

Analisi Matematica III (Fisica e Astronomia)

Autoverifica sulle varietà differenziali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2025/26

martedì 14 ottobre 2025

Istruzioni generali. (1) Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito sabato 18/10). (2) Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 40 pt (4×10). **Ex. 2:** 60 pt (6×10). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

1. Siano $\varphi(t) = t^3 + e^{-t}$ e $g(x, y) = xy^3 + 2x^4 - 12y$.

- (i) Parametrizzare e trovare una funzione di definizione per $M = \{(\varphi(y), y) : y \in \mathbb{R}\}$.
- (ii) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ gli insiemi di livello $N_\alpha = \{(x, y) : g(x, y) = \alpha\}$ sono curve regolari?
- (iii) Parametrizzare la curva N_2 all'intorno del suo punto $A(-1, 0)$, e usare quanto trovato per determinare in due modi la retta tangente affine a N_2 in A .
- (iv) Determinare gli estremi locali delle funzioni $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$ su M e su N_0 . Qual è il significato geometrico di tale ricerca?

2. Siano $g_1(x, y, z) = xyz - x^3 + 2y^2z$ e $g_2(x, y, z) = x - z^2$.

- (i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ gli insiemi $M_\alpha = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = \alpha\}$ sono superfici regolari?
- (ii) Determinare in più modi il piano affine tangente a M_1 nel punto $A(-1, 0, 2)$.
- (iii) Dimostrare che l'insieme di livello N di $g = (g_1, g_2)$ contenente A è una curva regolare di $\mathbb{R}^3$; parametrizzarlo all'intorno di A , e determinarne in più modi la retta affine tangente in A .
- (iv) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico della funzione $\varphi(x, y) = xy + g_1(-1, x, 1)$ sopra $(x_0, y_0) = (2, 1)$.
- (v) Dimostrare che l'insieme $K = \{(x, y, z) : g_2(x, y, z) = y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y + z \leq 1\}$ è compatto, e determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ su K .
- (vi) Calcolare l'immagine $s = g(r)$ della retta $r = \{(1, -1, w) \in \mathbb{R}^3 : w \in \mathbb{R}\}$ tramite la funzione $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dimostrare che s è una curva regolare di $\mathbb{R}^2$, e che g induce un diffeomorfismo tra r e s .

Soluzioni.

1. In figura sono disegnate le curve M , N_0 , N_2 e N_{18} .

(i) M è il grafico di una funzione C^∞ , dunque è una curva regolare di $\mathbb{R}^2$. La parametrizzazione e la funzione di definizione naturali, che valgono globalmente, sono rispettivamente $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y) = (\varphi(y), y) = (y^3 + e^{-y}, y)$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $h(x, y) = x - \varphi(y) = x - y^3 - e^{-y}$.

(ii) Il differenziale $dg = (y^3 + 8x^3, 3xy^2 - 12)$ si annulla quando $y^3 + 8x^3 = 3xy^2 - 12 = 0$, ovvero solo per $(x, y) = (1, -2)$. Essendo $g(1, -2) = 18$, gli insiemi di livello N_α di g sono curve regolari per ogni $\alpha \neq 18$.

(iii) Come visto, la curva $N_2 = \{(x, y) : xy^3 + 2x^4 - 12y = 2\}$ è regolare in ogni suo punto. Si ha $dg_A = (-8, -12)$, dunque all'intorno di A la curva N_2 può essere localmente espressa come grafico di $x = x(y)$ con $x(0) = -1$ oppure come grafico di $y = y(x)$ con $y(-1) = 0$: ad esempio, usando la funzione implicita $x(y) : J \rightarrow \mathbb{R}$, ove J è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente 0, si ottiene una parametrizzazione locale di N_2 tramite $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y) = (x(y), y)$. La retta tangente a N_2 in A si può ottenere dalla formula $dg_A(x - (-1), y - 0) = -8(x + 1) - 12y = 0$, ovvero $2x + 3y + 2 = 0$. Alternativamente, essa sarà espressa parametricamente come $\{(-1, 0) + \lambda \gamma'(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(-1, 0) + \lambda(x'(0), 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(-1 + \lambda x'(0), \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$; per ottenere $x'(0)$ deriviamo l'identità $g(x(y), y) - 2 \equiv 0$ in J rispetto a y , ottenendo $x'y^3 + 3xy^2 + 8x^3x' - 12 = 0$, da cui, ponendo $y = 0$ con $x(0) = -1$, si ricava $-8x'(0) - 12 = 0$, ovvero $x'(0) = -\frac{3}{2}$, da cui infine $\{(-1 - \frac{3}{2}\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (che corrisponde all'equazione cartesiana $2x + 3y + 2 = 0$).

(iv) Il senso geometrico della ricerca degli estremi locali di x (risp. di y) su una curva nel piano è, ovviamente, quello di individuare i punti della curva che sono localmente estremali in senso orizzontale (risp. verticale).

Per M si può usare la parametrizzazione $\gamma(y) = (\varphi(y), y) = (y^3 + e^{-y}, y)$. Si ha $F_1(y) = f_1(\varphi(y), y) = \varphi(y)$ e $F_2(y) = f_2(\varphi(y), y) = y$, dunque (come è logico) il grafico M di $\varphi(y)$ non ha estremi verticali, e trovare i suoi estremi orizzontali equivale trovare gli estremi locali della funzione $\varphi(y)$: derivando si ottiene $\varphi'(y) = 3y^2 - e^{-y}$, ed un confronto grafico tra $3y^2$ e e^{-y} mostra l'esistenza di tre punti y_1, y_2, y_3 con $-4 < y_1 < -3$, $-1 < y_2 < 0$ e $0 < y_3 < 1$ tali che $\varphi'(y) \geq 0$ se e solo se $y_1 \leq y \leq y_2$ e $y \geq y_3$. Se ne ricava che y_1 e y_3 sono punti di minimo locale per $\varphi(y)$, e che y_2 è punto di massimo locale per $\varphi(y)$: ovvero, che i punti $(\varphi(y_1), y_1)$ e $(\varphi(y_3), y_3)$ sono localmente estremali a sinistra per M , e che $(\varphi(y_2), y_2)$ è localmente estremo a destra per M .

Per N_0 usiamo il metodo di Lagrange, che in questo caso per $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$ equivale rispettivamente a $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$ (con soluzioni $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$) e $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right.$ (con soluzioni $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{4}, -2\sqrt[3]{4})$).

2. (i) Il differenziale di $g_1(x, y, z) = xyz - x^3 + 2y^2z$ è $dg_1 = (yz - 3x^2, (x + 4y)z, (x + 2y)y)$, che si annulla quando $yz - 3x^2 = (x + 4y)z = (x + 2y)y = 0$, ovvero in tutti e soli i punti dell'asse z , del tipo $(0, 0, a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Essendo $g_1(0, 0, a) = 0$, gli insiemi di livello M_α di g_1 sono superfici regolari per ogni $\alpha \neq 0$. La figura, in cui è rappresentato M_0 , mostra in modo evidente quanto calcolato: ovvero, che i punti singolari di M_0 sono quelli dell'asse z .

(ii) Come visto, la superficie M_1 è regolare in ogni suo punto. Il piano affine tangente a M_1 nel punto $A(-1, 0, 2)$ si trova con la condizione $d(g_1)_A(x - (-1), y - 0, z - 2) = 0$, ovvero $3x + 2y + 3 = 0$ (piano parallelo all'asse z). Alternativamente, da $d(g_1)_A = (-3, -2, 0)$ si comprende che M_1 può essere espressa, vicino al suo punto A , come grafico di una funzione $x(y, z)$ oppure $y(x, z)$ (ma non $z(x, y)$): scegliendo ad esempio di usare $y(x, z)$, stiamo considerando la funzione implicita $y : U \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di $(x_0, z_0) = (-1, 2)$ tale che $y(x_0, z_0) = y_0 = 0$, ed otteniamo una parametrizzazione locale $\gamma : U \rightarrow M_1$ data da $\gamma(x, z) = (x, y(x, z), z)$. Il differenziale di γ in $(-1, 2)$ è $d\gamma_{(-1, 2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x}(-1, 2) & \frac{\partial y}{\partial z}(-1, 2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e ci servono i valori $(\frac{\partial y}{\partial x}(-1, 2), \frac{\partial y}{\partial z}(-1, 2)) = -\frac{1}{\frac{\partial g_1}{\partial y}(-1, 0, 2)}(\frac{\partial g_1}{\partial x}(-1, 0, 2), \frac{\partial g_1}{\partial z}(-1, 0, 2)) = -\frac{1}{-2}(-3, 0) = (\frac{3}{2}, 0)$: pertanto lo spazio vettoriale tangente $T_A M_1$ è quello generato dai vettori colonna $(1, \frac{3}{2}, 0)$ e $(0, 0, 1)$, ed il piano affine tangente è $A + T_A M_1 = \{(-1, 0, 2) + \lambda(1, \frac{3}{2}, 0) + \mu(0, 0, 1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(-1 + \lambda, -\frac{3}{2}\lambda, 2 + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, che è un'espressione parametrica del già trovato piano $3x + 2y + 3 = 0$.

(iii) L'insieme di livello N di $g = (g_1, g_2)$ contenente A è quello in cui g vale $g(A) = (1, -5)$. Da $dg = \begin{pmatrix} yz - 3x^2 & (x + 4y)z & (x + 2y)y \\ 1 & 0 & -2z \end{pmatrix}$ si nota che g è sommersiva tranne che nei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in cui si annullano i tre minori di ordine due, ovvero $(x + 4y)z = -2z(yz - 3x^2) = -2z^2(x + 4z) = 0$: dai conti risultano le soluzioni del tipo $(a, 0, 0)$ (l'asse x), $(-2b, b, 0)$ (il piano $x = -2y$), $(0, 0, c)$ (l'asse z , già incontrato per la sola g_1), $(-\frac{4d^2}{48d+1}, \frac{d^2}{48d+1}, d)$ (la curva data da $x = -4y$ e $y(48z + 1) = z^2$), e si verifica che nessuno di questi punti sta su N (per l'ultima curva serve un po' di pazienza). Dunque N è una curva regolare. In A si ha $dg_A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

dunque N è localmente esprimibile esplicitando due qualsiasi tra x, y, z in funzione della terza. Ad esempio, consideriamo $(y(x), z(x)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita all'intorno $I \subset \mathbb{R}$ di $x_0 = -1$ con $(y(-1), z(-1)) = (y_0, z_0) = (0, 2)$: ne deriva una parametrizzazione locale $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ di N data da $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$, con differenziale $d\gamma_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix}_{x=-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(-1) \\ z'(-1) \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} y'(-1) \\ z'(-1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, la retta affine

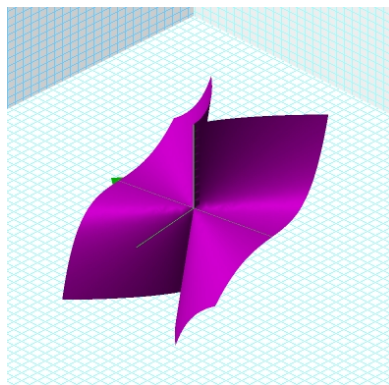
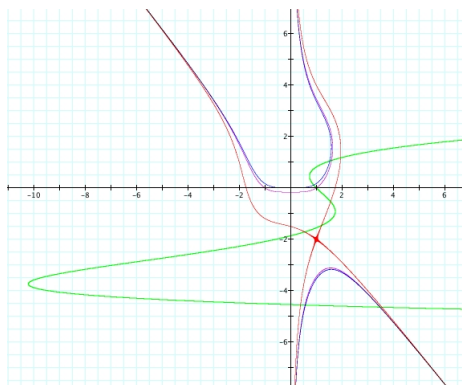
tangente a N in A ha forma parametrica $\{(-1, 0, 2) + \lambda(1, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(-1 + 4\lambda, -6\lambda, 2 + \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Usando invece la funzione g , tale retta è data anche dalla condizione $dg_A(x - (-1), y - 0, z - 2) = (0, 0)$, ovvero

$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $3x + 2y + 3 = x - 4z + 9 = 0$: si noti che tale luogo, come deve ovviamente essere, è contenuto nel piano tangente in A a M_1 del punto precedente.

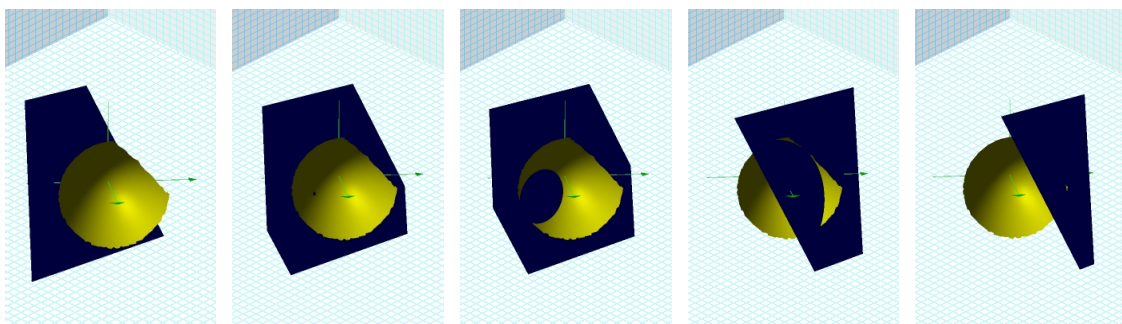
(iv) Vale $\varphi(x, y) = xy + g_1(-1, x, 1) = xy + (-1)(x)(1) - (-1)^3 + 2(x)^2(1) = 2x^2 + xy - x + 1$: si noti che il grafico $z = \varphi(x, y) = 2x^2 + xy - x + 1$ è un paraboloide iperbolico, perché le sue sezioni con piani verticali $ax + by + c = 0$ sono parabole mentre quelle con piano orizzontali $z = \alpha$ (ovvero le curve di livello di φ) sono iperboli. L'equazione cercata è data da $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(2, 1), -1) \cdot (x - 2, y - 1, z - \varphi(2, 1)) = 0$ ovvero, essendo $\varphi(2, 1) = 9$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(2, 1) = 8$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(2, 1) = 2$, da $8x + 2y - z - 9 = 0$; allo stesso risultato si arriva anche scrivendo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di $\varphi(x, y)$ attorno $(2, 1)$, ovvero $z = \varphi(2, 1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(2, 1)(x - 2) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(2, 1)(y - 1)$.

(v) $K = \{(x, y, z) = \{(x, y, z) : x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y + z \leq 1\}$ è innanzitutto non vuoto (infatti $(0, 0, 0)$ vi sta), ed è compatto perché è chiuso (in quanto definito da equazioni e/o disequazioni di funzioni continue) e limitato (perché contenuto nella sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$). Dunque la funzione continua $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ vi ammette estremi assoluti in base al Teorema di Weierstrass. Per il calcolo conviene dividere K , che è una varietà con bordo, nella sua "parte interna" $K_2 = \{x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 2, y + z < 1\}$ (varietà di dimensione 2), nei tratti di bordo circolare $K'_1 = \{x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2, y + z < 1\}$ e rettilineo $K''_1 = \{x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 2, y + z = 1\}$ (due varietà di dimensione 1), e nei punti speciali $K_0 = \{x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2, y + z = 1\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ (varietà di dimensione 0). Per K_2 , il metodo di Lagrange dà $\begin{cases} -4y - 2 = -4z - 1 = -4x + 2y = 0 \\ x = y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 2, y + z < 1 \end{cases}$, che ammette l'unica soluzione $P_1(\frac{5}{16}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$; analogamente, parametrizzando con $x(y, z) = y^2 + z^2$ e ponendo $F(y, z) = f(y^2 + z^2, y, z) = 2(y^2 + z^2) + 2y + z$ si ha $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y + 2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 4z + 1$ (da cui nuovamente il punto stazionario P_1), ed essendo $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 4$ —dunque l'hessiano è sempre definito positivo— notiamo che P_1 è un punto di minimo locale per f su K_2 . Per le varietà di dimensione 1 proviamo a usare una parametrizzazione. In effetti, con qualche conto si trova $K'_1 = \{(1, y, z) : y^2 + z^2 = 1, y + z < 1\} = \{(1, \cos \theta, \sin \theta) : \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\}$, dunque studiamo $F(\theta) = f(1, \cos \theta, \sin \theta) = 2 + 2 \cos \theta + \sin \theta$ per $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$: si trova il solo punto di minimo locale $\theta_0 = \pi + \arctg \frac{1}{2}$, ovvero $P_2(1, \cos \theta_0, \sin \theta_0) = (1, -\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})$. Si ha poi $K''_1 = \{(2y^2 - 2y + 1, y, 1 - y) : 0 < y < 1\}$, dunque studiamo $F(y) = f(2y^2 - 2y + 1, y, 1 - y) = 4y^2 - 3y + 2$ per $0 < y < 1$: anche qui si trova il solo punto di minimo locale $y_0 = \frac{3}{8}$, ovvero $P_3(2y_0^2 - 2y_0 + 1, y_0, 1 - y_0) = (\frac{17}{32}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8})$. Infine, per K_0 si tratta solo di considerare i due punti $P_4 = (1, 1, 0)$ e $P_5 = (1, 0, 1)$. Essendo dunque $f(P_1) = -\frac{5}{8}$, $f(P_2) = 2 - \sqrt{5}$, $f(P_3) = \frac{39}{16}$, $f(P_4) = 4$ e $f(P_5) = 3$, ne deduciamo che il massimo e il minimo assoluti di f su K sono rispettivamente $-\frac{5}{8}$ (assunto in P_1) e 4 (assunto in P_4). La figura, in cui sono rappresentati l'insieme K e vari insiemi di livello di f , spiega in concreto quanto appena calcolato.

(vi) Da $\begin{cases} x = g_1(1, -1, w) = w - 1 \\ y = g_2(1, 2, w) = 1 - w^2 \end{cases}$, eliminando il parametro $w = x + 1$ si ottiene la parabola s di equazione $y = -x^2 - 2x$. Il morfismo indotto da g su r è $\psi = g|_r : r \rightarrow s$ dato da $\psi(1, 2, v) = (w - 1, 1 - w^2)$, ed il morfismo inverso $\psi^{-1} : s \rightarrow r$ è dato dal legame $x = w - 1$, dunque $\psi^{-1}(x, -x^2 - 2x) = (1, 2, x + 1)$. Si noti che sia ψ che ψ^{-1} sono indotti da funzioni C^∞ (in effetti ψ è già stato costruito restringendo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e ψ^{-1} è indotto su s ad esempio da $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $k(x, y) = (1, 2, x + 1)$), dunque si tratta evidentemente di un diffeomorfismo tra r e s .



(1) Le curve M (verde), N_0 (blu), N_0 (viola), N_{18} (rosso) dell'esercizio 1. (2) La superficie singolare M_0 dell'esercizio 2(i).



L'insieme K (calotta gialla) e varie posizioni crescenti degli insiemi di livello di f (verde) dell'esercizio 2(v).