Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (24/01/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si abbia la curva polare Γ data da $\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$.

(a) Disegnare Γ, scrivere l'integrale che calcola la lunghezza e trovarne la retta tangente in $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcolare l'area della figura A racchiusa da Γ e dall'asse x, bordi compresi.

(c) Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x - y$ su A (perché esistono?).

2. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1 - x^2 \,;\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$.

(a) Calcolare il baricentro della componente C della superficie esterna ∂E nel piano (x, z).

(b) Calcolare il volume di E.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (y, -x, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente S di ∂E su $z = 1 - x^2$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $(y'' + y^r)\cos t = 1$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $r \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$ allora $\psi(t) = \varphi(-t)$ e/o $\eta(t) = -\varphi(-t)$ lo sono su $-I \subset]-\infty, 0[$? Nel caso, ne seguirebbe che una soluzione definita in $t = 0$ è pari/dispari?

(c) Posto $r = 1$ determinare la soluzione con dato $(y(0), y'(0)) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Rivisitare le precedenti questioni per il problema $(y'' + |y|^\alpha)\cos t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (24/01/2025) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'elemento di lunghezza di una curva polare $\rho(\theta)$ è $d\ell = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$, dunque nel nostro caso con $\rho(\theta) = 3 - 2\sin 2\theta$ la lunghezza di Γ è data da $\int_0^\pi \sqrt{(3-2\sin 2\theta)^2 + (-4\cos 2\theta)^2}\, d\theta$. • Derivando la parametrizzazione $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ si ha $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)$; una forma parametrica della retta tangente è dunque $r = \{\gamma(\frac{\pi}{2}) + t\gamma'(\frac{\pi}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) = (0,3) + t(-3,4) : t \in \mathbb{R}\}$, ovvero $y = -\frac{4}{3}x + 3$.
(b) L'area di A è $\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho(\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (9 - 12\sin 2\theta + 4\sin^2 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}[9\theta + 6\cos 2\theta + (2\theta - \sin 2\theta\cos 2\theta)]_0^\pi = \frac{11\pi}{2}$.
(c) La figura A è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta; per Weierstrass la funzione continua $f(x,y) = x - y$ vi ammetterà estremi assoluti. Per il calcolo dividiamo A in parte interna A', curva Γ' privata dei vertici, segmento aperto $T = \{(x,0) : |x| < 3\}$ e due vertici $P(-3,0)$ e $Q(3,0)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Poiché $\nabla f = (1,-1)$ non si annulla mai, non vi sono punti stazionari in A'. Per Γ' componiamo f con γ ottenendo $F(\theta) = (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$; derivando e ricordando che $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ si ha $F'(\theta) = (-4\cos 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta) - (3 - 2\sin 2\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = -(\cos\theta + \sin\theta)(4(\cos\theta - \sin\theta)^2 + 3 - 2\sin 2\theta)$, e si ha $F'(\theta) = 0$ solo per $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (infatti la seconda parentesi è ≥ 1), ottenendo così il punto $R(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$. Su T si ha $f(x,0) = x$, priva di punti stazionari. Per quanto detto, gli estremi assoluti di f su A potranno essere assunti solo in R, P e Q: essendo $f(R) = -5\sqrt{2} \sim -7{,}1$, $f(P) = -3$ e $f(Q) = 3$, il massimo assoluto è 3 (assunto in Q) e il minimo $-5\sqrt{2}$ (assunto in R).

2. (Figura 2) Il solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ è delimitato dalle due superfici di equazioni $z = x^2 + y^2$ (un paraboloide di rotazione con asse l'asse z e vertice nell'origine) e $z = 1 - x^2$ (una "grondaia rovesciata" parallela all'asse y con sezione la parabola indicata nel piano (x,z)). Notiamo che l'intersezione delle due superfici determina l'equazione $x^2 + y^2 = 1 - x^2$, ovvero $2x^2 + y^2 = 1$ (quarto di ellisse centrata in $(0,0)$ di semiassi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1) che delimita la proiezione D di E nel nel 1o quadrante del piano orizzontale. La superficie esterna ∂E ha 4 componenti: la figura C nel piano (x,z) compresa tra due parabole $z = x^2$ e $z = 1 - x^2$; la figura L nel piano (y,z) compresa tra la parabola $z = y^2$ e la quota $z = 1$; la porzione di paraboloide P data da $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 1 - x^2$; e la porzione di grondaia S data da $z = 1 - x^2$ con $z \geq x^2 + y^2$.

(a) La figura $C = \{(x,z) : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ x^2 \leq z \leq 1 - x^2\}$ ha area $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1-x^2) - x^2)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)\, dx = [x - \frac{2}{3}x^3]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; si ha poi $\int_C x\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,((1-x^2) - x^2)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - 2x^3)\, dx = \frac{1}{2}[x^2 - x^4]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{8}$, da cui $x_G = \frac{3\sqrt{2}}{16}$. Per simmetria deve essere $z_G = \frac{1}{2}$, perciò il baricentro è $G(\frac{3\sqrt{2}}{16}, \frac{1}{2})$.
(b) Il volume di E espresso per (x,y)-fili è $\int_D ((1-x^2) - (x^2+y^2))\, dx\, dy = \int_D (1 - 2x^2 - y^2)\, dx\, dy$. Per continuare il calcolo converrà parametrizzare il quarto di ellisse piena D tramite $(x,y) = \phi(s,\alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha, s\sin\alpha)$ con $0 \leq s \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: si ha $\det \mathsf{J}_\phi(s,\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}s\sin\alpha \\ \sin\alpha & s\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, s$, dunque l'integrale diventa $\int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - s^2)\, \frac{\sqrt{2}}{2}\, s\, d\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}[\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s^4]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$. • In alternativa ragioniamo per y-fette. Per $0 \leq y \leq 1$ la y-fetta è la parte del piano (x,z) compresa tra le parabole $z = x^2 + y^2$ (sotto) e $z = 1 - x^2$ (sopra) che si intersecano per $x = x_y = \sqrt{\frac{1-y^2}{2}}$ e ha area $\int_0^{x_y} ((1-x^2) - (x^2+y^2))\, dx = \int_0^{x_y} (1 - 2x^2 - y^2)\, dx = [(1-y^2)x - \frac{2}{3}x^3]_0^{x_y} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}$; pertanto, ponendo $y = \sin\alpha$ il volume di E risulta $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\, d\alpha \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{2}}{3}[\frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha) + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{8}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già trovato in precedenza. • Un'ulteriore alternativa è di ragionare per (x,z)-fili. Per $(x,z) \in C$ il filo è dato da $0 \leq y \leq \sqrt{z - x^2}$, dunque il volume è $\int_C \sqrt{z - x^2}\, dx\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{x^2}^{1-x^2} \sqrt{z - x^2}\, dz$. Posto $z - x^2 = u^2$ (da cui $dz = 2u\, du$) si ha allora $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-2x^2}} u\, 2u\, du = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$; posto ancora $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta$ si ottiene infine $\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\beta\, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\, d\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\beta\, d\beta = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già calcolato prima.
(c) Il campo $F = (y, -x, 0)$ è orizzontale e ha come curve integrali le circonferenze centrate nell'asse z: dunque, per parallelismo, il suo flusso $\Phi_P(F)$ attraverso il paraboloide P è nullo. La componente superiore S è parametrizzata da $(x, y, 1-x^2)$ con $(x,y) \in D$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_S(F) = \int_D \det \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \\ 0 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\, dy = \int_D 2xy\, dx\, dy = \int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha)(s\sin\alpha)\, \frac{\sqrt{2}}{2}\, s\, d\alpha = \int_0^1 s^3\, ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = [\frac{1}{4}s^4]_0^1[-\frac{1}{4}\cos 2\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}$. Per definizione si ha poi $\Phi_C(F) = \int_C (0, -x, 0) \cdot (0, -1, 0)\, dx\, dz = \int_C x\, dx\, dz = \frac{1}{8}$ (calcolo già fatto nel punto (a)) e $\Phi_L(F) = \int_L (y, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0)\, dy\, dz = -\int_L y\, dy\, dz = -\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y\, dz = -\int_0^1 y(1 - y^2)\, dy = -[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4]_0^1 = -\frac{1}{4}$. Pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E è $0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$, coerentemente col fatto che $\nabla \cdot F = 0$ (Gauss).

(d) Usando la parametrizzazione precedente, il flusso di $\nabla \times F = (0, 0, -2)$ attraverso S vale $\int_D \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2x & 0 \end{pmatrix} dx\, dy = -2\,\mathrm{Area}\, D = -2\,\frac{1}{4}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})\,1 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. D'altra parte, girando da $(0,0,1)$ in senso antiorario, il bordo di S è parametriz-

(1) Posto $I = \int \cos^4\alpha\, d\alpha$, integrando per parti si ha $I = \int \cos\alpha\, \cos^3\alpha\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha - \int \sin\alpha\,(-3\sin\alpha\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int (1 - \cos^2\alpha)\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int \cos^2\alpha\, d\alpha - 3I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 3I$ da cui confrontando primo e ultimo membro $4I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$, ovvero $I = \frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha))$.

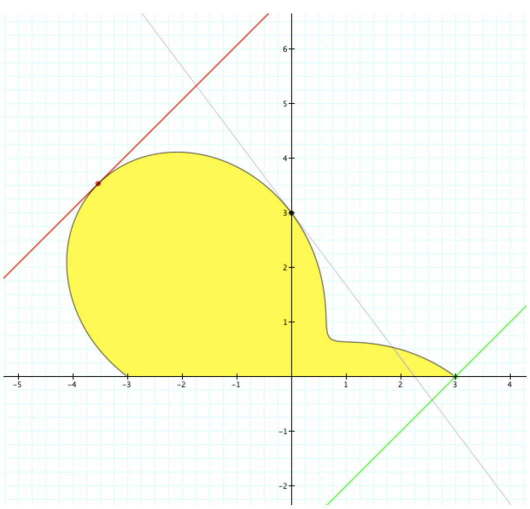
zato da $(x,0,1-x^2)$ con $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, poi $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, \sin\alpha, \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$ con $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ e infine $(0,y,1)$ con $0 \le y \le 1$ (quest'ultimo in senso contrario), dunque la circuitazione di F vale $\oint_{\partial D} F \cdot dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (0,-x,0)\cdot(1,0,-\frac{2}{x})\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, 0)\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha\cos\alpha)\,d\alpha - \int_0^1 (y,0,0)\cdot(0,1,0)\,dy = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - 0 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, come già trovato prima, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

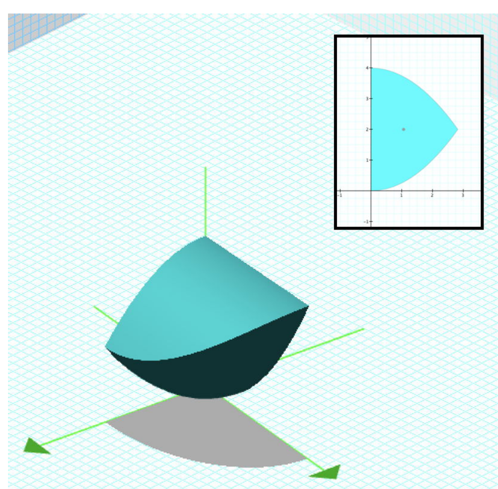
3. (a) L'equazione differenziale $(y'' + y^r)\cos t = 1$ non è in forma normale; d'altra parte nessuna soluzione può essere definita in punti del tipo $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (ne seguirebbe $0 = 1$), dunque l'equazione è del tutto equivalente a $y'' + y^r = \frac{1}{\cos t}$ (a sua volta equivalente al problema del 1o ordine in forma normale $(y,p)' = f(y,p,t) = (p, \frac{1}{\cos t} - y^r)$) su intervalli aperti $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$. • Se $r \le -1$ deve essere $y \ne 0$; per ogni altro dato (t_0, y_0) con $t_0 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $y_0 \ne 0$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) della soluzione. • Se $r = 0$ oppure $r = 1$ l'equazione è lineare, dunque per ogni dato (t_0, y_0) con $t_0 \in I_k$ è garantita esistenza e unicità globale sull'intero intervallo I_k. • Se $r \ge 2$, ancora una volta per ogni dato (t_0, y_0) con $t_0 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) ma non si può dire nulla sull'esistenza globale.

(b) Sia $\varphi(t)$ soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$. Se $\psi(t) = \varphi(-t)$ (ove $t \in -I$) si ha $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ e $\psi''(t) = \varphi''(-t)$, pertanto $(\psi''(t) + \psi(t)^r)\cos t = (\varphi''(-t) + \varphi(-t)^r)\cos t = (\varphi''(-t) + \varphi(-t)^r)\cos(-t) = 1$, il che mostra che anche $\psi(t)$ è soluzione su $-I$. Una verifica analoga per $\eta(t) = -\varphi(-t)$ dà esito negativo. • Il fatto che se $\varphi(t)$ è soluzione allora lo è anche la riflessa $\psi(t) = \varphi(-t)$ non implica che le soluzioni definite in $t = 0$ siano pari: infatti il fatto che $\psi(0) = \varphi(0)$ costituisce un dato di Cauchy incompleto perché manca il dato anche sulla derivata prima. Se però una soluzione definita in $t = 0$ ha ivi derivata prima nulla allora essa è necessariamente pari, perché infatti in tal caso oltre a $\psi(0) = \varphi(0)$ si ha anche $\psi'(0) = -\varphi'(0) = 0 = \varphi'(0)$, da cui $\psi = \varphi$ per unicità globale.

(c) Come detto prima, le soluzioni di $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ (lineare a coefficienti costanti) con dato in $t_0 = 0$ saranno definite su tutto $I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Un sistema fondamentale per l'omogenea è dato da $\{\cos t, \sin t\}$; col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare per la completa è del tipo $\tilde{y}(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$ con $c_1' = -\sin t \frac{1}{\cos t}$ (dunque $c_1(t) = \log|\cos t|$) e $c_2' = +\cos t \frac{1}{\cos t} = 1$ (dunque $c_2(t) = t$). Ne segue che le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole quelle del tipo $y(t) = (A + \log|\cos t|)\cos t + (B + t)\sin t$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Derivando si ha $y' = \operatorname{tg} t \cos t - (A + \log|\cos t|)\sin t + \sin t + (B + t)\cos t$, dunque imponendo che $(y(0), y'(0)) = (A, B) = (a, b)$ si ottiene $y(t) = (a + \log|\cos t|)\cos t + (b + t)\sin t$: in particolare, come previsto, se $y'(0) = b = 0$ le soluzioni sono pari.

(d) Passiamo ora al problema $(y'' + |y|^\alpha)\cos t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ • A quanto detto in (a) va aggiunto che, nel caso $0 < \alpha < 1$, per dati di tipo $(t_0, 0)$ la funzione $f(y,p,t)$ resta continua ma perde la lipschitzianità rispetto (y,p): per tali dati si avrà esistenza locale ma non è assicurata l'unicità. • Per (b) non cambia nulla. • Quanto a (c), invece, la situazione è più delicata. In effetti, per dati con $a > 0$ un sistema fondamentale per l'omogenea resta $\{\cos t, \sin t\}$ come prima; ma per dati con $a < 0$, essendo $|y| = -y$ l'equazione caratteristica diventa $\lambda^2 - 1 = 0$ e dunque un sistema fondamentale per l'omogenea diventa $\{e^t, e^{-t}\}$ (o equivalentemente $\{\cosh t, \sinh t\}$); usando ancora il metodo di variazione delle costanti arbitrarie una soluzione particolare è allora $(\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{2\cos\tau}\,d\tau)e^t + (-\int_0^t \frac{e^{\tau}}{2\cos\tau}\,d\tau)e^{-t} = \int_0^t \frac{\sinh(t-\tau)}{\cos\tau}\,d\tau$, così che lo spazio delle soluzioni nel caso $y(0) = a < 0$ è $y(t) = A\cosh t + B\sinh t + \int_0^t \frac{\sinh(t-\tau)}{\cos\tau}\,d\tau$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $(y(0), y'(0)) = (a, b)$ si ha $(A, B) = (a, b)$. Pertanto, se il dato iniziale è con $a = 0$ e $b \ne 0$ andranno incollate le soluzioni $y(t)$ sopra e sotto con $t \gtrless 0$ a seconda che $b \gtrless 0$, mentre se $a = b = 0$ notiamo che dal testo dell'equazione si deduce che $y''(0) = 1 > 0$ e dunque la soluzione è > 0 per $t \ne 0$ all'intorno di 0; inoltre questo procedimento va rimesso in atto con un nuovo problema di Cauchy in un istante diverso t_1 ogniqualvolta la soluzione si annulli in quell'istante t_1.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (24/01/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si abbia la curva polare X data da $\rho(\theta) = 3 + 2\sin 2\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$.

(a) Disegnare X, scrivere l'integrale che calcola la lunghezza e trovarne la retta tangente in $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calcolare l'area della figura B racchiusa da X e dall'asse x, bordi compresi.

(c) Determinare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x + y$ su B (perché esistono?).

2. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \le x \le 1 - y^2\,;\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

(a) Calcolare il baricentro della componente C della superficie esterna ∂E nel piano (x, y).

(b) Calcolare il volume di E.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e il campo $F = (0, z, -y)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente S di ∂E su $x = 1 - y^2$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $(y'' + y^m)\sin t = 1$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $m \in \mathbb{Z}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Se $\varphi(t)$ è soluzione su un intervallo $I \subset]0, +\infty[$ allora $\psi(t) = \varphi(-t)$ e/o $\eta(t) = -\varphi(-t)$ lo sono su $-I \subset]-\infty, 0[$? Nel caso, ne seguirebbe che una soluzione definita in $t = 0$ è pari/dispari?

(c) Posto $m = 1$ determinare la soluzione con dato $(y(\frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{2})) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Rivisitare le precedenti questioni per il problema $(y'' + |y|^\alpha)\sin t = 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto (24/01/2025) – $\boxed{\text{Tema B}}$ – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'elemento di lunghezza di una curva polare $\rho(\theta)$ è $d\ell = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$, dunque nel nostro caso con $\rho(\theta) = 3+2\sin 2\theta$ la lunghezza di X è data da $\int_0^\pi \sqrt{(3+2\sin 2\theta)^2 + (4\cos 2\theta)^2}\, d\theta$. • Derivando la parametrizzazione $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ si ha $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)$; una forma parametrica della retta tangente è dunque $r = \{\gamma(\frac{\pi}{2}) + t\gamma'(\frac{\pi}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) = (0,3) + t(3,4) : t \in \mathbb{R}\}$, ovvero $y = \frac{4}{3}x + 3$.
(b) L'area di B è $\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho(\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (9 + 12\sin 2\theta + 4\sin^2 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}[9\theta - 6\cos 2\theta + (2\theta - \sin 2\theta\cos 2\theta)]_0^\pi = \frac{11\pi}{2}$.
(c) La figura B è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta; per Weierstrass la funzione continua $f(x,y) = x + y$ vi ammetterà estremi assoluti. Per il calcolo dividiamo B in parte interna B', curva X' privata dei vertici, segmento aperto $T = \{(x,0) : |x| < 3\}$ e due vertici $P(-3,0)$ e $Q(3,0)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Poiché $\nabla f = (1,1)$ non si annulla mai, non vi sono punti stazionari in B'. Per X' componiamo f con γ ottenendo $F(\theta) = (3+2\sin 2\theta)(\cos\theta + \sin\theta)$; derivando e ricordando che $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ si ha $F'(\theta) = (4\cos 2\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + (3+2\sin 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)(4(\cos\theta + \sin\theta)^2 + 3 + 2\sin 2\theta)$, e si ha $F'(\theta) = 0$ solo per $\theta = \frac{\pi}{4}$ (infatti la seconda parentesi è ≥ 1), ottenendo così il punto $R(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$. Su T si ha $f(x,0) = x$, priva di punti stazionari. Per quanto detto, gli estremi assoluti di f su B potranno essere assunti solo in R, P e Q: essendo $f(R) = 5\sqrt{2} \sim 7{,}1$, $f(P) = -3$ e $f(Q) = 3$, il minimo assoluto è -3 (assunto in P) e il massimo $5\sqrt{2}$ (assunto in R).

2. (Figura 2) Il solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1 - y^2;\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$ è delimitato dalle due superfici di equazioni $x = y^2 + z^2$ (un paraboloide di rotazione con asse l'asse x e vertice nell'origine) e $x = 1 - y^2$ (una "grondaia rovesciata" parallela all'asse z con sezione la parabola indicata nel piano (x,y)). Notiamo che l'intersezione delle due superfici determina l'equazione $y^2 + z^2 = 1 - y^2$, ovvero $2y^2 + z^2 = 1$ (quarto di ellisse centrata in $(0,0)$ di semiassi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1) che delimita la proiezione D di E nel nel 1o quadrante del piano orizzontale. La superficie esterna ∂E ha 4 componenti: la figura C nel piano (x,y) compresa tra due parabole $x = y^2$ e $x = 1 - y^2$; la figura L nel piano (x,z) compresa tra la parabola $x = z^2$ e il livello $x = 1$; la porzione di paraboloide P data da $x = y^2 + z^2$ con $x \leq 1 - y^2$; e la porzione di grondaia S data da $x = 1 - y^2$ con $x \geq y^2 + z^2$.

(a) La figura $C = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\, y^2 \leq x \leq 1 - y^2\}$ ha area $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1-y^2) - y^2)\, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2y^2)\, dy = [y - \frac{2}{3}y^3]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Per simmetria deve essere $x_G = \frac{1}{2}$; si ha poi $\int_C y\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\, ((1-y^2) - y^2)\, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (y - 2y^3)\, dy = \frac{1}{2}[y^2 - y^4]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{8}$, da cui $y_G = \frac{3\sqrt{2}}{16}$. Perciò il baricentro è $G(\frac{3\sqrt{2}}{16}, \frac{1}{2})$.
(b) Il volume di E espresso per (y,z)-fili è $\int_D ((1 - y^2) - (y^2 + z^2))\, dy\, dz = \int_D (1 - 2y^2 - z^2)\, dy\, dz$. Per continuare il calcolo converrà parametrizzare il quarto di ellisse piena D tramite $(y,z) = \phi(s,\alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha, s\sin\alpha)$ con $0 \leq s \leq 1$ e $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: si ha $\det \mathrm{J}_\phi(s,\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}s\sin\alpha \\ \sin\alpha & s\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}s$, dunque l'integrale diventa $\int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - s^2)\, \frac{\sqrt{2}}{2}\, s\, d\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}[\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}s^4]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$. • In alternativa ragioniamo per z-fette. Per $0 \leq z \leq 1$ la z-fetta è la parte del piano (x,y) compresa tra le parabole $x = y^2 + z^2$ (sotto) e $x = 1 - y^2$ (sopra) che si intersecano per $y = y_z = \sqrt{\frac{1-z^2}{2}}$ e ha area $\int_0^{y_z} ((1-y^2) - (y^2+z^2))\, dy = \int_0^{y_z} (1 - 2y^2 - z^2)\, dy = [(1-z^2)y - \frac{2}{3}y^3]_0^{y_z} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$; pertanto, ponendo $z = \sin\alpha$ il volume di E risulta $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}\, dz = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\, d\alpha \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{2}}{3}[\frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha) + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{8}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già trovato in precedenza. • Un'ulteriore alternativa è di ragionare per (x,y)-fili. Per $(x,y) \in C$ il filo è dato da $0 \leq z \leq \sqrt{x - y^2}$, dunque il volume è $\int_C \sqrt{x - y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{y^2}^{1-y^2} \sqrt{x - y^2}\, dx$. Posto $x - y^2 = u^2$ (da cui $dx = 2u\, du$) si ha allora $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-2y^2}} u\, 2u\, du = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$; posto ancora $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta$ si ottiene infine $\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\beta\, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\, d\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\beta\, d\beta = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$, come già calcolato prima.
(c) Il campo $F = (0, z, -y)$ è parallelo al piano (y,z) e ha come curve integrali le circonferenze centrate nell'asse x: dunque, per parallelismo, il suo flusso $\Phi_P(F)$ attraverso il paraboloide P è nullo. La componente S su $x = 1 - y^2$ è parametrizzata da $(1 - y^2, y, z)$ con $(y,z) \in D$ (normale associata uscente), dunque $\Phi_S(F) = \int_D \det\begin{pmatrix} 0 & -2y & 0 \\ z & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} dy\, dz = \int_D 2yz\, dy\, dz = \int_0^1 ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\frac{\sqrt{2}}{2}s\cos\alpha)(s\sin\alpha)\, \frac{\sqrt{2}}{2}\, s\, d\alpha = \int_0^1 s^3\, ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = [\frac{1}{4}s^4]_0^1[-\frac{1}{4}\cos 2\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}$. Per definizione si ha poi $\Phi_C(F) = \int_C (0,0,-y)\cdot(0,0,-1)\, dx\, dz = \int_C y\, dx\, dy = \frac{1}{8}$ (calcolo già fatto nel punto (a)) e $\Phi_L(F) = \int_L (0,z,0)\cdot(0,-1,0)\, dy\, dz = -\int_L z\, dx\, dz = -\int_0^a dz \int_{z^2}^a z\, dx = -\int_0^a z(1 - z^2)\, dz = -[\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^4]_0^1 = -\frac{1}{4}$. Pertanto il flusso totale di F uscente da ∂E è $0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = 0$, coerentemente col fatto che $\nabla\cdot F = 0$ (Gauss).

(d) Usando la parametrizzazione di prima, il flusso di $\nabla\times F = (-2,0,0)$ attraverso S vale $\int_D \det\begin{pmatrix} -2 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dy\, dz =$

---

(1) Posto $I = \int \cos^4\alpha\, d\alpha$, integrando per parti si ha $I = \int \cos\alpha\, \cos^3\alpha\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha - \int \sin\alpha\, (-3\sin\alpha\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int (1 - \cos^2\alpha)\cos^2\alpha)\, d\alpha = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + 3\int \cos^2\alpha\, d\alpha - 3I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 3I$ da cui confrontando primo e ultimo membro $4I = \sin\alpha\, \cos^3\alpha + \frac{3}{2}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$, ovvero $I = \frac{1}{8}(2\sin\alpha\cos^3\alpha + 3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha))$.

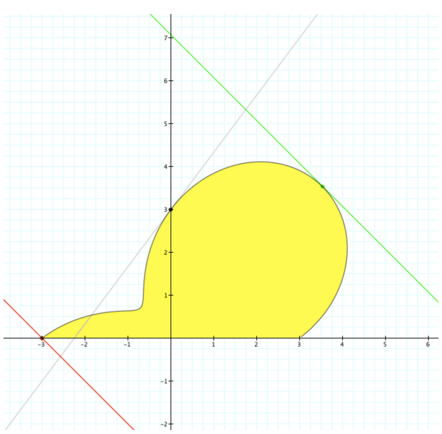
$-2\,\mathrm{Area}\,D=-2\,\frac{1}{4}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})1=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. D'altra parte, girando da $(1,0,0)$ in senso antiorario, il bordo di S è parametrizzato da $(x,0,1-x^2)$ con $0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$, poi $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,\sin\alpha,\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$ con $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ e infine $(0,y,1)$ con $0\le y\le 1$ (quest'ultimo in senso contrario), dunque la circuitazione di F vale $\oint_{\partial D}F\cdot dx=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(0,-x,0)\cdot(1,0,-2x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,0)\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha,\cos\alpha,\sin\alpha\cos\alpha)\,d\alpha-\int_0^1(y,0,0)\cdot(0,1,0)\,dy=0-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\alpha+0=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, come già trovato prima, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

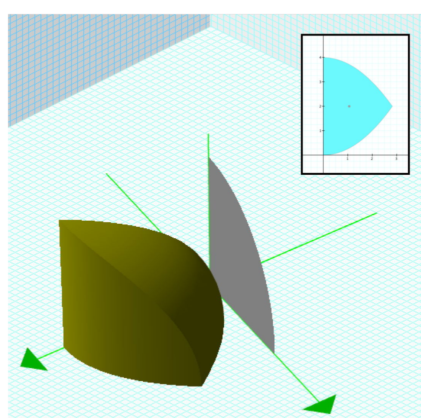
3. (a) L'equazione differenziale $(y''+y^m)\sin t=1$ non è in forma normale; d'altra parte nessuna soluzione può essere definita in punti del tipo $t=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ (ne seguirebbe $0=1$), dunque l'equazione è del tutto equivalente a $y''+y^m=\frac{1}{\sin t}$ (a sua volta equivalente al problema del 1o ordine in forma normale $(y,p)'=f(y,p,t)=(p,\frac{1}{\sin t}-y^m)$) su intervalli aperti $I_k=]k\pi,(k+1)\pi[$. • Se $m\le-1$ deve essere $y\ne 0$; per ogni altro dato (t_0,y_0) con $t_0\ne k\pi$ e $y_0\ne 0$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) della soluzione. • Se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è lineare, dunque per ogni dato (t_0,y_0) con $t_0\in I_k$ è garantita esistenza e unicità globale sull'intero intervallo I_k. • Se $r\ge 2$, ancora una volta per ogni dato (t_0,y_0) con $t_0\ne k\pi$ è garantita esistenza e unicità locale (e unicità globale) ma non si può dire nulla sull'esistenza globale.

(b) Sia $\varphi(t)$ soluzione su un intervallo $I\subset]0,+\infty[$. Se $\eta(t)=-\varphi(-t)$ (ove $t\in-I$) si ha $\eta'(t)=\varphi'(-t)$ e $\eta''(t)=-\varphi''(-t)$, pertanto nel caso m dispari si ha $(\eta''(t)+\eta(t)^m)\sin t=(-\varphi''(-t)-\varphi(-t)^m)\sin t=(\varphi''(-t)+\varphi(-t)^m)\sin(-t)=1$, il che mostra che anche $\eta(t)$ è soluzione su $-I$. Verifiche analoghe per $\psi(t)=\varphi(-t)$, o per $\eta(t)$ se m è pari, danno esito negativo. • Se nel caso m dispari una soluzione $\varphi(t)$ fosse definita anche in $t=0$ allora per continuità $\varphi(0)=-\varphi(-0)=-\varphi(0)$, ovvero $\varphi(0)=0$. Ma allora, detta $\eta(t)=-\varphi(-t)$, si avrebbe $(\eta(0),\eta'(0))=(-\eta(0),\eta'(0))=(0,\varphi'(0))=(\varphi(0),\varphi'(0))$, dunque $\eta=\varphi$ per unicità globale, da cui la disparità di $\varphi(t)$. Insomma: una soluzione $\varphi(t)$ definita in $t=0$ (ammesso che esista come funzione non solo continua ma di classe C^1) si dovrebbe necessariamente annullare e sarebbe dispari.

(c) Come detto prima, le soluzioni di $y''+y=\frac{1}{\sin t}$ (lineare a coefficienti costanti) con dato in $t_0=0$ saranno definite su tutto $I_0=]0,\pi[$. Un sistema fondamentale per l'omogenea è dato da $\{\cos t,\,\sin t\}$; col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, una soluzione particolare per la completa è del tipo $\tilde{y}(t)=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$ con $c_1'=-\sin t\,\frac{1}{\sin t}=-1$ (dunque $c_1(t)=-t$) e $c_2'=+\cos t\,\frac{1}{\sin t}=1$ (dunque $c_2(t)=\log|\sin t|$). Ne segue che le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole quelle del tipo $y(t)=(A-t)\cos t+(B+\log|\sin t|)\sin t$ con $A,B\in\mathbb{C}$. Derivando si ha $y'=-\cos t-(A-t)\sin t+\operatorname{cotg}t\sin t+(B+\log|\sin t|)\cos t$, dunque imponendo che $(y(\frac{\pi}{2}),y'(\frac{\pi}{2}))=(B,\frac{\pi}{2}-A)=(a,b)$ si ottiene $y(t)=(\frac{\pi}{2}-b-t)\cos t+(a+\log|\sin t|)\sin t$. In particolare notiamo che $\lim_{t\to 0}y(t)=\frac{\pi}{2}-b$ e $\lim_{t\to\pi}y(t)=\frac{\pi}{2}+b$ ma $\lim_{t\to 0}y'(t)=-\infty$ e $\lim_{t\to\pi}y'(t)=+\infty$, ovvero tutte queste soluzioni sono prolungabili agli estremi del dominio ma solo come funzioni continue, non come soluzioni C^1: in particolare non esistono soluzioni dell'equazione definite in $t=0$.

(d) Passiamo ora al problema $(y''+|y|^\alpha)\sin t=1$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ • A quanto detto in (a) va aggiunto che, nel caso $0<\alpha<1$, per dati di tipo $(t_0,0)$ la funzione $f(y,p,t)$ resta continua ma perde la lipschitzianità rispetto (y,p): per tali dati si avrà esistenza locale ma non è assicurata l'unicità. • Per (b) non si ha più la simmetria individuata prima. • Quanto a (c), invece, la situazione è più delicata. In effetti, per dati con $a>0$ un sistema fondamentale per l'omogenea resta $\{\cos t,\,\sin t\}$ come prima; ma per dati con $a<0$, essendo $|y|=-y$ l'equazione caratteristica diventa $\lambda^2-1=0$ e dunque un sistema fondamentale per l'omogenea diventa $\{e^t,\,e^{-t}\}$ (o equivalentemente $\{\cosh t,\,\sinh t\}$); usando ancora il metodo di variazione delle costanti arbitrarie una soluzione particolare è allora $(\int_{\frac{\pi}{2}}^t\frac{e^{-\tau}}{2\sin\tau}\,d\tau)e^t+(-\int_{\frac{\pi}{2}}^t\frac{e^{\tau}}{2\sin\tau}\,d\tau)e^{-t}=\int_{\frac{\pi}{2}}^t\frac{\sinh(t-\tau)}{\sin\tau}\,d\tau$, così che lo spazio delle soluzioni nel caso $y(\frac{\pi}{2})=a<0$ è $y(t)=A\cosh t+B\sinh t+\int_{\frac{\pi}{2}}^t\frac{\sinh(t-\tau)}{\sin\tau}\,d\tau$ con $A,B\in\mathbb{C}$. Pertanto, se il dato iniziale è con $a=0$ e $b\ne 0$ andranno incollate le soluzioni $y(t)$ sopra e sotto con $t\gtrless 0$ a seconda che $b\gtrless 0$, mentre se $a=b=0$ notiamo che dal testo dell'equazione si deduce che $y''(\frac{\pi}{2})=1>0$ e dunque la soluzione è >0 per $t\ne\frac{\pi}{2}$ all'intorno di $\frac{\pi}{2}$; inoltre questo procedimento va rimesso in atto con un nuovo problema di Cauchy in un istante diverso t_1 ogniqualvolta la soluzione si annulli in quell'istante t_1.





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.