Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Programma del corso – Modalità dell'esame orale

Università di Padova - Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2024/25
Docente: Corrado Marastoni

(Versione finale del 10/01/2025)

• **Programma del corso.** Le sigle [a], [b] e [c] sono per l'esame orale (si veda più sotto), e vanno intese come riferite a tutto ciò che è contenuto nella frase tra i due punti in cui esse appaiono. Per il contenuto preciso delle nozioni richieste si fa comunque obbligatoriamente riferimento alle note pubblicate nella pagina web del corso `http://www.math.unipd.it/~maraston/Analisi3`, note di cui il seguente programma rappresenta un elenco degli argomenti e risultati trattati.

Varietà differenziali ed estremi vincolati. Teorema del Dini: caso base di due variabili *(sì dim)*, caso di più variabili *(no dim)* e per sistemi *(no dim)* [a]. Teorema della funzione inversa [a]. Funzioni immersive e sommersive. Teoremi delle immersioni e delle sommersioni. Curve piane regolari: tre definizioni equivalenti [a]. Varietà: tre definizioni equivalenti [b]. Grafici e insiemi di livello [b]. Varietà parametrica. Spazio tangente a una varietà differenziale in un punto: varie definizioni e loro equivalenza [b]. Significato geometrico del gradiente [b]. Lo spazio tangente affine a un grafico coincide col grafico della funzione affine approssimante [b]. Fibrato tangente a una varietà differenziale. Morfismo di varietà differenziali e applicazione tangente. Punti stazionari di una funzione su una varietà [c]. Gli estremi locali di una funzione vincolati su una varietà sono punti stazionari [c]. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange [c]. Ricerca degli estremi assoluti di una funzione differenziabile su un insieme compatto decomponibile in unione disgiunta di varietà.

Integrazione multidimensionale, integrale di Lebesgue. Integrale di Riemann e sue limitazioni; motivazione del passaggio alla teoria di Lebesgue. Misura su un insieme: presentazione sommaria (σ-algebre, proprietà, esempi). Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$: proprietà ulteriori richieste (estensione della misura elementare di Peano; invarianza per isometrie), misura esterna e sue proprietà, insiemi misurabili *(no dim)* [b]. L'insieme di Vitali non è misurabile alla Lebesgue. Insiemi trascurabili, proprietà *(no dim)* [b]. Significato della terminologia "quasi ovunque" (q.o.) [b]. Funzioni misurabili, principali proprietà *(no dim)* [b]. Funzioni semplici; approssimazione di funzioni con funzioni semplici *(no dim)* [b]. Integrale di Lebesgue e sue principali proprietà *(no dim)* [c]. Integrale di Lebesgue e integrale di Riemann *(no dim)* [c]. Teorema di riduzione di Fubini *(no dim)* [a]. Teorema di integrabilità di Tonelli *(no dim)* [a]. Formula del cambio di variabili *(no dim)*; casi particolari di maggior interesse *(sì dim)* [a]. Integrazione di prodotti a variabili separate; integrale di Gauss [a]. Integrali e simmetrie [b]. Baricentro e momento d'inerzia di domini in $\mathbb{R}^3$ [b]. Teorema di Guldino sui volumi di rotazione [c]. Misura k-dimensionale di un parallelogrammo generato da k vettori in $\mathbb{R}^n$; matrice di Gram, identità di Cauchy-Binet [a]. Integrale di volume su una varietà parametrica, e sua indipendenza dalla parametrizzazione [c]. Casi particolari (curve, superfici, grafici cartesiani) [c]. Baricentro e momento d'inerzia di superfici materiali in $\mathbb{R}^3$ [c]. Teorema di Guldino sulle superfici di rotazione [c].

Integrazione dei campi vettoriali. Varietà differenziali con bordo [b]. Il bordo e l'interno di una varietà con bordo sono delle varietà senza bordo [b]. Orientazione di una varietà: caso di uno spazio vettoriale, diffeomorfismi che preservano o invertono l'orientazione, caso generale [b]. Una varietà con una sola carta globale è sempre orientabile [b]. Esempi di varietà non orientabili. Orientazione indotta sul bordo [b]. Partizioni dell'unità su una varietà $\mathcal{C}^\infty$. Flusso di un campo vettoriale attraverso un'ipersuperficie orientata [a]. Rappresentazione del flusso in termini parametrici. Teorema della divergenza *(dim nei casi particolari di un parallelepipedo e di una sfera)* [a]. Formula di Green nel piano [a]. Teorema del gradiente [a]. Formula di Kelvin-Stokes *(no dim)* [b].

Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale. Equazioni differenziali ordinarie in forma normale; riduzione al primo ordine di equazioni di ordine superiore [a]. Equivalenza tra problema differenziale di Cauchy e problema integrale di Volterra [a]. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico, spazi completi; lemma delle contrazioni di Banach-Caccioppoli, anche in forma iterata. Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale, osservazioni sulla taglia del dominio della soluzione locale [a]. Proprietà delle equazioni differenziali con esistenza e unicità locale in ogni punto: unicità globale *(sì dim)*, le soluzioni massimali hanno dominio aperto *(sì dim)*, fuga dai compatti *(no dim)* [b]. Flusso. Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità globale, versione debole e forte [b]. Esistenza e unicità globale per le equazioni differenziali lineari [b]. Equazioni differenziali autonome: invarianza delle soluzioni per traslazioni temporali, flusso, orbite [b]. Curve integrali, equilibri [b]. Principali proprietà delle equazioni autonome date da campi localmente lipschitziani [b]. Integrale primo di un'equazione autonoma [b]. Integrale dell'energia [b]. Spazio delle fasi [b]. Sistemi autonomi nel piano, forma differenziale associata e integrale primo; ricerca di un fattore integrante e casi particolari [c]. Equazione differenziale totale e suo significato [c]. Nozione di equivalenza per sistemi autonomi localmente lipschitziani, sua espressione in termini dei campi *(no dim)* [c]. Tecniche di risoluzione per alcuni tipi di equazioni scalari: equazioni a variabili separabili, equazioni omogenee, equazione autonoma del secondo ordine, equazione di Bernoulli.

Equazioni differenziali lineari. Generalità sulle soluzioni di un'equazione differenziale lineare: struttura delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, matrice risolvente e sue caratterizzazioni e proprietà, struttura delle soluzioni dell'equazione completa, metodo della variazione delle costanti arbitrarie, principio di sovrapposizione [a]. Equazione lineare scalare di ordine superiore: matrice wronskiana, sistema lineare del primo ordine equivalente e adattamento del risultato generale [a]. Caso dei sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti: costruzione diretta con l'operatore di Volterra della soluzione del problema di Cauchy per il problema omogeneo associato [b]. Matrice esponenziale e sue proprietà [b]. Calcolo di una risolvente per il sistema omogeneo e della matrice esponenziale in vari casi: autovalori distinti, un solo autovalore, caso generale tramite decomposizione in sottospazi invarianti specialmente con l'uso degli autospazi generalizzati [c]. Sistemi reali e spazio delle soluzioni reali [c]. Metodi diretti per determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo nel caso quasipolinomiale. Equazioni lineare scalare di ordine superiore a coefficienti costanti: espressione diretta di una famiglia fondamentale di soluzioni dell'omogenea e di una soluzione particolare del sistema non omogeneo nel caso quasipolinomiale. Equazioni di Eulero.

• Modalità dell'esame orale.

— La prova orale, facoltativa, si può sostenere solo dopo aver superato la prova scritta (con voto $S \geq 18$), e *solo nella sessione in cui si è superato lo scritto*, ovvero: • uno/a studente/ssa che supera lo scritto in uno dei due appelli invernali di gennaio-febbraio 2025 potrà sostenere l'orale solo entro l'ultimo appello invernale di febbraio 2025; • uno/a studente/ssa che supera lo scritto nell'unico appello estivo di giugno-luglio 2025 potrà sostenere solo l'orale che verrà tenuto subito dopo lo scritto; • uno/a studente/ssa che supera lo scritto in uno dei due appelli di recupero autunnale di agosto-settembre 2025 potrà sostenere l'orale solo entro l'ultimo appello di recupero autunnale di settembre 2025.

— **Se non si sostiene l'orale.** Rinunciando all'orale, il voto finale F dell'esame sarà il minimo tra S e 23 (ventitre).

— **Se si sostiene l'orale.** Gli/Le studenti/esse che avranno iniziato a sostenere la prova orale perderanno il diritto a registrare il voto dello scritto secondo la modalità precedente: il voto finale F uscirà da una valutazione complessiva delle prove scritta e orale. Lo/la studente/ssa che decide di sostenere la prova orale è invitato/a nel suo interesse, oltre che a presentarsi con una preparazione adeguata (l'orale non è affatto una formalità ma un vero esame), anche a tener presente i seguenti punti.

- Il voto finale F sarà al massimo $S+3$, intendendo $30L$ come 32, ma non vi sono limiti per il minimo: lo/la studente/ssa potrebbe avere un voto F molto ridotto rispetto a S, o venir invitato/a a ripetere la prova orale con voto S ribassato, o addirittura venir invitato/a a ripetere la prova scritta (voto S annullato). In caso di rifiuto da parte dello/a studente/ssa del voto finale F, il docente si riserva la possibilità di decidere se annullare l'intera prova d'esame sostenuta (che in tal caso andrà ripetuta da capo, a partire dallo scritto) o se proporre allo/a studente/ssa di ripetere la sola prova orale, eventualmente con voto S ribassato.
- La prova orale potrà essere svolta secondo tre modalità (con scelte possibili regolate dal fatto che comunque sarà $F \leq S+3$). Gli argomenti richiesti per la prova sono segnati con le sigle [a], [b] e [c], da intendersi come riferite a tutto ciò che è contenuto nella frase tra i due punti in cui esse appaiono. Resta inteso che dei vari argomenti da preparare per la prova (proposizioni, formule, definizioni equivalenti etc.) potranno venir chieste anche le dimostrazioni, a meno che non siano esplicitamente presenti istruzioni particolari (come ad esempio "*(no dim)*" per dire che non sono richieste alcune dimostrazioni o parte di dimostrazioni, oppure "*(sì dim)*" per specificare che la dimostrazione è richiesta solo per certe parti).

  * Prova orale ridotta (voto finale $F \leq 24$): una domanda su argomenti di tipo [a].
  * Prova orale intermedia (voto finale $F \leq 27$): due domande, di cui una su argomenti di tipo [a] e una di tipo [b].
  * Prova orale completa (voto finale $F \leq 30L$): tre domande, di cui una di tipo [a], una [b] e una [c].

  A titolo di esempio, vediamo tre situazioni tipo. • Se lo/a studente/ssa Tizio/a ha $S = 30$ e decide di sostenere una prova orale ridotta egli/ella otterrà comunque $F \leq 24$ (nella sua situazione, Tizio/a dovrebbe sostenere un orale completo: scegliendo di affrontare un orale ridotto, chiaramente egli/ella spreca gran parte delle possibilità dategli dallo scritto). • A uno/a studente/ssa Caio/a con $S = 19$ sarà concesso di sostenere al più un esame orale ridotto (avendo una speranza di voto finale inferiore a 24, a Caio/a non sarà permesso sostenere un orale più difficile di quello ridotto: se egli/ella ambisce a un voto alto, l'unica via è di rifare il suo scritto per cercare di migliorarlo e poi sostenere la prova orale con altre prospettive). • Lo/a studente/ssa Sempronio/a che ha $S = 23$ potrà sostenere un orale ridotto (con lo scopo di arrivare a 24) o un orale intermedio (per arrivare a 26); non gli/le sarà concesso di sostenere un orale completo, così come detto per Caio/a.