ovviamente

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} = e^{tA}.$$

□

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA– RECUPERO–15 LUGLIO 2008

ESERCIZIO 21. La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/(n(n+1))$ ha raggio di convergenza 1 (accettarlo, si vede facilmente con il criterio del rapporto).

- (i) Qual'è l'insieme di convergenza $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge in } z\}$?
- (ii) Detta f la somma della serie, e limitandosi all'intervallo reale $] -1, 1[$, calcolare la derivata f' (ricordare che si ha $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ se $|x| < 1 \dots$).
- (iii) Calcolare la somma f della serie data.

Risoluzione. (i) Dato che ci viene detto che il raggio di convergenza è 1, la serie è assolutamente convergente per $|z| < 1$, e non converge per $|z| > 1$. Si tratta di vedere se la serie converge anche sulla circonferenza di convergenza $\{|z| = 1\}$. Per $|z| = 1$ il termine generale è in modulo pari a $1/(n(n+1))$; e dato che la serie che ha questo termine generale converge, essendo $1/(n(n+1)) \sim 1/n^2$ per $n \rightarrow +\infty$, la serie converge su tutta la circonferenza di convergenza. Riassumendo: l'insieme di convergenza C è il disco unitario chiuso, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (su tale insieme si ha anche convergenza assoluta).

(ii) Usando il teorema di derivazione per serie sappiamo che si ha $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n+1)$ per $|z| < 1$, in particolare per x reale in modulo minore di 1. Si ha ora se $x \neq 0$ e $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} - x \right) = \frac{-\log(1-x) - x}{x^2}. \end{aligned}$$

Si è ottenuto:

$$f'(x) = -\frac{\log(1-x) + x}{x^2} \quad \text{per } |x| < 1.$$

(iii) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(1-x) + x}{-x^2} dx &= \frac{\log(1-x) + x}{x} - \int \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{1-x} + 1 \right) dx = \frac{\log(1-x) + x}{x} + \int \frac{1}{1-x} dx = \\ &= \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) + k, \end{aligned}$$

con k costante di integrazione. Si ha quindi

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) + k \quad \text{per ogni } x \in]-1, 1[$$

ed essendo $f(0) = 0$, mentre il secondo membro vale $-1 + k$ per $x = 0$, si ha $k = 1$. Quindi

$$f(x) = \frac{x + \log(1-x) - x \log(1-x)}{x} \quad |x| < 1.$$

□

ESERCIZIO 22. Sia $\vec{F}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y z, y z^2, z^3 e^{xy})$; sia S il solido $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq 1\}$.

- (i) Calcolare il rotore $\nabla \times \vec{F}$ di $\vec{F}$.
- (ii) Calcolare il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ uscente da S .

La frontiera di S consta di una parte piana A e di una parte B sulla sfera.

- (iii) Trovare per via diretta il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ uscente da A .
- (iv) Usare la formula di Stokes per trovare il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ uscente da B .

Risoluzione. (i) Si ha

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & x^2 y z \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & y z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & z^3 e^{xy} \end{bmatrix} = \vec{e}_1(z^3 x e^{xy} - 2yz) + \vec{e}_2(x^2 y - z^3 y e^{xy}) + \vec{e}_3(0 - x^2 z),$$

cioè

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (z^3 x e^{xy} - 2yz, x^2 y - z^3 y e^{xy}, -x^2 z).$$

(ii) Il campo $\vec{F}$ è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^3$. Ogni rotore è solenoidale; per il teorema della divergenza il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ uscente da S è nullo.

(iii) La parte A è ovviamente il disco sul piano $z = 1$ di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 2. Il versore normale è $-\vec{e}_3$; il prodotto scalare $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) \cdot (-\vec{e}_3) = x^2 z$ integrato su A porge il flusso che esce da A , e cioè l'integrale

$$\int_A 2x^2 \, 1 \, dx dy = \int_A x^2 \, dx dy.$$

Per il calcolo usiamo naturalmente coordinate polari $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ con $r \in [0, 2]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$, ottenendo:

$$\int_{[0,2] \times [0,2\pi]} r^2 \cos^2 \vartheta \, r \, dr d\vartheta = \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{2^4}{4} \pi = 4\pi.$$

Il flusso uscente attraverso A vale quindi 4π .

(iv) Il bordo di B è il circolo $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$. Per la formula di Stokes la circuitazione di $\vec{F}$ lungo γ è pari al flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso B (a meno forse del segno, non abbiamo controllato le orientazioni). Ci aspettiamo comunque che tale flusso valga -4π . Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \vec{F}(2 \cos t, 2 \sin t, 1) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt &= \int_0^{2\pi} ((2 \cos t)^2 2 \sin t (-2 \sin t) + 2 \sin t \, 1^2 (2 \cos t)) \, dt = \\ 4 \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - 4 \cos^2 t \sin^2 t) \, dt &= 2[\sin^2 t]_0^{2\pi} - 4 \int_0^{2\pi} (\sin(2t))^2 \, dt = 0 - 4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} \, dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Sembra quindi che l'orientazione vada bene, ma dobbiamo controllare. In coordinate sferiche la calotta B si parametrizza come $x = \sqrt{5} \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = \sqrt{5} \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = \sqrt{5} \cos \vartheta$, con $\vartheta \in [0, \arccos(1/\sqrt{5})]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$; sappiamo che con questa parametrizzazione il vettore normale punta verso l'esterno (uno dei calcoli fatti sulle coordinate sferiche). Sul bordo si ha $\vartheta = \arccos(1/\sqrt{5})$, quindi

$$\sin(\arccos(1/\sqrt{5})) = \sqrt{1 - (1/\sqrt{5})^2} = \sqrt{4/5} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

e la parametrizzazione indotta sul bordo è proprio

$$x = 2 \cos \varphi, \, y = 2 \sin \varphi, \, z = 1 \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

come prima usato. □

ESERCIZIO 23. Sia $\psi :]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[^2$ la funzione del primo quadrante in se stesso definita da $\psi(x, y) = (xy, y/x)$. Mostrare che è un diffeomorfismo, trovandone esplicitamente l'inversa $\psi^{-1}(u, v) = \phi(u, v) = \dots$ (3 punti).

- (i) Fissato $a > 1$ sia $E_a = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : 1 \leq xy \leq 2, x/a \leq y \leq ax\}$. Disegnare E_a ; trovare $F_a = \phi^{-1}(E_a)$.
 (ii) Calcolare

$$\int_{E_a} \frac{x^4 \arctan(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy,$$

dimostrando con cura che esiste finito.

- (iii) Dire se esiste finito, ed in caso affermativo calcolare

$$\int_E \frac{x^4 \arctan(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy, \quad \text{dove } E = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : 1 \leq xy \leq 2\}.$$

Risoluzione. (i) Da $u = xy$, $v = y/x$ si ricava $y = u/x$ e quindi $v = u/x^2$, da cui $x = \sqrt{u/v}$ ($x > 0$ per ipotesi) e quindi $y = u/x = \sqrt{uv}$. Quindi ψ è diffeomorfismo con $\psi^{-1}(u, v)\phi(u, v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$. Inoltre $1 \leq xy \leq 2$ e $x/a \leq y \leq ax$ se e solo se $1 \leq u \leq 2$ e $1/a \leq v \leq a$, per cui F_a è il rettangolo $[1, 2] \times [1/a, a]$ del piano (u, v) . Il disegno di E_a , insieme tra due iperboli e due semirette uscenti dall'origine, viene omesso.

- (ii) Si usa ovviamente il cambiamento di variabile $(x, y) = \phi(u, v) = (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$. Si ottiene

$$\int_{E_a} \frac{x^4 \arctan(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy = \int_{F_a} \frac{u^2}{v^2} \frac{\arctan u}{(u/v + uv)^2} |\det \phi'(u, v)| \, du dv = \int_{F_a} \frac{\arctan u}{(1 + v^2)^2} |\det \phi'(u, v)| \, du dv$$

Si ha poi

$$\phi'(u, v) = \begin{bmatrix} 1/(2\sqrt{uv}) & -\sqrt{u}/(2v^{3/2}) \\ \sqrt{v}/(2\sqrt{u}) & \sqrt{u}/(2\sqrt{v}) \end{bmatrix}$$

con determinante $\det \phi'(u, v) = 1/(4v) + 1/(4v) = 1/(2v)$. Si deve quindi calcolare

$$\int_{F_a} \frac{\arctan u}{2v(1+v^2)^2} du dv = \int_1^2 \arctan u du \int_{1/a}^a \frac{dv}{2v(1+v^2)^2}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 \arctan u du &= [u \arctan u]_1^2 - \int_1^2 \frac{u}{1+u^2} du = 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\log(1+u^2)]_1^2 = \\ &= 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\log(5/2)}{2}. \end{aligned}$$

Poi

$$\begin{aligned} \int_{1/a}^a \frac{dv}{v(1+v^2)^2} &= \int_{1/a}^a \frac{1+v^2-v^2}{v(1+v^2)^2} dv = \int_{1/a}^a \frac{dv}{v(1+v^2)} - \int_{1/a}^a \frac{v}{(1+v^2)^2} dv = \\ &= \int_{1/a}^a \frac{dv}{v} - \int_{1/a}^a \frac{v}{1+v^2} dv + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+v^2} \right]_{1/a}^a = \\ &= 2 \log a - \frac{1}{2} [\log(1+v^2)]_{1/a}^a + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+(1/a)^2} \right) = \\ &= 2 \log a - \log a + \frac{1}{2} \frac{1-a^2}{1+a^2} = \log a + \frac{1}{2} \frac{1-a^2}{1+a^2}. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto è quindi

$$I(a) = \frac{1}{2} \left(2 \arctan 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\log(5/2)}{2} \right) \left(\log a + \frac{1}{2} \frac{1-a^2}{1+a^2} \right).$$

(iii) Essendo $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = +\infty$, l'integrale non esiste finito (teorema della convergenza monotona). $\square$

ESERCIZIO 24. È dato il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 2y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases}$$

- (i) È vero che le sue soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$?
- (ii) Calcolare una matrice risolvete per il sistema.
- (iii) Trovare un integrale primo per il sistema. Che curve sono le traiettorie delle soluzioni?

Risoluzione. (i) Si tratta di un sistema lineare a coefficienti costanti. Il teorema di esistenza ed unicità globale è quindi applicabile. La risposta è (banalmente!) affermativa.

(ii) L'equazione caratteristica

$$\det(\zeta I_2 - A) = \zeta^2 - \text{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 3 = 0,$$

ha per soluzioni $\zeta = \pm\sqrt{3}i$. Un autovettore associato a $\sqrt{3}i$ si trova risolvendo

$$\begin{cases} (\sqrt{3}i + 1)x + 2y &= 0 \\ -2x + (\sqrt{3}i - 1)y &= 0 \end{cases},$$

una cui soluzione non nulla è $x = (\sqrt{3}i - 1)/2$, $y = 1$. Ne segue che

$$\begin{bmatrix} (\sqrt{3}i - 1)/2 e^{i\sqrt{3}t} & (-\sqrt{3}i - 1)/2 e^{-i\sqrt{3}t} \\ e^{i\sqrt{3}t} & e^{-i\sqrt{3}t} \end{bmatrix},$$

è una risolvete complessa. Essendo il sistema reale, per avere una risolvete reale prendiamo parte reale e parte immaginaria della soluzione trovata (per comodità eliminiamo il fattore $1/2$). Si ha

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}i - 1, 2)e^{i\sqrt{3}t} &= (\sqrt{3}i - 1, 2)(\cos(\sqrt{3}t) + i\sin(\sqrt{3}t)) = \\ &= (-\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + i(\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)), 2\cos(\sqrt{3}t) + i2\sin(\sqrt{3}t)) = \\ &= (-\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t), 2\cos(\sqrt{3}t)) + i(\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t), 2\sin(\sqrt{3}t)). \end{aligned}$$

Una risolvente reale è quindi

$$\begin{bmatrix} -\cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t) \\ 2\cos(\sqrt{3}t) & 2\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}.$$

(iii) Un integrale primo per il sistema si trova se si trova una funzione C^1 il cui gradiente è ortogonale al campo $(-x - 2y, 2x + y)$ dato dal secondo membro dell'equazione; ci serve quindi una funzione il cui gradiente sia parallelo a $(-2x - y, -x - 2y)$. La forma differenziale $-((2x + y)dx + (x + 2y)dy)$ è esatta, avendo come primitiva $V(x, y) = -(x^2 + xy + y^2)$ (vedi osservazione dopo), il cui gradiente è esattamente il campo $-(2x + y, x + 2y)$.

Le curve di livello di tale funzione sono ellissi centrate nell'origine, con assi sulle bisettrici degli assi coordinati.

OSSERVAZIONE. Ritenevo che fosse superfluo spiegare ancora una volta come si trova una primitiva di una forma differenziale, specie se semplice come questa, ed ho saltato la spiegazione, ma facendo orali ho scoperto che non è così. Allora: la forma $(2x + y)dx + (x + 2y)dy$ è chiusa (infatti $\partial_y(2x + y) = 1 = \partial_x(x + 2y)$), ed avendo tutto $\mathbb{R}^2$ come dominio è anche esatta. Per trovare una primitiva, cerchiamo una primitiva rispetto ad x del coefficiente di dx ; una è $x^2 + xy$. Una primitiva della forma deve quindi essere $U(x, y) = x^2 + xy + \alpha(y)$, dove $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ è una funzione incognita; imponendo che sia $\partial_y U(x, y) = x + 2y$, coefficiente di dy , otteniamo $x + \alpha'(y) = x + 2y$, cioè $\alpha'(y) = 2y$, da cui $\alpha(y) = y^2 + k$, con k costante.

□

RECUPERO- 3 SETTEMBRE 2008

ESERCIZIO 25. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, il suo raggio di convergenza coincide con

$$\sup_{\mathbb{R}} \{r \geq 0 : \text{la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge}\}.$$

Quest'affermazione è vera o falsa?

Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ ha raggio di convergenza R , qual'è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?

Risoluzione. L'affermazione è vera. L'insieme $\{r \geq 0 : \text{la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ converge}\}$ è l'intersezione del disco di convergenza con il semiasse reale positivo, ed è chiaro che l'estremo superiore di questo insieme (che è un intervallo forse privo di massimo) è esattamente il raggio del disco di convergenza.

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{r})^{2n}$ converge, allora si ha $\sqrt{r} \leq R$, e quindi $r \leq R^2$. Ne segue che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non supera R^2 . D'altra parte se $\rho > R^2$ si ha $\sqrt{\rho} > R$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{\rho})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ non converge. Allora il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è proprio R^2 . □

ESERCIZIO 26. Sia E l'insieme piano compatto la cui frontiera è formata dal segmento che congiunge l'origine con $(a, 0)$, unito all'arco di spirale di Archimede di equazione polare $r = (a/(2\pi))\vartheta$, dove ϑ varia in $[0, 2\pi]$ (vedi figura; $a > 0$ è un costante).

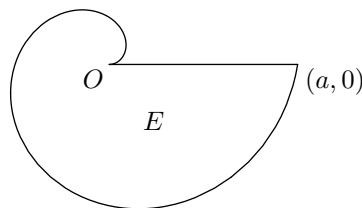


FIGURA 12. L'insieme E .

- (i) Calcolare l'area di E (Archimede mostrò che tale area era $1/3$ dell'area del cerchio di raggio a , impresa notevole per i suoi tempi; per noi è un calcolo facile).
- (ii) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale

$$\int_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$$

e calcolarlo per tali valori di α .

Si considera poi il solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq h(1 - (x^2 + y^2)/a^2)\} \quad (h > 0).$$

(iii) Trovare il flusso uscente da S del campo $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

(iv) La frontiera di S si divide naturalmente in tre porzioni; descriverle e trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da ciascuna di esse.

Risoluzione. (i) Si ha subito, osservando che E è l'insieme dei punti $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ tali che $0 \leq r \leq (a/(2\pi))\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, e posto $D = \{(\vartheta, r) : 0 \leq r \leq (a/(2\pi))\vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi]\}$:

$$\begin{aligned} \text{Area}(E) &= \int_E dx dy = \int_D r dr d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=(a/(2\pi))\vartheta} r dr \right) d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=(a/(2\pi))\vartheta} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \vartheta^2}{2(2\pi)^2} d\vartheta = \frac{a^2}{2(2\pi)^2} \left[\frac{\vartheta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2(2\pi)^2} \frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{\pi}{3} a^2, \end{aligned}$$

(ii) Usando ancora coordinate polari si ha che l'integrale esiste finito se e solo se esiste finito:

$$\int_D \frac{r}{r^\alpha} dr d\vartheta;$$

usiamo ora il teorema di Tonelli: l'integrando è misurabile e positivo, e quindi l'integrale esiste finito se e solo se l'integrale iterato esiste finito:

$$\int_D \frac{r}{r^\alpha} dr d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=(a/(2\pi))\vartheta} r^{1-\alpha} dr \right) d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{r=0}^{r=(a/(2\pi))\vartheta} d\vartheta$$

l'integrale in dr esiste finito se e solo se $1 - \alpha > -1 \iff \alpha < 2$ e si ha in tal caso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^{2-\alpha}}{(2\pi)^{2-\alpha}} \frac{\vartheta^{2-\alpha}}{2-\alpha} d\vartheta = \frac{a^{2-\alpha}}{(3-\alpha)(2-\alpha)} [\vartheta^{3-\alpha}]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{(3-\alpha)(2-\alpha)} a^{2-\alpha}.$$

Riassumendo: l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha < 2$ e si ha per tali α :

$$\int_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2\pi}{(3-\alpha)(2-\alpha)} a^{2-\alpha}.$$

(iii) La divergenza del campo è 1, per cui il flusso uscente da S è pari al volume di S . Si noti che $f(x, y) = (h/a^2)(a^2 - (x^2 + y^2))$ è positiva entro il disco di centro l'origine e raggio a , che contiene E (tutti punti di E hanno distanza dall'origine $\leq a$, essendo $0 \leq (a/(2\pi))\vartheta \leq a$ se $\vartheta \in [0, 2\pi]$), per cui il volume di S è pari a

$$\text{Volume}(S) = \frac{h}{a^2} \int_E (a^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = \text{Area}(E) h - \frac{h}{a^2} \int_E (x^2 + y^2) dx dy;$$

l'ultimo integrale è uno di quelli in (ii), con $\alpha = -2$; si ha quindi:

$$\text{Flusso} = \text{Volume}(S) = \frac{\pi}{3} h a^2 - \frac{2\pi}{5 \cdot 4} h a^2 = \frac{2\pi}{15} h a^2.$$

(iv) I pezzi di frontiera sono chiaramente la base E sul piano (x, y) , la parte sopra, P , sul paraboloide $z = (h/a^2)(a^2 - (x^2 + y^2))$ e la parte C sul cilindro le cui direttrici passano per la spirale di Archimede che è parte della frontiera di E . Il flusso attraverso la base è nullo dato che sulla base il campo è parallelo alla base stessa. Scriviamo ora il campo come somma $(-y, x, 0) + (0, 0, z)$; la parte $(-y, x, 0)$ ha flusso nullo attraverso il paraboloide perchè il paraboloide è di rotazione, e quindi tale parte ha flusso nullo anche attraverso C . La parte $(0, 0, z)$ ha flusso nullo attraverso C perchè parallela a C . Il flusso uscente da P di $(0, 0, z)$ è quindi tutto il flusso uscente, pari al già calcolato volume di S .

Riassumendo:

Flusso uscente dalla base E : zero; flusso uscente dalla parte cilindrica C : zero; flusso uscente da P : tutto il flusso uscente, pari al volume di S .

□

ESERCIZIO 27. Si considera il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \cos(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x \cos(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

FIGURA 13. L'insieme S , visto da due diversi punti di vista.

- (i) Dire se tale sistema soddisfa o meno alle ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale; spiegare con cura.
- (ii) Trovarne le soluzioni costanti.
- (iii) Trovare un integrale primo per il sistema, e dire che figure sono le traiettorie delle soluzioni.
- (iv) Trovare per il sistema le soluzioni della forma $x(t) = a \cos \vartheta(t)$, $y(t) = a \sin \vartheta(t)$, con $\vartheta \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $a > 0$ è una costante.
- (v) (facoltativo) Trovare il flusso associato al sistema.

Risoluzione. (i) Le derivate parziali rispetto ad x e ad y non sono limitate, quindi le ipotesi del teorema in forma debole non sono verificate (ad esempio, $\partial_x(-y \cos(x^2 + y^2)) = 2xy \sin(x^2 + y^2)$ è chiaramente illimitata su $\mathbb{R}^2$; far tendere (x, y) all'infinito sui valori (x_k, y_k) con $x_k = y_k = \sqrt{\pi/2 + 2k\pi}$). Ma altrettanto chiaramente valgono le ipotesi sulla crescita sublineare:

$$|(-y \cos(x^2 + y^2), x \cos(x^2 + y^2))| = |\cos(x^2 + y^2)| |(-y, x)| = |\cos(x^2 + y^2)| \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|;$$

quindi vale il teorema di esistenza ed unicità globale in forma forte.

(ii) Dobbiamo risolvere il sistema:

$$0 = -y \cos(x^2 + y^2), \quad 0 = x \cos(x^2 + y^2),$$

una cui soluzione è naturalmente l'origine $(0, 0)$; le altre sono i punti in cui $\cos(x^2 + y^2) = 0$, e cioè i punti dei cerchi di centro l'origine e raggio $\sqrt{\pi/2 + k\pi}$, $k \geq 0$ intero: ciascuno di questi punti rappresenta una soluzione costante.

(iii) Un integrale primo è una primitiva del campo ortogonale $(-x \cos(x^2 + y^2), -y \cos(x^2 + y^2))$ e cioè (a meno del segno e di un coefficiente) $V(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, le cui curve di livello sono cerchi centrati nell'origine. Naturalmente si può rimuovere il fattore $\cos(x^2 + y^2)$; anche $x^2 + y^2$ è un integrale primo per il sistema.

(iv) Imponendo che quelle date siano soluzioni si ottiene

$$-a \sin \vartheta(t) \dot{\vartheta}(t) = -a \sin \vartheta(t) \cos a^2; \quad a \cos \vartheta(t) \dot{\vartheta}(t) = a \cos \vartheta(t) \cos a^2,$$

e cioè $\dot{\vartheta}(t) = \cos a^2$, da cui $\vartheta(t) = (\cos a^2) t + \vartheta_0$, con ϑ_0 costante.

(v) Se $x_0 = a \cos \vartheta_0$, $y_0 = a \sin \vartheta_0$, con $a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, quella prima trovata è la soluzione che vale (x_0, y_0) all'istante $t = 0$, e quindi è:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(t \cos a^2 + \vartheta_0) = a (\cos(t \cos a^2) \cos \vartheta_0 - \sin(t \cos a^2) \sin \vartheta_0); \\ y(t) &= a \sin(t \cos a^2 + \vartheta_0) = a (\sin(t \cos a^2) \cos \vartheta_0 + \cos(t \cos a^2) \sin \vartheta_0), \end{aligned}$$

cioè

$$x(t) = x_0 \cos(t \cos a^2) - y_0 \sin(t \cos a^2); \quad y(t) = x_0 \sin(t \cos a^2) + y_0 \cos(t \cos a^2), \quad a^2 = x_0^2 + y_0^2$$

è il flusso richiesto. □

ESERCIZIO 28. Si considera il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + 5y \\ \dot{y} &= -x + y \end{cases}.$$

- (i) Trovare quella matrice risolvente che per $t = 0$ è la matrice identica.
(ii) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 5y + e^{-t} \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

- (iii) Trovare la matrice esponenziale della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(si consiglia di usare le precedenti risposte, che porgono subito il risultato).

Risoluzione. (i) Il polinomio caratteristico è

$$\zeta^2 + 2\zeta + 2 = (\zeta + 1)^2 + 1,$$

con radici $-1 \pm i$. Cerchiamo un autovettore associato a $-1 + i$:

$$\begin{cases} (-1 + i + 3)x - 5y = 0 \\ x + (-1 + i - 1)y = 0 \end{cases} \quad \text{un autovettore è } (2 - i, 1)$$

ed una matrice risolvente è quindi

$$e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it}(2 - i) & e^{-it}(2 + i) \\ e^{it} & e^{-it} \end{bmatrix};$$

moltiplichiamo a destra per la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 - i & 2 + i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 - i \\ -1 & 2 - i \end{bmatrix},$$

ottenendo

$$e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - 2 \sin t & 5 \sin t \\ -\sin t & \cos t + 2 \sin t \end{bmatrix}.$$

Questa naturalmente è la matrice e^{tB} , se $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ è la matrice del sistema.

- (ii) Dal metodo di variazione delle costanti si ottiene che la soluzione voluta è:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t e^{(t-\theta)B} \begin{bmatrix} e^{-\theta} \\ 0 \end{bmatrix} d\theta = \int_0^t e^{\theta-t} \begin{bmatrix} \cos(t-\theta) - 2 \sin(t-\theta) & 5 \sin(t-\theta) \\ -\sin(t-\theta) & \cos(t-\theta) + 2 \sin(t-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\theta} \\ 0 \end{bmatrix} d\theta = \\ &= e^{-t} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\theta) - 2 \sin(t-\theta) \\ -\sin(t-\theta) \end{bmatrix} d\theta = e^{-t} \begin{bmatrix} -\sin(t-\theta) - 2 \cos(t-\theta) \\ -\cos(t-\theta) \end{bmatrix}_{\theta=0}^{\theta=t} = \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t - 2(1 - \cos t) \\ -1 + \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Conosciamo già le prime due colonne delle matrice e^{tA} ; esse sono le colonne di e^{tB} con uno zero aggiunto alla fine. L'ultima colonna è la soluzione del sistema $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(x, y, z)$ che vale $(0, 0, 1)$ per $t = 0$. L'ultima equazione $\dot{z} = -z$ si integra subito come $z(t) = z_0 e^{-t}$; sostituendo, con $z_0 = 1$ si ottiene esattamente il sistema non omogeneo risolto in (ii). La soluzione richiesta è quindi quella trovata in (ii) con e^{-t} aggiunto come ultimo elemento, e cioè $e^{-t}(\sin t - 2(1 - \cos t), -1 + \cos t, 1)$; la matrice è

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - 2 \sin t & 5 \sin t & \sin t - 2(1 - \cos t) \\ -\sin t & \cos t + 2 \sin t & -(1 - \cos t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 29. Calcolare la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n \quad |z| < 1.$$

Risoluzione. È evidente che il raggio di convergenza vale 1. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \\ &= z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 30. Sia C la superficie (cupola) ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la mezza cicloide di equazioni parametriche $x(t) = a(t + \sin t)$, $z(t) = a(1 + \cos t)$, con $t \in [0, \pi]$; $a > 0$ è una costante (vedi figura).

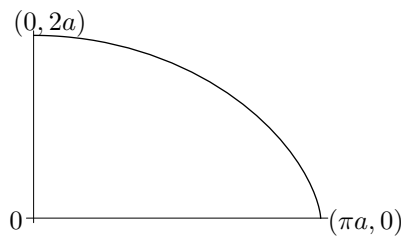


FIGURA 14. La mezza cicloide che genera la cupola C con la sua rotazione

- (i) Trovare l'area di C .
- (ii) Trovare il volume racchiuso tra la cupola ed il piano xy .

La cupola C poggia sul fondo del mare, che è a profondità $h > 2a$. Essa pertanto subisce le forze di pressione, il cui risultante è

$$\vec{F} = \int_C \rho g (h - z) (-\vec{\nu}_e) d\sigma \quad (\text{attenzione: è un integrale vettoriale}),$$

dove $\vec{\nu}_e$ è il versore normale esterno alla cupola. Calcolare $\vec{F}$ (ovviamente ρ , densità dell'acqua marina, e g , accelerazione di gravità, sono costanti).

Risoluzione. (i) Il teorema di Guldino per l'area delle superficie di rotazione dice che, se α è la mezza cicloide:

$$\begin{aligned} \text{Area}(C) &= 2\pi \int_{\alpha} x |d\alpha| = 2\pi \int_0^{\pi} a(t + \sin t) \sqrt{a^2(1 + \cos t)^2 + a^2(-\sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (t + \sin t) \sqrt{2 + 2\cos t + 2} dt = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (t + \sin t) 2|\cos(t/2)| dt = 4\pi a^2 \left(\int_0^{\pi} t \cos(t/2) dt + 2 \int_0^{\pi} \sin(t/2) \cos^2(t/2) dt \right) = \end{aligned}$$

(prendendo dal formulario una primitiva di $t \cos(t/2)$)

$$\begin{aligned} &4\pi a^2 \left(\left[\frac{\cos(t/2)}{1/4} + \frac{t}{1/2} \sin(t/2) \right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{4}{3} [\cos^3(t/2)]_{t=0}^{t=\pi} \right) = \\ &4\pi a^2 \left(2\pi - 4 + \frac{4}{3} \right) = \left(8\pi - \frac{32}{3} \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

(ii) Detta E la porzione di piano xz tra la mezza cicloide e gli assi coordinati il teorema di Guldino per i volumi dei solidi di rotazione dice che si ha

$$\text{Volume} = 2\pi \int_E x dx dz.$$

Per calcolare l'integrale doppio possiamo procedere in vari modi. Possiamo ad esempio integrare prima in z , ottenendo

$$\int_E x \, dx \, dz = \int_{x=0}^{x=\pi a} x \left(\int_{z=0}^{z=\beta(x)} dz \right) dx = \int_0^{\pi a} x \beta(x) \, dx,$$

dove $\beta : [0, \pi a] \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione incognita, ottenuta invertendo la funzione $t \mapsto x(t) = a(t + \sin t)$ e componendo poi tale inversa con la $t \mapsto z(t) = a(1 + \cos t)$. La sostituzione $x = a(t + \sin t)$ trasforma quindi l'integrale in

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi a} x \beta(x) \, dx &= \int_{t=0}^{t=\pi} a(t + \sin t) a(1 + \cos t) a(1 + \cos t) \, dt = a^3 \int_0^{\pi} (t + \sin t)(1 + \cos t)^2 \, dt = \\ &= a^3 \left(\int_0^{\pi} t(1 + \cos t)^2 \, dt + \int_0^{\pi} \sin t(1 + \cos t)^2 \, dt \right) = \\ &= a^3 \left(\int_0^{\pi} t \, dt + 2 \int_0^{\pi} t \cos t \, dt + \int_0^{\pi} t \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt + \left[\frac{-1}{3} (1 + \cos t)^3 \right]_0^{\pi} \right) = \end{aligned}$$

(ancora, dal formulario le primitive di $t \cos t$ e $t \cos(2t)$)

$$\begin{aligned} &= a^3 \left(\frac{3}{4} \pi^2 + 2 [\cos t + t \sin t]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{t}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} + \frac{8}{3} \right) = \\ &= a^3 \left(\frac{3}{4} \pi^2 - 2 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

Il volume risulta quindi

$$\text{Volume cupola} = 2\pi \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) a^3.$$

Alternativamente si può ricorrere alla formula di Green per trasformare l'integrale doppio in un integrale esteso al bordo di E : ricordiamo che si ha

$$\int_{+\partial E} (P(x, z) \, dx + Q(x, z) \, dz) = \int_E (\partial_x Q(x, z) - \partial_z P(x, z)) \, dx \, dz,$$

e basta cercare una funzione che abbia x come derivata parziale rispetto a x , ad esempio $Q(x, z) = x^2/2$. L'integrale richiesto è quindi

$$\int_{+\partial E} \frac{x^2}{2} \, dz;$$

di tale integrale resta solo il contributo sull'arco di mezza cicloide (sugli assi la forma è nulla), contributo che vale

$$- \int_0^{\pi} \frac{(a^2(t + \sin t))^2}{2} (-a \sin t) \, dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} (t + \sin t)^2 \sin t \, dt;$$

non esplicitiamo il calcolo, che porta allo stesso risultato.

(iii) Se la cupola non poggiasse sul fondo del mare, per il principio di Archimede (che come sappiamo è conseguenza del teorema del gradiente) la spinta che essa subisce sarebbe quella idrostatica, e cioè $\rho(\text{Volume cupola}) g \vec{e}_3$; tale spinta è la somma vettoriale della forza $\vec{F}$ cercata, e della pressione sul fondo, che vale ovviamente $\rho g h \pi (\pi a)^2 \vec{e}_3$. Si ha quindi

$$\vec{F} + \rho g h \pi (\pi a)^2 \vec{e}_3 = \rho g \text{Volume cupola} \vec{e}_3,$$

da cui

$$\vec{F} = -\rho g \pi a^2 \left(h \pi^2 - 2 \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) a \right) \vec{e}_3$$

(l'ipotesi $h > 2a$ implica che il termine entro parentesi è positivo. Si poteva anche fare il calcolo diretto come segue: ovvie ragioni di simmetria dicono che il risultante è diretto lungo l'asse verticale; basta calcolare quindi la terza componente. Una parametrizzazione della cupola è

$$(t, \varphi) \mapsto p(t, \varphi) = a((t + \sin t) \cos \varphi, (t + \sin t) \sin \varphi, (1 + \cos t)),$$

con vettori tangenti

□

$$\partial_t p(t, \varphi) = a((1+\cos t) \cos \varphi, (1+\cos t) \sin \varphi, -\sin t); \quad \partial_\varphi p(t, \varphi) = a(-(t+\sin t) \sin \varphi, (t+\sin t) \cos \varphi, 0).$$

La terza componente del prodotto vettoriale $\partial_t p(t, \varphi) \times \partial_\varphi p(t, \varphi)$ è $a^2(t + \sin t)(1 + \cos t)$; è positiva se $t \in [0, \pi]$ e quindi il vettore normale punta verso l'esterno; l'orientazione è allora quella giusta, e la terza componente di $\vec{F}$ vale quindi:

$$\begin{aligned} F_3 &= - \int_C \rho g(h-z) \vec{\nu}_3 d\sigma_C = \\ &= - \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \rho g(h - a(1 + \cos t)) \frac{a^2(t + \sin t)(1 + \cos t)}{|\partial_t p(t, \varphi) \times \partial_\varphi p(t, \varphi)|} |\partial_t p(t, \varphi) \times \partial_\varphi p(t, \varphi)| dt d\varphi = \\ &= - \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \rho g(h - a(1 + \cos t)) (a^2(t + \sin t)(1 + \cos t)) dt d\varphi = \\ &= - \rho g h a^2 \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} (t + \sin t)(1 + \cos t) dt d\varphi + \rho g a^3 \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} (t + \sin t)(1 + \cos t)^2 dt d\varphi = \\ &= - 2\pi \rho g h a^2 \int_0^\pi (t + \sin t)(1 + \cos t) dt + 2\pi \rho g a^3 \int_0^\pi (t + \sin t)(1 + \cos t)^2 dt \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è stato calcolato trovando il volume della cupola e vale $3\pi^2/4 - 4/3$; il penultimo è immediato e vale $\pi^2/2$. Si ha quindi per la terza componente

$$F_3 = -\pi \rho g a^2 \left(h\pi^2 - \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) 2a \right)$$

in accordo con quanto già trovato

- ESERCIZIO 31. (i) Mostrare che ponendo $(u, v) = \psi(x, y) = (y/x^2, x/y^2)$ si definisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto $]0, +\infty[^2$ in se stesso; trovare il diffeomorfismo inverso $(x, y) = \phi(u, v)$, e calcolarne lo jacobiano.
- (ii) Dato $a > 1$ sia $E_a = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 3y^2, x^2/a \leq y \leq ax^2\}$; disegnare E_a (supponendo allo scopo $a = 3$) e trovarne l'area.
- (iii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ricondurre il seguente integrale $I(\alpha, a)$ ad un integrale unidimensionale:

$$\int_{E_a} \frac{e^{-y/x^2}}{x^\alpha} dx dy$$

- (iv) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il limite $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(\alpha, a)$? ha a che fare tale limite con

$$\int_E \frac{e^{-y/x^2}}{x^\alpha}, dx dy \quad \text{dove} \quad E = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 3y^2\}?$$

Risoluzione. (i) Anzitutto è chiaro che se $x, y > 0$ si ha $y/x^2 > 0$ e $x/y^2 > 0$, per cui effettivamente ψ trasforma il primo quadrante aperto in se stesso. Da $u = y/x^2$ si trae $y = ux^2$ e da $v = x/y^2$ si trae $x = vy^2$; sostituendo nella prima si ha $y = u(vy^2)^2 = uv^2y^4$, quindi $1 = uv^2y^3$ da cui $y^3 = u^{-1}v^{-2}$ ed infine $y = u^{-1/3}v^{-2/3}$; e $x = vy^2 = v u^{-2/3} v^{-4/3} = u^{-2/3} v^{-1/3}$. L'inversa è pertanto

$$\phi(u, v) = (u^{-2/3} v^{-1/3}, u^{-1/3} v^{-2/3}).$$

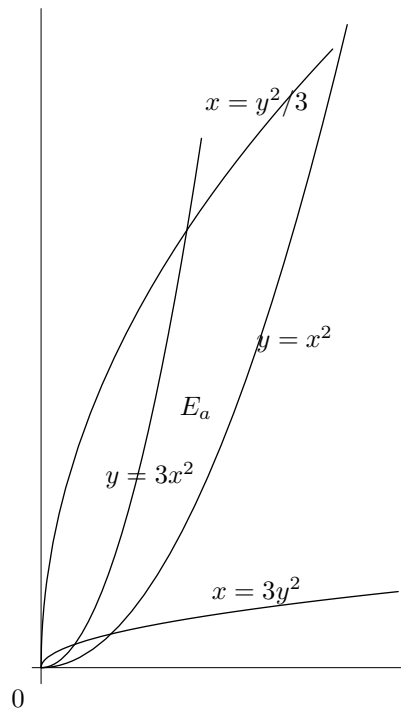
Il calcolo dello jacobiano non presenta difficoltà, ma è un poco più semplice calcolare lo jacobiano dell'inversa ψ , la cui matrice jacobiana è:

$$\psi'(x, y) = \begin{bmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{bmatrix} \quad \text{con determinante} \quad \det \psi'(x, y) = 4 \frac{xy}{(xy)^3} - \frac{1}{(xy)^2} = \frac{3}{x^2 y^2},$$

Espresso con u, v tale determinante vale $3/(u^{-4/3} v^{-2/3} u^{-2/3} v^{-4/3}) = 3u^2 v^2$, si ha quindi

$$\det \phi'(u, v) = \frac{1}{3u^2 v^2}.$$

□

FIGURA 15. L'insieme E_a .

(ii) Si scrive anche $E_a = \{(x, y) \in [0, +\infty[^2 : 1 \leq x/y^2 \leq 3, 1/a \leq y/x^2 \leq a\}$ per cui $\phi^{\leftarrow}(E_a) = \{(u, v) : 1 \leq v \leq 3, 1/a \leq u \leq a\} = [1/a, a] \times [1, 3]$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \text{Area}(E_a) &= \int_{E_a} dx dy = \int_{\phi^{\leftarrow}(E_a)} |\det \phi'(u, v)| du dv = \int_{[1/a, a] \times [1, 3]} \frac{1}{3u^2 v^2} du dv = \\ &= 3 \left(\int_{1/a}^a \frac{du}{u^2} \right) \left(\int_1^3 \frac{dv}{v^2} \right) = 2 \left(a - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

(iii) Si ha

$$I(\alpha, a) = \int_{E_a} \frac{e^{-y/x^2}}{x^\alpha} dx dy = \int_{[1/a, a] \times [1, 3]} \frac{e^{-u}}{u^{-2\alpha/3} v^{-\alpha/3}} \frac{du dv}{3u^2 v^2} =$$

(l'integrando è positivo, quindi l'integrale esiste finito se e solo se l'integrale iterato è finito)

$$\frac{1}{3} \left(\int_1^3 v^{\alpha/3} dv \right) \left(\int_{1/a}^a u^{2\alpha/3} e^{-u} du \right) = \frac{3^{\alpha/3+1} - 1}{3 + \alpha} \int_{1/a}^a u^{2\alpha/3} e^{-u} du$$

(si è supposto $\alpha \neq -3$; se $\alpha = -3$ il coefficiente dell'ultimo integrale è invece $\log 3/3$).

(iv) Dato che l'integrando è positivo, si ha

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\alpha, a) = \int_0^\infty u^{2\alpha/3} e^{-u} du,$$

(teorema della convergenza monotona). L'ultimo integrale esiste finito se e solo se $2\alpha/3 > -1 \iff \alpha > -3/2$ (per $u \rightarrow 0^+$ l'integrando è asintotico a $u^{2\alpha/3}$; all'infinito non ci sono problemi, dato che e^{-u} tende a 0 più rapidamente di ogni potenza di u). Per chi conosce la funzione Gamma euleriana, si ha

$$\int_0^\infty u^{2\alpha/3} e^{-u} du = \Gamma(2\alpha/3 + 1) \quad \text{per } \alpha > -3/2.$$

Sempre per il teorema della convergenza monotona il limite, quando esiste finito, è esattamente l'integrale su E di $e^{-y/x^2}/x^\alpha$.

ESERCIZIO 32. Si considera l'equazione del secondo ordine:

$$(Eq) \quad y'' = (\tanh t) y'.$$

- (i) Scrivere il sistema equivalente, nelle nuove variabili z_1, z_2 .
- (ii) Il sistema (e quindi l'equazione) verificano ovviamente un teorema di esistenza ed unicità globale: quale e perché ovviamente?
- (iii) Trovare l'integrale generale dell'equazione (Eq).
- (iv) Trovare l'integrale generale del sistema di cui in (ii).

Risoluzione. (i) Si pone $z_1 = u$ e $z_2 = y'$, per cui l'equazione diventa

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \tanh t \, z_2 \end{cases}$$

(ii) Il sistema (e quindi l'equazione) è ovviamente lineare omogeneo, potendosi scrivere come

$$(\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tanh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

È ben noto che i sistemi lineari verificano le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale in forma debole.

(iii) e (iv). La seconda equazione del sistema involve solo z_2 ed è di integrazione immediata: $\dot{z}_2 = \tanh t \, z_2$ ha come integrale generale

$$z_2(t) = z_2(0) \exp\left(\int_0^t \tanh s \, ds\right) = z_2(0) \exp(\log \cosh t) = z_2(0) \cosh t;$$

la prima equazione è allora:

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) = z_2(0) \cosh t \quad \text{da cui} \quad z_1(t) = z_1(0) + z_2(0) \sinh t;$$

l'integrale generale è quindi

$$z_1(t) = z_1(0) + z_2(0) \sinh t, \quad z_2(t) = z_2(0) \cosh t,$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sinh t \\ 0 & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sinh t \\ 0 & \cosh t \end{bmatrix} \quad \text{è matrice risolvante.}$$

L'integrale generale di $y'' = \tanh t \, y'$ è poi $y(t) = y(0) + y'(0) \sinh t$.

□

ESERCIZIO 1. Ricordiamo che se u, v sono numeri complessi, con $u \neq 0$, allora la determinazione principale, o valore principale, della potenza u^v è, per definizione, $u^v = \exp(v \log u)$, dove $\log$ è il logaritmo principale, e le altre determinazioni sono $(u^v)_k = u^v \exp(v 2k\pi i)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$.

- (i) È vero che si ha $a^{b+c} = a^b a^c$, per i valori principali?
- (ii) È vero che ogni determinazione $(a^{b+c})_k$ è il prodotto di una determinazione di a^b e di una determinazione di a^c ?
- (iii) Dare una condizione su b, c che equivale a dire che il prodotto di due arbitrarie determinazioni di a^b e di a^c sia una determinazione di a^{b+c} (la condizione non è semplice).

Risoluzione. (i) Si ha $a^b = \exp(b \log a)$, $a^c = \exp(c \log a)$ e quindi

$$a^b a^c = \exp(b \log a) \exp(c \log a) = \exp(b \log a + c \log a) = \exp((b+c) \log a) = a^{b+c};$$

la risposta è dunque affermativa.

(ii) Si ha

$$(a^{b+c})_k = \exp((b+c) \log a) \exp((b+c) 2k\pi i) = \exp(b \log a) \exp(c \log a) \exp(b 2k\pi i) \exp(c 2k\pi i) = (\exp(b \log a) \exp(b 2k\pi i)) (\exp(c \log a) \exp(c 2k\pi i)) = (a^b)_k (a^c)_k.$$

Ancora, la risposta è affermativa.

(iii) Prendiamo $(a^b)_k = \exp(b \log a) \exp(b 2k\pi i)$ ed $(a^c)_l = \exp(c \log a) \exp(c 2l\pi i)$; il prodotto è

$$(a^b)_k (a^c)_l = \exp(b \log a + c \log a) \exp(b 2k\pi i) \exp(c 2l\pi i) = \exp((b+c) \log a) \exp(2bk\pi i + 2cl\pi i) = a^{b+c} \exp(2(kb+lc)\pi i)$$

questo coincide con $(a^{b+c})_m = a^{b+c} \exp(2m(b+c)\pi i)$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$ se e solo se si ha

$$\exp(2(kb+lc)\pi i) = \exp(2m(b+c)\pi i) \iff 2(kb+lc)\pi i = 2m(b+c)\pi i + 2n\pi i$$

per qualche $n \in \mathbb{Z}$; semplificando si ha

$$kb+lc = m(b+c) + n$$

Insomma: la cosa si verifica se e solo se dati $k, l \in \mathbb{Z}$ esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ per cui si ha

$$kb+lc = m(b+c) + n \quad \text{equivalentemente} \quad (k-m)b + (l-m)c = n$$

Se $k = l$ si è visto sopra che la cosa è sempre possibile; supponiamo quindi $k \neq l$. Escluso il caso in cui uno dei due numeri complessi b, c sia nullo, per cui a^0 ha il solo valore 1, con $m = k$ si ha $l-m \neq 0$, e quindi $c = n/(l-m)$ deve essere razionale; analogamente con $m = l$ si ha $b = n/(k-m) \in \mathbb{Q}$. Se b, c sono entrambi irrazionali deve essere $k-m \neq 0$ ed $l-m \neq 0$. Insomma: se b o c sono razionali la cosa è sempre vera; altrimenti la condizione è quella data (che non è molto elegante, tuttavia è sufficiente in generale per decidere la questione). $\square$

ESERCIZIO 2. Si considera il campo vettoriale

$$\vec{F}_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dato da} \quad \vec{F}_\alpha(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} + \frac{y^\alpha}{1+x^2y^2}, \frac{1}{y} + \frac{x}{1+x^2y^2}, \frac{1}{z} \right),$$

dove $\alpha > 0$ è costante.

- (i) Calcolare $\nabla \times \vec{F}_\alpha(x, y, z)$, e dire per quali valori di $\alpha > 0$ il campo è irrotazionale.
- (ii) Dire per quali valori di α il campo è conservativo, e trovarne una primitiva.

Risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}_\alpha(x, y, z) &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & 1/x + y^\alpha/(1+x^2y^2) \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & 1/y + x/(1+x^2y^2) \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & 1/z \end{bmatrix} = \\ &= \vec{e}_3 \left(\frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{1+x^2y^2} + \frac{2x^2y^{\alpha+1}}{(1+x^2y^2)^2} \right) = \\ &= \vec{e}_3 \frac{(1-\alpha y^{\alpha-1})(1+x^2y^2) + 2x^2y(y^\alpha - y)}{(1+x^2y^2)^2}. \end{aligned}$$

Il numeratore dell'espressione sopra deve essere nullo per ogni $x, y > 0$. Posto $x = 1, y = 1$ si ottiene $(1 - \alpha)2 = 0$, nullo solo per $\alpha = 1$. Perché il campo sia irrotazionale condizione necessaria è quindi che sia $\alpha = 1$; e se $\alpha = 1$ si ha subito che il rotore è nullo.

(ii) Essendo $]0, +\infty[^3$ convesso, il campo vi è conservativo se e solo se vi è irrotazionale. Si può scrivere

$$\vec{F}_1(x, y, z) = (1/x, 1/y, 1/z) + (y/(1 + x^2y^2), x/(1 + x^2y^2));$$

il primo campo è a variabili separate con primitiva $\log(xyz)$; per il secondo è facile accorgersi che una primitiva è $\arctan xy$, quindi una primitiva è

$$u(x, y, z) = \log(xyz) + \arctan(xy);$$

per le altre basta aggiungere costanti. □

ESERCIZIO 3. È dato l'insieme piano

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 5 - e^x\}.$$

- (i) Disegnare E e trovarne l'area.
- (ii) Trovare le coordinate del baricentro geometrico di E .
- (iii) Trovare il volume dei solidi ottenuti facendo ruotare E attorno all'asse delle x , all'asse delle y , ed attorno alla retta di equazione $y = x + 4$.
- (iv) Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3 dx dy$$

- (iv) Trovare il momento d'inerzia del solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle y ,

Risoluzione. (i)

$$\text{Area}(E) = \int_E dx dy = \int_{x=0}^{x=\log 5} \left(\int_{y=0}^{y=5-e^x} dy \right) dx = \int_0^{\log 5} (5 - e^x) dx = 5 \log 5 - 4.$$

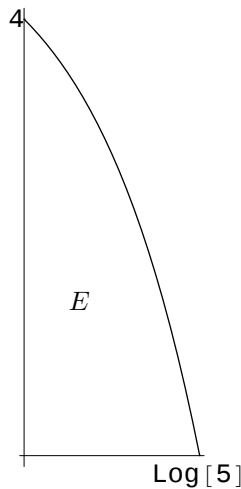


FIGURA 1. L'insieme E .

- (ii) Per l'ascissa del baricentro calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_E x dx dy &= \int_{x=0}^{x=\log 5} x(5 - e^x) dx = \frac{5}{2} \log^2 5 - [e^x(x - 1)]_0^{\log 5} = \frac{5}{2} \log^2 5 - 5(\log 5 - 1) - 1 = \\ &= \frac{5}{2} \log^2 5 - 5 \log 5 + 4 \end{aligned}$$

(prendendo dal formulario la primitiva di xe^x). Per l'ordinata calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_E y \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=\log 5} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=5-e^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\log 5} (5-e^x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\log 5} (25 - 10e^x + e^{2x}) dx = \frac{25}{2} \log 5 - 5(5-1) + \frac{1}{4}(25-1) = \frac{25}{2} \log 5 - 14.\end{aligned}$$

Quindi il baricentro è il punto G di coordinate:

$$G = \left(\frac{5 \log^2 5 / 2 - 5 \log 5 + 4}{5 \log 5 - 4}, \frac{25 \log 5 / 2 - 14}{5 \log 5 - 4} \right) = \left(\frac{5 \log^2 5 - 10 \log 5 + 8}{10 \log 5 - 8}, \frac{25 \log 5 - 28}{10 \log 5 - 8} \right).$$

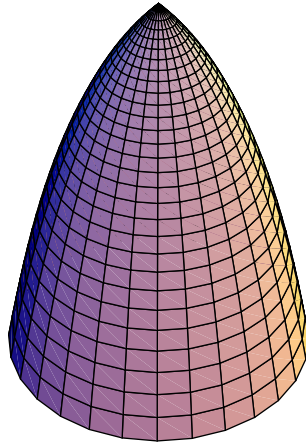


FIGURA 2. Il solido S_y .

(iii) Siano S_x , S_y ed S i tre solidi di rotazione. Allora

$$\text{Vol}(S_x) = 2\pi \int_E y \, dx \, dy = 25\pi \log 5 - 28\pi.$$

$$\text{Vol}(S_y) = 2\pi \int_E x \, dx \, dy = 10\pi \log^2 5 - 10\pi \log 5 + 8\pi.$$

Si noti che la retta di equazione $y = x+4$ lascia E tutto nel suo semipiano inferiore, essendo chiaramente $x+4 > 4-e^x$ per $x > 0$. Cerchiamo la distanza del baricentro da tale retta, distanza che è

$$\begin{aligned}d &= \frac{|y - x - 4|_{x=x_G, y=y_G}}{\sqrt{2}} = \frac{|25 \log 5 - 28 - 5 \log^2 5 + 10 \log 5 - 8 - 40 \log 5 + 32|}{2\sqrt{2}(5 \log 5 - 4)} = \\ &= \frac{5 \log^2 5 + 5 \log 5 - 4}{2\sqrt{2}(5 \log 5 - 4)}.\end{aligned}$$

Il volume è quindi

$$\text{Vol}(S) = 2\pi d \text{Area}(E) = \sqrt{2} \pi (5 \log^2 5 + 5 \log 5 - 4).$$

(iv) Si ha

$$\begin{aligned}\int_E x^3 \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=\log 5} x^3 \left(\int_{y=0}^{y=5-e^x} dy \right) dx = \int_0^{\log 5} x^3 (5-e^x) dx = \\ &= \frac{5}{4} \log^4 5 - \int_0^{\log 5} x^3 e^x dx = \log^4 5 - [e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)]_0^{\log 5} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{5}{4} \log^4 5 - 5 \log^3 5 + 15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 30 + (-6) = \\ & \frac{5}{4} \log^4 5 - 5 \log^3 5 + 15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 24. \end{aligned}$$

(v) Il momento d'inerzia vale:

$$\int_{S_y} (x^2 + z^2) dx dy dz = \int_{E \times [0, 2\pi]} r^3 dr d\vartheta dy = 2\pi \int_E r^3 dr dy =$$

(abbiamo introdotto un sistema di coordinate cilindriche con l'asse y che svolge il ruolo di asse di rotazione, cioè $x = r \cos \vartheta$, $y = y$, $z = r \sin \vartheta$)

$$= 2\pi \int_E x^3 dx dy = 2\pi \left(\frac{5}{4} \log^4 5 - 5 \log^3 5 + 15 \log^2 5 - 30 \log 5 + 24 \right).$$

□

ESERCIZIO 4. (i) Dimostrare il seguente

• TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE DI FUNZIONI A TERMINI POSITIVI. Se I è intervallo di $\mathbb{R}^n$, $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una successione di funzioni positive C -integrabili su I , e per ogni $x \in I$ si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, allora la funzione f è C -integrabile su I se e solo se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \int_I f_k$ degli integrali delle f_k è convergente; ed in tal caso si ha $\int_I f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I f_k$.

(ii) Usare (i) per trovare per quali $\alpha > 0$ l'integrale

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{dx dy}{1 - x^\alpha y^\alpha}$$

esiste finito, e per esprimere per tali α l'integrale con la somma di una serie. Calcolare esplicitamente tale integrale per $\alpha = 1/2$.

(iii) Se $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, xy < 1\}$ dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito

$$\int_E \frac{dx dy}{1 - x^\alpha y^\alpha}.$$

Risoluzione. (i)

Dimostrazione. Sia $g_m = \sum_{k=0}^m f_k$. La successione g_m è crescente, dato che $g_{m+1}(x) - g_m(x) = f_{m+1}(x) \geq 0$; inoltre ogni g_m è C -integrabile essendo somma finita di funzioni C -integrabili, e si ha

$$\int_I g_m = \sum_{k=0}^m \int_I f_k.$$

La successione $g_m(x)$, per ogni fissato $x \in I$, converge ad $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ (per definizione di somma di una serie). Il teorema della convergenza monotona assicura allora che f è integrabile se e solo se la successione degli integrali $\int_I g_m$ converge; ma tale successione è esattamente la successione delle ridotte della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \int_I f_k$, e quindi converge se e solo se la serie converge. □

(ii) Se $x, y \in [0, 1[$ si ha, per ogni $\alpha > 0$, $0 \leq x^\alpha y^\alpha < 1$ e quindi

$$\frac{1}{1 - x^\alpha y^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k\alpha} y^{k\alpha}.$$

la serie è a termini positivi e composta di funzioni continue e quindi integrabili sul compatto $[0, 1] \times [0, 1]$. la serie degli integrali è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1] \times [0,1]} x^{k\alpha} y^{k\alpha} dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{k\alpha} dx \int_0^1 y^{k\alpha} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k\alpha + 1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/\alpha^2}{(k + 1/\alpha)^2},$$

serie chiaramente convergente dato che il termine generale è asintotico ad α^2/k^2 ; l'integrale esiste quindi finito per ogni $\alpha > 0$. Per $\alpha = 1/2$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(k+2)^2} = 4 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = 4 \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = \frac{2}{3}(\pi^2 - 6).$$

(iii) Dato che in E si ha sempre $0 \leq xy < 1$ si ha $1/(1-x^\alpha y^\alpha) \geq 1$ per ogni $(x, y) \in E$. Se l'integrale di $1/(1-x^\alpha y^\alpha)$ esistesse finito su E per confronto anche l'integrale di 1 su E sarebbe finito, cioè E avrebbe area finita, cosa notoriamente falsa:

$$\int_E dx dy = \int_{x=0}^{x+\infty} \left(\int_{y=0}^{y=1/x} dy \right) dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Quindisi E l'integrale non converge per nessun $\alpha > 0$. $\square$

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA- I COMPITINO-4 NOVEMBRE 2006

ESERCIZIO 5. Calcolare il logaritmo principale $\log(z^i)$ del valore principale delle potenze z^i per $z = 1 + i$ e per $z = e^4$. Dire poi per quali $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha $\log(z^i) = i \log z$ (la potenza ha il valore principale e log è il logaritmo principale) e disegnare tale insieme sul piano.

Risoluzione. Si ha

$$(1+i)^i = \exp(i \log(1+i)) = \exp(i(\log \sqrt{2} + i\pi/4)) = \exp(-\pi/4 + i \log 2/2) = e^{-\pi/4 + i \log 2/2}.$$

Quindi $-\pi/4 + i \log 2/2$ è un logaritmo di $(1+i)^i$; essendo $-\pi < 0 < \log 2/2 < \pi$, esso è proprio il logaritmo principale. Quindi si ha

$$\log(1+i)^i = -\frac{\pi}{4} + i \frac{\log 2}{2}.$$

Si ha poi:

$$(e^4)^i = \exp(i \log e^4) = \exp(4i) = e^{4i}.$$

Questo numero ha modulo 1 ed uno dei suoi argomenti è 4, ovviamente non quello principale dato che $\pi < 4$. Ma si ha $-\pi < 4 - 2\pi < \pi$, dato che $\pi < 4 < 3\pi$. Quindi $\arg(e^{4i}) = 4 - 2\pi$ e pertanto

$$\log(e^{4i}) = i(4 - 2\pi).$$

Si ha poi $z^i = \exp(i \log z) = \exp(i(\log |z| + i \arg z)) = \exp(-\arg z + i \log |z|)$, e quindi $\log z^i = -\arg z + i(\log |z| - 2k\pi)$, dove l'intero k è tale che si abbia $-\pi < \log |z| - 2k\pi \leq \pi$. Invece è $i \log z = i(\log |z| + i \arg z) = -\arg z + i \log |z|$, che coincide con il precedente valore se e solo se $k = 0$, e cioè se e solo se si ha

$$-\pi < \log |z| \leq \pi \iff e^{-\pi} < |z| \leq e^\pi,$$

insieme che ovviamente è una corona circolare. $\square$

ESERCIZIO 6. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha il campo vettoriale $\vec{F}_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da:

$$\vec{F}_\alpha(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y+\alpha z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + e^{y+z}, e^{y+z} \right)$$

Calcolare il rotore di $\vec{F}_\alpha$ e dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo è irrotazionale. Trovare le primitive per tali α (2 punti).

Risoluzione. Osserviamo anzitutto che il campo si spezza come

$$\vec{F}_\alpha(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y+\alpha z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, 0 \right) + (0, e^{y+z}, e^{y+z})$$

e che banalmente il secondo campo è conservativo, avendo come primitiva la funzione $v(x, y, z) = e^{y+z}$

Per il rotore si ha

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}_\alpha(x, y, z) &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & x/\sqrt{1+x^2+y^2} \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & (y+\alpha z)/\sqrt{1+x^2+y^2} \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \frac{-\alpha}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \\ &\vec{e}_3 \left(\frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \vec{e}_1 \end{aligned}$$

Ne segue che il campo è irrotazionale se e solo se $\alpha = 0$. Il campo che rimane è quindi

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, 0 \right) + (0, e^{y+z}, e^{y+z}),$$

con primitiva

$$\sqrt{1+x^2+y^2}+e^{y+z}.$$

□

ESERCIZIO 7. Sia $E = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \cos^2 x\}$, e sia S il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y .

- (i) Disegnare E e trovarne l'area.
- (ii) Descrivere le y -sezioni di S e trovarne l'area.
- (iii) Calcolare gli integrali

$$a = \int_E x \, dx \, dy; \quad b = \int_E xy \, dx \, dy.$$

- (iv) Trovare il volume di S , sia usando uno dei precedenti integrali che usando (ii).
- (v) Ricondurre il calcolo della y -coordinata del baricentro di S ad uno degli integrali in (iii).

Risoluzione. (i)

$$\text{Area}(E) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

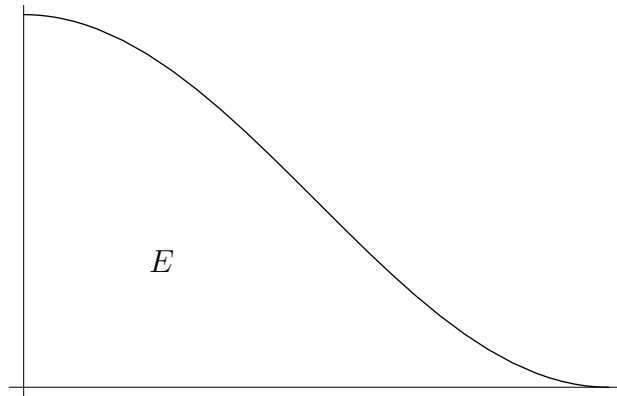


FIGURA 3. L'insieme E .

(ii) Le y -sezioni di S sono, per $0 \leq y \leq 1$, dischi il cui raggio è la soluzione $x \in [0, \pi/2]$ dell'equazione $y = \cos^2 x$ e cioè $x = \arccos \sqrt{y}$; l'area vale $\pi \arccos^2 \sqrt{y}$.

(iii) Si ha

$$\begin{aligned} a &= \int_E x \, dx \, dy = \int_{x=0}^{x=\pi/2} x \left(\int_{y=0}^{y=\cos^2 x} dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(1 + \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) \, dx = \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2 - 4}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \int_E xy \, dx \, dy = \int_{x=0}^{x=\pi/2} x \left(\int_{y=0}^{y=\cos^2 x} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos^4 x \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} x(1 + \cos(2x))^2 \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (x + 2x \cos(2x) + x \cos^2(2x)) \, dx = \\ &= \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{4} \left[\frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} x(1 + \cos(4x)) \, dx = \\ &= \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\pi^2}{16 \cdot 8} + \frac{1}{16} \left[\frac{\cos(4x)}{16} + \frac{x}{4} \sin(4x) \right]_0^{\pi/2} = \end{aligned}$$

$$\frac{3}{128}\pi^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3\pi^2 - 16}{128}.$$

(dal formulario si sono prese le primitive di $x \cos(ax)$ con $a = 1, 2$)

(iv) Per il teorema di Guldino il volume di S vale

$$\text{Volume}(S) = 2\pi a = \frac{\pi}{8}(\pi^2 - 4).$$

Tale volume si deve poter ottenere anche integrando le aree delle y -sezioni; cioè si deve avere:

$$\text{Volume}(S) = \int_0^1 \pi(\arccos(\sqrt{y}))^2 dy;$$

per il calcolo di tale integrale una sostituzione naturale è $y = \cos^2 t$ con la quale esso diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^0 t^2 (-2 \cos t \sin t) dt &= \int_0^{\pi/2} t^2 \sin(2t) dt = \left[-\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \cos(2t) + \frac{t}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 4}{8} \end{aligned}$$

(una primitiva di $t^2 \sin(2t)$ è stata tratta dal formulario).

(v) Per la y -coordinata del baricentro occorre l'integrale

$$\int_S y \, dx \, dy \, dz = \int_{E \times [0, 2\pi]} y \, r \, dr \, dy \, d\vartheta = 2\pi \int_E r y \, dr \, dy = 2\pi \int_E x y \, dx \, dy = 2\pi b = \frac{\pi}{64}(3\pi^2 - 16).$$

La y -coordinata del baricentro è poi

$$y_G = \frac{1}{8} \frac{3\pi^2 - 16}{\pi^2 - 4}.$$

□

ESERCIZIO 8. Si consideri l'integrale

$$I_\alpha = \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{dx \, dy}{(1 - xy)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1).$$

- (i) Enunciare il teorema di Tonelli.
- (ii) Servendosi di (i), dire per quali $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'integrale esiste finito, calcolandolo per $\alpha = 1/2$.
- (iii) Mostrare che la posizione $xy = u$, $y = v$ definisce un diffeomorfismo del primo quadrante aperto in se stesso; usarlo per trasformare l'integrale $I(\alpha)$, e riottenere i valori di $\alpha \neq 1$ per cui esso esiste finito.
- (iv) Se $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < x^2 y < 1\}$, per quali $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esiste finito l'integrale

$$\int_F \frac{dx \, dy}{(1 - xy)^\alpha}?$$

Risoluzione. (i) Per l'enunciato del teorema di Tonelli si rimanda al testo.

(ii) Si ha (notato che l'integrando è positivo):

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1} \frac{dy}{(1 - xy)^\alpha} \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\frac{(1 - xy)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right]_{y=0}^{y=1} \frac{dx}{-x} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^{1-\alpha}}{x} dx. \end{aligned}$$

Per $x \rightarrow 0$ l'integrando tende all'opposto della derivata in $x = 0$ della funzione $(1 - x)^{1-\alpha}$, e cioè a $1 - \alpha$; l'integrando si scrive anche $1/x - (1 - x)^{1-\alpha}/x$; per x vicino ad 1 si deve controllare il termine $(1 - x)^{1-\alpha}/x$, asintotico ad $(1 - x)^{1-\alpha}$ e quindi integrabile vicino ad 1 se e solo se $1 - \alpha > -1 \iff \alpha < 2$. Ne segue che l'integrale precedente esiste finito se e solo se $\alpha < 2$ (per $\alpha \neq 1$; ma sappiamo per altra via che l'integrale è finito anche per $\alpha = 1$), e quindi $I(\alpha)$ esiste finito se e solo se $\alpha < 2$. Per $\alpha = 1/2$ il precedente integrale unidimensionale è

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} dx &= (\text{posto } 1 - x = t^2, t \in [0, 1]) = 2 \int_1^0 \frac{1-t}{1-t^2} (-2t) dt = \\ 4 \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt &= 4 - 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 4 - 4 \log 2. \end{aligned}$$

(iii) Si scrive subito l'inversa $x = u/v$, $y = v$. Insomma: $(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u/v, v)$ è C^∞ di $]0, +\infty[^2$ in se stesso, con inversa $\phi^{-1}(x, y) = (xy, y)$. La matrice jacobiana è

$$\phi'(u, v) = \begin{bmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con determinante} \quad \det \phi'(u, v) = \frac{1}{v}.$$

Il quadrato proviene da $\phi^{-1}([0, 1] \times [0, 1]) = \{(u, v) \in]0, +\infty[^2 : 0 < u/v < 1, 0 < v < 1\}$, il triangolo T nel piano (u, v) di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. L'integrale diventa

$$I_\alpha = \int_T \frac{1}{(1-u)^\alpha} \frac{dudv}{v} = \int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{(1-u)^\alpha} \int_{v=u}^{v=1} \frac{dv}{v} = \int_0^1 \frac{-\log u}{(1-u)^\alpha};$$

Attorno a $u = 0$ l'integrando è asintotico a $-\log u$ e quindi l'integrale converge; attorno ad 1 l'integrando è asintotico a $-(u-1)/(1-u)^\alpha = (1-u)^{1-\alpha}$, e quindi converge se e solo se $1-\alpha > -1 \iff \alpha < 2$, come già trovato.

(iv) Usando ancora il teorema di Tonelli si trova:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{dxdy}{(1-xy)^\alpha} &= \int_{x=1}^{x=\infty} \left(\int_{y=0}^{y=1/x^2} \frac{dy}{(1-xy)^\alpha} \right) dx = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_1^\infty [(1-xy)^{1-\alpha}]_{y=0}^{y=1/x^2} \frac{dx}{-x} = \frac{1}{1-\alpha} \int_1^\infty \frac{1-(1-1/x)^{1-\alpha}}{x} dx \end{aligned}$$

Per studiare la convergenza di questo integrale facciamo il cambiamento di variabile $1/x = t$; l'integrale diventa

$$\int_1^0 t(1-(1-t)^{1-\alpha}) \frac{dt}{-t^2} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{1-\alpha}}{t} dt,$$

già studiato sopra, convergente per $\alpha < 2$. L'integrale su F esiste finito se e solo se $\alpha < 2$. $\square$

OSSERVAZIONE. Molti non hanno assolutamente capito l'enunciato del teorema di Tonelli, e lo enunciano come

. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è C -integrabile su I se e solo se $|f|$ è integrabile su I (!!!!!)

enunciato TOTALMENTE FALSO, o lo enunciano come tautologia, che f è L -integrabile se e solo se $|f|$ è L -integrabile. Come sottolineato a lezione, il teorema di Tonelli è invece un enunciato profondo ed importante, che permette di dedurre l'integrabilità assoluta di una funzione misurabile dall'esistenza dell'integrale iterato del suo modulo; nulla di simile vale per integrali alla Riemann!

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA-II PRECOMPITINO-30 NOVEMBRE 2006

ESERCIZIO 9. Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo che sia $u(0) = 0$, ma $u(t) \neq 0$ se $t \neq 0$. Mostrare che su nessun intorno I di 0 esistono funzioni continue $p, q \in C^0(I)$ tali che $v(t) = tu(t)$ sia soluzione dell'equazione $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Risoluzione. Si nota che $v(0) = 0$ e che, avendosi $v'(t) = u(t) + tu'(t)$ si ha anche $v'(0) = u(0) + 0u'(0) = 0$. In $t = 0$ quindi v è nulla assieme alla sua derivata prima; ogni equazione lineare omogenea del secondo ordine ha la soluzione nulla; per unicità della soluzione del problema di Cauchy una soluzione non identicamente nulla non può avere valore 0 e derivata 0 nello stesso punto; e v non è identicamente nulla essendo $v(t) \neq 0$ per $t \neq 0$. $\square$

ESERCIZIO 10. Si considera il solido

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \geq 1, z \leq 2 \left(\sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\}.$$

Chiamiamo v il volume di S , che supponiamo noto.

- (i) Disegnare il solido, e descriverlo a parole (è di rotazione ...).
- (ii) La frontiera di S ha due porzioni: una A sulla superficie $H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ ed una B sulla superficie $z = 2(\sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2})$. Trovare il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = (z - \log(x^2 + y^2))\vec{e}_3$ uscente da S attraverso A e quello che esce attraverso B .
- (iii) Descrivere con cura il bordo di A , avendo orientato A in modo che la normale positiva sia quella esterna. Calcolare la circuitazione di $\nabla \times \vec{F}$ su tale bordo, anche per via diretta, oltre che con la formula di Stokes.

Risoluzione. (i) È di rotazione perché le disequazioni che lo definiscono sono tra funzioni che dipendono da $\sqrt{x^2 + y^2}$. Per trovare l'insieme piano E la cui rotazione porge S risolviamo il sistema di disequazioni:

$$x \geq 0; x^2 - z^2 \geq 1 \iff x^2 \geq 1 + z^2, z \leq 2(\sqrt{2} - x) \iff x \leq \sqrt{2} - z/2 \iff x^2 \leq (\sqrt{2} - z/2)^2,$$

da cui

$$(\sqrt{2} - z/2)^2 \geq 1 + z^2 \iff 2 - \sqrt{2}z + \frac{z^2}{4} \geq 1 + z^2 \iff \frac{3}{4}z^2 + \sqrt{2}z - 1 \leq 0,$$

$$3z^2 + 4\sqrt{2}z - 4 \leq 0 \iff z_1 = -2\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3} \leq z \leq 2\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3} = z_2,$$

Si ha

$$E = \{(x, z) : z \in [z_1, z_2], \sqrt{1 + z^2} \leq x \leq 2(\sqrt{2} - x)\};$$

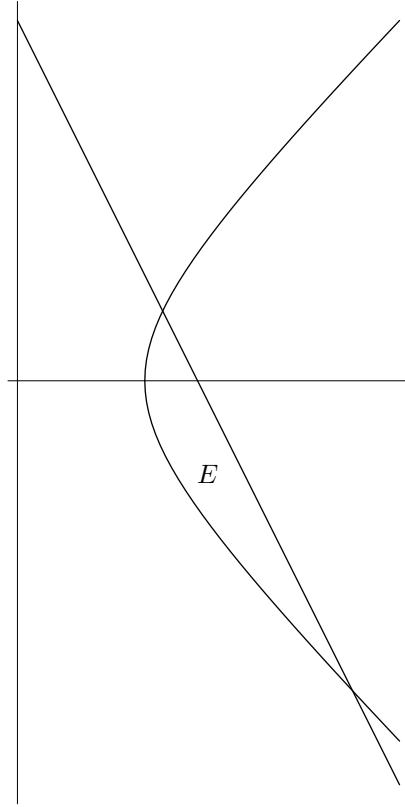


FIGURA 4. L'insieme E , tra l'iperbole e la retta.

per futuro uso si noti che le ascisse dei punti di intersezione fra la retta e l'iperbole sono

$$a = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}; \quad b = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3}.$$

L'insieme S è ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z l'insieme E di figura, tra l'iperbole e la retta.

Sono i punti sotto al cono $z = 2(\sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2})$, nella componente del complementare dell'iperboloide ad una falda $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ che non contiene l'asse z . Non faccio il disegno di S , l'immagine di S è facilmente deducibile da E , e da un punto di vista non abbastanza vicino all'asse z sembrerebbe comunque solo un tronco di cono.

(ii) Poiché la divergenza del campo vale 1, la somma dei flussi uscenti è pari al volume di S .

Per trovare il flusso uscente da A , parametrizziamo cartesianamente A come $z = 2(\sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in C$, dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$, corona circolare di raggio interno $a = a =$

$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$ e raggio esterno $b = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$. Si ha per il flusso

$$\int_C \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2(\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}) - \log(x^2+y^2) & * & * \end{bmatrix} dx dy =$$

(non sono state calcolate le derivate all'ultima riga in quanto irrilevanti)

$$\begin{aligned} & \int_C \left(2(\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}) - \log(x^2+y^2) \right) dx dy = \\ & \int_{[a,b] \times [0,2\pi]} (2(\sqrt{2}-r) - 2r \log r) r dr d\vartheta = 2\pi \int_a^b (2\sqrt{2}r - 2r^2 - r \log r) dr = \\ & 2\pi \left(\sqrt{2}[r^2]_a^b - \frac{2}{3}[r^3]_a^b - [r^2 \log r]_a^b + \int_a^b r^2 \frac{dr}{r} \right) = \\ & 2\sqrt{2}\pi(b^2 - a^2) - \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3) - 2\pi(b^2 \log b - a^2 \log a) + \pi(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Il flusso uscente da A è allora $v -$ (valore precedente)

(iii) Consideriamo la parametrizzazione di A come superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare l'arco di iperbole di equazione $x = \sqrt{1+z^2}$, $z \in [z_1, z_2]$, attorno all'asse z ; le equazioni parametriche sono

$$x = \sqrt{1+\zeta^2} \cos \vartheta; y = \sqrt{1+\zeta^2} \sin \vartheta; z = \zeta, \quad (\zeta, \vartheta) \in [z_1, z_2] \times [0, 2\pi].$$

Con questa parametrizzazione si vede subito che il bordo di A consta di

- L'arco di iperbole $(\sqrt{1+\zeta^2}, 0, \zeta)$, $\zeta \in [z_1, z_2]$, percorso dalla quota z_1 alla quota z_2 ;
item Il circolo $(\sqrt{1+z_2^2} \cos \vartheta, \sqrt{1+z_2^2} \sin \vartheta, z_2)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ alla quota z_2 percorso nel verso antiorario se visto dall'asse z positivo;
- L'arco di iperbole precedente percorso nel verso opposto;
- Il circolo $(\sqrt{1+z_1^2} \cos \vartheta, \sqrt{1+z_1^2} \sin \vartheta, z_1)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ alla quota z_1 percorso nel verso orario se visto dall'asse z positivo

Naturalmente non sappiamo se l'orientazione di A sia quella con la normale esterna; calcolando il vettore normale

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\zeta \cos \vartheta}{\sqrt{1+\zeta^2}} & -\sqrt{1+\zeta^2} \sin \vartheta \\ \vec{e}_2 & \frac{\zeta \sin \vartheta}{\sqrt{1+\zeta^2}} & \sqrt{1+\zeta^2} \cos \vartheta \\ \vec{e}_3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\vec{e}_1 \sqrt{1+\zeta^2} \cos \vartheta - \vec{e}_2 \sqrt{1+\zeta^2} \sin \vartheta + \vec{e}_3 \zeta;$$

calcolato per $\zeta = 0$ e $\vartheta = 0$ tale vettore è $-\vec{e}_1$ che effettivamente punta verso l'asse z e quindi verso l'esterno di S .

Il rotore di $\vec{F}$ si calcola facilmente ed è $2(-y, x, 0)/(x^2+y^2)$. La sua circuitazione sulle due circonferenze è di calcolo diretto immediato: sulla circonferenza superiore, detto $r_2 = \sqrt{1+z_2^2}$ il raggio si ha

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{-r_2 \cos \vartheta (-r_2 \cos \vartheta) + r_2 \sin \vartheta (r_2 \cos \vartheta)}{r_2^2} d\vartheta = 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 4\pi;$$

sulla circonferenza inferiore che va percorsa nel verso opposto a quello della parametrizzazione data si ha

$$-2 \int_0^{2\pi} \frac{-r_1 \cos \vartheta (-r_1 \cos \vartheta) + r_1 \sin \vartheta (r_1 \cos \vartheta)}{r_1^2} d\vartheta = -2 \int_0^{2\pi} d\vartheta = -4\pi,$$

e complessivamente la circuitazione sul bordo è nulla. Con la formula di Stokes: sappiamo che il campo $(-y, x, 0)/(x^2+y^2)$ è irrotazionale (è il nostro esempio standard di campo irrotazionale non conservativo, quello legato all'induzione magnetica del filo!), quindi $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})(x, y, z) = \nabla \times (2(-y, x, 0)/(x^2+y^2)) = 0$; il flusso del rotore è nullo, come la circuitazione trovata. $\square$

ESERCIZIO 11. Si consideri l'equazione differenziale

$$(Eq) \quad y'' = \frac{\sinh y}{\cosh^3 y}.$$

- (i) Posto $p = y'$ si scriva il sistema equivalente, e si dica se sono verificate le ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale.
- (ii) Mostrare che se φ è soluzione anche $-\varphi$ è soluzione. Trovare le soluzioni costanti.
- (iii) Trovare l'integrale dell'energia, e disegnarne alcuni insiemi di livello, in particolare quello contenente $(0, 0)$, che è unione di due grafici di funzioni ben note, quali?
- (iv) Trovare i livelli di energia per cui le soluzioni massimali hanno derivata limitata
- (v) Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da (Eq) con $y(0) = \log 2$ ed $y'(0) = 0$.

Risoluzione. (i) Si ha

$$\begin{cases} y' &= p \\ p' &= \frac{\sinh y}{\cosh^3 y} \end{cases}.$$

Il secondo membro è la funzione vettoriale $f(y, p) = (p, \sinh y / \cosh^3 y)$ le cui derivate parziali sono $\partial_y f(y, p) = (0, 1/\cosh^3 y - 3 \sinh^2 y / \cosh^4 y)$ e $\partial_p f(y, p) = (1, 0)$. La seconda derivata è costante e quindi limitata. La prima è pure limitata:

$$\frac{1}{\cosh^3 y} - 3 \frac{\sinh^2 y}{\cosh^4 y} = \frac{1}{\cosh^3 y} - \frac{3}{\cosh^2 y} + \frac{3}{\cosh^4 y},$$

funzione continua che tende a 0 all'infinito e quindi è limitata. Le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale sono quindi verificate, anche nella forma debole.

(ii) Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione, anche $\psi(t) = -\varphi(t)$ è soluzione: si ha $\psi''(t) = -\varphi''(t)$ e anche $\sinh(\psi(t)) / \cosh^3 \psi(t) = -\sinh \varphi(t) / \cosh^3 \varphi(t)$ per la disparità del $\sinh$ e la parità del $\cosh$. La costante 0 è l'unica costante che sia soluzione.

(iii) Moltiplicando ambo i membri per y' ed integrando si ottiene

$$\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2 \cosh^2 y} = c, \quad \text{quindi} \quad E(y, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2 \cosh^2 y}$$

è l'integrale dell'energia. È ovvio che E assume solo valori strettamente positivi, anzi tutti i valori strettamente positivi (si ha $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} 1/(2 \cosh^2 y) = 0$). Conviene esplicitare in termini di p ; se $E(y, p) = c > 0$ si ha $p^2 = 2c - 1/\cosh^2 y$; se $2c > 1$ il secondo membro è sempre strettamente positivo, qualunque sia y , e si ricava $p = \pm \sqrt{2c - 1/\cosh^2 y}$, mai nulla, con grafico facile a farsi (è pari, ha limite $\sqrt{2c}$ all'infinito, è crescente per $y \in [0, +\infty[$, ecc.). Se $2c = 1 = 2E(0, 0)$ si ha $p^2 = 1 - 1/\cosh^2 y = (\cosh^2 y - 1)/\cosh^2 y = \sinh^2 y / \cosh^2 y = (\tanh y)^2$, cioè $p = \pm \tanh y$; l'insieme di livello per $(0, 0)$ è unione dei due grafici di $p = \pm \tanh y$. Se $2c < 1$ si hanno due rami simmetrici rispetto all'asse p ; se $|y| \geq \text{seccosh}(1/\sqrt{2c})$ si ha $p = \pm \sqrt{2c - 1/\cosh^2 y}$. Studiando i segni di p' e di y' è facile segnare sulle traiettorie il verso di percorrenza.

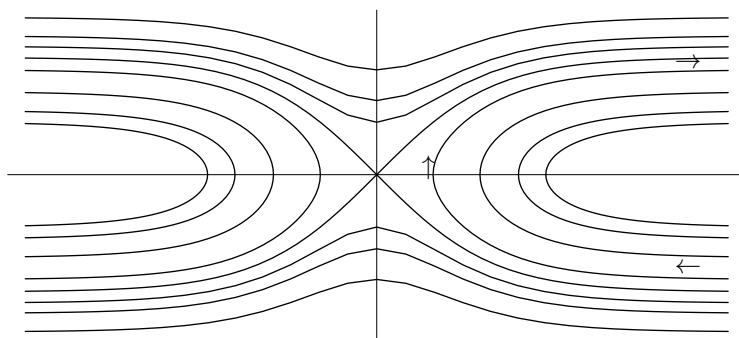


FIGURA 5. Alcune curve di livello dell'integrale dell'energia.

(iv) Lungo ogni soluzione massimale la derivata prima si mantiene limitata, ed il suo estremo superiore è $\sqrt{2E}$, se E è il valore dell'energia lungo la soluzione.

(v) Si ha costantemente

$$\frac{(\varphi'(t))^2}{2} + \frac{1}{2 \cosh^2 \varphi(t)} = 0 + \frac{1}{2(2 + 1/2)^2/4} = \frac{8}{25},$$

da cui, posto $a = 4/5$:

$$(\varphi'(t))^2 = a^2 - \frac{1}{\cosh^2 \varphi(t)} = a^2 - \frac{1}{\cosh^2 \varphi(t)}, \quad \text{che porge } \varphi'(t) = \pm \sqrt{a^2 - 1/\cosh^2 \varphi(t)}.$$

Studiando il verso di percorrenza delle traiettorie studiate in (iii) si comprende come si dovrà scegliere il segno: $+$ per $t > 0$, il segno $-$ per $t < 0$. Si ha, separando le variabili:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(a \cosh \varphi(t))^2 - 1/\cosh \varphi(t)}} &= \\ 1 &\iff \frac{\cosh \varphi(t) \varphi'(t)}{\sqrt{(a \cosh \varphi(t))^2 - 1}} = 1. \end{aligned}$$

Scriviamo, ricordando che si ha $a < 1$:

$$\begin{aligned} a^2 \cosh^2 \varphi(t) - 1 &= a^2(1 + \sinh^2 \varphi(t)) - 1 = a^2 - 1 + a^2 \sinh^2 \varphi(t) = \\ a^2 \sinh^2 \varphi(t) - (1 - a^2) &= (1 - a^2)((a/\sqrt{1 - a^2}) \sinh \varphi(t))^2 - 1, \end{aligned}$$

di modo che l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\cosh \varphi(t) \varphi'(t)}{\sqrt{1 - a^2} \sqrt{(a/\sqrt{1 - a^2}) \sinh \varphi(t))^2 - 1}} &= 1 \iff \\ \iff \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \frac{\cosh \varphi(t) \varphi'(t)}{\sqrt{(a/\sqrt{1 - a^2}) \sinh \varphi(t))^2 - 1}} &= a, \end{aligned}$$

posto $k = a/\sqrt{1 - a^2}$, integrando ambo i membri fra 0 e t si trova

$$\text{settcosh}(k \sinh \varphi(t)) - \text{settcosh}(k \sinh \log 2) = a t,$$

Posto per un istante $c = \text{settcosh}(k \sinh \log 2)$ si ha

$$k \sinh \varphi(t) = \cosh(c + a t) \quad \text{da cui} \quad \sinh \varphi(t) = \frac{\cosh(c + a t)}{k},$$

ed infine

$$\varphi(t) = \text{settsinh}\left(\frac{\cosh(c + a t)}{k}\right).$$

Rimangono da calcolare le costanti; essendo $a = 4/5$ si ha $k = 4/3$, $k \sinh(\log 2) = 1$, $c = \text{settsinh}(1) = 0$ per cui si ha

$$\varphi(t) = \text{settsinh}(3 \cosh(4t/5)/4).$$

Verifichiamo che effettivamente φ è soluzione. Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{(3/5) \sinh(4t/5)}{\sqrt{1 + (9/16) \cosh^2(4t/5)}}; \\ \varphi''(t) &= \frac{12}{25} \frac{\cosh(4t/5)}{\sqrt{1 + (9/16) \cosh^2(4t/5)}} - \frac{3}{10} \sinh(4t/5) \frac{2(9/16)(4/5) \cosh(4t/5) \sinh(4t/5)}{(1 + (9/16) \cosh^2(4t/5))^{3/2}} = \\ &= \cosh(4t/5) \frac{(12/25)(1 + (9/16) \cosh^2(4t/5)) - 27/100 \sinh^2(4t/5)}{(1 + (9/16) \cosh^2(4t/5))^{3/2}} = \\ &= \cosh(4t/5) \frac{(12/25) + 27/100(\cosh^2(4t/5)) - \sinh^2(4t/5)}{(1 + (9/16) \cosh^2(4t/5))^{3/2}} = \\ &= \frac{(3/4) \cosh(4t/5)}{(1 + (9/16) \cosh^2(4t/5))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ricordando che si ha $\cosh(\text{settsinh}(u)) = \sqrt{1 + u^2}$ per ogni $u \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cosh \varphi(t) = \sqrt{1 + (9/16) \cosh^2(4t/5)}, \quad \text{mentre} \quad \sinh \varphi(t) = \frac{3}{4} \cosh(4t/5),$$

la verifica è terminata.

Disegniamo ora il grafico della soluzione e della sua derivata prima:

Attenzione a non confondere il *piano delle fasi*, in questo caso il piano (y, p) in cui sono state disegnate le curve di livello dell'integrale dell'energia, con il piano (t, y) della figura sopra dove sta il grafico della soluzione in funzione del tempo; nel piano delle fasi ci sono le traiettorie, curve parametriche parametrizzate da $(\varphi(t), \varphi'(t))$, soluzioni massimali del sistema autonomo associato all'equazione data,

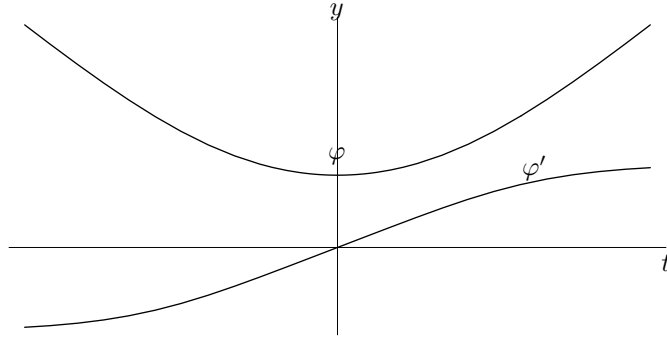


FIGURA 6. Grafici della soluzione e della derivata prima.

di cui l'integrale primo ci dà l'aspetto ma non la legge di percorrenza, da non confondere con le soluzioni $\varphi(t)$, in questo caso funzioni scalari di classe C^2 . $\square$

ESERCIZIO 12. Tre radionuclidi X, Y, Z hanno la stessa costante di decadimento $\alpha > 0$; indichiamo con $x(t), y(t), z(t)$ i numeri di atomi dei tre elementi all'istante t ; x decade in y ed y decade in z di modo che l'evoluzione del sistema obbedisce alle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\alpha x \\ \dot{y} &= \alpha x - \alpha y \\ \dot{z} &= \alpha y - \alpha z \end{cases}$$

- (i) Supponendo che all'istante $t = 0$ siano presenti solo x_0 atomi di X , e nessuno degli altri due, trovare $x(t), y(t), z(t)$.
- (ii) Supponiamo che gli atomi x vengano rinnovati ad un tasso di m atomi per unità di tempo, dove $m > 0$ è costante, di modo che la prima equazione diventa $\dot{x} = -\alpha x + m$, e le altre restano invariate. Sempre supponendo che all'istante 0 ci siano solo x_0 atomi di X , determinare $x(t), y(t), z(t)$.

Risoluzione. (i) La matrice del sistema si scrive

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} = -\alpha 1_3 + N \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

per cui si ha

$$e^{tA} = e^{-\alpha t} \left(1_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \right) = e^{-\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ \alpha^2 t^2/2 & \alpha t & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(x(t), y(t), z(t)) = e^{tA}(x_0, 0, 0) = (e^{-\alpha t}x_0, \alpha t e^{-\alpha t}x_0, e^{-\alpha t} \alpha^2 t^2/2 x_0) = x_0 e^{-\alpha t} (1, \alpha t, \alpha^2 t^2/2).$$

La nuova soluzione è quella che si ottiene sommando alla precedente la soluzione della non omogenea nulla per $t = 0$. Tale soluzione si trova ad esempio con il metodo di variazione delle costanti ed è

$$\int_0^t e^{(t-s)A}(m, 0, 0) ds = m \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (1, \alpha(t-s), \alpha^2(t-s)^2/2) ds.$$

Integriamo:

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds = \left[\frac{e^{-\alpha(t-s)}}{-\alpha} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha};$$

(poniamo $u = t - s$ e guardiamo sul formulario le primitive di $-e^{-\alpha u}u$ e di $-e^{-\alpha u}u^2$)

$$\begin{aligned} - \int e^{-\alpha u} u du &= -e^{-\alpha u} \left(\frac{u}{-\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \quad \text{da cui} \quad \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \alpha(t-s) ds = \\ &= -\alpha \left[e^{-\alpha(t-s)} \left(\frac{t-s}{-\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]_{s=0}^{s=t} = -\alpha \left(-\frac{1}{\alpha^2} - e^{-\alpha t} \left(-\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right) = -(t + 1/\alpha) e^{-\alpha t} + 1/\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int e^{-\alpha u} u^2 du &= -e^{-\alpha u} \left(\frac{u^2}{-\alpha} - \frac{2u}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \quad \text{da cui} \quad \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \alpha^2 (t-s)^2 / 2 ds = \\
&= -\frac{\alpha^2}{2} \left[e^{-\alpha(t-s)} \left(\frac{(t-s)^2}{-\alpha} - \frac{2(t-s)}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right]_{s=0}^{s=t} = -\frac{\alpha^2}{2} \left(-\frac{2}{\alpha^3} - e^{-\alpha t} \left(-\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right) = \\
&= -\frac{e^{-\alpha t}}{2} (\alpha t^2 + 2t + 1/\alpha) + 1/\alpha.
\end{aligned}$$

Ecco infine la soluzione:

$$\begin{bmatrix} x_0 e^{-\alpha t} - \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha} \\ x_0 \alpha t e^{-\alpha t} - m(t + 1/\alpha) e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha} \\ x_0 e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 t^2}{2} - m \frac{e^{-\alpha t}}{2} (\alpha t^2 + 2t + 1/\alpha) + \frac{m}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Si noti che i numeri dei tre nuclidi tendono tutti al comune valore m/α per $t \rightarrow +\infty$. □

ESERCIZIO 13. Supponiamo che l'equazione differenziale

$$y'' + 4t y' + q(t) y = 0 \quad q \in C^0(\mathbb{R}),$$

abbia due soluzioni della forma $u(t)$ e $v(t) = t u(t)$, dove $u \in C^2(\mathbb{R})$ non è identicamente nulla. Si possono determinare u e q ?

Risoluzione. Imponiamo che $v(t) = t u(t)$ sia soluzione sapendo che u è soluzione: si ha $v'(t) = u(t) + t u'(t)$, $v''(t) = 2u'(t) + t u''(t)$ da cui

$$2u'(t) + t u''(t) + 4t(u(t) + t u'(t)) + q(t) t u(t) = 0 \iff t(u''(t) + 4t u'(t) + q(t) u(t)) + 2u'(t) + 4t u(t) = 0;$$

ma dato che u è soluzione si ha $u''(t) + 4t u'(t) + q(t) u(t) = 0$ per cui si ottiene

$$u'(t) + 2t u(t) = 0 \iff u'(t) = -2t u(t) \iff u(t) = k e^{-t^2}.$$

Imponiamo ora che $u(t) = e^{-t^2}$ sia soluzione: si ha $u'(t) = (-2t) e^{-t^2}$, $u''(t) = e^{-t^2}(-2 + 4t^2)$ da cui

$$e^{-t^2}(-2 + 4t^2) + 4t(-2t) e^{-t^2} + q(t) e^{-t^2} \iff -2 + 4t^2 - 8t^2 + q(t) = 0 \iff q(t) = 4t^2 + 2.$$

Quindi si è ottenuto: $u(t) = k e^{-t^2}$, $q(t) = 4t^2 + 2$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitraria.

OSSERVAZIONE. Un numero non trascurabile di candidati ha usato l'equazione caratteristica (!!!) per risolvere il precedente problema, scrivendola $\lambda^2 + 4t \lambda + q(t) = 0$ (le cui radici naturalmente dipendono da $t \dots$).

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA SIGNIFICATO ED È UTILE SOLO PER SISTEMI OD EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI.

In tutti gli altri casi non serve a nulla.

□

ESERCIZIO 14. Si consideri il solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \geq 1, z \leq 3 - (x^2 + y^2)\}.$$

- (i) Il solido è ottenuto facendo ruotare un insieme piano E ; descrivere E e disegnarlo.
- (ii) Diciamo A la porzione di frontiera di S che sta su $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, e B quella che sta su $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - (x^2 + y^2)\}$. Dare parametrizzazioni di A e B . Dato il campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z(x^2 + y^2))$, calcolare i flussi Φ_A e Φ_B di $\vec{F}$ uscenti rispettivamente da A e B .
- (iii) Servirsi di (ii) per calcolare il momento d'inerzia (geometrico) di S rispetto all'asse z .

%%%%%%%%%

Per chi fa il compito:

- (iv) Descrivere le z -sezioni di S e calcolare il volume v di S .

Risoluzione. (i) Si ha

$$E = \{(x, z) : x^2 \geq 1 + z^2, z \leq 3 - x^2, x \geq 0\} = \{(x, z) : 1 + z^2 \leq x^2 \leq 3 - z, x \geq 0\}$$

Si ha $1 + z^2 \leq 3 - z \iff z^2 + z - 2 \leq 0 \iff -2 \leq z \leq 1$; le intersezioni (nel semipiano $x \geq 0$) della parabola $z = 3 - x^2$ con l'iperbole $x^2 - z^2 = 1$ sono i punti $(\sqrt{5}, -2)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, e l'insieme E è

$$E = \{(x, z) : \sqrt{1 + z^2} \leq x \leq \sqrt{3 - z}, -2 \leq z \leq 1\}.$$

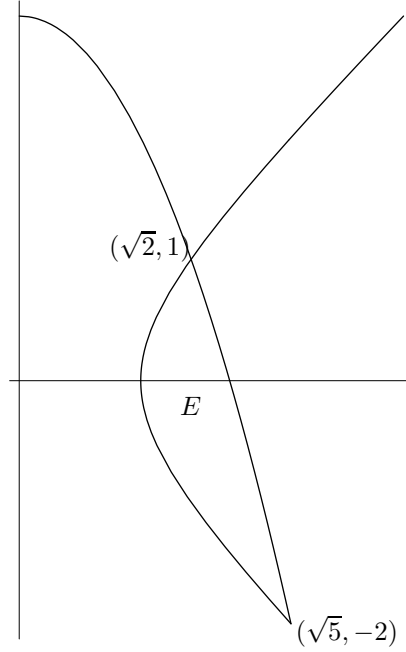
che si disegna subito come in figura

- (ii) Una parametrizzazione di A è ad esempio

$$x = \sqrt{1 + \zeta^2} \cos \vartheta, y = \sqrt{1 + \zeta^2} \sin \vartheta, z = \zeta, \quad (\zeta, \vartheta) \in [-2, 1] \times [0, 2\pi];$$

una parametrizzazione di B è ad esempio

$$x = \sqrt{3 - \zeta} \cos \vartheta, y = \sqrt{3 - \zeta} \sin \vartheta, z = \zeta, \quad (\zeta, \vartheta) \in [-2, 1] \times [0, 2\pi].$$

FIGURA 7. L'insieme E .

Per il flusso Φ_A si ha (a meno eventualmente del segno):

$$\begin{aligned} \pm \Phi_A &= \int_{[-2,1] \times [0,2\pi]} \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\zeta \cos \vartheta}{\sqrt{1+\zeta^2}} & -\sqrt{1+\zeta^2} \sin \vartheta \\ 0 & \frac{\zeta \sin \vartheta}{\sqrt{1+\zeta^2}} & \sqrt{1+\zeta^2} \cos \vartheta \\ \zeta(1+\zeta^2) & 1 & 0 \end{bmatrix} d\zeta d\vartheta = \int_{[-2,1] \times [0,2\pi]} \zeta^2(1+\zeta^2) d\zeta d\vartheta = \\ &= 2\pi \int_{-2}^1 (\zeta^4 + \zeta^2) d\zeta = 2\pi \left(\frac{1+2^5}{5} + \frac{1+2^3}{3} \right) = \frac{96}{5} \pi \end{aligned}$$

Per vedere il segno: per $\zeta = 0$ e $\vartheta = 0$ il coefficiente di $\vec{e}_1$ nel vettore normale è il minore $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ della matrice jacobiana della parametrizzazione. Tale minore ha determinante -1 , negativo, quindi il vettore normale in quel punto è diretto verso l'asse z , ed effettivamente è esterno ad S . Il segno di Φ_A nell'espressione precedente è $+$. Allo stesso modo

$$\begin{aligned} \pm \Phi_B &= \int_{[-2,1] \times [0,2\pi]} \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\cos \vartheta}{2\sqrt{3-\zeta}} & -\sqrt{3-\zeta} \sin \vartheta \\ 0 & \frac{-\sin \vartheta}{2\sqrt{3-\zeta}} & \sqrt{3-\zeta} \cos \vartheta \\ \zeta(3-\zeta) & 1 & 0 \end{bmatrix} d\zeta d\vartheta = \frac{-1}{2} \int_{[-2,1] \times [0,2\pi]} \zeta(3-\zeta) d\zeta d\vartheta = \\ &= -\pi \int_{-2}^1 (3\zeta - \zeta^2) d\zeta = -\pi \left(3\frac{1-4}{2} - \frac{1+8}{3} \right) = \frac{15}{2} \pi. \end{aligned}$$

Come prima, per vedere il segno calcoliamo il determinante del minore della matrice jacobiana formato con le due ultime righe per $\zeta = 0$ e $\vartheta = 0$, identico a prima. Quindi ancora il vettore normale punta verso l'asse z , e stavolta punta allora verso l'interno di S . Il flusso Φ_B vale quindi $-15\pi/2$, ed il flusso totale uscente è quindi

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B = \left(\frac{96}{5} - \frac{15}{2} \right) \pi = \frac{117}{10} \pi.$$

(iii) In base al teorema della divergenza si ha

$$\Phi = \int_S \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \int_S (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

numericamente uguale al momento d'inerzia geometrico richiesto, che quindi vale $117\pi/10$.

(iv) La descrizione prima data di E mostra chiaramente che per $-2 \leq z \leq 1$ la z -sezione di S è la corona circolare chiusa $S(z)$ di raggio interno $\sqrt{1+z^2}$ e raggio esterno $\sqrt{3-z}$. L'area di tale z -sezione è quindi $\pi(3-z-(1+z^2)) = \pi(2-z-z^2)$ ed il volume di S è

$$\text{Volume}(S) = \int_{-2}^1 \pi(2-z-z^2) dz = \pi \left(2 \cdot 3 - \frac{1-4}{2} - \frac{1+8}{3} \right) = \frac{9}{2}\pi.$$

□

ESERCIZIO 15. Si consideri l'equazione differenziale:

$$(Eq) \quad y'' = e^{-2y}.$$

- (i) Posto $p = y'$ si scriva il sistema equivalente, e si dica se sono verificate le ipotesi di qualche teorema di esistenza ed unicità globale.
- (ii) Trovare l'integrale dell'energia, e disegnare alcune curve di livello del medesimo; in particolare, disegnare quella passante per $(0,0)$; segnare sulla curva il verso di percorrenza.
- (iii) Trovare esplicitamente la soluzione massimale φ del problema di Cauchy dato da (Eq) con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, osservando in particolare che essa è definita su tutto $\mathbb{R}$.
- (iv) Mostrare che la soluzione del problema di Cauchy dato da (Eq) con condizioni iniziali $y(0) = a$, $y'(0) = 0$ si può ottenere da φ nella forma $\psi(t) = \varphi(qt) + a$, per una conveniente costante $q \in \mathbb{R}$, da determinarsi in base al valore di a ; trovare poi tutte le soluzioni dell'equazione data.

Risoluzione. (i) Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{y} = p \\ \dot{p} = e^{-2y} \end{cases}$$

Le derivate parziali della funzione vettoriale $f(y, p) = (p, e^{-2y})$ sono $\partial_p f(y, p) = (1, 0)$ e $\partial_y f(y, p) = (0, -2e^{-2y})$, questa seconda chiaramente illimitata in ogni intorno di $-\infty$. L'andamento esponenziale chiaramente preclude anche la crescita sublineare (un ragionamento preciso può essere

$$\frac{|(p, e^{-2y})|}{|(y, p)|} \geq \frac{e^{-2y}}{\sqrt{p^2 + y^2}} \rightarrow \infty \quad \text{per } y \rightarrow -\infty, \text{ qualunque sia } p \text{ fissato}.$$

Nessun teorema globale di quelli a noi noti è quindi applicabile.

(ii) Con il consueto metodo si trova

$$\frac{(y')^2}{2} = -\frac{e^{-2y}}{2} + c \quad \text{quindi} \quad E(y, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{e^{-2y}}{2}$$

è l'integrale dell'energia. Chiaramente perché la curva di livello $E(y, p) = c$ sia non vuota si deve avere $c > 0$; dovendo essere $p^2 = 2c - e^{-2y}$ si deve avere $e^{-2y} \leq 2c$ equivalentemente $-2y \leq \log(2c)$ o ancora $y \geq -\log(\sqrt{2c})$. Esplicitando si hanno le curve

$$p = \pm \sqrt{2c - e^{-2y}} \quad y \geq -\log(\sqrt{2c})$$

facili da disegnare (il ramo superiore converge crescendo a $\sqrt{2c}$). Essendo $E(0, 0) = 1/2$ la curva che passa per $(0, 0)$ è $p = \pm \sqrt{1 - e^{-2y}}$. L'aspetto generale è come in figura.

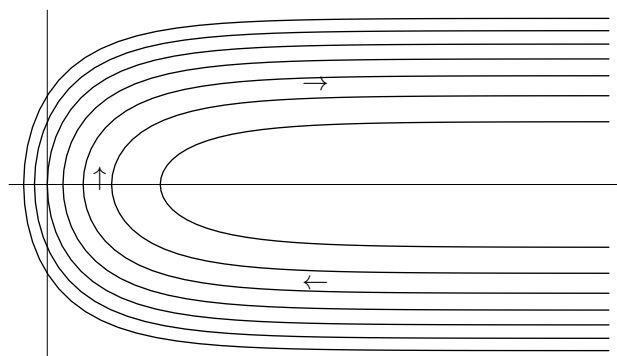


FIGURA 8. Linee di livello dell'integrale dell'energia .

(iii) Utilizzando l'integrale primo si ha

$$y'(t) = \pm \sqrt{1 - e^{-2y(t)}} \quad \text{da cui} \quad \frac{y'}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} = \pm 1;$$

dal verso di percorrenza dell'ideale primo si vede che per $t > 0$ si ha $y' > 0$ e quindi, per risolvere alla destra di 0 si sceglie il segno +; si ha

$$\frac{e^{y(t)} y'(t)}{\sqrt{e^{2y(t)} - 1}} = 1 \quad \text{integrando fra 0 e } t \text{ si ha} \quad \text{settcosh}(e^{y(t)}) - \text{settcosh}(e^{y(0)}) = t,$$

ed essendo $\text{settcosh}(e^{y(0)}) = \text{settcosh}(e^0) = \text{settcosh}(1) = 0$ si ricava

$$\text{settcosh}(e^{y(t)}) = t \iff e^{y(t)} = \cosh t \iff y(t) = \log(\cosh t).$$

La soluzione trovata è quindi $\varphi(t) = \log \cosh t$, definita su $\mathbb{R}$.

Verifica: intanto $\varphi(0) = \log 1 = 0$. Poi $\varphi'(t) = \sinh t / \cosh t = \tanh t$, anch'essa nulla per $t = 0$. E $\varphi''(t) = 1 / \cosh^2 t$; ma da $\varphi(t) = \log \cosh t$ si ricava $\cosh t = e^{\varphi(t)}$ e quindi $1 / \cosh^2 t = e^{-2\varphi(t)}$ come voluto.

(iv) Essendo $\varphi(0) = 0$ si ha $\psi(0) = a$; si ha poi $\psi'(t) = q \varphi'(qt)$, da cui $\psi'(0) = q \varphi'(q0) = 0$, e derivando ancora $\psi''(t) = q^2 \varphi''(qt) = q^2 e^{-2\varphi(qt)}$; quindi ψ è soluzione se e solo se

$$q^2 \varphi''(qt) = e^{-2\psi(t)} = e^{-2(\varphi(qt)+a)},$$

ma essendo φ soluzione definita su $\mathbb{R}$ si ha $\varphi''(qt) = e^{-2\varphi(qt)}$; sostituendo si ottiene:

$$q^2 e^{-2\varphi(qt)} = e^{-2\varphi(qt)} e^{-2a} \iff q^2 = e^{-2a} \iff q = \pm e^{-a}.$$

Si trova quindi $q = \pm e^{-a}$ come relazione; la funzione ψ è

$$\psi(t) = \log(\cosh(e^{-a}t)) + a \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dato che non ci sono equilibri, ogni curva di livello è una traiettoria completa; ogni altra soluzione è una traslata di queste; l'integrale generale è quindi

$$\log(\cosh(e^{-a}(t - c))) + a,$$

al variare di $a, c \in \mathbb{R}$ (questa è quella soluzione che vale a in $t = c$, con derivata nulla per $t = c$).

OSSERVAZIONE. Mi rendo conto che, a freddo, non tutti sanno calcolare $\int dy / \sqrt{1 - e^{-2y}}$. Chi aveva studiato con cura il precompitino sapeva però fare quest'integrale.

Per trovare l'integrale chiesto in (iii) alcuni hanno usato questa procedura: dall'integrale primo si ha $(y'(t))^2 = 1 - e^{-2y(t)}$, e dall'equazione si ricava allora $(y'(t))^2 = 1 - y''(t)$, da cui l'equazione $y''(t) = 1 - (y'(t))^2$, che porge subito $y'' / (1 - (y'(t))^2) = 1$, e con una prima integrazione $\text{setttanh}(y'(t)) - \text{setttanh}(y'(0)) = t$, da cui $\text{setttanh}(y'(t)) = t$ (essendo $y'(0) = 0$), e quindi $y'(t) = \tanh t$, che porge subito $y(t) = \log(\cosh t)$ (essendo $y(0) = 0$). Tale procedura non solo è corretta, è forse anche più "pulita" di quella da me sopra seguita (pure corretta!) dato che evita le considerazioni legate all'ambiguità di segno.

□

ESERCIZIO 16. Trovare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= i x + i y \\ \dot{y} &= -i y \end{cases}$$

(i) Calcolando gli autovalori e gli autovettori della matrice A del sistema.

(ii) Trovando la matrice esponenziale direttamente con la definizione (si ha $A^2 = \dots$)

Risoluzione. (i) L'equazione caratteristica è

$$\zeta^2 + \det A = 0 \quad \text{cioè} \quad \zeta^2 + 1 = 0 \iff \zeta = \pm i.$$

Cerchiamo un autovettore associato ad i :

$$-i y = 0, \quad 2i y = 0 \quad \text{un autovettore è} \quad (1, 0);$$

mentre per $-i$:

$$-2i x - i y = 0, \quad 0 = 0 \quad \text{un autovettore è} \quad (1, -2).$$

Una matrice risolvibile è quindi

$$\begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ 0 & -2e^{-it} \end{bmatrix}.$$

(ii) Si ha $A^2 = -1_2$ come è immediato vedere. Quindi $A^3 = -A$ ed $A^4 = 1_2$. Nella formula che definisce e^{tA} separiamo anzitutto i pari e i dispari:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

essendo $A^2 = -1_2$ si ha $A^{2k} = (A^2)^k = (-1)^k 1_2$, mentre $A^{2k+1} = A^{2k} A = (-1)^k A$ e quindi

$$e^{tA} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right) 1_2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A = \cos t \, 1_2 + \sin t \, A = \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t & i \sin t \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix}.$$

OSSERVAZIONE. La matrice del sistema non è reale, ed è FALSO che le parti reali delle soluzioni siano ancora soluzioni; il sistema dato non ha NESSUNA soluzione reale, eccettuata quella nulla!

□

ESERCIZIO 17. (**solo per il compito**) Il numero complesso $2 + 3i\pi/2$ è logaritmo di $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$; calcolare a e b). È vero che $2 + 3i\pi/2$ è anche il logaritmo principale di $a + ib$? calcolare poi il logaritmo principale dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = e^{3i}; z_2 = e^{7i}; z_3 = e^{3i}(1+i).$$

Risoluzione. Dire che $2 + 3i\pi/2$ è un logaritmo di $a + ib$ significa dire che $e^{2+3i\pi/2} = a + ib$; si ha ora $e^{2+3i\pi/2} = e^2 e^{3i\pi/2} = -e^2 i$; quindi $a = 0$, $b = -e^2$. Essendo $\pi < 3\pi/2$, il logaritmo non è quello principale, si ha invece $\log(-e^2 i) = 2 - i\pi/2$. Chiaramente $3i$ è un logaritmo di e^{3i} , e dato che $\text{Im } 3i = 3$, e $-\pi < 3 < \pi$ si ha $\log(e^{3i}) = 3i$. Anche $7i$ è un logaritmo di e^{7i} , ma dato che $7 > \pi$, $7i$ non è il logaritmo principale, che si ottiene sottraendo $2\pi i$; si ha cioè $\log(e^{7i}) = (7-2\pi)i$ (infatti $-\pi < 7-2\pi < \pi$, dato che $\pi < 7 < 3\pi$). Infine, in forma esponenziale si ha $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = e^{\log \sqrt{2} + i\pi/4}$; si ha cioè

$$e^{3i}(1+i) = e^{3i} e^{\log \sqrt{2} + i\pi/4} = e^{\log 2/2 + (3+\pi/4)i},$$

e quindi $\log 2/2 + (3+\pi/4)i$ è un logaritmo di $e^{3i}(1+i)$; ma essendo $\pi < 3+\pi/4$, il logaritmo principale è invece $\log 2/2 + (3-7\pi/4)i$ (si osservi che si ha $-\pi < 3-7\pi/4 < \pi$, infatti $(3/4)\pi < 3 < (11/4)\pi$).

□

ESERCIZIO 18. Usando il teorema di derivazione per serie dimostrare che si ha

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(facoltativo) Supponendo di sapere che la formula precedente vale anche per $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, purchè il logaritmo sia quello principale, calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n2^n}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Poniamo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$; per $x \in]-1, 1[$ sappiamo che f è derivabile e che si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x};$$

osservando che $f(0) = 0$ si ha allora

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = [-\log(1-t)]_{t=0}^{t=x} = -\log(1-x);$$

la formula richiesta è dimostrata. Se si pone nella formula $x = e^{it}/2$ si ha $|x| = 1/2 < 1$ e quindi

$$-\log(1 - e^{it}/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt) + i \sin(nt)}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{2^n n};$$

Ne viene quindi

$$\operatorname{Re}(-\log(1 - e^{it}/2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{2^n n}; \quad \operatorname{Im}(-\log(1 - e^{it}/2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{2^n n};$$

Si ha ora $(1 - e^{it}/2) = (1 - \cos t/2) - i \sin t/2$; poichè la parte reale è certamente positiva in senso stretto ($(\cos t)/2 < 1$) si ha

$$\arg((1 - e^{it}/2)) = \arctan\left(\frac{-\sin t/2}{1 - \cos t/2}\right) = \arctan \frac{\sin t}{\cos t - 2}.$$

Ma essendo $\operatorname{Im}(-\log(1 - e^{it}/2)) = -\arg((1 - e^{it}/2))$ si ha infine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{2^n n} = \arctan \frac{\sin t}{2 - \cos t}.$$

□

ESERCIZIO 19. Si considera il solido

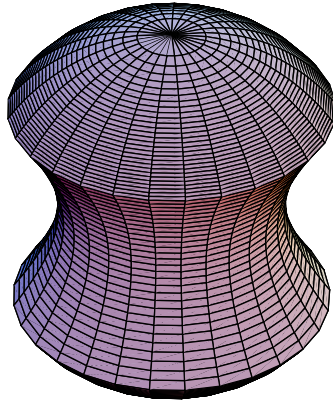
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

- (i) Descrivere a parole il solido, e farne un disegno.
- (ii) Chiamiamo A la porzione di frontiera del solido S sulla superficie $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Parametrizzare A e trovarne l'area.

Si considera ora il ben noto campo

$$\vec{\Omega} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{dato da} \quad \vec{\Omega}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(= \frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

- (iii) Trovare il flusso di $\vec{\Omega}$ uscente da S (non calcolare integrali! spiegare con cura il procedimento)
- (iv) s Dette $B_{\pm}$ le porzioni di frontiera di S sulla sfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$, calcolare il flusso di $\vec{\Omega}$ uscente da B_+ (sapendo che l'area di B_+ vale $2\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$) e da B_- , ed infine il flusso uscente da H .

FIGURA 9. Il solido S .

Risoluzione. (i) Si tratta di un solido di rotazione, chiusura della intersezione della componente connessa di $\mathbb{R}^3 \setminus H$ che contiene l'asse z con la palla di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$. La figura è come sopra.

(ii) Le intersezioni fra sfera ed iperboloide sono due cerchi alle quote $z^2 = 1$, cioè $z = \pm 1$ (si vede subito risolvendo il sistema $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$), quindi di raggio $\sqrt{3-1} = \sqrt{2}$. Possiamo parametrizzare A , segmento di iperboloide, $A = H \cap \{-1 \leq z \leq 1\}$, come superficie di rotazione: $x = \sqrt{1+z^2} \cos \vartheta$, $y = \sqrt{1+z^2} \sin \vartheta$, $z = z$, $(z, \vartheta) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi]$. La matrice jacobiana è

$$\begin{bmatrix} (z \cos \vartheta)/\sqrt{1+z^2} & -\sqrt{1+z^2} \sin \vartheta \\ (z \sin \vartheta)/\sqrt{1+z^2} & \sqrt{1+z^2} \cos \vartheta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{quindi con elemento d'area} \quad \sqrt{1+2z^2} dz d\vartheta.$$

L'area di A è quindi

$$\text{Area}(A) = \int_{[-1,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{1+2z^2} dz d\vartheta = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+2z^2} dz = 2\sqrt{2}\pi \int_{-1}^1 \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + z^2} dz =$$

(si guarda sul formulario la primitiva di $\sqrt{a^2 + z^2}$)

$$\begin{aligned} & \pi\sqrt{2} \left[z\sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + z^2} + \frac{1}{2} \text{settsinh}(\sqrt{2}z) \right]_{-1}^1 = \\ & 2\sqrt{2}\pi \left(\sqrt{1/2+1} + \frac{1}{2} \text{settsinh}(\sqrt{2}) \right) = 2\pi(\sqrt{3} + \sqrt{2} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})). \end{aligned}$$

(iii) Dalla teoria sappiamo che il flusso di $\vec{\Omega}$ uscente da un qualsiasi solido che contiene al suo interno l'origine vale 4π (è il campo dell'angolo solido). Ripetiamo l'argomentazione: è ben noto che $\vec{\Omega}$ è solenoidale, e che il flusso di $\vec{\Omega}$ uscente da una qualsiasi sfera centrata nell'origine vale 4π . Si toglie ad S una piccola palla B centrata nell'origine e contenuta nell'interno di S ; se $E = S \setminus B$, il flusso uscente da E è nullo per il teorema della divergenza, dato che il campo è solenoidale in tutto E ; ma il flusso uscente da E è quello uscente da S , meno quello uscente dalla palla B , cioè

$$0 = \text{Flusso uscente da } E = \text{Flusso uscente da } S - 4\pi; \quad \text{quindi il flusso uscente da } S \text{ vale } 4\pi.$$

(iv) Il flusso uscente dalla porzione B_+ di sfera è pari all'area di B_+ divisa per il quadrato del raggio (si ricorda che il campo è quello dell'angolo solido: in ogni caso il campo è in ogni punto (x, y, z) della

sfera parallelo al versore normale esterno alla sfera, che è $\vec{\nu}(x, y, z) = (x, y, z)/\sqrt{3}$; il prodotto scalare è

$$\vec{\Omega}(x, y, z) \cdot \vec{\nu}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{3})^3} \cdot \frac{(x, y, z)}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^4} = \frac{1}{3},$$

costante, e quindi integrato su B_+ porge $\text{Area}(B_+)/3$; il flusso totale uscente da B è quindi

$$(2/3)\text{Area}(B_+) = 4\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)/3.$$

Il flusso uscente da A è allora $4\pi - 4\pi\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)/3 = (4/\sqrt{3})\pi$ □

ESERCIZIO 20. Si considera l'integrale

$$\int_D \frac{e^{-x/\sqrt{y}}}{y(1+y)} dx dy \quad \text{dove} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 \leq y \leq 2x^2\};$$

Disegnare D , e calcolare l'integrale, se esiste finito, usando il cambiamento di variabili $x/\sqrt{y} = u$, $\sqrt{y} = v$; discutere con cura.

Risoluzione. L'insieme D è fra le due parabole di equazione $y = x^2$ ed $y = 2x^2$, ed il disegno è immediato (non lo faccio). Si ricava poi subito $x = u\sqrt{y} = uv$, $y = v^2$; ne segue che $\phi(u, v) = (uv, v^2)$ è un diffeomorfismo del primo quadrante aperto $]0, +\infty[$ in se stesso, con inversa $\phi^{-1}(x, y) = (x/\sqrt{y}, \sqrt{y})$. Per il teorema di cambiamento di variabili la funzione $e^{-x/\sqrt{y}}/(y(1+y))$ è L -integrabile su D se e solo se la funzione $e^{-u}/(v^2(1+v^2))|\det \phi'(u, v)|$ è L -integrabile su $E = \phi^{\leftarrow}(D)$; si ha ora

$$\phi'(u, v) = \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \det \phi'(u, v) = 2v^2;$$

inoltre

$$x^2 \leq y \leq 2x^2 \iff x \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{2}x \iff x/\sqrt{y} \leq 1, 1 \leq \sqrt{2}x/\sqrt{y} \iff 1/\sqrt{2} \leq u \leq 1.$$

Ne segue $E = \{(u, v) : v > 0, 1/\sqrt{2} \leq u \leq 1\} = [1/\sqrt{2}, 1] \times]0, +\infty[$. Quindi

$$\int_D \frac{e^{-x/\sqrt{y}}}{y(1+y)} dx dy = \int_{[1/\sqrt{2}, 1] \times]0, +\infty[} \frac{2e^{-u}}{1+v^2} dudv = \left(\int_{1/\sqrt{2}}^1 e^{-u} du \right) \left(\int_0^\infty \frac{2dv}{1+v^2} \right) = \pi(e^{-1/\sqrt{2}} - e^{-1}).$$

OSSERVAZIONE. Era anche molto facile, e più veloce, fare direttamente l'integrale. L'integrando è positivo, quindi per il teorema di Tonelli la funzione è integrabile se e solo se l'integrale iterato esiste finito. Naturalmente possiamo cominciare ad integrare solo rispetto ad x :

$$\begin{aligned} \int_D \frac{e^{-x/\sqrt{y}}}{y(1+y)} dx dy &= \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{-1}{\sqrt{y}(1+y)} \left(\int_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} \frac{e^{-x/\sqrt{y}}}{-\sqrt{y}} dy \right) dx = \\ &= \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{-1}{\sqrt{y}(1+y)} \left[e^{-x/\sqrt{y}} \right]_{x=\sqrt{y/2}}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty \frac{(e^{-1/\sqrt{2}} - e^{-1})}{\sqrt{y}(1+y)} dy = \\ &= (e^{-1/\sqrt{2}} - e^{-1}) \int_0^\infty \frac{2}{1+(\sqrt{y})^2} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2(e^{-1/\sqrt{2}} - e^{-1}) [\arctan \sqrt{y}]_0^\infty = \\ &= \pi(e^{-1/\sqrt{2}} - e^{-1}). \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 21. È data l'equazione differenziale:

$$(Eq) \quad y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{t} \quad (t > 0).$$

- (i) Dire se le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale (forma debole) sono o meno verificate.
- (ii) Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy dato da (Eq) con condizione iniziale $y(1) = y_1$.

%%%%%%%%%

- (iii) (facoltativo) Cosa diventa l'equazione con il cambiamento di variabile $t = e^x$?

Risoluzione. (i) L'equazione si scrive $y' = f(t, y) = \sqrt{1+y^2}/t$, dove il dominio di f è pertanto $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Bisogna vedere se per ogni intervallo compatto $K \subseteq]0, +\infty[$ esiste una costante di Lipschitz L_K per f ristretta a $K \times \mathbb{R}$, rispetto alla seconda variabile. Si ha $\partial_y f(t, y) = y/(t\sqrt{1+y^2})$, per cui $|\partial_y f(t, y)| = (1/t) |y|/\sqrt{1+y^2} \leq 1/t$, essendo ovvio che per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $|y|/\sqrt{1+y^2} \leq 1$. Poichè $K \subseteq]0, +\infty[$ è compatto, K ha un minimo $a > 0$; si ha quindi $1/t \leq 1/a$ per ogni $t \in K$. Si ha insomma $|\partial_y f(t, y)| \leq 1/\min K$ per ogni $(t, y) \in K \times \mathbb{R}$. Ne segue che si può prendere $L_K = 1/\min K$, e le ipotesi sono verificate.

(ii) Separando le variabili ed integrando fra 1 e t si ha

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{1+(y(t))^2}} = \frac{1}{t}, \quad y(1) = y_1 \iff \text{settsinh}(y(t)) - \text{settsinh}(y_1) = \log t \iff \\ \text{settsinh}(y(t)) = \log t + \text{settsinh}(y_1) \iff y(t) = \sinh(\log t + \text{settsinh}(y_1)).$$

(iii) Posto $u(x) = y(e^x)$ si ottiene $u'(x) = y'(e^x) e^x$, da cui $y'(e^x) = u'(x) e^{-x}$; l'equazione diventa $u'(x) e^{-x} = \sqrt{1+(u(x))^2}/e^x$ e cioè

$$u'(x) = \sqrt{1+(u(x))^2},$$

equazione autonoma.

OSSERVAZIONE. Le soluzioni dell'equazione sono in realtà funzioni razionali di t , come è facile vedere. Si prende $c > 0$ tale che $\log c = \text{settsinh}(y_1)$, di modo che la soluzione si scrive

$$y(t) = \sinh(\log t + \log c) = \sinh(\log(ct)) = \frac{e^{\log(ct)} - e^{-\log(ct)}}{2} = \frac{ct - 1/(ct)}{2}.$$

□

ESERCIZIO 22. Si considera il sistema differenziale lineare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -(1-i) & i \\ -i & -(1+i) \end{bmatrix}.$$

Calcolare e^{tA} . Trovare poi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -(1-i)x + iy + ae^{-t} \\ \dot{y} &= -ix - (1+i)y + be^{-t} \end{cases}$$

che è nulla per $t = 0$; a, b sono costanti.

Risoluzione. L'equazione caratteristica $\zeta^2 - \text{Tr}(A)\zeta + \det(A) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 = 0$ ha -1 come radice doppia. Si scrive quindi $A = A - (-1_2) + (-1_2) = (-1_2) + N$, dove $N = A + 1_2$ è nilpotente. Si ha quindi

$$e^{tA} = e^{-t}(1_2 + tN) = e^{-t} \left(1_2 + t \begin{bmatrix} i & i \\ -i & -i \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+it & it \\ -it & 1-it \end{bmatrix}.$$

Usando il metodo di variazione delle costanti si ha, detta φ la soluzione voluta:

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} e^{-s} (a, b) ds = e^{-t} \int_0^t \begin{bmatrix} 1+i(t-s) & i(t-s) \\ -i(t-s) & 1-i(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ds \\ e^{-t} \int_0^t \begin{bmatrix} (1+i(t-s))a + i(t-s)b \\ -i(t-s)a + (1-i(t-s))b \end{bmatrix} ds = e^{-t} \begin{bmatrix} at + i(a+b)t^2/2 \\ bt - i(a+b)t^2/2 \end{bmatrix}.$$

□

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA-10 LUGLIO 2007

ESERCIZIO 23. Si sa che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza R , con $0 < R < \infty$; per $|z| < R$ sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma della serie.

- (i) Qual'è il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$? sapreste esprimere la sua somma mediante f ?
- (ii) Servendosi del precedente risultato calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, dicendo anche per quali $z \in \mathbb{C}$ esiste finita.

Risoluzione. (i) Si ha $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ per tutti i z per cui la serie a primo membro converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ è la serie derivata della serie data, che converge quindi anch'essa per $|z| < R$ (e non converge per $|z| > R$) alla funzione $f'(z)$, tutto ciò per il teorema di derivazione per le serie di potenze. Il raggio di convergenza della serie è quindi R , e la sua somma è $z f'(z)$.

(ii) Si ha $a_n = 1$ per ogni n ; la serie è quindi la serie geometrica, con raggio di convergenza 1 e somma $f(z) = 1/(1-z)$; ne segue che si ha, per $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z f'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

□

ESERCIZIO 24. Un solido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ viene descritto nel seguente modo: si proietta sul piano xy nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$, è contenuto nel semispazio $\{z \geq 0\}$, e le sue sezioni (quelle non vuote!) con i piani perpendicolari all'asse x sono triangoli equilateri con un lato sul piano xy .

- (i) Disegnare D e calcolare il volume di S .
- (ii) Calcolare $\int_S x \, dx \, dy \, dz$.
- (iii) Calcolare gli integrali

$$\int_S y \, dx \, dy \, dz \quad \int_S z \, dx \, dy \, dz,$$

e trovare le coordinate del baricentro geometrico di S .

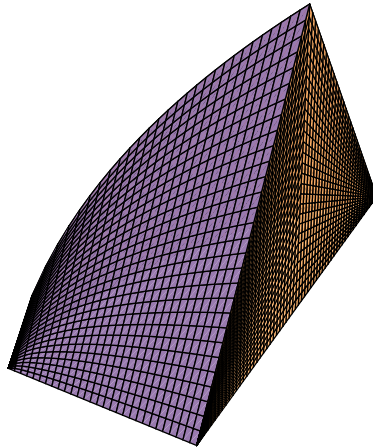


FIGURA 10. Il solido S .

Risoluzione. (i) Il disegno di D è molto facile e non lo faccio; faccio invece un disegno di S , fatto con il calcolatore. La x -sezione $S(x)$ di S , per $0 \leq x \leq 1$, è un triangolo equilatero che ha una base lunga $2\sqrt{x}$, quindi ha altezza lunga $2\sqrt{x}\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}\sqrt{x}$, e quindi area $x\sqrt{3}$. Il volume è allora

$$\text{Volume}(S) = \int_{x=0}^{x=1} \text{Area}(S(x)) \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ii) Integrando con la formula di riduzione:

$$\begin{aligned} \int_S x \, dx \, dy \, dz &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{S(x)} x \, dy \, dz \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x \left(\int_{S(x)} dy \, dz \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x \, \text{Area}(S(x)) \, dx = \int_0^1 \sqrt{3} x^2 \, dx = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Sempre integrando per fette parallele al piano yz si ha

$$\int_S y \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{S(x)} y \, dy \, dz \right) dx; \quad \int_S z \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{S(x)} z \, dy \, dz \right) dx.$$

se y_x e z_x sono rispettivamente la y e la z coordinata del baricentro del triangolo equilatero $S(x)$ si ha ovviamente, per definizione di baricentro:

$$\int_{S(x)} y \, dy \, dz = y_x \, \text{Area}(S(x)); \quad \int_{S(x)} z \, dy \, dz = z_x \, \text{Area}(S(x));$$

ma è $y_x = \sqrt{x}$ e $z_x = \text{altezza}(S(x))/3 = \sqrt{3}\sqrt{x}/3$, per cui

$$\int_S y \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x} \, x \sqrt{3} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{3/2+1} = \frac{2}{5}\sqrt{3};$$

e

$$\int_S z \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{3} \, x \sqrt{3} \, dx = \frac{1}{3/2+1} = \frac{2}{5}.$$

Le coordinate del baricentro risultano quindi essere $(2/3, 4/5, 4\sqrt{3}/15)$. □

ESERCIZIO 25. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = f(y) \quad \text{dove} \quad f(y) = \frac{1 - e^{-y^2}}{y} \quad \text{per} \quad y \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

- (i) Dimostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$, e calcolare $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f'(y)$.
- (ii) Dedurre da (i) che l'equazione verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale, quale versione? disegnare le zone del piano (t, y) in cui le soluzioni sono crescenti e quelle in cui sono decrescenti. Trovare le soluzioni costanti.
- (iii) Calcolare la soluzione massimale del problema di Cauchy dato dall'equazione, con condizione iniziale $y(0) = 1$.
- (iv) Senza altri calcoli, trovare la soluzione con $y(0) = -1$.
- (v) (Facoltativo) In che modo, conoscendo la soluzione di cui in (iii), possiamo scrivere tutte le soluzioni?

Risoluzione. (i) Per $y \rightarrow 0$ si ha $1 - e^{-y^2} = y^2 + o(y^2)$, per cui $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$, ed f è continua in 0. Se $y \neq 0$ si ha

$$(D) \quad f'(y) = \frac{2y^2 e^{-y^2} - (1 - e^{-y^2})}{y^2} = \frac{e^{-y^2}(2y^2 + 1) - 1}{y^2} = 2e^{-y^2} - \frac{1 - e^{-y^2}}{y^2};$$

si ha allora $\lim_{y \rightarrow 0} f'(y) = 1$ (si ha $\lim_{y \rightarrow 0} (1 - e^{-y^2})/y^2 = 1$ per quanto osservato prima), e quindi $f \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f'(y) = 0$, come subito si vede.

(ii) Quindi f' è limitata, essendo continua e con limite finito all'infinito, e pertanto f è globalmente lipschitziana; l'equazione verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità anche nella versione debole. Chiaramente $f > 0$ nel semipiano $y > 0$, ed $f < 0$ nel semipiano $y < 0$; la costante nulla è l'unica soluzione costante.

(iii) Detta $y(t)$ tale soluzione massimale (ma scriviamo y invece di $y(t)$ nella soluzione successiva) si ha, separando le variabili:

$$y' = \frac{1 - e^{-y^2}}{y} \iff \frac{y}{1 - e^{-y^2}} y' = 1 \iff \frac{e^{y^2} y}{e^{y^2} - 1} y' = 1$$

da cui, integrando fra 0 e t :

$$\frac{1}{2} \log(e^{y^2} - 1) - \frac{1}{2} \log(e - 1) = t \iff \log(e^{y^2} - 1) = 2t + \log(e - 1),$$

da cui

$$e^{y^2} - 1 = (e - 1)e^{2t} \iff y^2 = \log((e - 1)e^{2t} + 1);$$

ed essendo $y(t) > 0$ per ogni t (per unicità $y(t) > 0$ per ogni t) si ottiene infine

$$y(t) = \sqrt{\log((e - 1)e^{2t} + 1)}.$$

(iv) Si vede facilmente che se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione, allora anche $\psi = -\varphi$ è soluzione, basta osservare che f è dispari: $\psi'(t) = f(\psi(t)) \iff -\varphi'(t) = f(-\varphi(t))$, immediata perché f è dispari, e φ è soluzione.

Pertanto basta prendere $-\sqrt{\log((e-1)e^{2t}+1)}$.

(v) Basta trovare le soluzioni positive, dato che come sopra osservato le loro opposte daranno le soluzioni negative. Essendo l'equazione autonoma, traslate di soluzioni sono ancora soluzioni; pertanto, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$\varphi_c(t) = \varphi(t-c) = \sqrt{\log((e-1)e^{2(t-c)}+1)}$$

sono tutte soluzioni, ovviamente positive. Posto in tale formula $t=0$ si ha

$$\varphi_c(0) = \sqrt{\log((e-1)e^{-2c}+1)},$$

ed al variare di $c \in \mathbb{R}$ il secondo membro assume tutti i valori reali strettamente positivi, come è immediato vedere. Pertanto tutte le soluzioni positive sono della forma φ_c per un unico $c \in \mathbb{R}$; tutte le soluzioni non nulle sono date quindi dalla formula

$$y(t) = \pm \sqrt{\log((e-1)e^{2(t-c)}+1)} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

□

ESERCIZIO 26. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= -2x - y \end{cases}$$

- (i) Trovare un integrale primo non banale per il sistema. Tale integrale primo è una forma quadratica, di quale segno?
- (ii) Trovare una matrice risolvibile per il sistema.
- (iii) Cosa sono le traiettorie delle soluzioni?

Risoluzione. (i) Se la forma differenziale

$$-(-2x-y)dx + (x+y)dy = (2x+y)dx + (x+y)dy$$

ha una primitiva V , tale primitiva è come ben noto un integrale primo del sistema dato. La forma è chiusa, e quindi esatta avendo come dominio naturale tutto $\mathbb{R}^2$; una primitiva si scrive $x^2 + xy + \phi(y)$, e derivando in y si ottiene $x + \phi'(y) = x + y$, da cui $\phi'(y) = y$ e cioè $\phi(y) = y^2/2 + k$. Un integrale primo è quindi

$$V(x, y) = x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + (x+y)^2}{2},$$

forma quadratica evidentemente definita positiva, le cui curve di livello sono quindi ellissi.

(ii) L'equazione caratteristica è

$$\det(\zeta I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \zeta - 1 & -1 \\ 2 & \zeta + 1 \end{bmatrix} = \zeta^2 - \text{Tr}(A)\zeta + \delta(A) = \zeta^2 + 1 = 0,$$

con soluzioni $\pm i$. Per trovare un autovettore associato ad i risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} (i-1)x - y &= 0 \\ 2x + (i+1)y &= 0 \end{cases} \quad \text{per cui } (i-1, 1) \text{ è un autovettore.}$$

Una soluzione è quindi $(1, i-1)e^{it}$, che si scrive

$$(1, i-1)(\cos t + i \sin t) = (\cos t + i \sin t, i \cos t - \sin t - \cos t - i \sin t) = (\cos t, -\cos t - \sin t) + i(\sin t, \cos t - \sin t);$$

una risolvibile reale è quindi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

(iii) Dall'integrale primo si vede che le orbite sono ellissi. Questo è immediato se si sa qualcosa sulle coniche; in ogni caso basta sapere che il luogo

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = c \right\} \quad \text{è una conica se } c > 0,$$

ed essendo le soluzioni limitate, tali coniche non possono che essere ellissi.

□

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA—RECUPERO—4 SETTEMBRE 2007

ESERCIZIO 27. (i) Se c è un numero complesso, cos'è un logaritmo di c ? ed il logaritmo principale di c ? esistono per ogni $c \in \mathbb{C}$?

(ii) Se $a > 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^z = a e^{i\alpha},$$

e trovare il logaritmo principale $\log(5 e^{i9\pi/5})$.

Risoluzione. (i) Un logaritmo di c è ogni numero complesso z tale che $e^z = c$. Il logaritmo principale è quel logaritmo con parte immaginaria contenuta in $]-\pi, \pi]$. Entrambi esistono se e solo se $c \neq 0$.

(ii) Si ha $a e^{i\alpha} = e^{\log a} e^{i\alpha} = e^{\log a + i\alpha}$. Quindi $e^z = e^{\log a + i\alpha}$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z = \log a + i\alpha + 2k\pi i$. Il logaritmo principale richiesto è $\log 5 + i(9\pi/5 - 2k\pi)$, dove k è scelto in modo che si abbia $-\pi < 9\pi/5 - 2k\pi \leq \pi$. Con $k = 1$ si ha $9\pi/5 - 2\pi = (9 - 10)\pi/5 = -\pi/5$, quindi

$$\log(5 e^{i9\pi/5}) = \log 5 - i\frac{\pi}{5}.$$

□

ESERCIZIO 28. Un solido S è un compatto connesso di $\mathbb{R}^3$, con l'interno non vuoto.

- (i) Se $X = \text{pr}_1(S)$ è la proiezione (ortogonale) di S sull'asse x , dimostrare che X è un intervallo compatto non degenero di $\mathbb{R}$, cioè si ha $X = [a, b]$, con $a < b$.
- (ii) Per ogni $x \in X$ sia $S(x)$ la x -sezione di S . Supponiamo che l'area $\lambda_2(S(x))$ sia $A(x) \geq 0$, e che il baricentro geometrico di $S(x)$ abbia coordinate $y_x = u(x)$ e $z_x = v(x)$. Esprimere il volume e le coordinate del baricentro geometrico di S con integrali unidimensionali nelle funzioni A, u, v .
- (iii) Il solido S è così descritto: si proietta sul disco unitario del piano xy , e le sue intersezioni con i piani perpendicolari all'asse x , se non sono vuote o ridotte ad un solo punto, sono triangoli rettangoli isosceli con l'ipotenusa che giace sul piano xy ; inoltre il solido è contenuto nel semispazio $z \geq 0$. Usando (ii) trovare il volume ed il baricentro di S .

Risoluzione. (i) L'immagine continua di un compatto è compatta, e l'immagine continua di un connesso è connessa. Poiché i connessi della retta sono gli intervalli, X è un intervallo compatto, $X = [a, b]$, che ha punti interni perché S ha punti interni e le proiezioni trasformano aperti in aperti, quindi $a < b$.

(ii) Per la formula di riduzione:

$$\lambda_3(S) = \int_S dx dy dz = \int_{\text{pr}_1(S)} \left(\int_{S(x)} dy dz \right) dx = \int_a^b \lambda_2(S(x)) dx = \int_a^b A(x) dx.$$

Inoltre, se (x_S, y_S, z_S) è il baricentro geometrico di S si ha

$$x_S = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_S x dx dy dz = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b \left(\int_{S(x)} x dy dz \right) dx = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b x A(x) dx.$$

$$y_S = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_S y dx dy dz = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b \left(\int_{S(x)} y dy dz \right) dx = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b y_x A(x) dx =$$

$$\frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b u(x) A(x) dx.$$

$$z_S = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_S z dx dy dz = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b \left(\int_{S(x)} z dy dz \right) dx = \frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b z_x A(x) dx =$$

$$\frac{1}{\lambda_3(S)} \int_a^b v(x) A(x) dx.$$

(iii) L'ipotenusa di $S(x)$ è lunga $2\sqrt{1-x^2}$, quindi l'altezza è la metà di essa e cioè $\sqrt{1-x^2}$; ne segue che l'area di $S(x)$ vale $A(x) = (1-x^2)$.

Dovrebbe essere ben noto dalle scuole superiori che il baricentro geometrico di un triangolo è il punto di incontro delle mediane, e su una mediana dista dal lato di $1/3$ della lunghezza della mediana stessa; in particolare, dato che per un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana relativa alla

base, il baricentro è su tale altezza, ad una distanza dalla base pari a un terzo dell'altezza stessa. Quindi per il baricentro di $S(x)$ si ha $y_x = 0$ e $z_x = \sqrt{1-x^2}/3$. Quindi

$$\text{Volume}(S) = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}; \quad x_S = y_S = 0;$$

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx = (\text{posto } x = \cos t) = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t (-\sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos(2t))^2}{4} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1-2\cos(2t) + \cos^2(2t)) dt = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - [\sin(2t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(4t)}{2} dt \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{32} \pi. \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 29. Si consideri il sistema differenziale:

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= x + y \end{cases}.$$

- (i) Trovare un integrale primo non banale di (S).
- (ii) Trovare l'integrale generale del sistema.
- (iii) Trovare l'integrale generale del sistema

$$(SS) \quad \begin{cases} \dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= x + y \\ \dot{z} &= z \end{cases}.$$

- (v) Trovare un integrale primo non banale di (SS).

Risoluzione. (i) Un integrale primo è una eventuale primitiva della forma $-(x+y)dx + (y-x)dy$ e quindi una funzione quale $-(x+y)^2/2 + \phi(y)$; derivando quest'espressione in y ed imponendo l'uguaglianza con il coefficiente di dy si ottiene $-(x+y) + \phi'(y) = y - x$, cioè $\phi'(y) = 2y$. Un integrale primo è quindi

$$V(x, y) = -\frac{(x+y)^2}{2} + y^2 = -\frac{1}{2}(x^2 + 2xy - y^2),$$

od anche, essendo individuato a meno di costanti sia additive che moltiplicative

$$U(x, y) = x^2 + 2xy - y^2.$$

- (ii) La matrice del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con equazione caratteristica} \quad \zeta^2 - \text{Tr}(A)\zeta + \det(A) = 0,$$

e cioè $\zeta^2 - 2 = 0$. Radici reali distinte $\pm\sqrt{2}$. Autovettori:

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+1)x - y &= 0 \\ -x + (\sqrt{2}-1)y &= 0 \end{cases}; \quad \text{una soluzione è } (1, \sqrt{2}+1);$$

poi:

$$\begin{cases} (-\sqrt{2}+1)x - y &= 0 \\ -x + (-\sqrt{2}-1)y &= 0 \end{cases}; \quad \text{una soluzione è } (1, 1-\sqrt{2}).$$

Una risolvante è quindi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & e^{-\sqrt{2}t} \\ (1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} & (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale si scrive

$$\begin{bmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ c_1(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} + c_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}.$$

(iii) La terza equazione è slegata dalle altre due e ha come integrale generale ce^t ; l'integrale generale di (SS) è quindi

$$\begin{bmatrix} c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ c_1(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} + c_2(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} \\ c_3 e^t \end{bmatrix}.$$

(iv) Sempre dato che la terza equazione è slegata dalle altre due l'integrale primo trovato per (S), pensato come funzione di tre variabili, è anche integrale primo per (SS): $U(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ (tale funzione è costante sulle parallele all'asse z , costante sulle soluzioni di (S), e quindi anche lungo le soluzioni di (SS)).

OSSERVAZIONE. Si è visto che l'equazione caratteristica di A è $\zeta^2 - 2 = 0$. Per il teorema di Cayley-Hamilton si ha quindi $A^2 - 2I_2 = 0$, cioè $A^2 = 2I_2$, matrice identica moltiplicata per 2. Ne segue $A^3 = A^2 A = (2I_2)A = 2A$, $A^4 = A^3 A = (2A)A = 2A^2 = 2(2I_2) = 2^2 I_2$. Per induzione si vede subito che si ha

$$A^{2k} = 2^k I_2; \quad A^{2k+1} = 2^k A \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N};$$

ne segue

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} A^{2l+1} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^{2k}}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A = \cosh(\sqrt{2}t) I_2 + \frac{\sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} A \end{aligned}$$

(si usa $2^k t^{2k} = (\sqrt{2}t)^{2k}$ e $2^l t^{2l+1} = (\sqrt{2}t)^{2l+1}/\sqrt{2}$). Si è quindi visto che

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{2}t) - \sinh(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} & \sinh(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} \\ \sinh(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} & \cosh(\sqrt{2}t) + \sinh(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

senza bisogno di calcolare autovalori ed autovettori.

Anche se non richiesto, si può osservare che le curve di livello dell'integrale primo $U(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ sono iperboli equilateri che hanno come asintoti le rette di equazione $y = (1 \pm \sqrt{2})x$; i rami di queste sono quindi le traiettorie delle soluzioni di (S).

□

ESERCIZIO 30. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \log(1 + \cos^2 y).$$

- (i) Trovarne le soluzioni costanti.
- (ii) Mostrare che l'equazione verifica le ipotesi di un teorema di esistenza ed unicità globale, dire se in forma debole o in forma forte.
- (iii) Ogni soluzione è limitata, perché?
- (iv) Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione verificante $\varphi(0) = 0$. Mostrare che i limiti $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ esistono finiti e calcolarli. È vero che φ è dispari?
- (v) (Facoltativo) Nota φ , sono note tutte le soluzioni dell'equazione: precisamente, dato $a \in \mathbb{R}$, come si esprime mediante φ la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione con la condizione $y(0) = a$?

Risoluzione. (i) si ha $\log(1 + \cos^2 y) = 0$ se e solo se $\cos^2 y = 0$ e cioè se e solo se $y = \pi/2 + k\pi$. Queste sono quindi le soluzioni costanti.

(ii) La derivata è

$$\frac{-2 \cos y \sin y}{1 + \cos^2 y} \quad \text{in modulo} \quad \left| \frac{-2 \cos y \sin y}{1 + \cos^2 y} \right| = \frac{|\sin(2y)|}{1 + \cos^2 y} \leq |\sin(2y)| \leq 1,$$

e quindi le ipotesi del teorema in grande sono verificate (prima forma, quella debole, a più forte ragione quindi l'altra forma). È comunque immediato vedere che il secondo membro è limitato in modulo (dominato da $\log 2$).

(iii) Ogni soluzione non costante assume in 0 un valore strettamente compreso in $-\pi/2 + k\pi$ e $\pi/2 + k\pi$, per un unico $k \in \mathbb{Z}$, e per unicità è sempre compresa in tale intervallo. Pertanto tale soluzione è limitata.

(iv) La soluzione φ ha derivata strettamente positiva, e quindi è strettamente crescente. Inoltre è limitata, dato che come si è appena visto si ha $-\pi/2 < \varphi(t) < \pi/2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ne segue che i limiti

di φ per $t \rightarrow \pm\infty$ esistono finiti (teorema sul limite delle funzioni monotone). Se $\ell_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$, passando al limite nell'equazione $\varphi'(t) = \log(1 + \cos^2(\varphi(t)))$ si ottiene $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = \log(1 + \cos^2 \ell_+)$. Per il criterio dell'asintoto, dato che esistono finiti sia il limite di φ che quello di φ' quest'ultimo deve essere nullo; da $0 < \ell_+ \leq \pi/2$ e $\log(1 + \cos^2 \ell_+) = 0$ si trae allora $\ell_+ = \pi/2$. Similmente si prova che si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -\pi/2$.

La funzione φ è dispari. Posto infatti $\psi(t) = -\varphi(-t)$, si ha $\psi(0) = 0$; se mostriamo che ψ è soluzione per unicità si ha $\psi(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi $-\varphi(-t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, che mostra appunto la disparità di φ . Si ha ora $\psi'(t) = \varphi'(-t)$ e $\log(1 + \cos^2 \psi(t)) = \log(1 + \cos^2(-\varphi(-t))) = \log(1 + \cos^2 \varphi(-t))$, per la parità della funzione coseno. E dato che φ è soluzione si ha $\varphi'(s) = \log(1 + \cos^2 \varphi(s))$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, in particolare quindi anche se s si chiama $-t$. Ne segue che ψ è soluzione.

(v) Escludiamo naturalmente le soluzioni costanti, supponiamo cioè $a \neq \pi/2 + m\pi$. Anzitutto si ha che se $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione allora anche $u(t) + k\pi$ è soluzione, per ogni intero k (verifica immediata: $\cos(u(t) + k\pi) = (-1)^k \cos(u(t))$, e quindi $\cos^2(u(t) + k\pi) = \cos^2 u(t)$, mentre $(u(t) + k\pi)' = u'(t)$). Ne segue che la soluzione con $u(0) = a$ si scrive $v(t) + k\pi$, dove v è la soluzione con $v(0) = \alpha = a - k\pi$, se $-\pi/2 + k\pi < a < \pi/2 + k\pi$ (k è la parte intera di $(a + \pi/2)/\pi$). E la soluzione v è chiaramente una traslata di φ : per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $t \mapsto \varphi(t + c)$ è una soluzione dell'equazione; essa vale α per $t = 0$ se e solo se $\alpha = \varphi(c)$, e cioè $c = \varphi^{-1}(\alpha)$ (per quanto sopra visto φ è diffeomorfismo strettamente crescente di $\mathbb{R}$ su $] -\pi/2, \pi/2[$, e quindi φ^{-1} esiste). Quindi $v(t) = \varphi(t + \varphi^{-1}(\alpha))$. □

MATEMATICA 4F PER FISICA E ASTRONOMIA—II RECUPERO—18 SETTEMBRE 2007

ESERCIZIO 31. Trovare il modulo e l'argomento principale del numero complesso $1 + (e^{i\pi/3}/2)$. Trovare poi la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{in\pi/3}}{2^n n}.$$

Risoluzione. Il numero è $(1 + \cos(\pi/3)/2) + i \sin(\pi/3)/2 = 5/4 + i\sqrt{3}/4$; il modulo è

$$\frac{1}{4} \sqrt{25 + 3} = \frac{\sqrt{7}}{2}; \quad \text{l'argomento principale} \quad \arctan \frac{\sqrt{3}/4}{5/4} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Per la seconda domanda basta ricordare la serie logaritmica

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1),$$

dove il logaritmo complesso a primo membro è proprio quello principale (come sappiamo pur senza averlo dimostrato, vedi dispense); la nostra serie si ottiene da questa sostituendovi $z = e^{i\pi/3}/2$, che ha modulo $1/2 < 1$. Pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{in\pi/3}}{2^n n} = \log(1 + (e^{i\pi/3}/2)) = \log \frac{\sqrt{7}}{2} + i \arctan \frac{\sqrt{3}}{5}.$$
□

ESERCIZIO 32. In un dato sistema ortonormale di coordinate, una lastra metallica omogenea S è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v; \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi]$$

La massa della lastra è m chilogrammi; le coordinate sono in metri.

- (i) Trovare la densità superficiale della lastra, $\mu = ? \text{ Kg/metro}^2$
- (ii) Trovare le coordinate del baricentro della lastra.
- (iii) Trovare il momento d'inerzia della lastra rispetto all'asse z
- (iv) Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = (-ya, xb, 0)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti, trovare la circuitazione di $\vec{F}$ attorno al bordo della superficie della lastra (orientato come da parametrizzazione), sia direttamente che con la formula di Stokes.
- (v) È vero che la circuitazione di cui in (iv) è nulla se e solo se il campo $\vec{F}$ è conservativo?
- (vi) (facoltativo) Sapreste trovare per la superficie una rappresentazione cartesiana $z = f(x, y)$?

Risoluzione. (i) Occorre naturalmente trovare l'area della lastra; procuriamoci prima la matrice jacobiana di $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$:

$$\begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e quindi l'elemento d'area è:

$$|\partial_u p(u, v) \times \partial_v p(u, v)| \, dudv = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v + u^2} \, dudv = \sqrt{1 + u^2} \, dudv.$$

Quindi l'area è

$$\text{Area}(S) = \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} |\partial_u p(u, v) \times \partial_v p(u, v)| \, dudv = \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} \sqrt{1 + u^2} \, dudv = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du$$

Il formulario dice che una primitiva di $\sqrt{1 + u^2}$ è $(u\sqrt{1 + u^2} + \text{settsinh } u)/2$, per cui l'area vale

$$\text{Area}(S) = \pi(\sqrt{2} + \text{settsinh } 1) = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})),$$

e la richiesta densità superficiale è allora

$$\mu = m/(\pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))) \quad (\text{in chilogrammi/metri}^2).$$

(ii) Il baricentro coincide con il baricentro geometrico, dato che la lastra è omogenea; le coordinate sono quindi, se $\alpha = \text{Area}(S)$:

$$x_b = \frac{1}{\alpha} \int_S x \, d\sigma_S; \quad y_b = \frac{1}{\alpha} \int_S y \, d\sigma_S; \quad z_b = \frac{1}{\alpha} \int_S z \, d\sigma_S.$$

Si ha ora:

$$\int_S x \, d\sigma_S = \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} u \cos v \sqrt{1 + u^2} \, dudv = \left(\int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} \, du \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos v \, dv \right) = 0,$$

dato che $\int_{-\pi}^{\pi} \cos v \, dv = 0$;

$$\int_S y \, d\sigma_S = \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} u \sin v \sqrt{1 + u^2} \, dudv = \left(\int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} \, du \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin v \, dv \right) = 0,$$

dato che $\int_{-\pi}^{\pi} \sin v \, dv = 0$;

$$\int_S z \, d\sigma_S = \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} v \sqrt{1 + u^2} \, dudv = \left(\int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} \, du \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} v \, dv \right) = 0,$$

dato che $\int_{-\pi}^{\pi} v \, dv = 0$.

Quindi il baricentro è $(0, 0, 0)$.

(iii) Momento d'inerzia:

$$\int_S \mu(x^2 + y^2) \, d\sigma_S = \mu \int_{[0,1] \times [-\pi, \pi]} u^2 \sqrt{1 + u^2} \, dudv = 2\pi\mu \int_0^1 u^2 \sqrt{1 + u^2} \, du;$$

l'ultimo integrale si può calcolare per parti:

$$(*) \quad \int_0^1 u^2 \sqrt{1 + u^2} \, du = \left[u \frac{1}{3} (1 + u^2)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du;$$

un trucco possibile è questo: si scrive il primo membro come:

$$\int_0^1 u^2 \sqrt{1 + u^2} \, du = \int_0^1 (1 + u^2 - 1) \sqrt{1 + u^2} \, du = \int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du - \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du,$$

da cui uguagliando al secondo (vedi (*)):

$$\int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du - \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du$$

si ottiene

$$\frac{4}{3} \int_0^1 (1 + u^2)^{3/2} \, du = \frac{2}{3} \sqrt{2} + \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du = \frac{2}{3} \sqrt{2} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \text{settsinh } 1);$$

in definitiva

$$\int_0^1 (1+u^2)^{3/2} du = \frac{1}{8}(7\sqrt{2} + 3 \operatorname{settsinh} 1),$$

e quindi

$$\int_S \mu(x^2 + y^2) d\sigma_S = 2\pi\mu \left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{24}\sqrt{2} - \frac{1}{8} \operatorname{settsinh} 1 \right) = \frac{1}{4}\pi\mu(3\sqrt{2} - \operatorname{settsinh} 1).$$

(iv) Il bordo consta dei seguenti cammini:

$$\begin{aligned} \alpha : & (\cos v, \sin v, v), \quad v \in [-\pi, \pi]; & \beta : & (-u, 0, \pi), \quad u \in [0, 1], \quad \text{percorso nel verso opposto;} \\ \gamma : & (0, 0, v), \quad v \in [-\pi, \pi] \quad \text{percorso nel verso opposto;} & \delta : & (u, 0, -\pi) \quad u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Si ha ora

$$\vec{F}(\alpha(v)) \cdot \alpha'(v) = (-a \sin v, b \cos v, 0) \cdot (-\sin v, \cos v, 1) = a \sin^2 v + b \cos^2 v;$$

$$\vec{F}(\beta(u)) \cdot \beta'(u) = (0, -bu, 0) \cdot (-1, 0, 0) = 0$$

$$\vec{F}(\gamma(v)) \cdot \gamma'(v) = (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\vec{F}(\delta(u)) \cdot \delta'(u) = (0, bu, 0) \cdot (0, 0, 0) = 0.$$

Si ha quindi

$$\int_{\partial S} \vec{F}(x, y, z) \cdot d_{\partial S}(x, y, z) = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} (a \sin^2 v + b \cos^2 v) dv = \pi(a + b).$$

Il rotore di $\vec{F}$ è:

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \partial_1 & -ya \\ \vec{e}_2 & \partial_2 & xb \\ \vec{e}_3 & \partial_3 & 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 0 + \vec{e}_2 0 + \vec{e}_3(b + a) = \vec{e}_3(a + b).$$

Il flusso attraverso S del rotore vale quindi

$$\int_{[0,1] \times [-\pi,\pi]} \det \begin{bmatrix} 0 & \cos v & -u \sin v \\ 0 & \sin v & u \cos v \\ a+b & 0 & 1 \end{bmatrix} dudv = \int_{[0,1] \times [-\pi,\pi]} (a+b) dudv = \pi(a+b),$$

coincidente con la circuitazione prima trovata.

(v) Trattandosi di un campo definito su tutto $\mathbb{R}^3$ esso è conservativo se e solo se è irrotazionale. Si è visto che il rotore è $\vec{e}_3(a+b)$ per cui esso è conservativo se e solo se $a+b=0$, e quindi se e solo se la circuitazione $\pi(a+b)$ è nulla.

(vi) È facile vedere che la superficie è la porzione di elicoide coincidente con il grafico dell'argomento principale (questo a meno di alcuni segmenti; a rigore S , come definito dalla parametrizzazione, non è un grafico cartesiano; occorre togliere i pezzi di bordo prima chiamati β, γ, δ); quindi $f(x, y) = \arg(x, y)$. $\square$

ESERCIZIO 33. Si considera l'equazione differenziale

$$x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0 \quad (x \text{ variabile indipendente, nell'intervallo }]0, +\infty[.)$$

- (i) Cercare per essa soluzioni della forma $y(x) = x^\alpha$. Trovatane una, trovare un'altra soluzione con la posizione $y(x) = x^\alpha u(x)$, e determinare l'integrale generale dell'equazione data.
- (ii) Scrivere l'integrale generale su $] -\infty, 0[$ della stessa equazione. Esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$?
- (iii) Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{4}{x^2} z_1 + \frac{3}{x} z_2 \end{cases} \quad x \text{ variabile indipendente, nell'intervallo }]0, +\infty[.$$

Risoluzione. (i) x^α è soluzione su $]0, +\infty[$ se e solo se (si ha $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$)

$$x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3\alpha x^{\alpha-1} + 4x^\alpha) = 0 \quad \text{per ogni } x > 0;$$

equivalentemente

$$(\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 4)x^\alpha = 0 \quad \text{per ogni } x > 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0,$$

il che avviene se e solo se $\alpha = 2$. Quindi $y(x) = x^2$ è soluzione; è ovvio che essa è soluzione anche su tutto $\mathbb{R}$.

(ii) Posto $y(x) = x^2 u(x)$ si ha $y'(x) = 2x u(x) + x^2 u'(x)$ e $y''(x) = 2u(x) + 4x u'(x) + x^2 u''(x)$; sostituendo nell'equazione si ottiene

$$x^2(2u(x) + 4x u'(x) + x^2 u''(x)) - 3x(2x u(x) + x^2 u'(x)) + 4x^2 u(x) = 0,$$

da cui

$$u(x)(2x^2 - 6x^2 + 4x^2) + x^3 u'(x) + x^4 u''(x) = 0, \quad \text{cioè} \quad u'(x) + x u''(x) = 0.$$

Posto $v(x) = u'(x)$ si ha l'equazione $v'(x) = -v(x)/x$, con soluzione $v(x) = k e^{-\log x} = k/x$, per $x > 0$; una primitiva è $u(x) = \log x$. Quindi un'altra soluzione è $x^2 \log x$; sono chiaramente soluzioni linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale è

$$y(x) = (c_1 + c_2 \log x)x^2 \quad (x > 0).$$

(ii) Dai calcoli sopra fatti si comprende come integrale generale su $] -\infty, 0[$ sia

$$y(x) = (c_1 + c_2 \log |x|)x^2 \quad (x < 0).$$

È chiaro che $c x^2$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, sono soluzioni definite su $\mathbb{R}$. Ce ne possono essere altre se e solo se $\varphi(x) = x^2 \log |x|$ si prolunga ad una soluzione su $\mathbb{R}$. Ora $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log |x| = 0$, come ben noto. La derivata per $x \neq 0$ è $\varphi'(x) = 2x \log |x| + x$, che ancora ha limite 0 per $x \rightarrow 0$, per cui φ si prolunga ad una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Ma si ha $\varphi''(x) = 2 \log |x| + 3$, con limite $-\infty$ per $x \rightarrow 0$, per cui $\varphi \notin C^2(\mathbb{R})$. Quindi le uniche soluzioni definite su $\mathbb{R}$ sono i monomi $c x^2$.

(iii) Il sistema è esattamente quello associato all'equazione data, una volta ridotta questa a forma normale. Ne segue che una risolvibile è esattamente la matrice wronskiana del sistema fondamentale di soluzioni trovato, e cioè

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 \log x \\ 2x & 2x \log x + x \end{bmatrix},$$

e l'integrale generale è

$$\Phi(x) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x^2 + c_2 x^2 \log x \\ 2c_1 x + c_2(2x \log x + x) \end{bmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 34. Si considera il sistema differenziale

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} &= x(x+y) \\ \dot{y} &= -y(x+y). \end{cases}$$

- (i) Determinare le soluzioni costanti.
- (ii) Trovare un integrale primo non banale del sistema, cercando un fattore integrante per la forma associata al sistema.
- (iii) Trovare la soluzione massimale del problema dato da (S) con le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, determinando in particolare l'intervallo di esistenza di tale soluzione.
- (iv) Disegnare le traiettorie delle soluzioni con i loro versi di percorrenza.

Risoluzione. (i) Al solito, le soluzioni costanti sono gli zeri del secondo membro, e cioè le soluzioni del sistema

$$(S) \quad \begin{cases} x(x+y) &= 0 \\ -y(x+y) &= 0. \end{cases}$$

e cioè tutti i punti della seconda bisettrice, $(a, -a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(ii) La forma è $y(x+y) dx + x(x+y) dy = (x+y)(y dx + x dy)$; banalmente la forma $y dx + x dy$ è esatta, con primitiva $V(x, y) = xy$, e questo è quindi un integrale primo per il sistema (e $1/(x+y)$ è un fattore integrante).

(iii) Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + xy \\ \dot{y} &= -xy - y^2 \end{cases};$$

Poichè xy è un integrale primo, lungo la soluzione richiesta si ha $x(t)y(t) = x(0)y(0) = 1 \cdot 1 = 1$ per ogni t dell'intervallo di esistenza e quindi $\dot{x} = 1 + x^2$, $\dot{y} = -(1 + y^2)$. Queste sono equazioni a variabili separabili di facile soluzione esplicita; per la prima:

$$\frac{\dot{x}(t)}{1 + (x(t))^2} = 1 \iff \arctan x(t) - \arctan 1 = t \iff \arctan x(t) = \frac{\pi}{4} + t;$$

tale relazione è verificata se e solo se $-\pi/2 < t + \pi/4 < \pi/2$, cioè se e solo se $-3\pi/4 < t < \pi/4$, ed inoltre $x(t) = \tan(t + \pi/4)$ per t in tale intervallo. Similmente

$$-\frac{\dot{y}(t)}{1 + (y(t))^2} = 1 \iff \operatorname{arccotan} y(t) - \operatorname{arccotan} 1 = t \iff \operatorname{arccotan} y(t) = \pi/4 + t,$$

relazione verificata se e solo se $0 < \pi/4 + t < \pi$, e cioè $-\pi/4 < t < 3\pi/4$, ed inoltre $y(t) = \cotan(t + \pi/4)$ in tale intervallo. Dovendo t essere in ambo gli intervalli, la soluzione massimale cercata è

$$(\tan(t + \pi/4), \cotan(t + \pi/4)), \quad \text{con intervallo di esistenza } t \in]-\pi/4, \pi/4[.$$

Si noti che tale soluzione effettivamente sta sull'iperbole $xy = 1$; per $t \rightarrow (\pi/4)^-$ la prima componente tende a $+\infty$ e la seconda a 0, mentre il contrario accade per $t \rightarrow (-\pi/4)^+$.

(iv) È ormai facile vedere che:

- (1) Nel quadrante $x > 0, y > 0$ le traiettorie sono i rami di iperbole $xy = k > 0$, percorse da sinistra a destra; e nel quadrante $x < 0, y < 0$ la traiettorie sono ancora rami di iperbole, ancora percorsi da sinistra a destra (si ha $\dot{x} = x(x + y) > 0$).
- (2) Nel quadrante $x < 0, y > 0$ ogni ramo di iperbole di equazione $xy = k$, con $k < 0$, contiene tre traiettorie: l'equilibrio $(-\sqrt{-k}, \sqrt{-k})$, e i due mezzi rami in cui esso viene diviso da tale punto; il mezzo ramo sopra alla retta $x + y = 0$ è percorso verso il basso (si ha $\dot{y} = -y(x + y) < 0$), il mezzo ramo sotto tale retta è percorso verso l'alto ($\dot{y} = -y(x + y) > 0$) e quindi anche da sinistra a destra (infatti $\dot{x} = x(x + y) > 0$). Stessa cosa nel quarto quadrante, dove i mezzi rami sopra alla seconda bisettrice sono percorsi da sinistra a destra ($\dot{x} = x(x + y) > 0$), quelli sotto verso il basso.
- (3) I quattro semiassi sono altre traiettorie: se ad esempio $y = 0$ si ha dalla prima equazione $\dot{x} = x^2$, ed i due semiassi son percorsi da sinistra a destra; sull'asse y i semiassi sono percorsi dall'alto in basso.

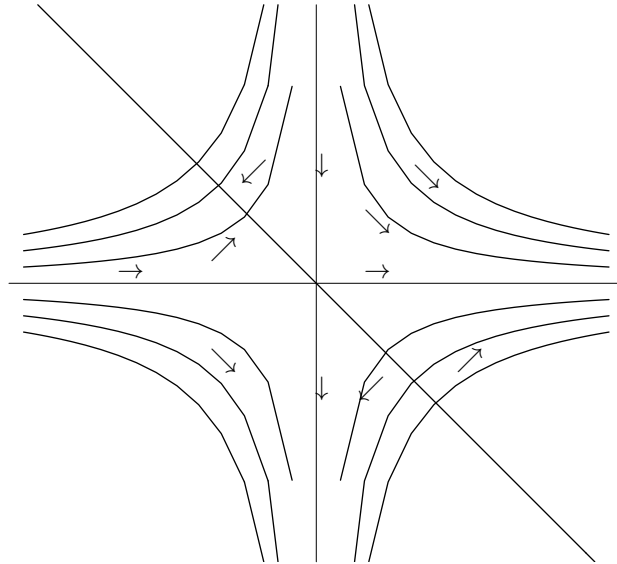


FIGURA 11. Traiettorie; tutti i punti della retta $y = -x$ sono equilibri.

Può anche aiutare la comprensione l'osservare che l'insieme delle soluzioni ha la seguente simmetria: se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$ è una soluzione massimale di (S), allora $\psi : -I \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\psi(t) = (-u(-t), -v(-t))$ è anch'essa soluzione massimale di (S) (in altre parole la simmetrica rispetto all'origine, percorsa con tempi rovesciati, è anch'essa soluzione del sistema); la verifica è facile e si lascia al lettore. $\square$