Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (07/02/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si consideri la funzione $g(x,y) = \log(x^2+y^2) - 2x + y$.

(a) Quali curve di livello di g sono regolari? Detta poi Γ la curva di livello passante per $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ determinare la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Mostrare che $Q(1,0)$ è stazionario su Γ per una delle due coordinate, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : 2x + y \ge 2a,\ x^2+y^2 \le 4a^2,\ y \ge 0\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, z, z)$.

3. È data l'equazione differenziale $(\alpha y^2 + t)y' = y + (\alpha - 1)t$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Posto $\alpha = 1$ risolvere i problemi di Cauchy con $y(1) = 0$, oppure $y(1) = -1$, oppure $y(-1) = 2$.

(c) Posto $\alpha = 0$ risolvere gli stessi problemi di Cauchy del punto precedente.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (07/02/2025) – Tema A – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y) = \log(x^2+y^2) - 2x + y$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha $\nabla g = (\frac{2x}{x^2+y^2} - 2,\ \frac{2y}{x^2+y^2} + 1) = (0,0)$ se e solo se $x^2+y^2 = x = -2y$: dunque sostituendo $x = -2y$ in $x^2+y^2 = -2y$ si ricava $5y^2 = -2y$, ovvero $y = 0$ (da cui $x = 0$, ma il punto $O(0,0)$ è fuori dal dominio) oppure $y = -\frac{2}{5}$, che dà luogo all'unico punto $A(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$. Pertanto tutte le curve di livello di g sono regolari, tranne (al più) quella di livello $g(A) = 2\ln 2 - \ln 5 - 2$ nel punto A. • In particolare la curva di livello Γ passante per $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ (ovvero $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = g(P) = -2\}$) è regolare, e la retta tangente affine è data da $\nabla g(P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \cdot (x - \frac{3}{5}, y + \frac{4}{5}) = 0$, ovvero $y = -\frac{4}{3}x$.
(b) Per il punto $Q(1,0)$ si ha $g(Q) = -2$, dunque anche Q appartiene alla curva di livello Γ. Essendo $\nabla g(Q) = (0,1)$ si ha che $Q(1,0)$ è stazionario su Γ per la coordinata y, e per determinarne la natura dobbiamo parametrizzare Γ attorno a Q: in sostanza, da $g(x,y) = -2$ dobbiamo esplicitare $y(x)$ al 2o ordine. Derivando l'identità $g(x, y(x)) \equiv -2$ rispetto a x si ottiene $\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} - 2 + y' = 0$, da cui calcolando per $x = 1$ con $y(1) = 0$ si ha $2 - 2 + y'(1) = 0$ (dunque $y'(1) = 0$, come atteso); derivando ancora si ha $2\frac{(1+(y')^2+yy'')(x^2+y^2)-2(x+yy')^2}{(x^2+y^2)^2} + y'' = 0$, da cui calcolando per $x = 1$ con $y(1) = y'(1) = 0$ si ricava $2(1-2) + y''(1) = 0$ (dunque $y''(1) = 2$). Pertanto $y = (x-1)^2 + o_1(x-1)^2$, dunque $Q(1,0)$ è un punto di minimo locale stretto per la coordinata y su Γ.
(c) La figura $K = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$ è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta, ed è interamente contenuta nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su K esistono per Weierstrass. Per il calcolo dividiamo K nella parte interna K_1, nei due quarti aperti di circonferenza K_2 e K_3 di raggi 1 e 2, nei due segmenti aperti $K_4 = \{(x,0) : 1 < x < 2\}$ e $K_5 = \{(0,y) : -2 < y < -1\}$ e nei quattro punti $B_1(0,-2)$, $B_2(0,-1)$, $B_3(1,0)$ e $B_4(2,0)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Come visto, l'unico punto stazionario di g è $A(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ che però non appartiene a K_1 e dunque non va tenuto considerato. L'arco K_2 è parametrizzato da $(\cos\theta, \sin\theta)$ con $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, dunque su esso g vale $G(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = -2\cos\theta + \sin\theta$; la derivata $G'(\theta) = 2\sin\theta + \cos\theta$ si annulla per $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}$, dando luogo al punto $A_1(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. Similmente, sull'arco K_3 si determina il punto $A_2(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. Per K_4 si ha $G(x) = g(x,0) = 2\log|x| - 2x$ con $1 < x < 2$: la derivata $G'(x) = \frac{2}{x} - 2$ si annulla per $x = 1$, non da considerare. Per K_5 si ha $G(y) = g(0,y) = 2\log|y| + y$ con $-2 < y < -1$: la derivata $G'(y) = \frac{2}{y} + 1$ si annulla per $y = -2$, pure da non considerare. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su K potranno essere assunti solo in A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 e B_4: essendo $g(A_1) = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \sim -2{,}2$, $g(A_2) = \log(4) - \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\log 2 - 2\sqrt{5} \sim -3{,}1$, $g(B_1) = \log(4) - 2 = 2\log 2 - 2 \sim -0{,}6$, $g(B_2) = -1$, $g(B_3) = -2$ e $g(B_4) = \log(4) - 4 = 2\log 2 - 4 \sim -2{,}6$, il massimo assoluto è $2\log 2 - 2$ (assunto in B_1) e il minimo $2\log 2 - 2\sqrt{5}$ (assunto in A_2).

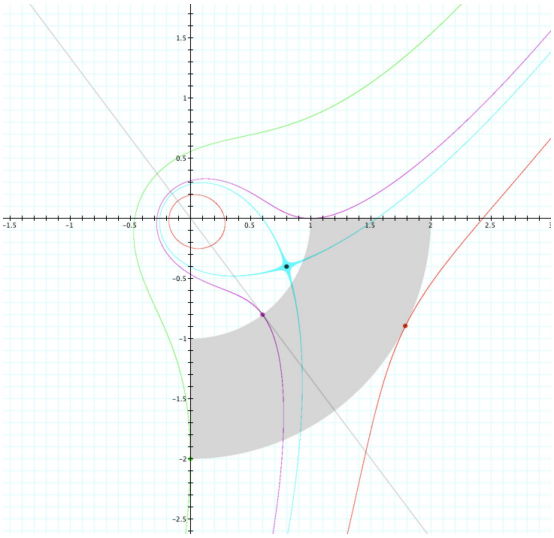
2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : 2x + y \ge 2a,\ x^2+y^2 \le 4a^2,\ y \ge 0\}$ si calcola facilmente anche per differenza, e vale $(\pi - 1)a^2$. Ragionando per y-fili si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2a}((4a^2-y^2) - (a-\frac{1}{2}y)^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2a}(4a^2 - y^2 - a^2 - \frac{1}{4}y^2 + ay)\,dy = \frac{1}{2}[3a^2y + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{5}{12}y^3]_0^{2a} = \frac{7}{3}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} y\,dx = \int_0^{2a} y(\sqrt{4a^2-y^2} - (a - \frac{1}{2}y))\,dy = [-\frac{1}{3}(4a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{6}y^3]_0^{2a} = 2a^3$, perciò il baricentro è $G(\frac{7}{3(\pi-1)}a,\ \frac{2}{\pi-1}a)$.
(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo testare l'integrabilità con un integrale iterato. Ragionando sempre per y-fili si ha $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_{a-\frac{1}{2}y}^{\sqrt{4a^2-y^2}} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{2a} [\log x]_{x=a-\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{4a^2-y^2}}\,dy = \int_0^{2a} \log\frac{\sqrt{4a^2-y^2}}{a-\frac{1}{2}y}\,dy = \int_0^{2a} \log 2\sqrt{\frac{2a+y}{2a-y}}\,dy = \int_0^{2a}(\log 2 + \frac{1}{2}\log(2a+y) - \frac{1}{2}\log(2a-y))\,dy = [y\log 2 + \frac{1}{2}(2a+y)(\log(2a+y) - 1) + \frac{1}{2}(2a-y)(\log(2a-y) - 1)]_0^{2a} = (2a\log 2 + 2a(\log 4a - 1)) - 2a(\log 2a - 1) = 4a\log 2$, valore finito. D'altra parte si ha $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^{2a} \frac{\sqrt{4a^2-y^2} - (a-\frac{1}{2}y)}{y}\,dy$, e poiché la funzione integranda è $\sim_0 \frac{a}{y}$ l'integrale diverge a $+\infty$.
(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (0,z,z)$ attraverso ∂E è pari a $\int_E (\nabla \cdot F)\,dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol} E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{7}{3}a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$. La superficie esterna ∂E è formata da A nel piano (x,z), dalla sua copia A' nel piano (y,z), dalla base B (corona circolare nel piano (x,y)) e dalle componenti conica e sferica C e S. Per parallelismo o nullità si ha $\Phi_{A'}(F) = \Phi_B(F) = 0$, mentre per definizione $\Phi_A(F) = \int_A (0,z,z) \cdot (0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A z\,dx\,dz = -2a^3$. La componente C è data da $\gamma(\theta, z) = ((a - \frac{1}{2}z)\cos\theta, (a-\frac{1}{2}z)\sin\theta, z)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le z \le 2a$ (normale associata uscente dal cono, dunque entrante in E) perciò $\Phi_C(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} 0 & -(a-\frac{1}{2}z)\sin\theta & -\frac{1}{2}\cos\theta \\ z & (a-\frac{1}{2}z)\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a} z(a - \frac{1}{2}z)(\frac{1}{2} + \sin\theta)\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2} + \sin\theta)[\frac{1}{2}az^2 - \frac{1}{6}z^3]_{z=0}^{z=2a}\,d\theta = -\frac{2}{3}a^3[\frac{1}{2}\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3})a^3$. Infine la componente S è data da $\gamma(\theta,\varphi) = (2a\cos\theta\sin\varphi, 2a\sin\theta\sin\varphi, 2a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante in E) perciò $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\cos\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 2a\cos\varphi & 0 & -2a\sin\varphi \end{pmatrix} dz = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,[\sin\theta\sin^3\varphi - \cos^3\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}a^3(\frac{\pi}{2} + 1) = (\frac{4\pi}{3} + \frac{8}{3})a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0 + 0 - 2a^3 - (\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3})a^3 + (\frac{4\pi}{3} + \frac{8}{3})a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$, come si voleva.

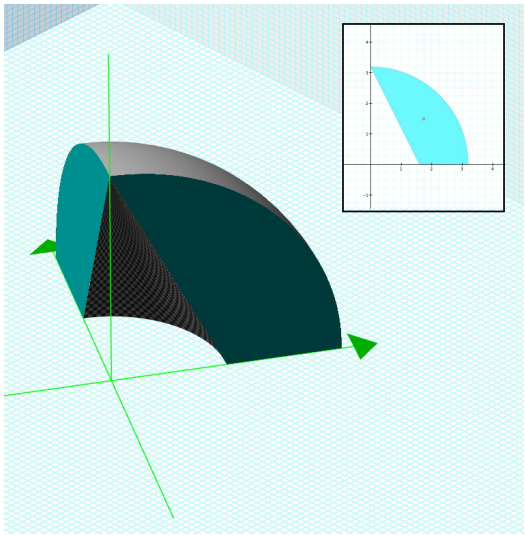
3. (a) L'equazione $(\alpha y^2 + t)y' = y + (\alpha - 1)t$ non è in forma normale. • Se $\alpha = 0$ essa diventa $ty' = y - t$, che essendo

lineare avrà soluzioni definite su tutto $]-\infty,0[$ oppure $]0,+\infty[$; se inoltre esistesse qualche soluzione $y(t)$ definita anche per $t=0$ dovrebbe necessariamente aversi $y(0)=0$. • Invece per $\alpha\neq 0$ l'equazione non è lineare. Se il dato iniziale è della forma $y(t_0)=y_0$ con $\alpha y_0^2+t_0=0$ dovrebbe aversi anche $y_0+(\alpha-1)t_0=0$, e dalle due equazioni risultano le due sole eventuali possibilità $(t_0,y_0)=(0,0)$ oppure (per $\alpha\neq 1$) $(t_0,y_0)=(-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2},\frac{1}{\alpha(\alpha-1)})$. Invece per dati $y(t_0)=y_0$ con $\alpha y_0^2+t_0\neq 0$ si può portare l'equazione in forma normale $y'=f(y,t)=-\frac{y+(\alpha-1)t}{\alpha y^2+t}$ ed è assicurata l'esistenza e unicità locale (e l'unicità globale) della soluzione.

(b) Per $\alpha=1$ l'equazione diventa $(y^2+t)y'=y$. L'equazione totale associata è $\omega=p(y,t)\,dy+q(y,t)\,dt=0$ con $p(y,t)=y^2+t$ e $q(y,t)=-y$; la forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial y}=1-(-1)=2\neq 0$), tuttavia, una volta notato che la funzione costante $y\equiv 0$ è soluzione, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial y})=-\frac{2}{y}$ non dipende da t si ha che $\exp(\int(-\frac{2}{y})\,dy)=y^{-2}$ è fattore integrante. Se $F(y,t)$ è primitiva per $y^{-2}\omega$ dovrà aversi $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial t})=(1+\frac{t}{y^2},-\frac{1}{y})$: da $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{1}{y}$ si ricava $F=-\frac{t}{y}+\varphi(y)$ con φ da determinare, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{t}{y^2}+\varphi'(y)=1+\frac{t}{y^2}$ si deduce che $\varphi'(y)=1$, ovvero $\varphi(y)=y$. Una forma implicita per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione è data dunque dalle curve di livello $F(y,t)=y-\frac{t}{y}=k$, ovvero $y^2-ky-t=0$. Col dato $y(1)=0$ la soluzione è la costante nulla $y\equiv 0$ (dominio $\mathbb{R}$); col dato $y(1)=-1$ si ricava $k=0$, da cui $y^2-t=0$ ovvero $y=-\sqrt{t}$ (dominio $]0,+\infty[$); infine, col dato $y(-1)=2$ si ricava $k=\frac{5}{2}$ da cui $2y^2-5y-2t=0$, ovvero $y=\frac{5+\sqrt{25+16t}}{4}$ (dominio $]-\frac{25}{16},+\infty[$).

(c) Per $\alpha=0$ l'equazione diventa $ty'=y-t$, lineare. Scritta per $t\neq 0$ nella forma $y'+p(t)\,y=q(t)$ con $p(t)=-\frac{1}{t}$ e $q(t)=-1$, si ha $P(t)=\int p(t)\,dt=-\log|t|$ e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt=\int(-\frac{1}{|t|})\,dt=-\sigma\log|t|$ ove $\sigma=\operatorname{sign} t$, col che la soluzione generale si scrive come $y(t)=e^{-P(t)}(k+\int e^{P(t)}q(t)\,dt)=|t|(k-\sigma\log|t|)=t(k-\log|t|)$ con $k\in\mathbb{R}$ (notiamo che nessuna di queste soluzioni si può prolungare in $t=0$ come funzione C^1 perché $y'(t)=k-\log|t|-1\xrightarrow{t\to 0}+\infty$). Col dato $y(1)=0$ si ricava $k=0$, da cui $y=-t\log t$ (dominio $]0,+\infty[$); col dato $y(1)=-1$ si ricava $k=-1$, da cui $y=-t(1+\log t)$ (dominio $]0,+\infty[$); infine, col dato $y(-1)=2$ si ricava $k=-2$ da cui $y=-t(2+\log|t|)$ (dominio $]-\infty,0[$).





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (07/02/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nel piano cartesiano si consideri la funzione $g(x,y) = x - 2y + \log(x^2+y^2)$.

(a) Quali curve di livello di g sono regolari? Detta poi Γ la curva di livello passante per $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ determinare la retta tangente affine a Γ in P.

(b) Mostrare che $Q(0,1)$ è stazionario su Γ per una delle due coordinate, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : x + 2y \ge 2a,\ x^2+y^2 \le 4a^2,\ x \ge 0\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse x.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (x, x, 0)$.

3. È data l'equazione differenziale $(t+\alpha y^2)y' = (\alpha-1)t + y$ nella funzione scalare $y(t)$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità delle soluzioni del problema dato?

(b) Posto $\alpha = 1$ risolvere i problemi di Cauchy con $y(1) = 0$, oppure $y(1) = -1$, oppure $y(-1) = 2$.

(c) Posto $\alpha = 0$ risolvere gli stessi problemi di Cauchy del punto precedente.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (07/02/2025) – Tema B – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y) = x - 2y + \log(x^2+y^2)$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha $\nabla g = (1 + \frac{2x}{x^2+y^2}, -2 + \frac{2y}{x^2+y^2}) = (0,0)$ se e solo se $x^2+y^2 = y = -2x$: dunque sostituendo $y = -2x$ in $x^2+y^2 = -2x$ si ricava $5x^2 = -2x$, ovvero $x = 0$ (da cui $y = 0$, ma il punto $O(0,0)$ è fuori dal dominio) oppure $x = -\frac{2}{5}$, che dà luogo all'unico punto $A(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$. Pertanto tutte le curve di livello di g sono regolari, tranne (al più) quella di livello $g(A) = 2\ln 2 - \ln 5 - 2$ nel punto A. • In particolare la curva di livello Γ passante per $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ (ovvero $\Gamma = \{(x,y) : g(x,y) = g(P) = -2\}$) è regolare, e la retta tangente affine è data da $\nabla g(P) \cdot (x - x_P, y - y_P) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) \cdot (x + \frac{4}{5}, y - \frac{3}{5}) = 0$, ovvero $y = -\frac{3}{4}x$.
(b) Per il punto $Q(0,1)$ si ha $g(Q) = -2$, dunque anche Q appartiene alla curva di livello Γ. Essendo $\nabla g(Q) = (1,0)$ si ha che $Q(0,1)$ è stazionario su Γ per la coordinata x, e per determinarne la natura dobbiamo parametrizzare Γ attorno a Q: in sostanza, da $g(x,y) = -2$ dobbiamo esplicitare $x(y)$ al 2o ordine. Derivando l'identità $g(x(y), y) \equiv -2$ rispetto a y si ottiene $x' - 2 + \frac{2xx'+2y}{x^2+y^2} = 0$, da cui calcolando per $y = 1$ con $x(1) = 0$ si ha $x'(1) - 2 + 2 = 0$ (dunque $x'(1) = 0$, come atteso); derivando ancora si ha $x'' + 2\frac{((x')^2 + xx'' + 1)(x^2+y^2) - 2(xx'+y)^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$, da cui calcolando per $y = 1$ con $x(1) = x'(1) = 0$ si ricava $x''(1) + 2(1-2) = 0$ (dunque $x''(1) = 2$). Pertanto $x = (y-1)^2 + o_1(y-1)^2$, dunque $Q(0,1)$ è un punto di minimo locale stretto per la coordinata x su Γ.
(c) La figura $K = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta, ed è interamente contenuta nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su K esistono per Weierstrass. Per il calcolo dividiamo K nella parte interna K_1, nei due quarti aperti di circonferenza K_2 e K_3 di raggi 1 e 2, nei due segmenti aperti $K_4 = \{(0,y) : 1 < y < 2\}$ e $K_5 = \{(x,0) : -2 < x < -1\}$ e nei quattro punti $B_1(-2,0)$, $B_2(-1,0)$, $B_3(0,1)$ e $B_4(0,2)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Come visto, l'unico punto stazionario di g è $A(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ che però non appartiene a K_1 e dunque non va tenuto considerato. L'arco K_2 è parametrizzato da $(\cos\theta, \sin\theta)$ con $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, dunque su esso g vale $G(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta - 2\sin\theta$; la derivata $G'(\theta) = -\sin\theta - 2\cos\theta$ si annulla per $\operatorname{tg}\theta = -2$, dando luogo al punto $A_1(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5})$. Similmente, sull'arco K_3 si determina il punto $A_2(-\frac{2}{\sqrt5}, \frac{4}{\sqrt5})$. Per K_4 si ha $G(y) = g(0,y) = -2y + 2\log|y|$ con $1 < y < 2$: la derivata $G'(y) = -2 + \frac{2}{y}$ si annulla per $y = 1$, non da considerare. Per K_5 si ha $G(x) = g(x,0) = x + 2\log|x|$ con $-2 < x < -1$: la derivata $G'(x) = 1 + \frac{2}{x}$ si annulla per $x = -2$, pure da non considerare. Per quanto detto, gli estremi di g su K potranno essere assunti solo in A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 e B_4: essendo $g(A_1) = -\frac{1}{\sqrt5} - \frac{4}{\sqrt5} = -\sqrt5 \sim -2{,}2$, $g(A_2) = -\frac{8}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5} + \log(4) = 2\log 2 - 2\sqrt5 \sim -3{,}1$, $g(B_1) = -2 + \log(4) = 2\log 2 - 2 \sim -0{,}6$, $g(B_2) = -1$, $g(B_3) = -2$ e $g(B_4) = -4 + \log(4) = 2\log 2 - 4 \sim -2{,}6$, il massimo assoluto è $2\log 2 - 2$ (assunto in B_1) e il minimo $2\log 2 - 2\sqrt5$ (assunto in A_2).

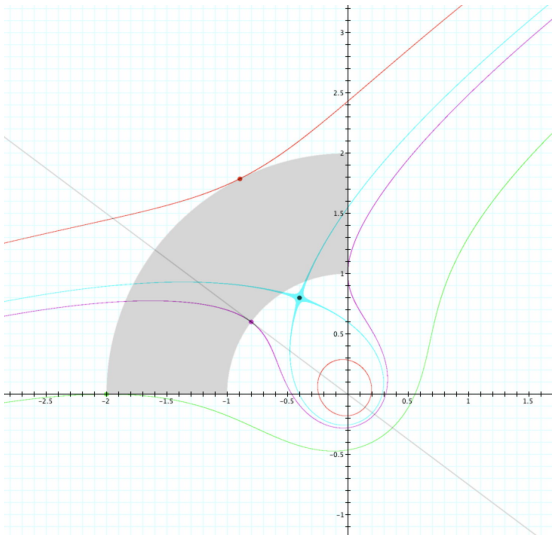
2. (a) (Figura 2) L'area di $A = \{(x,y) : x + 2y \ge 2a,\ x^2+y^2 \le 4a^2,\ x \ge 0\}$ si calcola facilmente anche per differenza, e vale $(\pi - 1)a^2$. Ragionando per x-fili si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{a-\frac12 x}^{\sqrt{4a^2-x^2}} x\,dy = \int_0^{2a} x(\sqrt{4a^2-x^2} - (a - \frac12 x))\,dx = [-\frac13(4a^2-x^2)^{\frac32} - \frac12 ax^2 + \frac16 x^3]_0^{2a} = 2a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{a-\frac12 x}^{\sqrt{4a^2-x^2}} y\,dy = \frac12 \int_0^{2a}((4a^2-x^2) - (a-\frac12 x)^2)\,dx = \frac12 \int_0^{2a}(4a^2 - x^2 - a^2 - \frac14 x^2 + ax)\,dx = \frac12[3a^2 x + \frac12 ax^2 - \frac{5}{12}x^3]_0^{2a} = \frac73 a^3$, perciò il baricentro è $G(\frac{2}{\pi-1}a,\ \frac{7}{3(\pi-1)}a)$.
(b) Le funzioni $\frac1x$ e $\frac1y$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo testare l'integrabilità con un integrale iterato. Ragionando sempre per x-fili si ha $\int_A \frac1y\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{a-\frac12 x}^{\sqrt{4a^2-x^2}} \frac1y\,dy = \int_0^{2a} [\log y]_{y=a-\frac12 x}^{y=\sqrt{4a^2-x^2}}\,dx = \int_0^{2a} \log\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{a-\frac12 x}\,dx = \int_0^{2a} \log 2\sqrt{\frac{2a+x}{2a-x}}\,dx = \int_0^{2a}(\log 2 + \frac12\log(2a+x) - \frac12\log(2a-x))\,dx = [x\log 2 + \frac12(2a+x)(\log(2a+x)-1) + \frac12(2a-x)(\log(2a-x)-1)]_0^{2a} = (2a\log 2 + 2a(\log 4a - 1)) - 2a(\log 2a - 1) = 4a\log 2$, valore finito. D'altra parte si ha $\int_A \frac1x\,dx\,dy = \int_0^{2a} \frac{\sqrt{4a^2-x^2} - (a-\frac12 x)}{x}\,dx$, e poiché la funzione integranda è $\sim_0 \frac{a}{x}$ l'integrale diverge a $+\infty$.
(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (x,x,0)$ attraverso ∂E è pari a $\int_E (\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol} E = \frac{\pi}{2}\int_A z\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\frac73 a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$. La superficie esterna ∂E è formata da A nel piano (x,z), dalla sua copia A' nel piano (x,y), dalla base B (corona circolare nel piano (y,z)) e dalle componenti conica e sferica C e S. Per parallelismo o nullità si ha $\Phi_{A'}(F) = \Phi_B(F) = 0$, mentre per definizione $\Phi_A(F) = \int_A (x,x,0)\cdot(0,-1,0)\,dx\,dz = -\int_A x\,dx\,dz = -2a^3$. La componente C è data da $\gamma(x,\theta) = (x, (a-\frac12 x)\cos\theta, (a-\frac12 x)\sin\theta)$ con $0 \le x \le 2a$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante nel cono, dunque uscente da E) perciò $\Phi_C(F) = \int_0^{\frac\pi2} d\theta \int_0^{2a} \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ x & -\frac12\cos\theta & -(a-\frac12 x)\sin\theta \\ 0 & -\frac12\sin\theta & (a-\frac12 x)\cos\theta \end{pmatrix} dx = -\int_0^{\frac\pi2} d\theta \int_0^{2a} x(a - \frac12 x)(\frac12 + \sin\theta)\,dx = -\int_0^{\frac\pi2}(\frac12 + \sin\theta)[\frac12 ax^2 - \frac16 x^3]_{x=0}^{x=2a}\,d\theta = -\frac23 a^3[\frac12\theta - \cos\theta]_0^{\frac\pi2} = -(\frac{\pi}{6} + \frac23)a^3$. Infine la componente S è data da $\gamma(\theta,\varphi) = (2a\cos\theta\sin\varphi, 2a\sin\theta\sin\varphi, 2a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante in E) perciò $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac\pi2} d\theta \int_0^{\frac\pi2} \det\begin{pmatrix} 2a\cos\theta\sin\varphi & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2a\sin\varphi \end{pmatrix} dx = 8a^3\int_0^{\frac\pi2}(\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\,d\theta \int_0^{\frac\pi2}\sin^3\varphi\,d\varphi = 8a^3[\frac12(\theta + \sin\theta\cos\theta) - \frac14\cos 2\theta]_0^{\frac\pi2}[\frac13\cos^3\varphi - \cos\varphi]_0^{\frac\pi2} = \frac83 a^3(\frac\pi2 + 1) = (\frac{4\pi}{3} + \frac83)a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0 + 0 - 2a^3 - (\frac{\pi}{6} + \frac23)a^3 + (\frac{4\pi}{3} + \frac83)a^3 = \frac{7\pi}{6}a^3$, come si voleva.

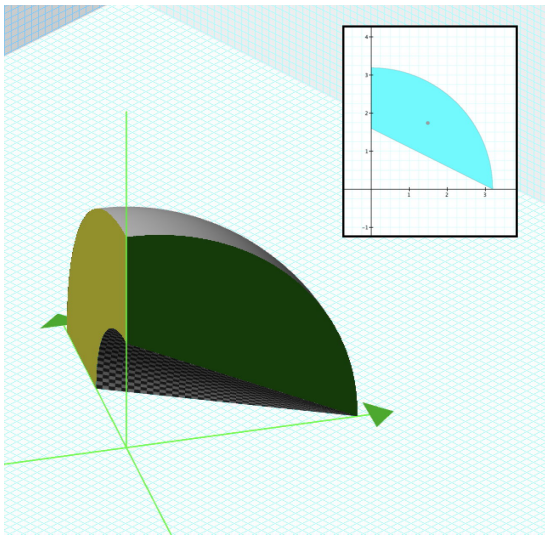
3. (a) L'equazione $(t + \alpha y^2)y' = (\alpha - 1)t + y$ non è in forma normale. • Se $\alpha = 0$ essa diventa $ty' = y - t$, che essendo

lineare avrà soluzioni definite su tutto $]-\infty,0[$ oppure $]0,+\infty[$; se inoltre esistesse qualche soluzione $y(t)$ definita anche per $t=0$ dovrebbe necessariamente aversi $y(0)=0$. • Invece per $\alpha\neq 0$ l'equazione non è lineare. Se il dato iniziale è della forma $y(t_0)=y_0$ con $t_0+\alpha y_0^2=0$ dovrebbe aversi anche $(\alpha-1)t_0+y_0=0$, e dalle due equazioni risultano le due sole eventuali possibilità $(t_0,y_0)=(0,0)$ oppure (per $\alpha\neq 1$) $(t_0,y_0)=(-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2},\frac{1}{\alpha(\alpha-1)})$. Invece per dati $y(t_0)=y_0$ con $t_0+\alpha y_0^2\neq 0$ si può portare l'equazione in forma normale $y'=f(y,t)=-\frac{(\alpha-1)t+y}{t+\alpha y^2}$ ed è assicurata l'esistenza e unicità locale (e l'unicità globale) della soluzione.

(b) Per $\alpha=1$ l'equazione diventa $(y^2+t)y'=y$. L'equazione totale associata è $\omega=p(y,t)\,dy+q(y,t)\,dt=0$ con $p(y,t)=y^2+t$ e $q(y,t)=-y$; la forma ω non è esatta (infatti $\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial y}=1-(-1)=2\neq 0$), tuttavia, una volta notato che la funzione costante $y\equiv 0$ è soluzione, poiché $\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial y})=-\frac{2}{y}$ non dipende da t si ha che $\exp(\int(-\frac{2}{y})\,dy)=y^{-2}$ è fattore integrante. Se $F(y,t)$ è primitiva per $y^{-2}\omega$ dovrà aversi $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial t})=(1+\frac{t}{y^2},-\frac{1}{y})$: da $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{1}{y}$ si ricava $F=-\frac{t}{y}+\varphi(y)$ con φ da determinare, dunque da $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{t}{y^2}+\varphi'(y)=1+\frac{t}{y^2}$ si deduce che $\varphi'(y)=1$, ovvero $\varphi(y)=y$. Una forma implicita per le soluzioni $y(t)$ dell'equazione è data dunque dalle curve di livello $F(y,t)=y-\frac{t}{y}=k$, ovvero $y^2-ky-t=0$. Col dato $y(1)=0$ la soluzione è la costante nulla $y\equiv 0$ (dominio $\mathbb{R}$); col dato $y(1)=-1$ si ricava $k=0$, da cui $y^2-t=0$ ovvero $y=-\sqrt{t}$ (dominio $]0,+\infty[$); infine, col dato $y(-1)=2$ si ricava $k=\frac{5}{2}$ da cui $2y^2-5y-2t=0$, ovvero $y=\frac{5+\sqrt{25+16t}}{4}$ (dominio $]-\frac{25}{16},+\infty[$).

(c) Per $\alpha=0$ l'equazione diventa $ty'=y-t$, lineare. Scritta per $t\neq 0$ nella forma $y'+p(t)\,y=q(t)$ con $p(t)=-\frac{1}{t}$ e $q(t)=-1$, vanno calcolate $P(t)=\int p(t)\,dt=-\log|t|$ e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt=\int(-\frac{1}{|t|})\,dt=-\sigma\log|t|$ ove $\sigma=\operatorname{sign} t$, col che la soluzione generale si scrive come $y(t)=e^{-P(t)}(k+\int e^{P(t)}q(t)\,dt)=|t|(k-\sigma\log|t|)=t(k-\log|t|)$ con $k\in\mathbb{R}$ (notiamo che nessuna di queste soluzioni si può prolungare in $t=0$ come funzione C^1 perché $y'(t)=k-\log|t|-1\xrightarrow{t\to 0}+\infty$). Col dato $y(1)=0$ si ricava $k=0$, da cui $y=-t\log t$ (dominio $]0,+\infty[$); col dato $y(1)=-1$ si ricava $k=-1$, da cui $y=-t(1+\log t)$ (dominio $]0,+\infty[$); infine, col dato $y(-1)=2$ si ricava $k=-2$ da cui $y=-t(2+\log|t|)$ (dominio $]-\infty,0[$).





1. Ex. 1. **2** Ex. 2.