Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (19/06/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano siano $g(x,y,z) = 3xyz - x^3 + 3y^2$ e $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3\}$.

(a) Dire quali superfici di livello di g sono regolari. Parametrizzare poi la superficie S localmente attorno al suo punto $P(0,1,2)$, e determinare in due modi il piano tangente affine a S in P.

(b) Trovare i punti stazionari su S per la funzione $f(x,y,z) = x + y$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.

(c) Calcolare gli estremi assoluti di g su $K = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2 \le y \le x + 2\}$ (esistono?).

2. Nel piano cartesiano sia $A = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ 2ax \le x^2 + y^2 \le 4a^2\}$ (ove $a > 0$).

(a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.[(1)]

(b) Dire se le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono integrabili su A, calcolandone nel caso l'integrale.

Si disegni ora A nel piano verticale (x,z) dello spazio cartesiano, e sia E il solido che si ottiene facendo ruotare A nel primo ottante di un angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z.

(c) Verificare il teorema di Gauss per E e per il campo $F = (0, y, 0)$.

(d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente sferica C di ∂E.

3. È dato il sistema autonomo $(\dot{x}, \dot{y}) = (4xy,\ x^2)$ nella funzioni incognite $(x(t), y(t))$.

(a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato? Determinarne equilibri e orbite, disegnando il tutto sul piano cartesiano.

(b) Risolvere il problema con i dati iniziali $(x(0), y(0)) = (0,1)$, oppure $(1,0)$, oppure $(2,-1)$.

(c) Risolvere il sistema lineare omogeneo $(\dot{x}, \dot{y}) = (4y,\ x)$ con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (2,-1)$, illustrando eventuali relazioni con quanto fatto nei punti precedenti.

[(1)] Si consiglia di descrivere A polarmente. Potrà essere utile sapere che $\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{8}(2\sin\theta\cos^3\theta + 3(\theta + \sin\theta\cos\theta))$.

Analisi Matematica III – Esame Scritto - Esercizi (19/06/2025) – Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) La funzione $g(x,y) = 3xyz - x^3 + 3y^2$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^3$. Ponendo $\nabla g = 3(yz - x^2,\, xz + 2y,\, xy) = (0,0,0)$, da $xy = 0$ si ha o $x = 0$ (da cui $yz = 2y = 0$, ovvero i punti dell'asse z) o $y = 0$ (da cui $-x^2 = xz = 0$, ovvero nuovamente i punti dell'asse z). Poiché g si annulla su tutto l'asse z, tutte le superfici di livello di g sono regolari tranne alpiù quella di livello 0 in tali punti. In particolare $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 3\}$ è regolare; nel suo punto $P(0,1,2)$ si ha $\nabla g(P) = 6(1,1,0)$, dunque il piano tangente affine a S in P ha equazione $\nabla g(P) \cdot (x - 0.y - 1, z - 2) = 6(1,1,0)(x, y-1, z-2) = 0$, ovvero $x + y = 1$. • Alternativamente da $g(x,y,z) = 3$ possiamo esplicitare localmente $x(y,z)$ con $x(1,2) = 0$. Derivando l'identità $g(x(y,z),y,z) \equiv 3$ rispetto a y e z si ottiene $3\dot{x}_y yz + 3xz - 3x^2\dot{x}_y + 6y = 0$ e $3\dot{x}_z yz + 3xy - 3x^2\dot{z}_z = 0$, da cui calcolando per $(y,z) = (1,2)$ si ottiene $2\dot{x}_y + 2 = 0$ e $2\dot{x}_z = 0$, ovvero $\dot{x}_y(1,2) = -1$ e $\dot{x}_z(1,2) = 0$. Derivando nuovamente si ha $\ddot{x}_{yy}yz + \dot{x}_y z + \dot{x}_y z - 2x\dot{x}_y^2 - x^2\ddot{x}_{yy} + 2 = 0$, $\ddot{x}_{yz}yz + \dot{x}_y y + \dot{x}_z z + x - 2x\dot{x}_y\dot{x}_z - x^2\ddot{x}_{yz} = 0$ e $\ddot{x}_{zz}yz + \dot{x}_z y + \dot{x}_z y - 2x\dot{x}_z^2 - x^2\ddot{x}_{zz} = 0$, da cui calcolando per $(y,z) = (1,2)$ si ottiene $2\ddot{x}_{yy} - 4 + 2 = 0$, $2\ddot{x}_{yz} - 1 = 0$ e $2\ddot{x}_{zz} = 0$, ovvero $\ddot{x}_{yy}(1,2) = 1$, $\ddot{x}_{yz}(1,2) = \frac{1}{2}$ e $\ddot{x}_{zz}(1,2) = 0$. Pertanto $x(y,z) = 0 + (-1,0)\cdot(y-1, z-2) + \frac{1}{2}((y-1)^2 + (y-1)(z-2)) + \cdots$, sviluppo che al primo ordine dà $x = -(y-1)$, ovvero nuovamente il piano tangente affine $x + y = 1$.

(b) Imponendo che $\nabla g = 3(yz - x^2,\, xz + 2y,\, xy)$ e $\nabla f = (1,1,0)$ siano paralleli si ha $yz - x^2 = xz + 2y$ e $xy = 0$. Se $x = 0$ si ricava $yz = 2y$, ovvero $y = 0$ (ma nessun punto dell'asse z sta in S) oppure $z = 2$ e $y = \pm 1$, dunque i punti $P(0,1,2)$ (già noto) e $P'(0,-1,2)$. Se invece $y = 0$ si ricava $-x^2 = xz$, ovvero $x = 0$ (ma come detto nessun punto dell'asse z sta in S) oppure $z = -x$; da $g = 3$ si ha allora $-x^3 = 3$, ovvero il punto $Q(-\sqrt[3]{3}, 0, \sqrt[3]{3})$. • Componendo f con la parametrizzazione locale $x(y,z)$ si ha $F(y,z) = x(y,z) + y$, con $\nabla F = (\dot{x}_y + 1, \dot{x}_z)$ (da cui $\nabla F(1,2) = (0,0)$, come atteso) e $\mathsf{H}_F(y,z) = \mathsf{H}_x(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, indefinita: pertanto P è un punto di sella per f su S.

(c) La figura piana $K = \{(x,y,z) : z = 0,\, x^2 \le y \le x + 2\}$ è chiusa (comprende il bordo) e limitata, dunque compatta, e contenuta nel dominio della funzione continua g: dunque gli estremi assoluti di g su K esistono per Weierstrass. Per il calcolo, riconducendoci nel piano $z = 0$ a $G(x,y) = g(x,y,0) = 3y^2 - x^3$, dividiamo K nella parte interna $K_1\{(x,y,z) : z = 0,\, x^2 < y < x+2\}$ (aperto di $\mathbb{R}^2$), nell'arco aperto di parabola del bordo $K_2 = \{(x,y,z) : z = 0,\, y = x^2,\, -1 < x < 2\}$, nel segmento superiore aperto del bordo $K_3 = \{(x,y,z) : z = 0, y = x + 2,\, -1 < x < 2\}$ e nei due punti $A(-1,1)$ e $B(2,4)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Vale $\nabla G = (-3x^2, 6y)$, pertanto l'unico punto stazionario di G è $(0,0)$ che però non sta in K_1 e dunque non va considerato qui. L'arco K_2 è parametrizzato da (x,x^2) con $-1 < x < 2$, dunque su esso G vale $3x^4 - x^3$; la derivata $12x^3 - 3x^2 = 3x^2(4x-1)$ si annulla per $x = 0$ e $x = \frac{1}{4}$, dando luogo ai punti $O(0,0)$ e $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$. Similmente, il segmento K_3 è parametrizzato da $(x, x+2)$ con $-1 < x < 2$, dunque su esso G vale $3(x+2)^2 - x^3$; la derivata $6(x+2) - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 4)$ si annulla per $x = 1 \mp \sqrt{5}$, entrambi però fuori dall'intervallo d'interesse $-1 < x < 2$. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su K potranno essere assunti solo nei punti O, C, A e B: essendo $G(O) = 0$, $G(C) = -\frac{1}{256}$, $G(A) = 4$ e $G(B) = 40$, il massimo assoluto è 40 (assunto in B) e il minimo $-\frac{1}{256}$ (assunto in C).

2. (a) (Figura 2) La figura piana $A = \{(x,y) : x \ge 0,\, y \ge 0,\, 2ax \le x^2 + y^2 \le 4a^2\}$ è descritta in coordinate polari (ρ,θ) come $2a\cos\theta \le \rho \le 2a$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, dunque l'area (calcolabile facilmente anche con la geometria elementare) vale $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 - 4a^2\cos^2\theta)\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = 2a^2[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^2$. Si ha poi $\int_A x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{2a} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1 - \cos^3\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[\sin\theta - \frac{1}{8}(2\sin\theta\cos^3\theta + 3(\theta + \sin\theta\cos\theta))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16-3\pi}{6}a^3$ e $\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a} \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1 - \cos^3\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}a^3[-\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^3$, perciò, dividendo per l'area, il baricentro risulta $G(\frac{16-3\pi}{3\pi}a,\, \frac{4}{\pi}a)$.

(b) Le funzioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ sono > 0 su A, dunque per Fubini e Tonelli possiamo testare l'integrabilità con un integrale iterato, che faremo direttamente in coordinate polari. Si ha $\int_A \frac{1}{x}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a} \frac{1}{\rho\cos\theta}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$ che diverge a $+\infty$ in quanto $\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} \sim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos\theta} \sim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \theta}$. D'altra parte si ha $\int_A \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a} \frac{1}{\rho\sin\theta}\,\rho\,d\rho = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$ che certamente converge in quanto $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \sim_{0^+} \frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\theta} = \frac{1}{2}\theta$; per il calcolo, col cambio di variabile parametrico $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ (da cui $\theta = 2\operatorname{arctg} t$ e $d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$) si ottiene $2a\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = 2a[\log(1+t^2)]_0^1 = 2a\log 2$.

(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (0,y,0)$ attraverso ∂E è pari a $\int_E (\nabla\cdot F)\,dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol} E = \frac{\pi}{2}\int_A x\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{16-3\pi}{6}a^3 = \frac{\pi(16-3\pi)}{12}a^3$. La superficie esterna ∂E è formata da A nel piano (x,z), dalla sua copia A' nel piano (y,z) e dalle componenti sferica C e toroidale T. Ora, per parallelismo o nullità si ha $\Phi_A(F) = \Phi_{A'}(F) = 0$. La componente C è descritta in coordinate sferiche come $\gamma(\theta,\varphi) = (2a\cos\theta\sin\varphi, 2a\sin\theta\sin\varphi, 2a\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (normale associata entrante in E) perciò $\Phi_S(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \det\begin{pmatrix} 0 & -2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\cos\varphi \\ 2a\sin\theta\sin\varphi & 2a\cos\theta\sin\varphi & 2a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & -2a\sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi = 8a^3[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}a^3$. Infine, la componente T è descritta da $\gamma(\theta,\alpha) = (a(1+\cos\alpha)\cos\theta, a(1+\cos\alpha)\sin\theta, a\sin\alpha)$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \alpha \le \pi$ (normale associata uscente dal toro, dunque entrante in E), perciò $\Phi_T(F) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\pi} \det\begin{pmatrix} 0 & -a(1+\cos\alpha)\sin\theta & -a\sin\alpha\cos\theta \\ a(1+\cos\alpha)\sin\theta & a(1+\cos\alpha)\cos\theta & -a\sin\alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & a\cos\alpha \end{pmatrix} d\alpha =$

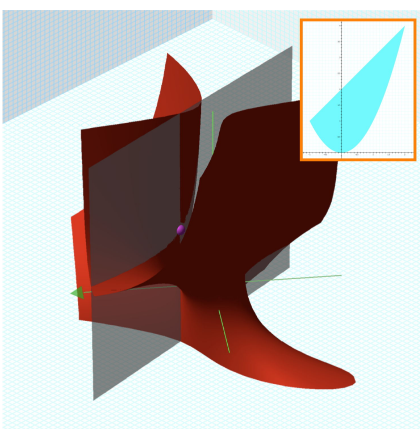
$-a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\cos\alpha(1+\cos\alpha)^2\,d\alpha=-a^3[\frac12(\theta-\sin\theta\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin\alpha+\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha-\frac13\sin^3\alpha]_0^{\pi}=-\frac{\pi^2}{4}a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0+0+\frac{4\pi}{3}a^3-\frac{\pi^2}{4}a^3=\frac{\pi(16-3\pi)}{12}a^3$, come si voleva.

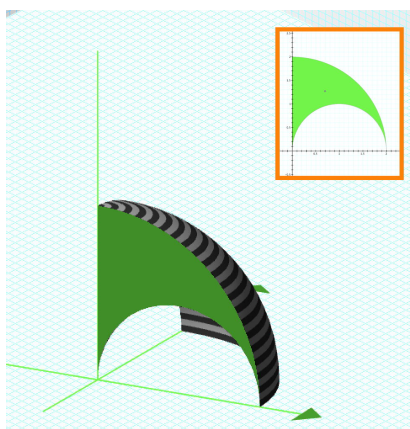
(d) Il campo F è irrotazionale; d'altra parte, percorrendo il bordo di C in senso antiorario partendo da $(2a,0,0)$ si ha $\oint_{+\partial C}F\cdot dx=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0,2a\sin\varphi,0)\cdot(9,2a\cos\varphi,-2a\sin\varphi)\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^0(0,2a\sin\theta,0)\cdot(-2a\sin\theta,2a\cos\theta,0)\,d\theta=4a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta)=0$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

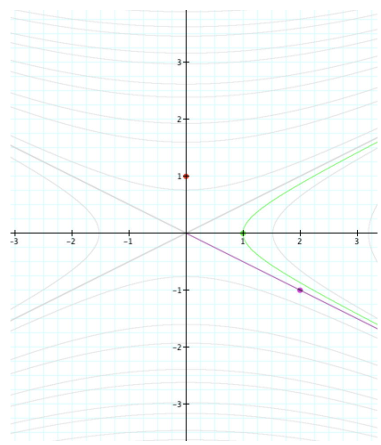
3. (a) (Figura 3) Il sistema $(\dot x,\dot y)=f(x,y)=(4xy,\,x^2)$ è autonomo del 1o ordine; essendo f di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, per ogni dato iniziale la soluzione del corrispondente problema di Cauchy ha esistenza e unicità locale e anche unicità globale. Quanto all'esistenza globale, il teorema di Cauchy-Lipschitz globale non può essere applicato, perché la crescita di f è quadratica. Gli equilibri sono tutti e soli i punti dell'asse y; al di fuori di essa il sistema è equivalente al sistema lineare $(\dot x,\dot y)=(4y,\,x)$, la cui equazione totale associata $x\,dx-4y\,dy=0$ ha primitiva $F(x,y)=\frac12(x^2-4y^2)$. Le curve di livello di F, ovvero $x^2-4y^2=k$, sono iperboli con asintoti $y=\pm\frac12 x$ (Figura 3): in particolare per $k=0$ si ha $(x+2y)(x-2y)=0$ ovvero l'unione dei due asintoti. L'asse y taglia solo i rami delle iperboli di livello con $k\le 0$ dividendoli in 3 orbite distinte (le semicurve e l'equilibrio), mentre per $k>0$ ogni ramo di iperbole è un'orbita intera.

(b) Il dato iniziale $(x(0),y(0))=(0,1)$ è un equilibrio, dunque la soluzione è la costante $(x(t),y(t))\equiv(0,1)$. • Nel dato iniziale $(x(0),y(0))=(1,0)$ si ha l'integrale primo $x^2-4y^2=1$ da cui $x^2=1+4y^2$, dunque $\dot y=1+4y^2$: separando le variabili si ha $\frac{1}{1+4y^2}\,dy=dt$, da cui integrando $\frac12\mathrm{arctg}\,2y=t+k$. Da $y(0)=0$ si ricava $k=0$, dunque $\frac12\mathrm{arctg}\,2y=t$, da cui si ottiene $y(t)=\frac12\mathrm{tg}\,2t$ definita per $t\in(-\frac13\log 2,+\infty)$; da $x^2=1+4y^2=1+\mathrm{tg}^{\,2}2t$ si ricava poi $x(t)=\sqrt{1+\mathrm{tg}^{\,2}2t}=\frac{1}{\cos 2t}$ (dominio $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, orbita l'intero ramo di iperbole $x^2-4y^2=1$ con $x>0$). • Nel dato iniziale $(x(0),y(0))=(2,-1)$ si ha l'integrale primo $x^2-4y^2=0$ da cui $x^2=4y^2$, dunque $\dot y=4y^2$: separando le variabili si ha $y^{-2}\,dy=4\,dt$, da cui integrando $-\frac{1}{y}=4t+k$. Da $y(0)=-1$ si ricava $k=1$, dunque $-\frac1y=1+4t$, da cui si ottiene $y(t)=-\frac{1}{1+4t}$; da $x^2=4y^2$ si ricava poi $x(t)=-2y(t)=\frac{2}{1+4t}$ (dominio $t>-\frac14$, orbita la semiretta $y=-\frac12 x$ con $x>0$).

(c) Il sistema lineare omogeneo $(\dot x,\dot y)=(4y,x)$ con dato iniziale $(x(0),y(0))=(2,-1)$ si risolve facilmente coi metodi noti dando $(x(t),y(t))=(2e^{-2t},-e^{-2t})$. • Poiché, come spiegato prima, con questo dato iniziale questo sistema lineare è equivalente al sistema studiato in precedenza, entrambe le soluzioni $(x(t),y(t))$ trovate nei punti (b) e (c) percorreranno monotonicamente la stessa orbita (in questo caso la semiretta $y=-\frac12 x$ con $x>0$).







1. Ex. 1. **2** Ex. 2. **3** Ex. 3.