

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto - **Esercizi** (03/07/2025)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2024/25

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO FIS / AST

1. Nello spazio cartesiano sia $(g, h) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $(g(x, y, z), h(x, y, z)) = (2xy + z, yz - z^2)$.
 - (a) Provare che l'insieme di livello Γ di (g, h) passante per $P(0, 1, -1)$ è una curva regolare attorno a P , parametrizzarla in P fino all'ordine quadratico e calcolarne in due modi la retta tangente affine in P . Determinare poi in generale quali insiemi di livello di (g, h) sono curve regolari.
 - (b) Trovare i punti stazionari su Γ per la funzione $f(x, y, z) = y - 3z$; mostrare che P è tra questi, determinandone la natura.
 - (c) Disegnare l'insieme $B = \{(x, y, z) : z = 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1\}$ e calcolare gli estremi assoluti di g su B , spiegando perché esistono.
2. Nel piano cartesiano sia $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$ e $A_2 = \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (ove $a > 0$).
 - (a) Disegnare A e calcolarne il baricentro geometrico.
 - (b) Calcolare (se converge) $\int_A \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$; più in generale, dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\int_A xy^\alpha dx dy$.Si disegni ora nello spazio cartesiano il cono C avente come base A nel piano orizzontale (x, y) e come vertice il punto $(0, 0, a)$ sull'asse z .
 - (c) Verificare il teorema di Gauss per C e per il campo $F = (x + y, 0, 0)$.
 - (d) Verificare la formula di Kelvin-Stokes per F e la componente piana obliqua S di ∂C .
3. Si abbia il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' = 2(2y + 3\alpha\sqrt{y} + 1) + (\alpha - 1)e^{-2t} \\ y(0) = 1, y'(0) = -4 \end{cases} \quad \text{in } y(t) \quad (\text{ove } \alpha \in \mathbb{R}).$$
 - (a) Cosa si può affermare a priori su esistenza e unicità della soluzione del problema dato?
 - (b) Risolvere il problema di Cauchy quando $\alpha = 1$.
 - (c) Risolvere il problema di Cauchy quando $\alpha = 0$.

1. (a) (Figura 1) La funzione $(g, h) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $(g(x, y, z), h(x, y, z)) = (2xy + z, yz - z^2)$ è di classe C^∞ nel suo dominio $\mathbb{R}^3$, con matrice jacobiana $J_{(g,h)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 0 & z & y - 2z \end{pmatrix}$. Poiché nel punto $P(0, 1, -1)$ la matrice $J_{(g,h)}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2, la curva di livello $\Gamma = \{(x, y, z) : (g(x, y, z), h(x, y, z)) = (g(P), h(P)) = (-1, -2)\}$ è regolare attorno a P . Inoltre, visto che tutti i minori di $J_{(g,h)}(P)$ sono nonsingolari, da $(g(x, y, z), h(x, y, z)) = (-1, -2)$ si può indifferentemente esplicitare attorno a P qualunque coppia di variabili rispetto alla rimanente: ad esempio esplicitiamo $(y(x), z(x))$ con $(y(0), z(0)) = (1, -1)$. Derivando l'identità $(g(x, y(x), z(x)), h(x, y(x), z(x))) \equiv (-1, -2)$ rispetto a x si ha $2y + 2xy' + z' = y'z + yz' - 2zz' = 0$, che calcolata per $x = 0$ dà $2 + z'(0) = -y'(0) + z'(0) + 2z'(0) = 0$ da cui si ricava $(y'(0), z'(0)) = (-6, -2)$; derivando ancora si ha $2y' + 2y'' + 2xy'' + z'' = y''z + y'z' + y'z' + yz'' - 2(z')^2 - 2zz'' = 0$, che calcolata per $x = 0$ dà $-12 - 12 + z''(0) = -y''(0) + 12 + 12 + z''(0) - 8 + 2z''(0) = 0$, da cui si ricava $(y''(0), z''(0)) = (88, 24)$. La parametrizzazione locale di Γ attorno a P cercata è dunque $\gamma(x) = (x, y(x), z(x)) = (x, 1 - 6x + 44x^2 + o_0(x^2), -1 - 2x + 12x^2 + o_0(x^2))$, la cui parte al 1o ordine $\begin{cases} y = 1 - 6x \\ z = -1 - 2x \end{cases}$ dà la retta tangente affine

a Γ in P ; in alternativa, la retta tangente è data da $J_{(g,h)}(P) \cdot (x - 0, y - 1, z - (-1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ovvero $\begin{cases} 2x + z = -1 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$ (sistema equivalente al precedente). • La matrice jacobiana $J_{(g,h)}(x, y, z)$ ha rango 1 quando $yz = y(y - 2z) = 2x(y - 2z) - z = 0$; quando $y = 0$ si ha $(4x + 1)z = 0$, ovvero i punti del tipo $(-\frac{1}{4}, 0, \alpha)$ e $(\beta, 0, 0)$, mentre quando $z = 0$ si ricava $y^2 = 2xy = 0$, ovvero nuovamente i punti del tipo $(\beta, 0, 0)$ (l'asse x): poiché $(g, h)(-\frac{1}{4}, 0, \alpha) = (\alpha, -\alpha^2)$ e $(g, h)(\beta, 0, 0) = (0, 0)$, le curve di livello di (g, h) sono tutte regolari tranne eventualmente quelle del tipo $(g, h) = (\alpha, -\alpha^2)$ nel punto $(-\frac{1}{4}, 0, \alpha)$, e in particolare quella di livello $(0, 0)$ anche nei punti dell'asse x .

(b) La condizione di Lagrange per la funzione $f(x, y, z) = y - 3z$ sulla curva Γ richiede $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2y & 2x & 1 \\ 0 & z & y - 2z \end{pmatrix} = 0$ più

le condizioni di appartenenza a Γ , ovvero il sistema $\begin{cases} y(y + z) = 0 \\ 2xy + z = -1 \\ yz - z^2 = -2 \end{cases}$. Se $y = 0$ si ricava $z = -1$ e $z^2 = 2$, impossibile;

se invece $z = -y$ si ricava $2xy - y = -1$ e $y^2 = 1$, ovvero i punti stazionari $P(0, 1, -1)$ (già noto), $Q(1, -1, 1)$ e $R(1, -1, 1)$. • Componendo f con la parametrizzazione locale $(y(x), z(x))$ si ha $F(x) = y(x) - 3z(x)$. Si ha dunque $F'(x) = y'(x) - 3z'(x)$ e $F''(x) = y''(x) - 3z''(x)$, da cui per P si ricava $F'(0) = y'(0) - 3z'(0) = -6 + 6 = 0$ (come previsto) e $F''(0) = y''(0) - 3z''(0) = 88 - 72 = 16 > 0$: pertanto P è un punto di minimo locale stretto per f su Γ .

(c) (Figura 1) L'insieme $B = \{(x, y, z) : z = 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1\}$ è un settore parabolico nel piano orizzontale $z = 1$, chiuso (comprende il bordo) e limitato, dunque compatto, contenuto nel dominio della funzione continua g : dunque gli estremi assoluti di g su B esistono per Weierstrass. Per il calcolo, riconducendoci nel piano $z = 1$ a $G(x, y) = g(x, y, 1) = 2xy + 1$, dividiamo C nella parte interna $C_1 = \{(x, y, 1) : x^2 - 1 < y < 1\}$ (aperto di $\mathbb{R}^2$), nell'arco aperto di parabola del bordo $C_2 = \{(x, y, 1) : y = x^2 - 1, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$, nel segmento aperto del bordo $C_3 = \{(x, y, 1) : y = 1, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ e nei due punti $A'(\sqrt{2}, 1, 1)$ e $A''(-\sqrt{2}, 1, 1)$, e cerchiamo i punti stazionari in ciascuna di queste parti. • Vale $\nabla G = (2y, 2x)$, pertanto l'unico punto stazionario di G in C_1 è $D(0, 0, 1)$. L'arco C_2 è parametrizzato da $(x, x^2 - 1, 1)$ con $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, dunque su esso G vale $2x(x^2 - 1) + 1$; la derivata $6x^2 - 2$ si annulla per $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, dando luogo ai punti $M'(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ e $M''(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$. Analogamente, il segmento C_3 è parametrizzato da $(x, 1, 1)$ con $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, dunque su esso G vale $2x + 1$, priva di punti stazionari. Per quanto detto, gli estremi assoluti di g su B potranno essere assunti solo nei punti D, M', M'', A' e A'' : essendo $g(D) = 1$, $g(M') = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{9} \sim 0,2$, $g(M'') = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9} \sim 1,8$, $g(A') = 2\sqrt{2} + 1 \sim 3,8$ e $g(A'') = -2\sqrt{2} + 1 \sim -1,8$, il massimo assoluto è $2\sqrt{2} + 1$ (assunto in A') e il minimo $-2\sqrt{2} + 1$ (assunto in A'').

2. (a) (Figura 2) La figura piana A è l'unione del triangolo $A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$ nel 1o quadrante e del quarto di disco $A_2 = \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ nel 2o quadrante, di aree rispettivamente $\frac{1}{2}a^2$ e $\frac{\pi}{4}a^2$. Si ha $\int_A x \, dx \, dy = \int_{A_1} x \, dx \, dy + \int_{A_2} x \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} x \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho = \int_0^a x(a - x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \theta \, d\theta \int_0^a \rho^2 \, d\rho = [\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^a + [\sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^\pi [\frac{1}{3}\rho^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = -\frac{1}{6}a^3$ e $\int_A y \, dx \, dy = \int_{A_1} y \, dx \, dy + \int_{A_2} y \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} y \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta \int_0^a \rho \sin \theta \, \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^a (a - x)^2 \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^a \rho^2 \, d\rho = [-\frac{1}{3}(a - x)^3]_0^a + [-\cos \theta]_{\frac{\pi}{2}}^\pi [\frac{1}{3}\rho^3]_0^a = \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$. Dividendo per l'area di A che vale $\frac{\pi+2}{4}a^2$ il baricentro risulta dunque il punto $(-\frac{2}{3(\pi+2)}a, \frac{2}{\pi+2}a)$.

(b) La funzione xy^α è integrabile su A se e solo se lo è separatamente sui due sottoinsiemi A_1 e A_2 (e l'integrale sarà la somma algebrica dei due integrali sui sottoinsiemi); inoltre essa ha segno costante su A_1 (positiva) e A_2 (negativa), dunque per Fubini e Tonelli possiamo esaminare integrali iterati separatamente per A_1 e A_2 . Per A_1 si ha $\int_0^a dx \int_0^{a-x} xy^\alpha \, dy$ che per l'integrabilità in $x \sim 0^+$ richiede $\alpha > -1$, mentre per A_2 si ha $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta \int_0^a \rho \cos \theta \rho^\alpha \sin^\alpha \theta \, \rho \, d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \theta \sin^\alpha \theta \, d\theta \int_0^a \rho^{\alpha+2} \, d\rho$ che per l'integrabilità in $\theta \sim \pi^-$ richiede $\alpha > -1$ mentre per l'integrabilità in $\rho \sim 0^+$ richiede $\alpha + 2 > -1$ (ovvero $\alpha > -3$). Pertanto $\int_A xy^\alpha \, dx \, dy$ converge se e solo se $\alpha > -1$. • Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha in particolare $\int_{A_1} \frac{x}{\sqrt{y}} \, dx \, dy = \int_0^a x \, dx \int_0^{a-x} y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \int_0^a x [2\sqrt{y}]_0^{a-x} \, dx = 2 \int_0^a x \sqrt{a-x} \, dx = [\text{posto } a-x = u^2] 4 \int_0^{\sqrt{a}} u^2 (a -$

$$u^2) du = 4[\frac{1}{3}a^3 u^3 - \frac{1}{5}u^5]_0^{\sqrt{a}} = \frac{8}{15}a^2 \sqrt{a} \quad \text{e} \quad \int_{A_2} \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho \cos \theta}{\sqrt{\rho \sin \theta}} \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \int_0^a \rho^{\frac{3}{2}} d\rho = [2\sqrt{\sin \theta}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}]_0^a = -\frac{4}{5}a^2 \sqrt{a}, \text{ dunque } \int_A \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy = \frac{8}{15}a^2 \sqrt{a} - \frac{4}{5}a^2 \sqrt{a} = -\frac{4}{15}a^2 \sqrt{a} < 0.$$

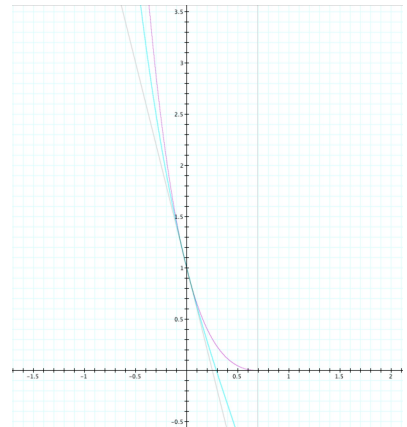
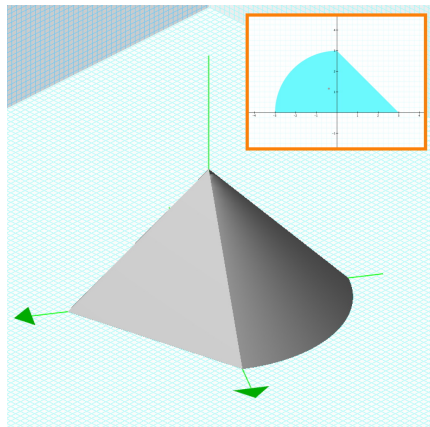
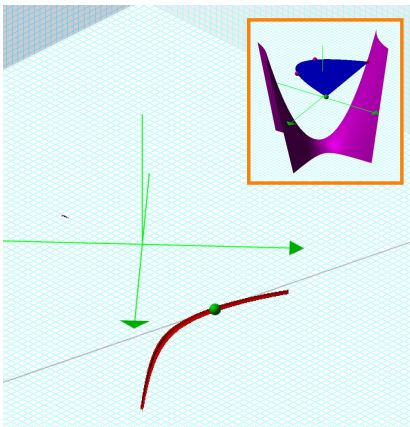
(c) Va mostrato che il flusso totale uscente del campo $F = (x + y, 0, 0)$ attraverso ∂C è pari a $\int_C (\nabla \cdot F) dx dy dz = \text{Vol } C = \frac{1}{3}a \text{ Area } A = \frac{\pi+2}{12}a^3$. La superficie esterna ∂C è formata da A nel piano (x, y) , dalla parete piana verticale B nel piano (x, z) , dalla componente conica T e dalla componente piana obliqua S . Ora, per parallelismo si ha $\Phi_A(F) = \Phi_B(F) = 0$. La componente conica T è descritta in coordinate polari da $\rho = a - z$, dunque una parametrizzazione è $\gamma(\theta, z) = ((a - z) \cos \theta, (a - z) \sin \theta, z)$ con $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq z \leq a$ (normale associata uscente), perciò $\Phi_T(F) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^a \det \begin{pmatrix} (a-z)(\cos \theta + \sin \theta) & -(a-z) \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & (a-z) \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta \int_0^a (a-z)^2 dz = [\frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-\frac{1}{3}(a-z)^3]_0^a = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})a^3$. Infine, la componente S è parametrizzata da $\gamma(x, y) = (x, y, a - x - y)$ con (x, y) nel triangolo A_1 (normale associata uscente), perciò $\Phi_S(F) = \int_{A_1} \det \begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx dy = \int_{A_1} (x + y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x + y) dy = \int_0^a [xy + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=a-x} dx = \int_0^a (x(a-x) + \frac{1}{2}(a-x)^2) dx = [\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}(a-x)^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3$. Il flusso totale uscente è dunque $0 + 0 + \frac{1}{3}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{\pi+2}{12}a^3$, come si voleva.

(d) Si ha $\nabla \times F = (0, 0, -1)$, dunque $\Phi_S(\nabla \times F) = \int_{A_1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} dx dy = -\text{Area } A_1 = -\frac{1}{2}a^2$. D'altra parte, percorrendo il bordo di S in senso antiorario partendo da $(a, 0, 0)$ si ha $\oint_{\partial S} F \cdot dx = \int_a^0 (a, 0, 0) \cdot (1, -1, 0) dx + \int_a^0 (y, 0, 0) \cdot (0, 1, -1) dy + \int_0^a (x, 0, 0) \cdot (1, 0, -1) dx = -a^2 + 0 + \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}a^2$, il che conferma la formula di Kelvin-Stokes.

3. (a) L'equazione $y'' = 2(2y + 3\alpha\sqrt{y} + 1) + (\alpha - 1)e^{-2t}$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$) equivale al sistema del 1° ordine $(y', p') = f(y, p, t) = (p, 2(2y + 3\alpha\sqrt{y} + 1) + (\alpha - 1)e^{-2t})$. All'intorno del dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -4)$ la funzione $f(y, p)$ è di classe C^1 , dunque esistenza e unicità locale della soluzione (e unicità globale) sono assicurate fintanto che y non si annulla. Nel caso particolare $\alpha = 0$ l'equazione diventa lineare, dunque si ha anche esistenza globale.

(b) (Figura 3) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa $y'' = 2(2y + 3\sqrt{y} + 1)$, della forma $y'' = h(y)$ che ammette l'integrale dell'energia $E(y, y') = \frac{1}{2}(y')^2 + V(y)$ con $V(y) = -\int h(y) dy = -2\int (2y + 3\sqrt{y} + 1) dy = -2(y^2 + 2y\sqrt{y} + y) = -2y(\sqrt{y} + 1)^2$. Nel dato iniziale si ha $E(1, -4) = 0$, dunque lungo la soluzione cercata si ha $\frac{1}{2}(y')^2 = 2y(\sqrt{y} + 1)^2$ da cui (essendo $y'(0) < 0$) si ricava $y' = -2\sqrt{y}(\sqrt{y} + 1)$. Separando le variabili e integrando si ha $\log(\sqrt{y} + 1) = k - t$, e da $y(0) = 1$ deve essere $k = \log 2$; esponenziando si ha allora $\sqrt{y} + 1 = 2e^{-t}$, dunque $\sqrt{y} = 2e^{-t} - 1$, il che pone la condizione $2e^{-t} > 1$ ovvero $t < \log 2$; infine elevando al quadrato si arriva alla soluzione cercata $y(t) = (2e^{-t} - 1)^2$ definita per $t < \log 2$.

(c) (Figura 3) Per $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = 2(2y + 1) - e^{-2t}$ ovvero $y'' - 4y = 2 - e^{-2t}$, lineare a coefficienti costanti. Una base di soluzioni dell'equazione omogenea è $\{e^{2t}, e^{-2t}\}$; per il termine non omogeneo 2 una soluzione particolare sarà ovviamente la costante $-\frac{1}{2}$, mentre per $-e^{-2t}$ una soluzione particolare avrà la forma $\tilde{y}(t) = at e^{-t}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, e imponendolo i calcoli danno $a = \frac{1}{4}$. La soluzione generale è dunque della forma $y(t) = A e^{2t} + (B + \frac{1}{4}t) e^{-2t} - \frac{1}{2}$ con $A, B \in \mathbb{C}$; col dato iniziale $(y(0), y'(0)) = (1, -4)$ si trova $(A, B) = (-\frac{5}{16}, \frac{29}{16})$.



1. Ex. 1. 2 Ex. 2. 3 Ex. 3.